

APPENDICE

Corps de classes local

par

MICHAEL HAZEWINKEL *

Dans tout cet appendice, K désigne un corps local, i.e. le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet A de corps résiduel parfait k . Nous notons m l'idéal maximal de A , π une uniformisante de K (i.e. un générateur de l'idéal m), p la caractéristique de k , \bar{k} une clôture algébrique de k et v la valuation de K qui est positive sur $A - \{0\}$ et telle que $v(\pi) = 1$.

Le cas $p = 0$ étant facile et classique, nous supposons $p \neq 0$. Toute extension de corps L/K sera implicitement supposée algébrique. Enfin, pour toute extension galoisienne M/N , on note $\Pi(M/N)$ le groupe de Galois topologique de M sur N .

n° 1 Généralités sur les extensions de corps locaux

1.1 Lemme: *Si L est une extension finie de K , la fermeture intégrale A_L de A dans L est un anneau de valuation discrète complet et un A -module libre de rang fini. Si v_L est la valuation de L correspondante et si k_L est le corps résiduel de A_L , on a $[L: K] = v_L(\pi) \cdot [k_L: k]$.*

En effet, cela résulte de *Alg. comm.* VI, § 8, n° 5, cor. 2 au th. 2, compte-tenu de *loc. cit.* § 1, n° 3, cor. 3 au th. 3.

Dans la situation précédente, on note m_L l'idéal maximal de A_L et π_L un générateur de m_L .

* Je remercie M. Demazure et P. Gabriel d'avoir adapté mon manuscrit au style de leur livre. Je tiens aussi à reconnaître ma dette sans cesse croissante envers F. Oort; sans l'intérêt qu'il a porté à mon travail, sans ses conseils et sa participation, cet appendice n'aurait jamais été écrit.

1.2 Une extension L de K est dite *non ramifiée* si, pour toute sous-extension finie M de L , on a $v_M(\pi) = 1$; la fermeture intégrale A_L de A dans L est alors un anneau de valuation discrète, dont l'idéal maximal est engendré par π ; en effet, comme $A_L = \bigcup_M A_M$, il résulte de 1.1 que les éléments de A_L non divisibles par π sont inversibles, et que $\bigcap \pi^n A_L = 0$; on applique alors *Alg. comm.* VI, § 1, n° 4, prop. 2. La valuation correspondante de L est notée v_L , et les complétés respectifs de A_L et L sont notés \hat{A}_L et \hat{L} .

1.3 Une extension L de K est dite *totalement ramifiée* si, pour toute sous-extension finie M de L , on a $k_M = k$, c'est-à-dire $v_M(\pi) = [M: K]$ (1.1).

Lemme: *Soient L une extension de K , T une sous-extension totalement ramifiée et N une sous-extension non ramifiée. Alors T et N sont linéairement disjointes sur K , i.e. l'application canonique $T \otimes_K N \rightarrow L$ est injective.*

En effet, il est clair qu'on peut supposer T et N finis sur K . Soit $M = T \cdot N$ l'image de l'application en question. On a évidemment $v_M(\pi) \geq v_T(\pi)$ et $k_N \subset k_M$, d'où d'après 1.1

$$[M: K] = v_M(\pi)[k_M: k] \geq v_T(\pi) \cdot [k_N: k] = [T: K][N: K] = [T \otimes_K N: K].$$

1.4 Supposons maintenant K de caractéristique 0, et soit L une extension finie de K . Dans ce cas, K et L sont des extensions finies totalement ramifiées de $[k] = \text{Fract } \mathfrak{W}(k)$ et de $[k_L]$ (V, § 4, 2.2); d'autre part, $[k_L]$ est une extension non ramifiée de $[k]$. D'après le lemme 1.3, L contient donc $M = K \otimes_{[k]} [k_L]$ et a même corps résiduel que M . D'un autre côté, on a $[M: K] = [[k_L]: [k]] = [k_L: k] = [k_M: k]$. Par conséquent, M est une extension non ramifiée de K et L une extension totalement ramifiée de M .

Lorsque N est une sous-extension non ramifiée de L , on a évidemment $N = K \otimes_{[k]} [k_N]$. On voit ainsi que $M = K \otimes_{[k]} [k_L]$ est la plus grande sous-extension non ramifiée de L et que les extensions non ramifiées N/K peuvent être décrites au moyen des extensions résiduelles k_N/k . En outre, lorsque k_N/k est galoisienne, $\Pi(k_N/k)$ opère fidèlement sur $[k_N]$, donc sur $N = K \otimes_{[k]} [k_N]$; il s'identifie donc à $\Pi(N/K)$. Lorsque l'extension L/K est galoisienne, M est évidemment invariante sous $\Pi(L/K)$; l'extension M/K est donc galoisienne et on a une suite exacte

$$1 \rightarrow \Pi(L/M) \rightarrow \Pi(L/K) \rightarrow \Pi(k_L/k) \rightarrow 1.$$

Tout ceci peut s'étendre aux extensions infinies L/K . Dans ce cas, la plus

grande sous-extension non ramifiée de L est $M = \varinjlim_{F \subset L} K \otimes_{[k]} [k_F]$, où F parcourt les sous-extensions finies de L . En particulier, lorsque $L = \bar{K}$ est une clôture algébrique de K , on a $M = K_{\text{nr}} = \varinjlim_{\ell \subset \bar{k}} K \otimes_{[k]} [\ell]$, ℓ parcourant les sous-extensions finies de \bar{k} . On dit que K_{nr} est l'extension non ramifiée maximale de K . Elle a pour groupe de Galois $\Pi(\bar{k}/k)$.

On a des résultats analogues, et même plus simples, lorsque K est de caractéristique p . Alors A est un anneau de séries formelles $k[[\pi]]$ (V, § 4, 2.4). Lorsque L est une extension finie de K , la plus grande sous-extension non ramifiée est $M = k_L((\pi)) = K \otimes_k k_L$. De même $K_{\text{nr}} = \varinjlim_{\ell \subset \bar{k}} \ell[[\pi]]$, ℓ parcourant les sous-extensions finies de \bar{k} .

1.5 Théorème d'Eisenstein: a) Soient T une extension finie totalement ramifiée de K et

$$(*) \quad \pi_T^n + a_1 \pi_T^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_i \in K,$$

l'équation minimale sur K d'une uniformisante π_T de T . Alors $A_T = A[\pi_T]$, $n = [T:K]$, $v(a_s) \geq 1$ pour tout $s \geq 1$ et $v(a_n) = 1$.

b) Réciproquement, soit $T = K(\omega)$ une extension de K telle que $\omega^n + a_1 \omega^{n-1} + \dots + a_n = 0$, avec $a_s \in m = \pi A$ pour tout $s \geq 1$ et $v(a_n) = 1$. Alors $[T:K] = n$, T est une extension totalement ramifiée de K , ω est une uniformisante et l'équation donnée est l'équation minimale de ω .

a) En effet, si $\ell = v_T(\pi) = [T:K]$, $A_T/\pi A_T$ a pour base sur k les classes des éléments $1, \pi_T, \dots, \pi_T^{\ell-1}$. Comme A_T est libre sur A (1.1), il s'ensuit que $1, \pi_T, \dots, \pi_T^{\ell-1}$ est une base de T sur K , donc que $n = \ell$ et que $a_i \in A_T$ pour tout i . Supposons qu'il y ait un i tel que $v(a_i) = 0$. Supposons i maximal; on a alors $v_T(a_i \pi_T^{n-i}) = n-i$; si $j > i$, on a

$$v_T(a_j \pi_T^{n-j}) = n-j + nv(a_j) > v_T(a_i \pi_T^{n-i});$$

si $j < i$, on a $v_T(a_j \pi_T^{n-j}) = n-j + nv(a_j) \geq n-j > v_T(a_i \pi_T^{n-i})$; enfin, on a $v_T(\pi_T^n) = n > v_T(a_i \pi_T^{n-i})$. Dans le premier membre de l'égalité $(*)$, la valuation de $a_i \pi_T^{n-i}$ est donc strictement inférieure à celle de tous les autres termes, ce qui n'est pas possible.

On a donc $v(a_i) > 0$, d'où $a_i = \pi_T^n b_i$, avec $b_i \in A_T$. On déduit alors de $(*)$ que $-b_n = 1 + b_{n-1} \pi_T + \dots + b_1 \pi_T^{n-1}$, ce qui montre que b_n est inversible; d'où $v_T(b_n) = 0$ et $nv(a_n) = v_T(a_n) = n + v_T(b_n) = n$, i.e. $v(a_n) = 1$.

b) En effet, de l'égalité $\omega^n + \dots + a_n = 0$, on tire

$$nv_T(\omega) = v_T(\omega^n) \geq \inf_i v_T(a_i \omega^{n-i}) = \inf_i (v_T(\pi) v(a_i) + (n-i) v_T(\omega)).$$

Cela n'est manifestement possible que si $v_T(\omega) > 0$. Dans ce cas, on a $v_T(\pi)v(a_i) + (n-i)v_T(\omega) > v_T(\pi) = v_T(a_n)$ si $i < n$. Il s'ensuit que $nv_T(\omega) = v_T(a_n)$; d'où $[T: K] \geq v_T(\pi) \geq n \geq [T: K]$; d'où $v_T(\omega) = 1$, et $n = v_T(\pi) = [T: K]$.

1.6 Proposition: *Soit T une extension totalement ramifiée de K de degré $\ell = [T: K]$ premier à p . On a alors $T = K(\omega)$, où ω est solution d'une équation de la forme $\omega^\ell - u\pi = 0$, u étant le représentant multiplicatif d'un élément non nul de k .*

En effet, comme $v_T(\pi) = \ell$, on a $\pi_T^\ell = v\pi$, avec $v \in A_T^*$. Si u est le représentant multiplicatif de la classe de $v \bmod \pi$, on a donc $v = u(1 + \pi_T a)$, avec $a \in A_T$. Il suffit donc de poser $\omega = \pi_T(1 + \pi_T a)^{-1/\ell}$ (l'endomorphisme $x \mapsto x^\ell$ de $1 + \pi_T A_T$ induit un isomorphisme dans chaque quotient

$$(1 + \pi_T^i A_T)/(1 + \pi_T^{i+1} A_T) \simeq k_T^+,$$

donc est un isomorphisme (*Alg. comm.*, chap III, §2, cor. 3 du théor. 1)).

Si k est algébriquement clos, on a de même $u = w^\ell$, w étant encore un représentant multiplicatif. Posons $\zeta = \omega w^{-1}$; on a alors $T = K(\zeta)$, avec $\zeta^\ell = \pi$.

1.7 Proposition: *Si T est une extension galoisienne, finie, totalement ramifiée de K , le groupe de Galois $\Pi(T/K)$ est résoluble.*

En effet, posons $\Gamma = \Pi(T/K)$, et, pour tout $i \in N$,

$$\Gamma_i = \text{Cent}_\Gamma(A_T/\pi_T^{i+1} A_T) = \{\gamma \in \Gamma \mid v_T(\gamma a - a) \geq i+1, \forall a \in A_T\}.$$

Alors Γ_i est un sous-groupe distingué de Γ . Si $\gamma \in \Gamma_i$, on a en outre $\gamma(\pi_T) = \pi_T + \pi_T^{i+1} b$, avec $b \in A_T$; d'où $\gamma(\pi_T)/\pi_T \in 1 + \pi_T^i A_T$. De la formule

$$\delta(\gamma(\pi_T))/\pi_T = (\delta(\pi_T)/\pi_T)(\gamma(\pi_T)/\pi_T)(\delta(u)/u),$$

où $u = \gamma(\pi_T)/\pi_T$, on déduit facilement que les applications $\gamma \mapsto \gamma(\pi_T)/\pi_T$ induisent des homomorphismes injectifs $\Gamma/\Gamma_1 = \Gamma_0/\Gamma_1 \rightarrow k^* \simeq A^*/(1 + \pi_T A)$ et $\Gamma_i/\Gamma_{i+1} \rightarrow k^+ \simeq (1 + \pi_T^i A)/(1 + \pi_T^{i+1} A)$ pour $i \geq 1$. On en déduit que Γ/Γ_1 est cyclique d'ordre premier à p , et que Γ_1 est un p -groupe.

nº 2 Décomposition des extensions galoisiennes d'un corps local

2.1 Théorème de décomposition: *Pour toute extension galoisienne L de K_{nr} (1.4), il y a une extension totalement ramifiée L' de K telle que $L'_{\text{nr}} = L' \otimes_K K_{\text{nr}} = L$.*

En effet, grâce au théorème de Zorn, on se ramène sans peine au cas où $[L: K_{\text{nr}}] < \infty$. Il y a alors une extension finie L_1 de K telle que $L = L_1 \cdot K_{\text{nr}}$ (appliquer par exemple I, § 3, 1.2 au système filtrant des sous-extensions finies de K_{nr}). Soit K_1 la plus grande sous-extension non ramifiée de K contenue dans L_1 (1.3). On a alors $L_1 = K_1(\omega)$, où ω est la solution d'une équation d'Eisenstein $\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \dots + a_n = 0$ ($a_i \in K_1$; 1.5). Soient $\omega_1 = \omega, \omega_2, \dots, \omega_n$ les conjugués de ω . Comme $L_1 \otimes_{K_1} K_{\text{nr}} = L$, on a $\omega_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \omega^j$, avec $a_{ij} \in K_{\text{nr}}$. Si K' est une extension galoisienne finie de K contenant les a_{ij} , et contenue dans K_{nr} , alors $K'(\omega)/K'$ est galoisienne, totalement ramifiée et telle que $K'(\omega) \otimes_{K'} K_{\text{nr}} \simeq L$. Par conséquent, $\Pi(L/K_{\text{nr}}) \simeq \Pi(K'(\omega)/K')$ est résoluble (1.7); par récurrence sur $[L: K_{\text{nr}}]$ on se ramène donc au cas où $\Pi(L/K_{\text{nr}})$ est cyclique, d'ordre premier q . Nous considérons alors deux cas:

a) $q \neq p$. Avec les notations ci-dessus, on a alors $K'(\omega) = K'(x)$, avec $x^q = u\pi$, u étant le représentant multiplicatif d'un élément de $k_{K'(\omega)}$ (1.6). Quitte à agrandir K' , on peut supposer que $u = v^n$, donc que $K'(\omega) = K'(y)$, avec $y^q = \pi$ et $yv = x$. On choisira alors $L' = K(y)$.

b) $q = p$. Considérons la suite exacte canonique

$$1 \rightarrow \Pi(K'(\omega)/K') \rightarrow \Pi(K'(\omega)/K) \xrightarrow{\varphi} \Pi(K'/K) \rightarrow 1$$

et la classe de cohomologie associée $\varepsilon(K') \in H^2(\Pi(K'/K), \Pi(K'(\omega)/K'))$. D'après III, § 5, 6.11 b), on a

$$0 = H_c^2(\Pi(K_{\text{nr}}/K), \Pi(L/K_{\text{nr}})) \simeq \varinjlim H^2(\Pi(K'/K), \Pi(K'(\omega)/K')).$$

Si l'extension K'/K a été choisie assez grande, on a donc $\varepsilon(K') = 0$, de sorte que φ possède une section σ . On a alors

$$\Pi(K'(\omega)/K) \simeq \Pi(K'(\omega)/K') \cdot \sigma(\Pi(K'/K))$$

et il suffit de prendre pour L' le corps des invariants de $\sigma(\Pi(K'/K))$ dans $K'(\omega)$.

2.2 Corollaire: Si T/K est une sous-extension totalement ramifiée de L/K , les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) T/K est maximale dans l'ensemble des sous-extensions totalement ramifiées de L/K .
- (ii) $T \otimes_K K_{\text{nr}} \simeq L$.

(ii) \Rightarrow (i): ceci résulte de 1.3; (i) \Rightarrow (ii): en effet, il y a d'après 2.1 une extension totalement ramifiée T' de T telle que

$$T' \otimes_K K_{\text{nr}} = T' \otimes_T (T \otimes_K K_{\text{nr}}) = T' \otimes_T T_{\text{nr}} = L;$$

si T est maximale, on a nécessairement $T = T'$.

2.3 Corollaire: Soient L une extension galoisienne de K_{nr} et T/K une sous-extension totalement ramifiée maximale de L/K . Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) L/K est abélienne (i.e. elle est galoisienne et $\Pi(T/K)$ est abélien).
- (ii) $\Pi(L/K_{\text{nr}})$ est contenu dans le centre de $\Pi(L/K)$.

(i) \Rightarrow (ii): en effet, d'après 2.2, on a $\Pi(L/K) \simeq \Pi(T/K) \times \Pi(K_{\text{nr}}/K)$.

(ii) \Rightarrow (i): en effet, comme on a $T \otimes_K K_{\text{nr}} = L$ d'après 2.2, $\Pi(L/K)$ est produit semi-direct de $\Pi(L/K_{\text{nr}})$ et de $\Pi(L/T)$. Mais comme $\Pi(L/K_{\text{nr}})$ est central, $\Pi(L/T)$ opère trivialement sur $\Pi(L/K_{\text{nr}})$ par automorphismes intérieurs; on a donc $\Pi(L/K) = \Pi(L/K_{\text{nr}}) \times \Pi(L/T)$ et $\Pi(L/T)$ est distingué dans $\Pi(L/K)$. Il s'ensuit que T/K est galoisien et que $\Pi(T/K) \simeq \Pi(L/K_{\text{nr}})$ est commutatif.

2.4 Corollaire: Soient K_{ab} une extension abélienne maximale de K , K_{abnr} la sous-extension non ramifiée maximale de K_{ab} , et T une extension totalement ramifiée de K . Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) T est une extension abélienne de K et est maximale parmi les extensions abéliennes totalement ramifiées de K .
- (ii) $T \otimes_K K_{\text{abnr}}$ est K -isomorphe à K_{ab} .
- (ii) \Rightarrow (i): ceci résulte de 1.3 ou 2.2.
- (i) \Rightarrow (ii): posons $K_{\text{abnr}} = M$, et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} K_{\text{ab}} & \longrightarrow & L = K_{\text{ab}} \otimes_M K_{\text{nr}} & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ K & \longrightarrow & M & \longrightarrow & K_{\text{nr}}. \end{array}$$

L'homomorphisme canonique $\varphi: \Pi(L/K) \rightarrow \Pi(K_{\text{ab}}/K) \times \Pi(K_{\text{nr}}/K)$ a pour noyau $\text{Ker } \varphi = \Pi(L/K_{\text{ab}}) \cap \Pi(L/K_{\text{nr}}) = \{1\}$, donc est injectif. Comme φ envoie $\Pi(L/K_{\text{nr}})$ dans le centre de $\Pi(K_{\text{ab}}/K) \times \Pi(K_{\text{nr}}/K)$, on voit donc que $\Pi(L/K_{\text{nr}})$ est contenu dans le centre de $\Pi(L/K)$.

Soit d'autre part T' une sous-extension de L qui contienne T , soit totalement ramifiée, et soit maximale pour ces conditions. D'après 2.3, l'extension T'/K est abélienne. Comme T/K est maximale, on a $T = T'$ et $T \otimes_K M \otimes_M K_{\text{nr}} \simeq T \otimes_K K_{\text{nr}} \simeq K_{\text{ab}} \otimes_M K_{\text{nr}}$; il s'ensuit que le morphisme canonique $\Pi(K_{\text{ab}}/K) \rightarrow \Pi(T \otimes_K M/K)$ est injectif, d'où $T \otimes_K M = K_{\text{ab}}$.

2.5 Remarque: dans les notations de 2.3, le corps résiduel de K_{abnr} est une clôture abélienne k_{ab} de k , et $\Pi(K_{\text{abnr}}/K)$ s'identifie à $\Pi(k_{\text{ab}}/k)$; on a une

suite exacte

$$0 \rightarrow \Pi(K_{ab}/K_{abnr}) \rightarrow \Pi(K_{ab}/K) \rightarrow \Pi(k_{ab}/k) \rightarrow 0.$$

Le choix d'une sous-extension abélienne totalement ramifiée maximale T de K_{ab} définit d'après 2.3 un isomorphisme

$$\Pi(K_{ab}/K) \simeq \Pi(T/K) \times \Pi(K_{abnr}/K),$$

donc un scindage de la suite exacte précédente et un isomorphisme $\Pi(K_{ab}/K_{abnr}) \simeq \Pi(T/K)$. L'objet des numéros suivants est de donner une construction de $\Pi(K_{ab}/K_{abnr})$.

n° 3 La norme

3.1 Pour toute extension finie totalement ramifiée T de K , nous notons A_T le k -schéma en anneaux $G(A_T)$ associé à A_T (V, § 4, 2.6). Si $R \in M_k$ et si K est de caractéristique 0, on a donc $A_T(R) = A_T \otimes_{\mathbb{W}(k)} \mathbb{W}(R)$ (V, § 4, 3.3); si K est de caractéristique p , on a $A_T \simeq k[[\pi_T]]$ et $A_T(R) \simeq R[[\pi_T]]$.

Nous notons U_T le k -groupe des unités de A_T , qui est tel que $U_T(R) = A_T(R)^*$ pour $R \in M_k$; nous utiliserons la filtration (U_T^n) , $n \in \mathbb{N}$, de U_T introduite en V, § 4, 3.2. Rappelons que $U_T^1 = (U_T)^\text{u}$, que $(U_T)^m \simeq \mu_k$; de plus, pour chaque $n \geq 1$, le morphisme

$$i_n^T: \alpha_k \rightarrow U_T^n/U_T^{n+1},$$

tel que $i_n^T(x) = \text{classe de } 1 + \pi_T^n x$, où π_T est une uniformisante de T , est un épimorphisme de noyau $p^m \alpha_k$, si $m = [n/e_T]$ et $e_T = v_T(p \cdot 1_T) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (confer V, § 4, 3.2 et 3.4).

Pour tout $R \in M_k$, $A_T(R)$ est un module libre de rang $[T:K]$ sur $A_K(R)$ (1.1); on peut donc définir la trace et la norme de $A_T(R)$ dans $A_K(R)$; lorsque R varie, on obtient ainsi des morphismes de k -schémas $A_T \rightarrow A_K$. On note

$$\text{Tr}_{T/K}: A_T \rightarrow A_K$$

le morphisme défini par la trace, et

$$\mathfrak{N}_{T/K}: U_T \rightarrow U_K$$

l'homomorphisme de k -groupes induit par la norme.

3.2 Lemma: Soit T une extension galoisienne de K de degré premier q .

Si $R \in M_k$, $n \geq 1$ et $x \in \pi_T^n A_T(R)$, on a

$$\mathfrak{N}_{T/K}(1+x) - 1 - \text{Tr}_{T/K}(x) - \mathfrak{N}_{T/K}(x) \in \text{Tr}_{T/K}(\pi_T^{2n} A_T(R)).$$

En effet, posons $G = \Pi(T/K)$ et $x^a = \prod_{s \in a} s(x)$ pour toute partie finie a de G . On a alors $\mathfrak{N}_{T/K}(1+x) = \sum_a x^a$. Si $n(a)$ est le nombre d'éléments de a , on a $1 = x^0$, $\mathfrak{N}_{T/K}(x) = x^G$ et $\mathfrak{Tr}_{T/K}(x) = \sum_{n(a)=1} x^a$. Si $n(a) \neq 0, q$, on a $s(a) \neq a$ pour tout $s \neq 1$ de G (car G est cyclique d'ordre premier). Il y a donc des parties a_1, \dots, a_r (en fait $r = (1/q)(2^q - 2) - 1!$) telles qu'on ait

$$\sum_a x^a - 1 - \mathfrak{Tr}_{T/K}(x) - \mathfrak{N}_{T/K}(x) = \sum_{i=1}^r \sum_s x^{s(a_i)} = \mathfrak{Tr}_{T/K}\left(\sum_{i=1}^r x^{a_i}\right),$$

$n(a_i) \geq 2$ pour tout i , donc $\sum_{i=1}^r x^{a_i} \in \pi_T^{2n} A_T(R)$.

3.3 Lemme: *Soient T une extension finie, totalement ramifiée, séparable de K , et f le polynôme minimal sur K d'une uniformisante π_T de T . Posons $d = v_T(f'(\pi_T)) > 0$. Alors, pour tout $R \in M_k$ et tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\mathfrak{Tr}_{T/K}(\pi_T^i A_T(R)) = \pi^j A_K(R)$, avec $j = [(i+d)/n] = \text{partie entière de } (i+d)/n$ et $n = [T:K]$.*

En effet, reproduisons une démonstration de Serre: comme T/K est séparable, les racines π_1, \dots, π_n de f dans une extension convenable de T sont distinctes. On a donc

$$(*) \quad \frac{1}{f(T)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f'(\pi_i)(T - \pi_i)}.$$

Si l'on développe $1/f(T)$ en série de puissances en $1/T$, le terme de plus bas degré est $1/T^n$. Comparant avec le développement du membre de droite de $(*)$ on obtient

$$\mathfrak{Tr}_{T/K}(\pi_T^i / f'(\pi_T)) = 0 \quad \text{si } 0 \leq i \leq n-2 \quad \text{et} \quad \mathfrak{Tr}_{T/K}(\pi_T^{n-1} / f'(\pi_T)) = 1.$$

Considérons alors la matrice de terme général $r_{ij} = \mathfrak{Tr}_{T/K}(\pi_T^i / \pi_T^j / f'(\pi_T))$, $0 \leq i, j < n$. Les formules ci-dessus montrent que $r_{ij} = 0$ si $i+j \leq n-2$, et $r_{ij} = 1$ si $i+j = n-1$. Pour $i+j \geq n$, on a

$$r_{ij} = \mathfrak{Tr}_{T/K}(\pi_T^n \pi_T^{i+j-n} / f'(\pi_T)),$$

et comme π_T^n est combinaison linéaire à coefficients dans A des π_T^i , $0 \leq i \leq n$, ceci montre par récurrence que $r_{ij} \in A$. Comme on a $\det(r_{ij}) = (-1)^n$ (matrice triangulaire), on voit que $(r_{ij}) \in \mathbf{GL}(n, A)$.

Ceci montre que la forme A -bilinéaire $\mathfrak{Tr}_{T/K}(x \cdot y)$ met en dualité A_T et

$$\pi_T^{-d} A_T = \sum_{i=0}^{n-1} A \pi_T^i / f'(\pi_T).$$

Or, la relation $\mathfrak{Tr}_{T/K}(\pi_T^i A_T) \subset \pi^j A$ équivaut à $\mathfrak{Tr}_{T/K}(\pi_T^{i-nj} A_T) \subset A$, i.e.

d'après notre dualité à $\pi_T^{i-nj} A_T \subset \pi_T^{-d} A_T$, ou encore à $i-nj \geq -d$. D'où le lemme lorsque $R = k$.

Pour obtenir le résultat dans le cas général, il suffit de remarquer que $\mathfrak{Tr}_{T/K}(R) = \mathfrak{Tr}_{T/K} \otimes_A A_K(R)$.

3.4 Lemme: *Supposons qu'avec les hypothèses de 3.3, T/K soit une extension galoisienne de rang premier q . Si σ engendre $\Pi(T/K)$, on a $d = (q-1)(t+1)$ avec $t = v_T(\sigma(\pi_T) - \pi_T) - 1$.*

En effet, on a $f'(\pi_T) = \prod_{\tau \neq 1} (\pi_T - \tau(\pi_T))$ et $v_T(\tau(\pi_T) - \pi_T) = v_T(\sigma(\pi_T) - \pi_T)$ si $\tau \in \Pi(T/K)$, $\tau \neq 1$. D'où l'égalité cherchée.

Remarquons que, d'après la démonstration de 1.7, on a $t = 0$ si $q \neq p$ et $t \geq 1$ si $q = p$.

3.5 Sous les hypothèses de 3.4, et pour $i \geq 1$, nous posons désormais

$$\chi(i) = \sup(i, q_i - d) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq d/(q-1) = t+1, \\ q_i - d & \text{si } i \geq t+1. \end{cases}$$

Par conséquent, les inégalités $\chi(i) \leq j < \chi(i+1)$ signifient que i est le plus grand entier u tel que $\sup(u, qu - d) \leq j$; elles équivalent donc à $i = \inf(j, [(j+d)/q])$.

Proposition: *Soit T une extension galoisienne totalement ramifiée de K de rang premier q . Avec les notations ci-dessus, on a:*

- a) $\mathfrak{N}_{T/K}: U_T \rightarrow U_K$ est un épimorphisme de k -groupes affines commutatifs.
- b) La partie multiplicative $\mathfrak{N}_{T/K}^m$ de $\mathfrak{N}_{T/K}$ est l'endomorphisme $x \mapsto x^q$ de μ_k .
- c) Pour tout $i \geq 1$, $\mathfrak{N}_{T/K}$ envoie $U_T^{\chi(i)}$ dans U_K^i et les homomorphismes induits $U_T^{\chi(i)}/U_T^{\chi(i+1)} \rightarrow U_K^i/U_K^{i+1}$ sont des épimorphismes.

L'assertion b) est claire puisqu'on a $\mathfrak{N}_{T/K}(u) = u\sigma(u)\dots\sigma^{q+1}(u)$ et que σ induit sur $\mu_k \cong U_T^m$ le morphisme identique. D'autre part, il résulte de c) que $U_T^{\chi(i)}/U_T^{\chi(n)} \rightarrow U_K^i/U_K^n$ est un épimorphisme pour tout $n \geq 1$, donc que $U_T^1 \rightarrow U_K^1$ est un épimorphisme (les limites projectives filtrantes sont exactes), ce qui, compte-tenu de b) implique a).

Il reste donc à démontrer c). Pour prouver que $\mathfrak{N}_{T/K}$ envoie $U_T^{\chi(i)}$ dans U_K^i , il suffit, compte-tenu de V, § 4, 3.1, de montrer que $\mathfrak{N}_{T/K}(R)$ envoie $1 + \pi_T^{\chi(i)} A_T(R)$ dans $1 + \pi^i A_K(R)$ pour tout $R \in M_k$. Soient donc j un entier ≥ 1 et $a \in A_T(R)$, $R \in M_k$. D'après 3.2 et 3.3, on a

$$(*) \quad \mathfrak{N}_{T/K}(1 + \pi_T^j a) \equiv 1 + \mathfrak{N}_{T/K}(a)u^j\pi^j + \mathfrak{Tr}_{T/K}(a\pi_T^j) \pmod{\pi^{[(2j+d)/q]}},$$

où $u = \mathfrak{N}_{T/K}(\pi_T)/\pi \in A^*$. Appliquant à nouveau 3.3, on en conclut que $\mathfrak{N}_{T/K}(1 + \pi_T^i a) \in 1 + \pi^i A_K(R)$, dès que $i \leq \inf(j, (j+d)/q)$, ce qui équivaut à $j \geq \chi(i)$. Cela entraîne la première assertion de c). Pour démontrer la seconde, il suffit d'après 3.1 de construire pour chaque i un endomorphisme non nul \mathfrak{n}_i de α_k tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \alpha_k & \xrightarrow{i_{\chi(i+1)-1}^T} & U_T^{\chi(i+1)-1}/U_T^{\chi(i+1)} \\ \mathfrak{n}_i \downarrow & & \downarrow \mathfrak{g}_{T/K} \\ \alpha_k & \xrightarrow{i_i^K} & U_K^i/U_K^{i+1}, \end{array}$$

c'est-à-dire tel que $\mathfrak{N}_{T/K}(1 + a\pi_T^i) \equiv 1 + \mathfrak{n}_i(a)\pi^i \pmod{\pi^{i+1}A_K(R)}$, pour tout $R \in M_k$ et tout $a \in \alpha_k(R) = R$, avec $j = \chi(i+1) - 1$.

Pour ce faire, distinguons plusieurs cas:

A) Si $1 \leq i < t$ (ce qui implique $q = p$), on a $\chi(i) = i$, $\chi(i+1) = i+1$, donc $j = i$, et $j < [(j+d)/q]$. La formule (*) donne alors

$$\mathfrak{N}_{T/K}(1 + a\pi_T^i) \equiv 1 + a^p u^i \pi^i \pmod{\pi^{i+1}A_K(R)},$$

et on peut prendre $\mathfrak{n}_i(a) = \bar{u}^i a^p$, où \bar{u} est la classe de u modulo π .

B) Si $i = t \geq 1$ (ce qui implique encore $q = p$), on a $\chi(i) = i$, $\chi(i+1) = i+1$, donc $j = i = t$ et $j = [(j+d)/q]$. Si $w = \pi^{-t} \mathfrak{Tr}_{T/K}(\pi_T^t) \in A^*$ (3.3), la formule (*) donne ici (on peut prendre $a \in A_K(R)$)

$$\mathfrak{N}_{T/K}(1 + a\pi_T^t) = 1 + aw\pi^t + a^p u^t \pi^t \pmod{\pi^{t+1}A_K(R)}.$$

On peut donc prendre \mathfrak{n}_t tel que $\mathfrak{n}_t(a) = a\bar{w} + a^p \bar{u}^t$.

C) Si $i > t$, alors $[(j+d)/q] = i < j$, et $w = \pi^{-i} \mathfrak{Tr}_{L/K}(\pi_T^i) \in A^*$. La formule (*) donne alors $\mathfrak{N}_{T/K}(1 + a\pi_T^i) \equiv 1 + aw \pmod{\pi^{i+1}A_K(R)}$, de sorte qu'on peut prendre \mathfrak{n}_i tel que $\mathfrak{n}_i(a) = a\bar{w}$.

3.6 Corollaire: Si T est une extension galoisienne finie, totalement ramifiée de K , le morphisme-norme $\mathfrak{N}_{T/K}: U_T \rightarrow U_K$ est un épimorphisme.

D'après 1.7, si $T \neq K$, T contient une sous-extension galoisienne T' qui est cyclique de degré premier; d'après 3.5, $\mathfrak{N}_{T'/K}$ est un épimorphisme. Comme $\mathfrak{N}_{T/K} = \mathfrak{N}_{T'/K} \circ \mathfrak{N}_{T/T'}$, l'assertion en résulte par récurrence sur $[T: K]$.

3.7 Corollaire: Supposons le corps résiduel k du corps local K algébriquement clos. Pour toute extension finie T/K , l'application-norme $N_{T/K}: T \rightarrow K$ est surjective.

En effet, si $S \subset T$, on a $N_{T/K} = N_{S/K} \circ N_{T/S}$. En particulier, si S est la plus grande sous-extension séparable de T , on voit qu'on est ramené à traiter séparément le cas d'une extension séparable et celui d'une extension purement radicielle. Le second cas est facile et inutile pour la suite (on se ramène au cas où $[T:K] = p$; on a alors $K \simeq k((t))$, $L \simeq k((u))$ avec $u^p = t$).

Dans le cas où T/K est séparable, soit Q une extension galoisienne finie de K contenant T ; comme on a $N_{Q/K} = N_{T/K} \circ N_{Q/T}$, il suffit de prouver la surjectivité de $N_{Q/K}$, ce qui nous ramène au cas où T/K est galoisienne. Dans ce cas $\mathfrak{N}_{T/K}: U_T \rightarrow U_K$ est un épimorphisme (3.6). D'après III, § 3, 7.6, il s'ensuit que $\mathfrak{N}_{T/K}(k): A_T^* \rightarrow A_K^*$ est une surjection. Comme l'image de $N_{T/K}$ contient en outre une uniformisante (à savoir $N_{T/K}(\pi_T)$; 1.5 a)), le résultat est établi.

n° 4 Groupe de Galois et groupe des unités

4.1 Soit T une extension galoisienne finie totalement ramifiée de K ; considérons le morphisme norme $\mathfrak{N}_{T/K}: U_T \rightarrow U_K$ et soit $\mathfrak{B}_{T/K} = (\ker \mathfrak{N}_{T/K})^0$. Comme $\mathfrak{N}_{T/K}$ est un épimorphisme (3.6), on a une suite exacte

$$1 \rightarrow \pi_0(\ker \mathfrak{N}_{T/K}) \rightarrow U_T/\mathfrak{B}_{T/K} \xrightarrow{\pi_{T/K}} U_K \rightarrow 1,$$

où $\pi_{T/K}$ est induit par $\mathfrak{N}_{T/K}$ et où $\pi_0(\ker \mathfrak{N}_{T/K}) = (\ker \mathfrak{N}_{T/K})/\mathfrak{B}_{T/K}$. Nous nous proposons de montrer que $\pi_0(\ker \mathfrak{N}_{T/K})$ est isomorphe au k -groupe constant $\Pi(T/K)_k^{ab}$. (Γ^{ab} désigne ici le plus grand quotient commutatif d'un groupe abstrait Γ .) Pour cela, si π_T est une uniformisante de T , nous associons à tout $\sigma \in \Pi(T/K)$ l'image canonique $\psi(\sigma)$ de $\sigma(\pi_T)/\pi_T$ dans $\pi_0(\ker \mathfrak{N}_{T/K})(k)$.

Lemme: *L'application $\psi: \Pi(T/K) \rightarrow \pi_0(\ker \mathfrak{N}_{T/K})(k)$ est un homomorphisme de groupes et ne dépend pas du choix de π_T .*

En effet, si $\sigma \in \Pi(T/K)$, soit $\varphi_\sigma: U_T \rightarrow U_T$ le morphisme $u \mapsto \sigma(u)/u$ ($u \in U_T(R)$, $R \in M_k$). Il est clair que $\mathfrak{N}_{T/K} \circ \varphi_\sigma = 1$, donc que φ_σ se factorise à travers $\ker \mathfrak{N}_{T/K}$. Or U_T est connexe; donc φ_σ se factorise à travers $\mathfrak{B}_{T/K}$. En particulier, $\mathfrak{B}_{T/K}(k)$ contient tous les éléments de la forme $\sigma(u)/u$, avec $u \in U_T(k)$. Il s'ensuit que $\sigma(u\pi_T)/u\pi_T = (\sigma(u)/u) \cdot (\sigma(\pi_T)/\pi_T)$ est congru à $\sigma(\pi_T)/\pi_T$ modulo $\mathfrak{B}_{T/K}(k)$, donc que ψ ne dépend pas du choix de l'uniformisante. Si $\sigma, \tau \in \Pi(T/K)$, on a

$$\psi(\tau\sigma) = (\tau\sigma)(\pi_T)/\pi_T = \{\tau(\sigma(\pi_T))/\sigma(\pi_T)\} \cdot \sigma(\pi_T)/\pi_T = \psi(\tau) \cdot \psi(\sigma).$$

4.2 L'homomorphisme $\psi: \Pi(T/K) \rightarrow \pi_0(\text{Ker } \mathfrak{N}_{T/K})(k)$ se factorise à travers $\Pi(T/K)^{ab}$. Nous notons $i_{T/K}: \Pi(T/K)_k^{ab} \rightarrow U_T/\mathfrak{B}_{T/K}$ l'homomorphisme induit par ψ .

Théorème d'exactitude: *Si T/K est une extension galoisienne finie totalement ramifiée, la suite*

$$1 \rightarrow \Pi(T/K)_k^{ab} \xrightarrow{i_{T/K}} U_T/\mathfrak{B}_{T/K} \xrightarrow{n_{T/K}} U_K \rightarrow 1$$

est une suite exacte de k -groupes affines commutatifs.

Il s'agit de prouver que $i_{T/K}$ induit un isomorphisme de $\Pi(T/K)_k^{ab}$ sur $\text{Ker } n_{T/K}$, et il suffit de le faire après extension du corps de base de k à \bar{k} . Or, il résulte évidemment de 1.4 que $A_{T_{nr}} \cong A_T \otimes_{\mathfrak{B}(k)} \mathfrak{B}(\bar{k})$ si K est de caractéristique 0; on a alors $(A_T)_{\bar{k}} \cong G(A_T \otimes_{\mathfrak{B}(k)} \mathfrak{B}(\bar{k})) = A_{\bar{T}_{nr}}$ d'après V, § 4, 1.6; d'où $U_T \otimes_k \bar{k} \cong U_{\bar{T}_{nr}}$ et $U_K \otimes_k \bar{k} \cong U_{\bar{K}_{nr}}$, ce qui reste vrai si $K \cong k[[\pi]]$ et nous ramène au cas où k est algébriquement clos. Alors $\Pi(T/K)_k^{ab}$ et $\text{Ker } n_{T/K}$ sont proconstants (V, § 3, 1.1), et il suffit de montrer que $\Pi(T/K)_k^{ab} \rightarrow \text{Ker } n_{T/K}(k)$ est bijectif.

Notons alors $U_T = U_T(k)$, $V_{T/K} = \mathfrak{B}_{T/K}(k)$ et $N_{T/K} = \mathfrak{N}_{T/K}(k)$. Considérons l'homomorphisme $\varphi: U_T^{\Pi(T/K)} \rightarrow U_T$ qui a $\varphi_\sigma: u \mapsto \sigma(u)/u$ pour composante d'indice $\sigma \in \Pi(T/K)$. Posons $\mathfrak{B}'_{T/K} = \tilde{\text{Im }} \varphi$ et $V'_{T/K} = \text{Im } \varphi(k) = \mathfrak{B}'_{T/K}(k)$. On a alors $\mathfrak{B}'_{T/K} \subset \mathfrak{B}_{T/K}$ (cf. 4.1) et $(\mathfrak{B}_{T/K}/\mathfrak{B}'_{T/K})(k) = V_{T/K}/V'_{T/K} \subset (\text{Ker } N_{T/K})/V'_{T/K}$. D'après 4.3 ci-dessous, on voit que $(\mathfrak{B}_{T/K}/\mathfrak{B}'_{T/K})(k)$ est fini. Donc $(\mathfrak{B}_{T/K}/\mathfrak{B}'_{T/K})_{\text{red}}$ est fini (V, § 3, 1.5). Comme $\mathfrak{B}_{T/K}$ est connexe, on a donc $\mathfrak{B}_{T/K} = (\mathfrak{B}_{T/K})_{\text{red}}$ et $V'_{T/K} = V_{T/K}$, ce qui, modulo 4.3, achève la démonstration.

4.3 Lemme: *Supposons k algébriquement clos. Soient T une extension galoisienne finie de K et $V'_{T/K}$ le sous-groupe de U_T engendré par les $\sigma(u)/u$, $\sigma \in \Pi(T/K)$, $u \in U_T$. L'homomorphisme $\Pi(T/K) \rightarrow U_T/V'_{T/K}$, qui associe à $\sigma \in \Pi(T/K)$ la classe de $\sigma(\pi_T)/\pi_T$, induit un isomorphisme $j: \Pi(T/K)^{ab} \xrightarrow{\sim} (\text{Ker } N_{T/K})/V'_{T/K}$.*

En effet, posons $\Gamma = \Pi(T/K)$. Pour tout Γ -module M et tout entier $i \geq 0$, soit $H_i(\Gamma, M) = \text{Tor}_i^{\mathbf{Z}[\Gamma]}(\mathbf{Z}, M)$, Γ opérant trivialement sur \mathbf{Z} . On a en particulier $H_0(\Gamma, M) = M/\mathbf{I}(\Gamma)M$, où $\mathbf{I}(\Gamma)M$ est le sous-groupe de M engendré par les éléments $\gamma m - m$ pour $\gamma \in \Gamma$ et $m \in M$ (III, § 6, 1.1). Considérons le diagramme commutatif de Γ -modules

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{I}(\Gamma) & \xrightarrow{\text{incl.}} & \mathbf{Z}(\Gamma) & \xrightarrow{e} & \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \beta \downarrow & & \alpha \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & U_T & \xrightarrow{\text{incl.}} & T^* & \xrightarrow{v_T} & \mathbf{Z} \longrightarrow 0, \end{array}$$

où $\alpha(\gamma) = \gamma(\pi_T)$ et $\beta(\gamma-1) = \gamma(\pi_T)/\pi_T$ si $\gamma \in \Gamma$. Comme les lignes sont exactes on a un diagramme induit

$$\begin{array}{ccccccc}
 O = H_1(\Gamma, \mathbf{Z}[\Gamma]) & \rightarrow & H_1(\Gamma, \mathbf{Z}) & \rightarrow & H_0(\Gamma, \mathbf{I}(\Gamma)) & \rightarrow & H_0(\Gamma, \mathbf{Z}[\Gamma]) \rightarrow H_0(\Gamma, \mathbf{Z}) \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow H^0(\Gamma, \beta) & & \downarrow \parallel \\
 H_1(\Gamma, T^*) & \rightarrow & H_1(\Gamma, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\partial} & H_0(\Gamma, U_T) & \rightarrow & H_0(\Gamma, T^*) \rightarrow H_0(\Gamma, \mathbf{Z}) \\
 & & & & \downarrow N & & \downarrow N' \\
 1 & \longrightarrow & U_K & \longrightarrow & K^*, & &
 \end{array}$$

où les lignes sont exactes et où N, N' sont induits par l'application-norme $N_{T/K}$ (remarquer que $H_0(\Gamma, U_T) = U_T/\{yu/u\} = U_T/V'_{T/K}$ et $H_0(\Gamma, T^*) = T^*/\{yx/x\}$ avec $\gamma \in \Gamma, u \in U_T$ et $x \in T^*$). D'après 4.4 et 4.5 ci-dessous, on a $H_1(\Gamma, T^*) = 0$ et $\text{Ker } N' = 0$. Par conséquent, ∂ induit un isomorphisme $H_1(\Gamma, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{Ker } N = (\text{Ker } N_{T/K})/V'_{T/K}$. D'un autre côté, on a $H_0(\Gamma, \mathbf{Z}[\Gamma]) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}[\Gamma]/\mathbf{I}(\Gamma) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z} = H_0(\Gamma, \mathbf{Z})$. Notre diagramme permet donc d'identifier $H_0(\Gamma, \mathbf{I}(\Gamma)) = \mathbf{I}(\Gamma)/\mathbf{I}(\Gamma)^2$ à $H_1(\Gamma, \mathbf{Z})$ et il montre que $H^0(\Gamma, \beta)$ induit un isomorphisme de $\mathbf{I}(\Gamma)/\mathbf{I}(\Gamma)^2$ sur $\text{Ker } N$. Il reste donc à vérifier (ce qui est classique et facile) que l'application $\gamma \mapsto \gamma-1$ de Γ dans $\mathbf{I}(\Gamma)$ induit par passage au quotient un isomorphisme $u: \Gamma^{ab} \xrightarrow{\sim} \mathbf{I}(\Gamma)/\mathbf{I}(\Gamma)^2$; par construction, u est tel que $j = H^0(\Gamma, \beta)u$.

4.4 Lemme: *Sous les hypothèses du lemme 4.3, tout élément $x \in T^*$ tel que $N_{T/K}(x) = 1$ est de la forme $x = \prod_{i=1}^r \gamma_i(y_i)/y_i$ avec $\gamma_i \in \Pi(T/K)$ et $y_i \in T^*$.*

a) *Supposons d'abord $\Gamma = \Pi(T/K)$ cyclique:* on a donc une résolution libre du Γ -module \mathbf{Z} de la forme

$$\dots \mathbf{Z}[\Gamma] \xrightarrow{?N} \mathbf{Z}[\Gamma] \xrightarrow{?(\sigma-1)} \mathbf{Z}[\Gamma] \xrightarrow{?N} \mathbf{Z}[\Gamma] \xrightarrow{?(\sigma-1)} \mathbf{Z}[\Gamma] \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0,$$

où σ est un générateur de Γ et où $N = \sum \gamma$, $\gamma \in \Gamma$. Identifiant tout Γ -module M à $\text{Mod}_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(\mathbf{Z}[\Gamma], M)$, on en déduit

$$H^{2i+1}(\Gamma, M) = \text{Mod}_{\mathbf{Z}[\Gamma]}^{\geq 2i+1}(\mathbf{Z}, M) = (\text{Ker } N_M)/\mathbf{I}(\Gamma)M$$

si $i \geq 0$ ($N_M: M \rightarrow M$ est l'application $N?: m \mapsto Nm$). Or on sait d'autre part (III, § 5, 3.2) que $H^1(\Gamma, T^*) = \text{Ker}(\tilde{H}^1(K, \mu_K) \rightarrow \tilde{H}^1(T, \mu_T))$. Comme $\tilde{H}^1(K, \mu_K) = 0$ (III, § 4, 4.4), on a donc $H^1(\Gamma, T^*) = 0$ (théorème 90 de Hilbert), donc $\text{Ker } N_M = \mathbf{I}(\Gamma)M$ si $M = T^*$.

b) *Cas général:* raisonnons par récurrence sur $[T:K]$. Si $\Pi(T/K)$ n'est pas cyclique, T contient une sous-extension galoisienne L distincte de K et T (car $\Pi(T/K)$ est résoluble (1.7)). Posons $R = N_{T/L}$. On a alors $N_{T/K}(x) = N_{L/K}(R(x)) = 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $R(x) = \prod_{j=1}^s \delta_j(z_j)/z_j$, avec $z_j \in L^*$ et $\delta_j \in \Pi(L/K)$. Soient $\delta_j \in \Pi(T/K)$ un prolongement de δ_j à T et t_j un élément de T^* tel que $R(t_j) = z_j$ (3.7). On a alors $R(x) = \prod_j \delta_j(R(t_j))/R(t_j) = R(\prod_j \delta_j(t_j)/t_j)$. Posant $u = \prod_j \delta_j(t_j)/t_j$ et appliquant l'hypothèse de récurrence à l'extension T/L et à l'élément $u^{-1}x \in T^*$, on a le résultat cherché.

4.5 Lemme: *Sous les hypothèses du lemme 4.3, on a $H_1(\Pi(T/K), T^*) = 0$.*

a) *Supposons d'abord $\Gamma = \Pi(T/K)$ cyclique:* se servant de la résolution de \mathbf{Z} donnée en 4.4 a), on voit alors qu'on a $H_{2i+1}(\Gamma, M) = M^\Gamma/N_M(M)$ pour tout Γ -module M (4.4; on note M^Γ le groupe des $m \in M$ tels que $\gamma(m) = m$, $\forall \gamma \in \Gamma$). On a donc en particulier $H_1(\Gamma, T^*) = K^*/N_{T/K}T^* = \{1\}$ (3.7).

b) *Cas général:* soit H un sous-groupe distingué de $\Gamma = \Pi(T/K)$. Pour tout Γ -module M , l'opération de Γ sur M induit par passage au quotient une opération de Γ/H sur $M/\mathbf{I}(H)M$. Lorsque M est un Γ -module libre, $M/\mathbf{I}(H)M$ est un (Γ/H) -module libre. Enfin le foncteur $M \mapsto M/\mathbf{I}(\Gamma)M$ se décompose en $M \mapsto M/\mathbf{I}(H)M$ et en $N \mapsto N/\mathbf{I}(\Gamma/H)N$. On a donc une suite spectrale des foncteurs composés

$$H_q(\Gamma/H, H_p(H, M)) \Rightarrow H_{p+q}(\Gamma, M),$$

qui engendre la suite exacte habituelle des termes de bas degré

$$\begin{aligned} H_2(\Gamma, M) &\rightarrow H_2(\Gamma/H, M/\mathbf{I}(H)M) \rightarrow H_0(\Gamma/H, H_1(H, M)) \rightarrow \\ &H_1(\Gamma, M) \rightarrow H_1(\Gamma/H, M/\mathbf{I}(H)M) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

D'où en particulier une suite exacte

$$H_1(H, M) \rightarrow H_1(\Gamma, M) \rightarrow H_1(\Gamma/H, M/\mathbf{I}(H)M).$$

Supposons maintenant Γ non cyclique. Comme Γ est résoluble (1.7), on peut choisir H tel que $H \neq \{1\}$, Γ . Soit L le corps des invariants de H ($K \subset L \subset T$). Posant $M = T^*$ dans la suite exacte ci-dessus et raisonnant par récurrence sur $[T:K]$, on a $H_1(H, T^*) = 0$ par hypothèse par récurrence. D'autre part, $M/\mathbf{I}(H)M \simeq L^*$ d'après 3.7 et 4.4. D'où aussi $H_1(\Gamma/H, L^*) = 0$, ce qui prouve notre lemme.

n° 5 Extensions cycliques de degré premier

5.1 Soit T/K une extension cyclique de degré premier q , totalement ramifiée. Désignons par Γ le groupe de Galois $\Pi(T/K)$; nous nous proposons d'étudier l'extension de U_K par Γ_k donnée par la suite exacte (4.2)

$$1 \longrightarrow \Gamma_k \xrightarrow{i_{T/K}} U_T/\mathfrak{B}_{T/K} \xrightarrow{n_{T/K}} U_K \longrightarrow 1.$$

5.2 Supposons d'abord $q \neq p$. D'après 1.6, on a alors $T = K(\omega)$ où $\omega^q = u\pi$, avec $u \in k^*$ (on identifie k^* à un sous-groupe de K^* au moyen de la section de Teichmüller (V, § 4, 3.2)); si $\sigma \in \Gamma$, posons $\zeta(\sigma) = \sigma(\omega)/\omega \neq 1$; on a $\zeta(\sigma)^q = 1$, donc $\zeta(\sigma) \in k^* \simeq U_T^m(k)$ (V, § 4, 3.2) (car $\zeta(\sigma)$ induit un homomorphisme $\Gamma_k \rightarrow U_T$ et Γ_k est multiplicatif!). L'application $\sigma \mapsto \zeta(\sigma)$ induit un isomorphisme $\Gamma_k \simeq {}_q\mu_k$ (II, § 5, 1.6). Identifions les parties multiplicatives de U_K et U_T à μ_k ; d'après 3.5 b) et la définition de $i_{T/K}$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \Gamma_k & \xrightarrow{i_{T/K}} & U_T/\mathfrak{B}_{T/K} & \xrightarrow{n_{T/K}} & U_K \longrightarrow 1 \\ & & \uparrow \zeta & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & {}_q\mu_k & \xrightarrow{\text{incl.}} & \mu_k & \xrightarrow{q \text{ Id}} & \mu_k \longrightarrow 0. \end{array}$$

Il s'ensuit que l'extension cherchée s'obtient à partir de la suite exacte du bas à l'aide des isomorphismes $\Gamma_k \simeq {}_q\mu_k$ et $\text{Ac}_k^1(U_K, \Gamma_k) \simeq \text{Ac}_k^1(\mu_k, \Gamma_k)$.

Inversement, tout élément non nul de $\text{Ac}_k^1(U_k, (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})_k)$ s'obtient à partir de l'extension $T = K(\omega)$, où $\omega^q = \pi$, et d'un isomorphisme $\Pi(T/K) \simeq \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$. En effet, on a des isomorphismes (V, § 3, 3.10 et 5.2)

$$\begin{aligned} \text{Ac}_k^1(U_k, (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})_k) &\simeq \text{Ac}_k^1(\mu_k, (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})_k) \simeq \text{Ac}_k(\mathfrak{D}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}), (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})_k) \\ &\simeq \text{Ac}_k(\mathfrak{D}(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}), (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})_k). \end{aligned}$$

Ce groupe est donc nul si k ne contient pas de racines q -ièmes de l'unité $\neq 1$ et isomorphe à $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ dans le cas contraire, ce qui implique l'assertion annoncée.

5.3 Supposons maintenant $q = p$. Posons $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{T/K}$, $N_{T/K}(\pi_T) = u\pi$, $\sigma(\pi_T)/\pi_T = 1 + v\pi_T^t$, si σ est un générateur de $\Gamma = \Pi(T/K)$, et $\text{Tr}_{T/K}(\pi_T^t) = w\pi_T^t$, avec $v \in A_T^*$ et $u, w \in A^*$. Soient $\alpha: \Gamma_k \rightarrow \alpha_k$ et $\beta: \alpha_k \rightarrow \alpha_k$ les homomorphismes tels que $\alpha(r \bmod p) = r\bar{v}$ et $\beta(a) = \bar{w}a + \bar{u}^t a^p$, où \bar{v} et \bar{u} , \bar{w} désignent les classes de v et u , w modulo π_T et π . Enfin, soit i le composé

$$\alpha_k \xrightarrow{i_T^T} U_T^t/U_T^{t+1} \xrightarrow{\text{can.}} U_T^t/(U_T^t \cap \mathfrak{B})U_T^{t+1}.$$

Lemme: Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \Gamma_k & \xrightarrow{i_{T/K}} & U_T/\mathfrak{B} & \xrightarrow{n_{T/K}} & U_K \longrightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \uparrow \text{can.} & & \uparrow \text{can.} \\
 1 & \longrightarrow & \Gamma_k & \longrightarrow & U_T^t/U_T^t \cap \mathfrak{B} & \longrightarrow & U_K^t \longrightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow \text{can.} & & \downarrow \text{can.} \\
 1 & \longrightarrow & \Gamma_k & \longrightarrow & U_T^t/(U_T^t \cap \mathfrak{B})U_T^{t+1} & \longrightarrow & U_K^t/U_K^{t+1} \longrightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \uparrow i & & \uparrow i_K \\
 1 & \longrightarrow & \Gamma_k & \xrightarrow{\alpha} & \alpha_k & \xrightarrow{\beta} & \alpha_k \longrightarrow 1
 \end{array}$$

les lignes sont exactes.

En effet, la première ligne est exacte d'après 4.2. Dans la deuxième ligne les morphismes sont induits par $i_{T/K}$ (qui se factorise à travers $U_T^t/U_T^t \cap \mathfrak{B}$ par définition de t) et $n_{T/K}$ (qui envoie U_T^t dans U_K^t d'après 3.5 c)); on voit comme pour $\mathfrak{N}_{T/K}$ que le morphisme induit $U_T^t \rightarrow U_K^t$ est un épimorphisme, ce qui implique l'exactitude de la seconde ligne. Pour prouver l'exactitude de la troisième ligne, posons $\mathfrak{B} = U_T^{t+1}(U_T^t \cap \mathfrak{B})/U_T^t \cap \mathfrak{B}$; il est alors clair que l'homomorphisme $\mathfrak{B} \rightarrow U_K^{t+1}$ induit par $U_T^t/U_T^t \cap \mathfrak{B} \rightarrow U_K^t$ est un épimorphisme; il suffit donc de prouver l'égalité $\Gamma_k \cap \mathfrak{B} = e_k$, qui équivaut à la relation $\sigma(\pi_T)/\pi_T = 1 + v\pi_T^t \notin ((U_T^t \cap \mathfrak{B})U_T^{t+1})(k)$, et résulte manifestement des relations $1 + v\pi_T^t \notin U_T^{t+1}(k)$ et $\mathfrak{B}_{\text{red}} \subset U_T^{t+1}$. Pour prouver cette dernière inclusion, posons $\mathfrak{C} = \text{Ker } \mathfrak{N}_{T/K}$ et $\mathfrak{C}_i = U_T^{t(i)} \cap \mathfrak{C}$ avec les notations de 3.5. D'après 3.5 A et B, $\mathfrak{C}_i/\mathfrak{C}_{i+1}$ est fini pour $i \leq t$; par conséquent, $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}_{t+1}$ est fini et l'on a $\mathfrak{B}_{\text{red}} = \mathfrak{C}_{\text{red}}^0 \subset \mathfrak{C}_{t+1} \subset U_T^{t+1}$.

Considérons enfin la dernière ligne: la commutativité du carré contenant β (resp. α) résulte de la démonstration de 3.5 (resp. des définitions). On a donc $i_K^* \beta \alpha = 0$, d'où $\beta \alpha = 0$, puisque $\text{Ker } i_K^*$ est infinitésimal. Comme $\text{Ker } \beta$ est manifestement une forme de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k$, la dernière ligne est exacte.

5.4 Exemple: Supposons que K contienne une racine p -ième de l'unité $\zeta \neq 1$ (on a donc $p \cdot 1_K \neq 0$ et $e < +\infty$). Soit $T = K(\omega)$ avec $\omega^p = \pi$. On a alors $(p-1)(t+1) = v_T(p\omega^{p-1})$ (3.4), donc $(p-1)(t+1) = pe + p - 1$, d'où $t = pe_1$ avec $e_1 = e/(p-1)$. Identifions Γ à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ en choisissant comme générateur de Γ l'élément σ tel que $\sigma(\omega) = \zeta\omega$; on a

$$t = v_T(\sigma(\omega) - \omega) - 1 = v_T(\zeta - 1) = pv(\zeta - 1).$$

Il en résulte que e_1 est entier et que $\zeta = 1 + h\pi^{e_1}$, où $h \in A^*$. On a aussitôt $u = (-1)^{p-1}$ et $w = p\pi^{-e}$; la dernière ligne du diagramme 5.3 s'identifie donc à l'extension

$$0 \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k \xrightarrow{\alpha} \alpha_k \xrightarrow{\beta} \alpha_k \rightarrow 0,$$

où $\alpha(r \bmod p) = r\bar{h}$ et $\beta(a) = \bar{w}a + a^p$.

5.5 Exemple (extensions d'Artin-Schreier): Soient n un entier tel que $1 \leq n < pe/(p-1)$ et $(n, p) = 1$, et λ un élément de K tel que $v(\lambda) = -n$. Posons $T = K(x)$ avec $x^p - x = \lambda$.

Nous montrons d'abord que l'extension T/K est galoisienne, totalement ramifiée de degré p , et que l'on a $t = n$: de $x^p - x = \lambda$, on déduit $v_T(x) < 0$, puis $v_T(\lambda) = pv_T(x)$, d'où $v_T(x) = -v_T(\pi)n/p$. Comme $(n, p) = 1$, p divise $v_T(\pi)$; d'où $p \leq v_T(\pi) \leq [T: K] \leq p$ et $v_T(x) = -n$.

Considérons d'autre part l'équation

$$(x+Y)^p - (x+Y) - \lambda = Y^p - Y + \sum_{i=1}^{p-1} a_i Y^i = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} v_T(a_i) &= v_T\left(\binom{p-1}{i-1} \frac{px^{p-i}}{i}\right) \\ &= v_T(px^{p-i}) = pv(p) - n(p-i) > pv(p) \left(1 - \frac{p-i}{p-1}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que $a_i \equiv 0 \pmod{\pi_T}$; or l'équation réduite modulo π_T , $Y^p - Y = 0$, a p racines $0, 1, \dots, p-1$. Notre équation $(x+Y)^p - (x+Y) - \lambda = 0$ a donc p racines y_0, y_1, \dots, y_{p-1} dans A_T telles que $y_i \equiv i \pmod{\pi_T}$ (lemme de Hensel; *Alg. comm.*, chap. III, §4, cor. 1 au th. 2). Ceci montre que T/K est galoisienne.

Soit $\sigma \in \Pi(T/K)$ tel que $\sigma(x) = x + y_1$. On a alors $\sigma(x) - x \equiv 1 \pmod{\pi_T A_T}$, d'où $(\sigma(x)/x) - 1 \equiv x^{-1} \pmod{\pi_T^{n+1} A_T}$. D'un autre côté, soit $x = \pi_T^{-n} u$, avec $u \in A_T^*$; par définition de t , on a $\sigma(\pi_T)/\pi_T = 1 + z$, avec $v_T(z) = t$ et l'on sait qu'alors $\sigma(a) - a \in \pi_T^{t+1} A_T$ pour tout $a \in A_T$, $(\sigma(u)/u) - 1 \in \pi_T^{t+1} A_T$ et $(\sigma(x)/x) - 1 \equiv -nz \pmod{\pi_T^{t+1}}$. Comparant les deux congruences obtenues pour $(\sigma(x)/x) - 1$, on obtient $t = n$ et $z \equiv -x^{-1}/n \pmod{\pi_T^{t+1} A}$.

Déterminons enfin la suite exacte

$$0 \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k \xrightarrow{\alpha} \alpha_k \xrightarrow{\beta} \alpha_k \rightarrow 0.$$

Posons $-x^{-1} = h\pi_T^t$, avec $h \in A_T^*$, de sorte que $i_t^T: \alpha_k \rightarrow U_T^t/U_T^{t+1}$ est

défini par $i_t^T(a) = 1 - ah^{-1}x^{-1}$; on a $\sigma(\pi_T)/\pi_T = 1 + z \equiv 1 - x^{-1}/n$, ce qui entraîne $\alpha(1) = \bar{h}/n$ et $\alpha(r \bmod p) = r\bar{h}/n$. De même, $\mathfrak{N}_{T/K}(1 - ah^{-1}x^{-1}) = \mathfrak{N}_{T/K}(ah^{-1} - x)/\mathfrak{N}_{T/K}(-x) = 1 - \lambda^{-1}((a/h)^p - a/h)$ (calculer les termes constants des équations minimales de $-x$ et $a - x$ sur K); si $\lambda^{-1} = \pi^n \mu$, on a donc $\mathfrak{N}_{T/K}(i_t^T(a)) = i_t^K(-\bar{\mu}((a/h)^p - a/h))$, ce qui signifie que $\beta(a) = -\bar{\mu}((a/h)^p - a/h)$, $a \in R \in M_k$.

Lorsque λ (et donc $\bar{\mu}$) varie, on obtient ainsi tous les éléments de $\mathcal{A}^1_k(\alpha_k, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k)$ (III, § 6, 5.4; puisque k est parfait, on a $k[\mathbf{F}] = k + (\mathbf{F} - 1)k[\mathbf{F}]$).

5.6 À chaque extension T/K cyclique totalement ramifiée de degré p , et à chaque isomorphisme $\varphi: \Pi(T/K) \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on associe donc un élément $\mathcal{E}(T, \varphi)$ de $\mathcal{A}^1_k(U_K, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k)$ (4.2). La proposition suivante sera fondamentale pour la suite:

Proposition: *Lorsque T parcourt les extensions cycliques totalement ramifiées de degré p de k , les $\mathcal{E}(T, \varphi)$ engendrent le groupe $\mathcal{A}^1_k(U_K, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k)$.*

Démontrons d'abord deux lemmes:

5.7 Lemme: *Pour tout $n \geq 1$, soient $j_n: U_K^n/U_K^{n+1} \rightarrow U_K/U_K^{n+1}$ l'inclusion et*

$$j_n^*: \mathcal{A}^1_k(U_K/U_K^{n+1}, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k) \rightarrow \mathcal{A}^1_k(U_K^n/U_K^{n+1}, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k)$$

l'application induite. Si $e = v(p)$ et $e_1 = e/(p-1)$, on a $\text{Im } j_n^ = 0$ dans les trois cas suivants:*

- a) $n > pe_1$;
- b) $n < pe_1$ et $p|n$;
- c) $n = pe_1$ et 1 est la seule racine p -ième de 1 dans K .

De plus, si $n = pe_1$, on a toujours $\text{Im } j_n^ = 0$ ou $\text{Im } j_n^* \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

En effet, posons $m = n/p$ dans le cas b) et $m = n - e$ sinon. Soit f l'endomorphisme $x \mapsto x^p$ de U_K . D'après V, § 4, 3.5, f induit un épimorphisme $f_m: U_K^m/U_K^{m+1} \rightarrow U_K^n/U_K^{n+1}$ tel que $(\text{Ker } f_m)_{\text{red}} = 0$ dans les cas a) et b); si $n = pe_1$, $(\text{Ker } f_m)_{\text{red}}$ est de marque multiplicative $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k$, mais ne lui est pas isomorphe dans le cas c) (V, § 4, 3.6).

Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} U_K^m/U_K^{m+1} & \xleftarrow{\alpha} & U_K^n/U_K^{n+1} & \xrightarrow{\beta} & U_K/U_K^{n+1} \\ f_m \downarrow & & & & \downarrow f' \\ U_K^n/U_K^{n+1} & \xrightarrow{i_n} & & & U_K/U_K^{n+1}, \end{array}$$

où \mathfrak{f}' est induit par \mathfrak{f} , et où α et β sont les morphismes évidents. Posant $H(\mathfrak{X}) = \text{Ac}_k^1(\mathfrak{X}, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k)$ pour tout $\mathfrak{X} \in \text{Ac}_k$, on en déduit le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 H(U_K^m/U_K^{m+1}) & \xrightarrow{H(\alpha)} & H(U_K^n/U_K^{n+1}) & \xleftarrow{H(\beta)} & H(U_K/U_K^{n+1}) \\
 \uparrow H(\mathfrak{f}_m) & & & & \uparrow H(\mathfrak{f}') \\
 H(U_K^n/U_K^{n+1}) & \xleftarrow{\mathfrak{i}_n^*} & & & H(U_K/U_K^{n+1}).
 \end{array}$$

Comme la multiplication par p annule $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a $H(\mathfrak{f}') = 0$. Comme $H(\alpha)$ est injectif (car $\text{Ac}_k(U_K^{m+1}/U_K^m, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k) = 0$), on a $H(\mathfrak{f}_m)\mathfrak{i}_n^* = 0$. Or $\text{Ker } H(\mathfrak{f}_m)$ est l'image de $\text{Ac}_k(\mathfrak{X} \text{ et } \mathfrak{f}_m, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k) \simeq \text{Ac}_k(\mathfrak{X} \text{ et } \mathfrak{f}_m)_{\text{red}}, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k)$; d'où le lemme d'après ce qui précède.

5.8 Lemme: *Si G est un sous-groupe de $\text{Ac}_k^1(U_K, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k)$, considérons les assertions suivantes:*

- (i) $G = \text{Ac}_k^1(U_K, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k)$.
- (ii) Pour tout $n < pe/(p-1)$ tel que $(n, p) = 1$, l'image de G dans $\text{Ac}_k^1(U_K^n, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k)$ contient celle de $\text{Ac}_k^1(U_K^n/U_K^{n+1}, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k)$.
- (iii) L'assertion (ii) est satisfaite et, de plus, si $n = pe/(p-1)$, l'intersection des images de G et de $\text{Ac}_k^1(U_K^n/U_K^{n+1}, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k)$ dans $\text{Ac}_k^1(U_K, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k)$ n'est pas nulle.
Alors (iii) \Rightarrow (i) si K contient p racines p -ièmes de 1 et (ii) \Rightarrow (i) sinon.

En effet, si l'on pose $H(\mathfrak{X}) = \text{Ac}_k^1(\mathfrak{X}, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k)$, on a le diagramme commutatif et exact

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H(U_K/U_K^n) & \xlongequal{\quad} & H(U_K/U_K^n) & \xlongequal{\quad} & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & H(U_K/U_K^{n+1}) & \longrightarrow & H(U_K) & \longrightarrow & H(U_K^{n+1}) \\
 & & \downarrow \mathfrak{i}_n^* & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & H(U_K^n/U_K^{n+1}) & \longrightarrow & H(U_K^n) & \longrightarrow & H(U_K^{n+1}).
 \end{array}$$

On en tire que $\text{Im } \mathfrak{i}_n^* = \bar{H} \cap H(U_K^n/U_K^{n+1})$, si \bar{H} désigne l'image de $H(U_K)$ dans $H(U_K^n)$. En outre, comme on a $H(U_K) \simeq \bigcup_n H(U_K/U_K^n)$ d'après V, § 2, 3.9, on peut supposer avoir déjà prouvé que G contient $H(U_K/U_K^n)$ (remarquer

que $H(U_K/U_K^1) \cong H(\mu_k) = 0!$, et montrer que G contient $H(U_K/U_K^{n+1})$; cela revient à montrer que l'image \bar{G} de G dans $H(U_K^n)$ contient celle de $H(U_K^n/U_K^{n+1})$. Cela est clair dans les cas a), b) et c) de 5.7. Lorsque $n < pe/(p-1)$ et $(n, p) = 1$ cela résulte évidemment des hypothèses faites ((ii) ou (iii)). Enfin, si $n = pe/(p-1)$ et si K contient p racines p -ièmes de l'unité, on a $\bar{G} \cap \text{Im } j_n^* = \bar{G} \cap H(U_K^n/U_K^{n+1}) \neq 0$ par hypothèse, donc $\bar{G} \supset \text{Im } j_n^*$ d'après la dernière assertion de 5.7.

5.9 Revenons à la démonstration de 5.6; gardons les notations ci-dessus et prenons pour G le sous-groupe engendré par les $\mathcal{E}(T, \varphi)$ où T parcourt les extensions cycliques totalement ramifiées d'ordre p . On a un diagramme canonique

$$H(U_K) \xrightarrow{i_n^*} H(U_K^n) \xleftarrow{u_n} H(U_K^n/U_K^{n+1}) \xrightarrow{H(i_n^K)} H(\alpha_k).$$

Remarquons que $H(i_n^K)$ est bijectif puisque i_n^K est un épimorphisme de noyau infinitésimal. D'autre part, si l'on revient au diagramme 5.3, où l'on identifie Γ à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, et si l'on note $\mathcal{E}_i(T)$ la classe d'extensions définie par la i -ème ligne ($i = 1, 2, 4$) de ce diagramme, on a

$$j_t^*(\mathcal{E}_1(T)) = \mathcal{E}_2(T) = u_t H(i_t^K)^{-1}(\mathcal{E}_4(T)).$$

On a vu en 5.5 que pour tout n tel que $1 \leq n < pe/(p-1)$ et $(n, p) = 1$, et pour tout élément \mathcal{E} de $H(\alpha_k)$, on pouvait trouver une extension T/K du type envisagé telle que $t = n$ et que $\mathcal{E}_4(T) = \mathcal{E}$; d'autre part, si K contient p racines p -ièmes de 1, on a vu en 5.4 qu'il existait une extension T/K du type envisagé, avec $t = pe/(p-1)$, et telle que $\mathcal{E}_4(T)$ soit non nulle (donc $\mathcal{E}_2(T)$ non nulle, puisque u_n est injectif). On peut donc appliquer 5.8, ce qui achève la démonstration.

nº 6 Extensions abéliennes de K et extensions de U_K

6.1 Lemme: Soient T et S deux extensions galoisiennes finies totalement ramifiées de K telles que $S \subset T$. Le diagramme ci-dessous, où n est induit par $\mathfrak{N}_{T/S}$, est commutatif. Ses lignes et ses colonnes sont exactes.

En effet si $\gamma \in \Pi(T/K)$, on a $N_{T/S}(\gamma(\pi_T)/\pi_T) = \gamma(N_{T/S}(\pi_T))/N_{T/S}(\pi_T)$. L'égalité $\text{n} \circ i_{T/K} = i_{S/K} \circ \text{can.}$ résulte donc de ce que $N_{S/T}(\pi_T)$ est une uniformisante de S (confer par exemple 1.5 a)). Les lignes sont exactes (4.2), ainsi que la première colonne; la seconde l'est donc aussi.

$$\begin{array}{ccc}
1 & & 1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Pi(T/S)_k^{ab} & \xlongequal{\quad} & \Pi(T/S)_k^{ab} \\
\text{can.} \downarrow & & \downarrow i_{T/K} \circ \text{can.} \\
1 \longrightarrow \Pi(T/K)_k^{ab} & \xrightarrow{i_{T/K}} & U_T/\mathfrak{B}_{T/K} \xrightarrow{n_{T/K}} U_K \longrightarrow 1 \\
\text{can.} \downarrow & & \downarrow n \\
1 \longrightarrow \Pi(S/K)_k^{ab} & \xrightarrow{i_{S/K}} & U_S/\mathfrak{B}_{S/K} \xrightarrow{n_{S/K}} U_K \longrightarrow 1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
1 & & 1
\end{array}$$

6.2 Lemme: Soient T et S deux extensions galoisiennes, finies, totalement ramifiées telles que $T \otimes_K K_{nr} \simeq S \otimes_K K_{nr} = L$. Identifions $\Pi(T/K)$ et $\Pi(S/K)$ à $\Pi(L/K_{nr})$ au moyen des isomorphismes canoniques. Alors les extensions

$$\mathcal{E}_{T/K} \quad 1 \longrightarrow \Pi(L/K_{nr})_k^{ab} \xrightarrow{i_{T/K}} U_T/\mathfrak{B}_{T/K} \xrightarrow{n_{T/K}} U_K \longrightarrow 1$$

et

$$\mathcal{E}_{S/K} \quad 1 \longrightarrow \Pi(L/K_{nr})_k^{ab} \xrightarrow{i_{S/K}} U_S/\mathfrak{B}_{S/K} \xrightarrow{n_{S/K}} U_K \longrightarrow 1$$

sont équivalentes.

En effet, les extensions $\mathcal{E}_{T/K} \otimes_k \bar{k}$ et $\mathcal{E}_{S/K} \otimes_k \bar{k}$, déduites de \mathcal{E}_T et \mathcal{E}_S par extension des scalaires, s'identifient toutes deux à $\mathcal{E}_{L/\bar{K}_{nr}}$. Leurs classes d'équivalences diffèrent d'un élément de

$$\text{Ker}(\text{Ac}_k^1(U_K, \Gamma_k) \rightarrow \text{Ac}_k^1(U_K \otimes_k \bar{k}, \Gamma_k \otimes_k \bar{k})),$$

si $\Gamma = \Pi(L/K_{nr})^{ab}$. Or d'après III, § 6, 3.5 (*mutatis mutandis*), ce noyau s'identifie à $\tilde{H}^1(k, \mathfrak{G}^0(U_K, \Gamma_k))$. Comme $\mathfrak{G}^0(U_K, \Gamma_k) = \mathfrak{G}(U_K, \Gamma_k) = e_k$ parce que U_K est connexe, le noyau en question est donc nul.

6.3 Soient T une extension galoisienne finie, totalement ramifiée de K et X un groupe commutatif fini. La suite exacte $\mathcal{E}_{T/K}$ induit la suite exacte habituelle des groupes d'extensions

$$(*) \quad 0 \rightarrow \text{Ac}_k(\Pi(T/K)_k^{ab}, X_k) \xrightarrow{\partial_T} \text{Ac}_k^1(U_K, X_k) \rightarrow \text{Ac}_k^1(U_T/\mathfrak{B}_{T/K}, X_k).$$

Désormais nous identifions $\text{Gr}(\Pi(T/K), X)$ d'abord à $\text{Ac}_k(\Pi(T/K)_k^{ab}, X_k)$ au

moyen de l'isomorphisme évident, puis à un sous-groupe de $\text{Ac}_k^1(U_K, X_k)$ au moyen de \mathfrak{c}_T . Autrement dit, un homomorphisme $f: \Pi(T/K) \rightarrow X$ sera identifié à la classe de l'extension $\mathcal{E}_{T/K}f'$, $f': \Pi(T/K)^{\text{ab}} \rightarrow X$ étant l'homomorphisme déduit de f par passage au quotient. Le lemme 6.1 montre alors que $\text{Gr}(\Pi(S/K), X)$ est identifié à un sous-groupe de $\text{Gr}(\Pi(T/K), X)$ lorsque $S \subset T$, et que l'inclusion s'identifie à l'application canonique $\text{Gr}(\Pi(S/K), X) \rightarrow \text{Gr}(\Pi(T/K), X)$.

Théorème d'existence: Soient X un groupe commutatif fini et T_∞ une extension abélienne totalement ramifiée maximale du corps K . On a alors

$$\text{Ac}_k^1(U_K, X_k) = \bigcup \text{Gr}(\Pi(T/K), X),$$

où T parcourt les sous-extensions finies de T_∞ .

Le théorème d'existence signifie que, pour toute extension de k -groupes affines commutatifs

$$1 \rightarrow X_k \xrightarrow{u} \mathfrak{E} \xrightarrow{v} U_K \rightarrow 1$$

il y a une sous-extension finie T de T_∞ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \Pi(T/K)_k & \xrightarrow{\mathfrak{t}_{T/K}} & U_T/\mathfrak{B}_{T/K} & \xrightarrow{\mathfrak{n}_{T/K}} & U_K \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow f_k & & \downarrow \mathfrak{s} & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & X_k & \xrightarrow{u} & \mathfrak{E} & \xrightarrow{v} & U_K \longrightarrow 1. \end{array}$$

Pour démontrer notre théorème, nous pouvons évidemment supposer que $X = \mathbb{Z}/q^n\mathbb{Z}$, q premier. Pour toute extension finie totalement ramifiée T/K , notons alors

$$v_{T/K}: \text{Ac}_k^1(U_K, X_k) \rightarrow \text{Ac}_k^1(U_T, X_k)$$

l'homomorphisme $\text{Ac}_k^1(\mathfrak{R}_{T/K}, X_k)$. Si T/K est galoisienne, les suites exactes (*) et

$$0 \rightarrow \text{Ac}_k(\mathfrak{R}_{T/K}, X_k) \rightarrow \text{Ac}_k^1(U_T/\mathfrak{B}_{T/K}, X_k) \rightarrow \text{Ac}_k^1(U_T, X_k)$$

entraînent que $\text{Ker } v_{T/K} = \text{Gr}(\Pi(T/K), X)$. Il s'agit donc de prouver que, pour tout $x \in \text{Ac}_k^1(U_K, X_k)$, il existe une sous-extension finie T de T_∞ telle que $v_{T/K}(x) = 0$.

Montrons d'abord que, pour tout $x \in \text{Ac}_k^1(U_K, X_k)$, on peut trouver une extension séparable finie totalement ramifiée T' de K telle que $v_{T'/K}(x) = 0$. Raisonnons par récurrence sur n : l'assertion est triviale pour $n = 0$; lorsque $n = 1$, elle résulte de 5.2 pour $q \neq p$, de 5.6 pour $q = p$; supposons $n \geq 1$.

Comme $Ac_k(U_K, Y_k) = 0$ pour tout groupe commutatif fini Y , le foncteur $Y \mapsto Ac_k^1(U_K, Y_k)$ est exact à gauche en Y , et on a une suite exacte

$$0 \rightarrow Ac_k^1(U_K, (\mathbf{Z}/q^n\mathbf{Z})_k) \rightarrow Ac_k^1(U_K, (\mathbf{Z}/q^n\mathbf{Z})_k) \xrightarrow{q} Ac_k^1(U_K, (\mathbf{Z}/q^n\mathbf{Z})_k).$$

Si $x \in Ac_k^1(U_K, (\mathbf{Z}/q^n\mathbf{Z})_k)$, on a $q(q^{n-1}x) = 0$ et $q^{n-1}x$ provient donc d'une extension de U_K par $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})_k$; en vertu de ce qui précède, il existe une extension séparable finie totalement ramifiée T_1 de K telle que $v_{T_1/K}(q^{n-1}x) = 0$. L'élément $v_{T_1/K}(x)$ de $Ac_k^1(U_{T_1}, (\mathbf{Z}/q^n\mathbf{Z})_k)$ est donc annulé par q^{n-1} , donc provient d'une extension de U_{T_1} par $(\mathbf{Z}/q^{n-1}\mathbf{Z})_k$ en vertu d'une suite exacte analogue à la précédente. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une extension séparable finie totalement ramifiée T' de T_1 telle que

$$v_{T'/K}(x) = v_{T'/T_1}(v_{T_1/T}(x)) = 0.$$

Il nous suffit donc de démontrer le lemme suivant:

6.4 Lemme: *Pour toute extension séparable finie totalement ramifiée T'/K , il existe une sous-extension finie T de T_∞ telle que*

$$\text{Ker}(v_{T'/K}) \subset \text{Ker}(v_{T/K}).$$

On peut agrandir T' , donc supposer que $T'_{\text{nr}} = T' \otimes_K K_{\text{nr}}$ est une extension galoisienne de K (si S' est une extension galoisienne finie contenant T' , remplacer T' par une sous-extension totalement ramifiée maximale de $S'K_{\text{nr}}$ (2.1 et 2.2)). Posons $\Pi_1 = \Pi(T'_{\text{nr}}/K)$ et $\Pi_2 = \Pi(T'_{\text{nr}}/K_{\text{nr}})$, et soit L le corps des invariants de $\overline{(\Pi_1, \Pi_2)}$. Soit T_1 une sous-extension totalement ramifiée maximale de L ; on a $T_1 \otimes_K K_{\text{nr}} \simeq L$; comme $\Pi(L/K_{\text{nr}}) = \Pi_2/\overline{(\Pi_1, \Pi_2)}$ est central dans $\Pi(L/K) = \Pi_1/\overline{(\Pi_1, \Pi_2)}$, l'extension T_1/K est abélienne (2.3); il existe donc $T \subset T_\infty$ telle que $T_{\text{nr}} \simeq T_{1\text{nr}} \simeq L$ (d'après 2.3 on a $\Pi(K_{\text{ab}}/K) = \Pi(K_{\text{ab}}/K_{\text{abnr}}) \times \Pi(K_{\text{ab}}/T_\infty)$; si l'on pose

$$\Gamma = \Pi(K_{\text{ab}}/K_{\text{abnr}}) \cap \Pi(K_{\text{ab}}/T_1),$$

on choisira T de telle manière que $\Pi(K_{\text{ab}}/T) = \Gamma \times \Pi(K_{\text{ab}}/T_\infty)$. Montrons que T répond à la question:

Appliquant 2.1 à l'extension $T'_{\text{nr}}/T_{\text{nr}}$, on voit qu'il existe une extension totalement ramifiée $T'' \supset T$ telle que $T''_{\text{nr}} = T'_{\text{nr}}$. Si $x \in Ac_k^1(U_K, X_k)$, on a les équivalences (confer la démonstration de 6.2):

$$(x \in \text{Ker } v_{T'/K}) \Leftrightarrow (x \otimes_k \bar{k} \in \text{Ker } v_{T'_{\text{nr}}/\bar{K}_{\text{nr}}}) \Leftrightarrow (x \in \text{Ker } v_{T''/K});$$

on peut donc supposer $T'' = T'$, i.e. $T' \supset T$. Soient $\mathfrak{B}_{T'/K}$ la composante neutre de $\text{Ker}(\mathfrak{N}_{T'/K})$ et $\mathfrak{C} = \text{Ker}(U_{T'}/\mathfrak{B}_{T'/K} \rightarrow U_K)$; la suite

$$1 \rightarrow \mathfrak{C} \rightarrow U_{T'}/\mathfrak{B}_{T'/K} \rightarrow U_K \rightarrow 1$$

donne par extension des scalaires à \bar{k} la suite exacte $\mathcal{E}_{\hat{T}'_{\text{nr}}/\hat{k}_{\text{nr}}}$. On a donc $\mathfrak{C} \otimes_k \bar{k} \simeq \Pi(T'_{\text{nr}}/K_{\text{nr}})_{\bar{k}}^{ab} = \Pi_{2\bar{k}}^{ab}$; il en résulte que \mathfrak{C} est étale et que $\mathfrak{C}(\bar{k}) \simeq \Pi_2^{ab}$. On vérifie aussitôt que $\Pi(\bar{k}/k) = \Pi(K_{\text{nr}}/K) = \Pi_1/\Pi_2$ y opère par automorphismes intérieurs. Il en résulte que le plus grand quotient constant de \mathfrak{C} s'identifie à $(\Pi_2/(\Pi_1, \Pi_2))_k = \Pi(T/K)_k$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}c_k(\mathfrak{C}, X_k) & \longrightarrow & \mathcal{A}c_k^1(U_K, X_k) & \xrightarrow{\nu_{T'/K}} & \mathcal{A}c_k(U_{T'}, X_k) \\ & & \uparrow f & & \parallel & & \uparrow \nu_{T'/T} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}c_k(\Pi(T/K)_k, X_k) & \longrightarrow & \mathcal{A}c_k^1(U_K, X_k) & \xrightarrow{\nu_{T/K}} & \mathcal{A}c_k^1(U_T, X_k), \end{array}$$

f est un isomorphisme, ce qui entraîne $\text{Ker } \nu_{T/K} = \text{Ker } \nu_{T'/T}$.

n° 7 Groupes de Galois des extensions abéliennes d'un corps local

7.1 Soit T une extension galoisienne, finie, totalement ramifiée de K . La suite exacte

$$1 \longrightarrow \Pi(T/K)_k^{ab} \xrightarrow{\text{irr}} U_T/\mathfrak{B}_{T/K} \xrightarrow{\text{irr}} U_K \longrightarrow 1$$

de 4.2 induit une suite exacte des groupes d'homotopie (V, § 3, 4.1)

$$\pi_1(U_T/\mathfrak{B}_{T/K}) \xrightarrow{\pi_1(\text{irr})} \pi_1(U_K) \xrightarrow{\partial} \Pi(T/K)_k^{ab} \longrightarrow 1$$

(remarquer que $\pi_0(U_T/\mathfrak{B}_{T/K}) = 1$ et $\pi_0(\Pi(T/K)_k^{ab}) = \Pi(T/K)_k^{ab}$).

De même, comme on a $\pi_0(\mathfrak{B}_{T/K}) = 0$ par construction, la suite exacte canonique $1 \rightarrow \mathfrak{B}_{T/K} \rightarrow U_T \rightarrow U_T/\mathfrak{B}_{T/K} \rightarrow 1$ induit une surjection $\pi_1(U_T) \rightarrow \pi_1(U_T/\mathfrak{B}_{T/K}) \rightarrow 0$. Composant cette surjection avec $\pi_1(\text{irr})$, on obtient la suite exacte

$$\pi_1(U_T) \xrightarrow{\pi_1(\text{irr})} \pi_1(U_K) \xrightarrow{\partial} \Pi(T/K)_k^{ab} \longrightarrow 1.$$

Rappelons maintenant quelques notations de V, § 3, n° 4: pour tout k -groupe affine commutatif \mathfrak{U} , soit $\Gamma(\mathfrak{U})$ le plus grand quotient *proconstant* de \mathfrak{U} , et posons $\gamma(\mathfrak{U}) = \Gamma(\pi_1(\mathfrak{U}))(k)$. Remplaçant dans la suite exacte précédente chaque groupe \mathfrak{G} par $\Gamma(\mathfrak{G})(k)$, on aboutit à la *suite exacte de Serre*

$$\gamma(U_T) \xrightarrow{\gamma(\text{irr})} \gamma(U_K) \xrightarrow{\nu_{T/K}} \Pi(T/K)_k^{ab} \longrightarrow 1.$$

On dira que la surjection $\nu_{T/K}$, qui est déduite de l'application-bord ∂ , est *l'homomorphisme de Serre relatif à T/K* .

7.2 Soit S une sous-extension galoisienne de T . Reprenant les constructions de 7.1, on voit que le diagramme de 6.1 induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 \gamma(U_T) & \xrightarrow{\gamma(\mathfrak{N}_{T/K})} & \gamma(U_K) & \xrightarrow{v_{T/K}} & \Pi(T/K)^{ab} & \longrightarrow & 1 \\
 \downarrow \gamma(\mathfrak{N}_{T/S}) & & \parallel & & \downarrow \text{can.} & & \\
 \gamma(U_S) & \xrightarrow{\gamma(\mathfrak{N}_{S/K})} & \gamma(U_K) & \xrightarrow{v_{S/K}} & \Pi(S/K)^{ab} & \longrightarrow & 1.
 \end{array}$$

Ceci nous amène à considérer plus généralement une *extension galoisienne, totalement ramifiée, non nécessairement finie N de K*. Par passage à la limite projective les homomorphismes de Serre $v_{T/K}$, relatifs aux sous-extensions finies T/K de N/K , induisent l'homomorphisme de Serre $v_{N/K} = \varprojlim v_{T/K}$ relatif à N/K :

$$v_{N/K}: \gamma(U_K) \rightarrow \Pi(N/K)^{ab} \simeq \varprojlim_{T \subset N} \Pi(T/K)^{ab}.$$

Comme $\gamma(U_K)$ est compact et que les $v_{T/K}$ sont continus et surjectifs, $v_{N/K}$ est *continu et surjectif*. Son noyau est la limite projective des $\text{Ker } v_{T/K}$, i.e.

$$\text{Ker } v_{N/K} = \bigcap_{T \subset N} \text{Im } \gamma(\mathfrak{N}_{T/K}).$$

7.3 Théorème sur les groupes de Galois: Soit T_∞ une extension abélienne totalement ramifiée maximale du corps local K . Alors l'homomorphisme de Serre

$$v_{T_\infty/K}: \gamma(U_K) \rightarrow \Pi(T_\infty/K)$$

est un isomorphisme.

En effet, si X est un groupe commutatif fini et G un groupe topologique, notons $\text{Hom}(G, X)$ le groupe des homomorphismes continus de G dans X , muni de la topologie discrète. Il suffit de montrer que, pour tout X et tout $f \in \text{Hom}(\gamma(U_K), X)$, il y a un $T \subset T_\infty$ et un $g: \Pi(T/K) \rightarrow X$ tels que $[T: K] < \infty$ et $f = gv_{T/K}$; cela signifie que

$$\varinjlim_{T \subset T_\infty} \text{Hom}(v_{T/K}, X): \varinjlim \text{Hom}(\Pi(T/K), X) \rightarrow \text{Hom}(\gamma(U_K), X)$$

est bijectif. Or, si U_K^e est l'extension proconstante universelle de U_K (V, § 3, 4.2), la suite exacte canonique

$$1 \rightarrow \gamma(U_K)_k \xrightarrow{\xi} U_K^e \xrightarrow{\eta} U_K \rightarrow 1$$

induit des isomorphismes

$$\partial(X): \text{Hom}(\gamma(U_K), X) \simeq \text{Ac}_k(\gamma(U_K)_k, X_k) \simeq \text{Ac}_k^1(U_K, X_k).$$

D'après 6.3, il reste donc à voir que, pour tout T , le composé

$$\hat{\iota}(X) \circ \text{Hom}(v_{T/K}, X) : \text{Hom}(H(T/K, X) \rightarrow \text{Ac}_k^1(U_K, X_k)$$

coïncide avec l'injection de 6.3 qui nous a permis d'identifier $\text{Hom}(H(T/K), X)$ à un sous-groupe de $\text{Ac}_k^1(U_K, X_k)$: pour cela, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \gamma(U_K)_k & \xrightarrow{\xi} & U_K^t & \xrightarrow{\eta} & U_K \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow (v_{T/K})_k & & \downarrow \beta & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & H(T/K)_k & \xrightarrow{\iota_{T/K}} & U_T/\mathfrak{U}_{T/K} & \xrightarrow{n_{T/K}} & U_K \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow f_k & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & X_k & \xrightarrow{u} & \mathfrak{S} & \xrightarrow{v} & U_K \longrightarrow 1, \end{array}$$

où β est l'unique homomorphisme tel que $n_{T/K}\beta = \eta$. L'injection de 6.3 et $\hat{\iota}(X)$ associent respectivement à f et à $f \circ v_{T/K}$ la classe d'équivalence de la dernière ligne!

7.4 Nous pouvons donc appliquer les résultats de V, § 3 et § 4 pour déterminer la structure de $\gamma(U_K) \simeq H(T/K)$. En particulier, lorsque k est fini et a p^r éléments, on sait que $\gamma(U_K) \simeq U_K(k) = U_K$:

De façon plus précise, soit T une extension galoisienne, finie, totalement ramifiée de K et considérons le diagramme (III, § 5, 7.3)

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H(T/K)_k^{ab} & \xrightarrow{\iota_{T/K}} & U_T/\mathfrak{U}_{T/K} & \xrightarrow{n_{T/K}} & U_K \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow a - \mathfrak{B}^r - \text{Id} = 0 & & \downarrow b - \mathfrak{B}^r - \text{Id} & & \downarrow c - \mathfrak{B}^r - \text{Id} \\ 1 & \longrightarrow & H(T/K)_k^{ab} & \xrightarrow{\iota_{T/K}} & U_T/\mathfrak{U}_{T/K} & \xrightarrow{n_{T/K}} & U_K \longrightarrow 1. \end{array}$$

On a a et $b \in (U_T/\mathfrak{U}_{T/K}(k))_k$, $a \neq b$, $c \in (U_K)_k$. Soit $a = H(T/K)_k^{ab}$ et Soit $b = 0$ (III, § 5, 7.2). Le lemme du serpent (*Alg. comm.*, I, § 1, prop. 2) fournit une suite exacte

$$(U_T/\mathfrak{U}_{T/K}(k))_k \xrightarrow{n_{T/K}} (U_K)_k \xrightarrow{\iota_{T/K}} H(T/K)_k^{ab} \longrightarrow 1,$$

d'où une suite exacte

$$U_T \xrightarrow{n_{T/K}} U_K \xrightarrow{\iota_{T/K}} H(T/K)_k^{ab} \longrightarrow 1,$$

si l'on pose $\tau_{T/K} = \tau(k)$.

Lemme: L'homomorphisme $\tau_{T/K}$ coïncide avec l'homomorphisme de Serre $v_{T/K}$.

En effet, l'extension proconstante universelle de U_K s'identifie à la suite exacte

$$1 \longrightarrow (U_K)_k \longrightarrow U_K \xrightarrow{\mathfrak{F}^r - \text{Id}} U_K \longrightarrow 1.$$

Or le diagramme (*) montre que l'homomorphisme \mathfrak{F} de 7.3 est l'unique homomorphisme factorisant \mathfrak{b} à travers $\mathfrak{n}_{T/K}$ ($\mathfrak{b} = \mathfrak{F}\mathfrak{n}_{T/K}$). Le morphisme $(v_{T/K})_k: \text{Ker } \mathfrak{c} \rightarrow \text{Ker } \mathfrak{n}_{T/K}$ coïncide manifestement avec τ .

Lorsque T parcourt les sous-extensions finies d'une extension abélienne totalement ramifiée maximale T_∞ , $\text{Ker } v_{T/K}$ parcourt les sous-groupes ouverts de $\gamma(U_K) \cong U_K$ d'après 7.3. Nous avons donc prouvé:

Théorème du corps de classes local: *Soient K un corps local de corps résiduel fini et T_∞ une extension abélienne totalement ramifiée maximale de K . L'application $T \mapsto N_{T/K}(U_T)$ met en correspondance bijective les sous-extensions finies de T_∞ et les sous-groupes ouverts de U_K .*

7.5 Remarque: Soient K_{ab} une clôture abélienne de K et K_{abnr} la plus grande sous-extension non ramifiée de K . Si T_∞ est une sous-extension totalement ramifiée maximale de K_{ab} , on déduit de 2.5 et 7.3 des isomorphismes

$$\gamma(U_K) \cong \Pi(T_\infty/K) \cong \Pi(K_{ab}/K_{abnr}).$$

L'isomorphisme $v: \gamma(U_K) \rightarrow \Pi(K_{ab}/K_{abnr})$ obtenu est indépendant du choix de T_∞ , comme il résulte aussitôt de 6.2.

7.6 Remarque: Pour quelques compléments, en particulier pour l'étude de l'application de réciprocité et des extensions abéliennes non nécessairement totalement ramifiées, nous renvoyons le lecteur à M. Hazewinkel, *Abelian extensions of local fields*, thèse, 18 juin 1969, Amsterdam.