WISKUNDE ALS LABORATORIUM

R E D E

Uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van gewoon hoogleraar in de Wiskunde aan de Faculteit der Economische Wetenschappen van de Erasmus Universiteit te Rotterdam op donderdag 7 juni 1973 door

Dr. Michiel Hazewinkel

Mijne heren leden van het College van Bestuur,
Dames en Heren leden van de Universiteitsraad,
Dames en Heren leden van het Wetenschappelijk en
Niet Wetenschappelijk Corps
Dames en Heren Studenten
en voorts Gij die door Uw aanwezigheid van Uw belangstelling
blijk geeft.

Zeer gewaardeerde toehoorders,

1. INLEIDING.

> "De wiskunde is een hulpmiddel voor eindige mensen om hen te helpen denken. Een God zou geen wiskunde nodig hebben".

Deze uitspraak is het thema van vanmiddag. Het zij hierbij aangetekend, dat de menselijke hersens zulke hulp hard nodig hebben. Het is met ons denkvermogen zoals met de meeste menselijke vermogens: zonder hulpstukken en de vaardigheid daarmee om te gaan (c.q. ze te leren gebruiken) is het maar een zielige vertoning. Onze taal is een van die hulpstukken. Met betrekking tot een ander: de wiskunde, zegt E.T. Bell in dezen (cf. [9]p.18).

> "One of the chief services which mathematics has rendered the human race is to put common sense where it belongs, on the topmost shelf next to the dusty canister labelled discarded nonsense"

"Common sense" kunt U in dit citaat wel lezen als redeneren op basis van onze dagelijkse taal aangevuld met ervaring. Tinbergen (cf. [52]) karakteriseert in dit verband niet-wiskundige bewijsvoeringen als essentiëel lineair; zo'n redenering bestaat uit een serie achtereenvolgende gevolgtrekkingen of causale relaties; dit in tegenstelling tot de mogelijkheid van simultane relaties en feedback systemen; situaties waarmee ons gewone gezonde verstand naar het schijnt slecht kan opschieten. Dat dit zo is mag overigens nauwelijks verwondering wekken daar onze taal historisch ontstaan is in een goeddeels lineair geordende wereld. Zoals bijv. M. McLuhan: in zijn "The medium is the message" [61] met kracht betoogd. De verknooptheid van een in ruime mate van terugkoppeling voorziene wereld is van (relatief) recente datum.

Het is overigens niet mijn bedoeling hier vanmiddag een pleidooi te houden voor het gebruik van wiskunde in de sociale wetenschappen.

Dit is al vele malen gebeurd met wisselend succes. Het lijkt overigens, dat de strijd goeddeels gestreden is.
Zoals M.R. Stone in het voorwoord van zijn boek "Mathematics in the social sciences" [48] zegt:

> "Dat wiskunde een onmisbaar stuk gereedschap is voor de sociale wetenschappen is niet langer een controversiële uitspraak. Men is het er nu in het algemeen over eens, dat wiskundige methoden nodig zijn zowel op theoretisch niveau teneinde problemen precies te formuleren, conclusies uit hypothesen te trekken en inzicht te verkrijgen in gecompliceerde processen; als op het practische niveau bij het meten van variabelen; het schatten van parameters en de organisatie van de uitgebreide berekeningen verbonden met het verkrijgen van practische resultaten".

Aan de andere kant is er een bijzonder aardig geschrift: Heinz W. Brand. The fecundity of mathematical methods in economic theory, cf [59], waarin aan de hand van voorbeelden getwijfeld wordt of het wel de moeite loont wiskunde te gebruiken in de economie. Ook hij twijfelt niet, dat het kan en nuttig is; maar is het efficiënt, c.q. nodig ? Aan zijn analyse lijkt enigermate het ex-post-stigma te kleven.
En in elk geval zoals Max Planck in zijn wetenschappelijke autobiografie zegt [39]:

> "Een nieuwe wetenschappelijke waarheid overwint niet, doordat de tegenstanders ervan overtuigd raken, maar doordat er een nieuwe generatie opgroeit die er vertrouwd mee is, terwijl de tegenstanders geleidelijk sterven".

en het lijkt mij niet beleefd om zich met dit proces te bemoeien.

Hoe echter, en op welke punten, wiskundige methoden in allerlei wetenschappen, bijv. de sociale, nuttig zijn (of interfereren met, daar is ook wel wat voor te zeggen cf, [43]) is veel slechter bekend. Zo lijkt er een wijdverspreid misverstand te zijn, dat alleen quantitatief te maken verschijnselen voor een wiskundige benadering toegankelijk zouden zijn. In dezen is het interessant om te kijken naar de resultaten van een enquête gehouden onder enkele zeer vooraanstaande geleerden van allerlei pluimage. Het resultaat van deze enquête werd gepubliceerd onder de titel "Die Mathematisierung der Wissenschaft: Ergebnis einer Umfrage" cf. [15]. Een van de vragen was

> Gelooft U, dat de wiskunde eens het volledige gebied der sociale en geesteswetenschappen kan omvatten.
> Of gelooft U, dat er in deze wetenschappen gebieden zijn die voor de wiskundige methoden ontoegankelijk zijn.

De antwoorden op deze vraag waren niet zo bijster interessant. Wiskundigen, Cybernetici en enkele natuur- en scheikundigen antwoordden met Ja op het eerste gedeelte van deze vraag, terwijl philosofen, historici, theologen en enkele der vertegenwoordigers der sociale wetenschappen met Neen antwoordden. Interessanter waren de redenen. En verreweg het grootste deel der Neen zeggers gaf als enige of hoofdreden op, het niet kwantificeerbaar zijn van allerlei verschijnselen

Echter wiskunde is niet alleen het expliciet oplossen van een handjevol stelsels vergelijkingen (eventueel differentie of differentiaal vergelijkingen); en het is zeker niet "de wetenschap van getal en meten" zoals sommige woordenboeken stug blijven beweren. Veel beter is bijvoorbeeld de definitie die M.I.T. in 1953 ten behoeve van eventuele aankomende studenten gaf

> "Mathematics is the science of structure and pattern";

een ander aspect belicht Brockway MacMillan als hij zegt (cf [34])

> "Mathematics is the art of avoiding computation"

in de loop van een allegorisch verhaal over de rol die de wiskunde heeft gespeeld in de ontwikkeling van de rakettentechniek. Heel duidelijk maakt hij daarin, dat niet het oplossen van in dit geval inderdaad een stelsel differentiaal vergelijkingen belangrijk was maar het ontdekken, formuleren, definiëren en analyseren van allerlei begrippen zoals impuls, energie, potentiëel, massa fracties, ontsnappingssnelheid in termen waarvan het hele probleem beschreven en besproken kon worden.

Het is niet <u>nadat</u> de feiten geselecteerd en gebundeld zijn, dat de wiskundige methoden aan de beurt komen, zoals Edward de Bono in zijn "The use of lateral thinking" [11] zeer ten onrechte beweert (p.11), maar lang daarvoor, dat de wiskundige aanpak zijn mijnsinziens mogelijk wel belangrijkste functie moet vervullen. De titel van deze rede: "Wiskunde als laboratorium" wijst hier ook op. Bedoeld wordt: <u>als laboratorium waarin allerlei vage principes en ideeën in verschillende</u>

combinaties verbonden, gecombineerd, verfijnd, gepreciseerd, geanalyseerd en op hun consequenties bekeken kunnen worden.

De kracht van de wiskunde ligt althans ten dele in haar vermogen ons conclusies te verschaffen die allerminst duidelijk zijn op basis van alleen een gezond verstand inspectie van de hypothesen (cf. [7] p.96).

Wat er precies gebeurt, c.q. gebeuren kan als een vage doctrine of wetenschap gemathematiseerd raakt is een nog goeddeels onaangeraakt wetenschappelijk probleem. Interessant materiaal hierover, zij het voor het merendeel van minder specifiek, dan dat verwerkt in de hieronder volgende bladzijden is te vinden in [60], G. Canquilhem (ed), La mathematisation des doctrines informes. Hermann, 1973.

Teneinde de discussie iets te preciseren geef ik hieronder een soort van blokschema van de relaties tussen theorie en waarneming en hun interactie.

Dit schema moet niet opgevat worden als een universeel paradigma van hoe wetenschap altijd bedreven wordt, c.q. moet worden. Pogingen het doen van wetenschap in het vast keurslijf te wringen hebben bijvoorbeeld tot het allermerkwaardigste idee geleid dat dit via de cykel observatie → inductie → theorie → deductie → waarneming zou moeten gaan. Het gegeven schema lijkt mij althans iets juister en het geeft mij de gelegenheid te praten over interrelatie aspecten die ik belangrijk en verwaarloosd acht.

Wat betreft de pogingen der methodologie of philosophie der wetenschappen om normatief op te treden, past maar een woord (P.K. Feyerabend [63]):

"It is a subject with a great past"

Waar ik op eigen gezag, copyright schendend, nog wel aan toe wil voegen: You can fool some scientists all of the time and all scientists some of the time (en dat is de logisch positivisten (empiricisten) helemaal zo slecht nog niet gelukt), but not all scientists all of the time.

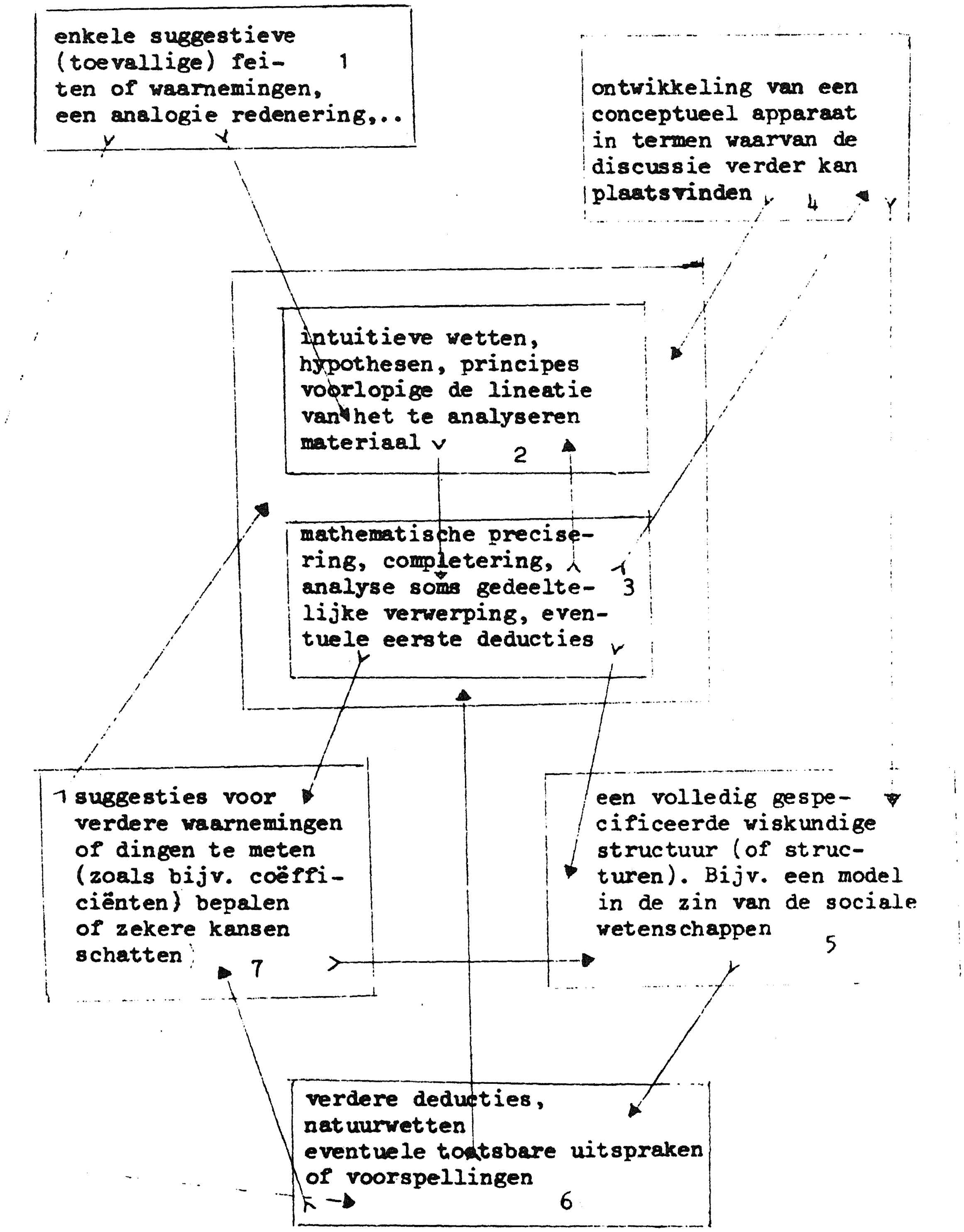
enkele suggestieve (toevallige) feiten of waarnemingen, een analogie redenering,..
1
ontwikkeling van een conceptueel apparaat in termen waarvan de discussie verder kan plaatsvinden
4
intuitieve wetten, hypothesen, principes voorlopige de lineatie van het te analyseren materiaal
2
mathematische precisering, completering, analyse soms gedeeltelijke verwerping, eventuele eerste deducties
3
suggesties voor verdere waarnemingen of dingen te meten (zoals bijv. coëfficiënten) bepalen of zekere kansen schatten
7
een volledig gespecificeerde wiskundige structuur (of structuren). Bijv. een model in de zin van de sociale wetenschappen
5
verdere deducties, natuurwetten eventuele toetsbare uitspraken of voorspellingen
6

fig.1.

In [66] geeft F. Machlup een hele lijst van methodologische tenets die op verschillende ogenblikken door verschillende aanhangers van verschillende wetenschappen als sine qua non beschouwd worden. Voorbeelden zijn : het verwerpen van causaliteit en causale theorieën, het prefereren van beschrijving boven verklaring, de verboden op non-observables en slechts geest constructies, het verachtend verwerpen als pseudo problemen van alle vragen waarop geen direct verifiëerbare antwoorden mogelijk zijn, het alleen operationeel gedefiniëerde concepten toelaten, de eis dat elke aanname van een theorie afzonderlijk getest wordt, de bewering dat theorieën leeg zijn als er postulaten in voorkomen, en het idee dat theorieën niet meer mogen omvatten dan waarvoor empirische gegevens beschikbaar zijn. Al deze tenets zijn de physici langzamerhand wel ontgroeid.

Met Julian Jaynes [64], ben ik van mening, dat "unity of science", zeker methodologisch, een droom is. Hoe we wetenschap doen, waarom het soms succes heeft, het blijven vragen. Inductie als hard verdedigbaar principe is dood (maar wil niet goed blijven liggen). Aan de andere kant kunnen we het weer met Wesley C. Salmon [41], eens zijn dat het helemaal geen bezwaar hoeft te zijn als men niet weet hoe precies men iets doet, dat blijkt te werken (soms). Uit de geschiedenis der wiskunde is dit maar al te goed bekend, en in dat geval hebben we er zo'n 3000 jaar over gedaan om enigszins achter de spelregels te komen. Wat betreft confirmatie en inductie, twee sleutelproblemen, die bestaan pas zo'n 300 jaar.

De stippeltjes pijl van 1 naar 6 staat er om niet helemaal uit te sluiten, dat onder sommige bizarre omstandigheden "objectieve" waarnemingen direct leiden tot een "natuurwet".

In het algemeen zoals bijv. ook de Bono opmerkt (cf. [11] p.16) is informatie niet zelforganiserend. Ja zelfs sterker, om waardevolle informatie te verkrijgen dient men veelal reeds een zeer goed idee te hebben van naar wat men op zoek is.

Ons hoofdthema vandaag wordt gevormd door de pijlen $2 \to 3$ en $3 \to 2$, daarnaast zullen we min of meer toevallig ook de pijlen $1 \to 2$, $3 \to 4$, $3 \to 7$ tegenkomen. We merken op, dat de keten $1 \to 2 \to 3 \to 7 \to 5 \to 6$ een redelijk beeld geeft van het bouwen van een economisch model en het daarmee werken. Cf. Tinbergen [51]. Het meest bekende gebruik (en volgens vele het enige) van wiskunde betreft de pijlen $5 \to 6$ en $7 \to 5$ en voor sommige $\{2,3\} \to 5$

2. ZOEKEN NAAR IETS DAT ER OP LIJKT.

De eerste groep voorbeelden die ik vandaag kort beschouwen wil heeft betrekking op de pijlen 1 → 2 → 3, soms met vrijwel overslaan van stadium 2. Het gegeven schema kan op allerlei niveaux doorlopen worden en het stadium wat we hier op het oog hebben is nog aller primitiefst: het stadium dat we vrijwel nog geen enkel idee hebben wat er aan de hand is.

Al deze voorbeelden vallen min of meer onder het volgende schema: gegeven een groepje waarnemingen of feiten, zoek iets wat er op lijkt en redelijk eenvoudig is; een curve die door zekere punten gaat; een eenvoudig proces, dat soortgelijke verschijnselen produceert als de waargenomenen. Een technische term in deze omgeving is "sufficiency analysis" waarover verderop iets meer.

2A Empirical Curve Fitting van Gegevens over Leerprocessen.

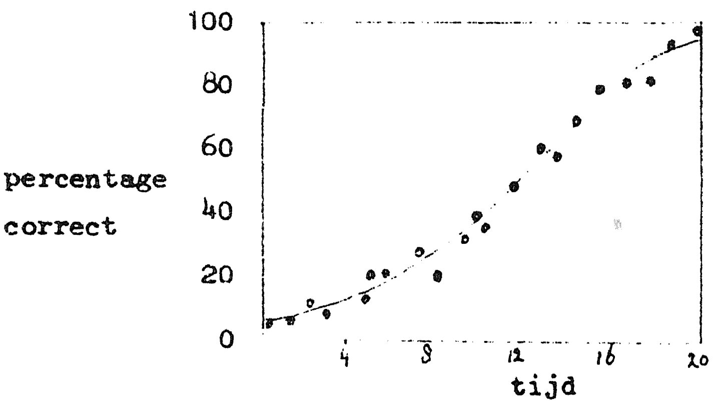

fig.2.

Een typisch stel gegevens van een leerproces is een S-achtige distributie van punten zoals geschetst in bovenstaande grafiek. Zo'n punt representeert dan bijv. het percentage correcte antwoorden nadat een gegeven tijd er aan besteed is de betekenissen van een rij 3-letter symbolen te leren. Een familie formules die ongeveer deze vorm hebben is

$$y = \frac{be^{Ax}}{c+e^{Ax}}$$

waarin b, A, c constanten zijn (die ook nog wel een interpretatie kunnen krijgen).

Gegeven nu de boven door stippen aangegeven waarnemingen dan kunnen we - door kleinste kwadraten bijvoorbeeld - die A, b, c bepalen waarvoor de kurve gegeven door bovenstaande vergelijking de beste fit geeft. Dit is "expèrimental curve fitting".

Deze functie zoals ook andere experimenteel bepaalde krommen draagt natuurlijk enige suggesties in zich betreffende hoe het leerproces verloopt. Zo impliceert deze functie bijv. dat de mate waarin bijgeleerd wordt per tijdseenheid door oefening evenredig is met de reeds geleerde hoeveelheid en met de nog te leren hoeveelheid voordat de limiet is bereikt. Dit ziet men door

$\frac{dy}{dr}$ uit te rekenen. En dit is dan weer een hypothese die wellicht op andere wijze onderzocht zou kunnen worden en die ook suggesties doet over welk soort processen zich bij zo'n leersituatie voordoen. Natuurlijk zijn er ook andere families van krommen die ongeveer deze vorm hebben, en er is a priori geen reden om juist deze familie te selecteren; en er zijn ook geen methoden hoe de "beste" familie te specificeren, zelfs is dat begrip niet gedefiniëerd. Hier ziet men ook een van de reden waarom het experimenteel constateren van zeker functionele relaties zo'n wankele basis heeft.

Voor een verdere bespreking van het type voorbeeld, dat we zo juist behandeld hebben cf [19] p. 368-375.

2B. <u>Sufficiency Analysis by Cognitieve Processen</u> (cf. [36])

Onze volgende voorbeeld betreft het menselijke cognitieve gedrag. Bron voor de meeste van de hier volgende opmerkingen is het artikel van A. Newell, Remarks on the relationship between artificial intelligence and cognitive psychology [36]. In dit gebied vindt men vermogens en prestaties waarvan we vaak geen idee hebben hoe ze verricht worden. Dan wordt het belangrijk een of ander systeem te verzinnen, dat zulke taken aankan. Slagen we er bovendien in dit zo te doen, dat geen aspect van deze systemen de menselijke vermogens te boven gaat dan is er het eerste begin van een theorie. Zoiets heet wel een sufficiency analysis. Het is in zo'n situatie zelfs wel mogelijk, dat we door zo'n analyse inderdaad de aard van het werkelijke systeem ontdekken. Immers de beperkingen waaraan een intelligent systeem in deze wereld onderhevig is kunnen wel zo stringent zijn, dat er maar één soort mechanisme mogelijk is; vooral als we ook eisen, dat het opgebouwd is uit veel gelijksoortige componenten, hierarchisch geordend, en door evolutie ontstaan. Dit is een soort situatie die zich in de wiskunde overigens met grote regelmaat voordoet. Keer op keer blijkt een bepaald systeem volledig te zijn gekarakteriseerd door een paar van zijn eigenschappen te specificeren.

En ook als deze situatie zich niet voordoet dan blijft nog het verschijnsel dat als een model zekere gedragingen van een werkelijk systeem simuleert het een grotere kans heeft ook nog andere gedragingen correct te simuleren. En doet het ook dat niet dan geven de afwijkingen weer nuttige informatie ten aanzien van verdere eisen die we aan ons model willen opleggen.

Ons laatste voorbeeld in deze groep is iets anders van aard. Het betreft de zogenaamde Brownse beweging.

2C. Brownse Beweging.

Een klein stofdeeltje gesuspendeerd in water bijvoorbeeld, bekeken door middel van een microscoop, blijkt een grillig soort beweging uit te voeren. De zogenaamde Brownse beweging. Op het moment dat N. Wiener en onafhankelijk P. Levy zich voor dit phenomeen gingen interesseren waren de statistische aspecten van de Brownse beweging reeds goed bekend. (Einstein, Smolukowski). Echter over de individuele paden die deze deeltjes beschreven vrijwel niets, behalve zoals N. Wiener schrijft ([56] p.38) een zeer suggestieve opmerking van Perrin; namelijk dat de paden die deze deeltjes beschreven deden denken aan de continue nergens differentiëerbare krommen van de wiskundigen. Hierdoor geinspireerd kwam N. Wiener tot de definitie van wat nu bekend staat als een Wiener-Levy proces, een zeer fundamenteel object uit de nu zeer omvangrijke theorie der continue stochastische processen.

Interessant is het op temmerken, dat ook Levy door dezelfde continue nergens differentiëerbare krommen werd geinspireerd, zoals hij op pagina 121 van zijn "Quelques aspects de la pensée d'un mathematicien zegt". [32].

Dit laatste voorbeeld uit deze groep laat duidelijk zien, dat zelfs zulke pathologische bezigheden als het construeren van continue krommen met (bijna) nergens een raaklijn zijn nut kan hebben (overigens lang nadat dit gebeurd was). Al deze voorbeelden laten zien, dat het belangrijk is een ruim arsenaal aan wiskundige voorbeelden, constructies, functies en theorieën ter beschikking te hebben om er in te kunnen snuffelen bij het zoeken naar iets wat lijkt op het soort verschijnselen, dat we aan het bestuderen zijn. Het verder opbouwen en uitbreiden van dit arsenaal is één van de taken van de wiskundige. Zoals Ulam in een artikel met als titel "The applicability of mathematics" [53] zegt

> "Veel van het werk dat in de mathematische tijdschriften wordt gepubliceerd bestaat uit gedetailleerde en nogal sterk gespecialiseerde onderzoekingen. Ze kunnen beschouwd worden als verkenners die in alle richtingen worden uitgezonden. Sommige blijken dan gebieden tegen te komen die van belang zijn in het grote spel, dat de mens met de natuur speelt".

In welke gevallen overigens, en hoeverre, de reeds aanwezige wiskunde op een gegeven tijdstip bij de vorming van allerlei begrippen een rol gespeeld heeft is een nog goeddeels onuitgezochte kwestie. Materiaal hierover is bijv. te vinden in Bochner's "The role of mathematics in the rise of science", [10]; cf. bijvoorbeeld blzn. 139, 190, 257. Ook in M. Kline's "Mathematics in western culture" zijn hierover (mogelijk niet altijd helemaal verdedigbare) verreikende uitspraken te vinden.
Cf. verder ook [60] en de vier boeken van M. Jammer: "Concepts of incess", "Concepts of space", "Concepts of force", "The conceptual development of quantum mechanics", [67], [68], [69], [70].

3. THEORIE, WAARNEMING en CONCEPTEN.

In deze paragraaf trachten we iets te zeggen over de pijlen $3 \to 4$, en $3 \to 7$, naast weer ons hoofdthema de pijlen $2 \to 3$ en $3 \to 2$.

Dat onze philosofische, religieuse en wetenschappelijke vooroordelen in hoge mate bepalen wat we (kunnen) waarnemen is reeds veelvuldig betoogd. Zo vermeld V.P. Duhem het voorbeeld van de physicus Buridan die, ofschoon geboren in een aan zee grenzende provincie, weigerde de eb en vloed verschijnselen waar te nemen die er volgens zijn theoretische denkbeelden niet konden zijn. Blindheid van dit type is zeer veel voorkomend. Voor enkele verdere voorbeelden zie bijv. het artikel van B. Barber. Resistance of scientists to scientific discovery, [62].

Dit beperkt zich niet tot de wetenschappelijke wereld en is een vaak nuttige soms schadelijke eigenschap van onze hersenen. Cf. ook de Bono als hij opmerkt dat ([11] p.27).

"De functionele organisatie van onze geest zorgt ervoor dat een situatie op de meest waarschijnlijke manier geinterpreteerd wordt. En deze waarschijnlijkheden worden bepaald door ervaring en de zaken die op dat moment aandacht vragen".

Het omgekeerde gebeurt ook, veelvuldig suggereert of voorspelt de gemathematiseerde versie van een theorie het bestaan van verschijnselen of voorwerpen die voorheen niet waargenomen waren. Dit kan bijv. voorkomen als gevolg van het feit, dat zekere vergelijkingen meer oplossingen toelaten dan waarvan men uitging. Voorbeelden hiervan zijn er te over: de ontdekking van de planeet Uranus op basis van berekeningen naar aanleiding van storingen in de baan van Neptunus door Adams en Leverrier, de voorspelling van het positron door Dirac, de voorspelling en ontdekking van allerlei mesonen, de ontdekking van het Ω^--deeltje op basis van de theorie van de "eight-fold way" van Gel-Mann. De voorspelling van het breken van een lichtstraal in hele kegel brekingsstralen door W. Rowan Hamilton. Weer een heel ander voorbeeld komt uit de theorie het verloop van zenuw impulsen.Naast de normale bleek er een tweede oplossing te bestaan (theoretisch) van de vergelijkingen die dit beheersen. Cf. [13] p. 223. En deze blijkt onder zekere omstandigheden (verdovende middelen) inderdaad voor te gaan komen. Zoals Hirsch Cohen daarover zegt:

"In dit geval en in enkele anderen verspreid door de hele biologie is de interactie met wiskunde sterk genoeg om suggesties te leveren waar nieuwe biologische verschijnselen te zoeken".

Ook wil de wiskundige behandeling van een probleem wel eens de begrippen voorraad van een gegeven wetenschap te verrijken. De interpretatie van Lagrange multipliers als schaduwprijzen (in de economie) of als sensitiviteitscoëfficiënten (in optimalisering theorie) is hier een voorbeeld van. Ook de hulpfuncties die optreden bij de formulering van het Pontryagin maximum principe tracht men economisch te interpreteren cf. Lacaze [30] en Dorfman [66], en zo komt men in het geval van Dorfman, tot een verrijking van de taal waarin over capitaaltheorie gediscussiëerd wordt. (Dit is een voorbeeld van een interactie $3 \to 4$).

Al deze aspecten, suggesties voor andere waarnemingen, mogelijke uitbreiding van het conceptuele apparaat, zijn in meer of mindere mate vertegenwoordigd in het volgende voorbeeld uit de psychologie, dat ik nu zal proberen in iets meer detail te beschrijven.

HET LEERMODEL VAN ESTES

We stellen ons een zeer simpele leersituatie voor. De proefpersoon wordt geplaatst voor twee lampjes en moet raden welke van de twee lampjes aan zal gaan. Nadat hij geraden heeft, wordt door de experimentator met een vaste kans een der beide lampjes aangedaan. I.e. de experimentator gooit bijvoorbeeld met een dobbelsteen en als 3,4,5,6 bovenkomen doet hij het linkerlampje aan en als 1,2 bovenkomen het rechter. De kans, dat het linkerlampje aangaat is dus 2/3, de kans dat het rechterlampje aangaat 1/3. We tekenen de serie gokken van de proefpersoon systematisch op.

Laten we eerst even aannemen, dat hij tracht zijn beloning (goed raden) te maximeren. Dan zal hij voortdurend op het linkerlampje dienen te gokken. Dit echter blijkt niet te gebeuren. Eerder treedt zoiets op als event matching, i.e. de proefpersoon gokt gemiddeld 2/3 van de keren op het linkerlampje. Een methode om dit te "verklaren" is aan te nemen, dat de proefpersoon niet beloning maximeert maar teleurstelling minimeert. Cf. [47] voor meer details over deze benadering.

Een heel ander modelletje voor leren in dit verband is opgesteld door Estes. Cf. [21] en [22]. Laten we eens aannemen, dat er n stimulus elementen zijn die elk geconditioneerd zijn op òf L (linkerlampje) òf R(rechterlampje).

Het modelletje zit nu als volgt in elkaar:

(1) Bij elke keer raden selecteert de proefpersoon een aantal stimulus elementen. Elk stimulus element heeft kans t om geselecteerd te worden.

(2) Zijn van de geselecteerde elementen er r op R geconditioneerd en l op L dan wordt met kans $r/(r+l)$ op R gegokt.

(3) Als dan R (resp. L) aangaat raken al de zojuist geselecteerde stimulus elementen geconditioneerd op R (resp. L)

Dit model kan eenvoudig gepresenteerd-worden door een zogenaamd Markov proces met $n+1$ toestanden. Toestand s representeert de situatie, dat er s stimuluselementen op L geconditioneerd zijn. De overgangswaarschijnlijkheden blijken zonder al te grote moeilijkheden uit te rekenen te zijn. En we kunnen ons nu afvragen met welke frequentie door een gegeven proefpersoon L geraden zal worden op den duur (volgens dit model). In het bovenbeschreven geval komt hier 2/3 uit; i.e. volgens dit model zal event matching inderdaad optreden.

Echter een goede theorie moet meer doen dan alleen maar een gegeven collectie waarnemingen verklaren. In dit geval suggereert het model een ander experiment. Het is namelijk voor de experimentator helemaal niet nodig zich onafhankelijk te gedragen van wat de proefpersoon raadt. Hij kan bijvoorbeeld ook het volgende spelletje spelen

		experimentator	
		L	R
proefpersoon	L	v	$1-v$
	R	$1-w$	w

fig. 3

i.e. als de proefpersoon L raadt dan wordt dit beloond met kans v, en niet beloond met kans $1-v$ en als de proefpersoon R raadt wordt dit beloond met kans w en niet beloond met kans $1-w$. (Het bovenbeschreven geval is dat waarbij $v+w = 1$). We kunnen ons nu weer afvragen wat volgens dit model de frequentie zal zijn waarmee een proefpersoon L raadt. Dit blijkt $\frac{v}{v+w}$ te zijn (als $vw \neq 0$). En dit blijkt met de waarnemingen te kloppen.

Het getal t is de leerparameter en beheerst de snelheid waarmee geleerd wordt (in het model), wat ook weer aanleiding geeft tot verdere theoretisch en experimentele beschouwingen.

4. INTERACTIE VAN INTUITIE EN WISKUNDE.

In deze paragraaf concentreren we ons helemaal op ons hoofdthema van vandaag: de pijlen $2 \rightarrow 3$ en $3 \rightarrow 2$ uit het methodologische blokschema van §1; i.e. de interactie tussen intuitie en wiskunde.

Ons eerste voorbeeld uit deze groep betreft de zogenaamde paradox van Arrow.

4A. De Paradox van Arrow.

Een gemeenschap bestaat uit allerlei (eindig vele) individuen en de beslissingen (preferenties) van de gemeenschap worden volgens de een of andere manier uit de beslissingen (preferenties) van de afzonderlijke individuen samengesteld. Voorbeelden zijn bijvoorbeeld: allerlei stemprocedures of ook bijv. een dictator aanstellen en doen wat hij zegt. We zullen nu trachten eerst deze situatie wat precieser te maken en dan trachten te definiëren wat een democratische methode zou zijn om de preferenties van de individuen te aggregeren tot een preferentie relatie voor de gemeenschap als geheel.

Zij gegeven een verzameling alternatieven X. We nemen aan dat elk individu, i, een preferentie R_i heeft betreffende deze alternatieven. Van deze preferentie relatie R_i eisen we dat

(i) xR_iy of yR_ix i.e. individu i vindt òf x beter of gelijkwaardig aan y òf y beter of gelijkwaardig aan x

(ii) als xR_iy en yR_iz dan xR_iz (consistentie, transitiviteit)

Een sociale beslissing functie is nu een methode om op de één of andere manier uit de individuele preferenties van de n individuen $R_1, R_2, \ldots, R_n$ een nieuwe sociale preferentie relatie R samen te stellen, $R = f(R_1, \ldots, R_n)$ Daar we bij het organiseren van ons sociale systeem van te voren niet weten welke R_i kunnen optreden moet dus $f(R_1, \ldots, R_n)$ gedefiniëerd zijn voor alle n-tallen $R_1, \ldots, R_n$. Van $R = f(R_1, \ldots, R_n)$ eisen we ook, dat deze relatie aan conditie (i) voldoet. Een voorbeeld van zo'n f zou kunnen zijn: tel voor elke twee alternatieven x,y uit X, hoeveel individuen x beter of gelijkwaardig vinden met y en voor hoeveel individuen dat omgekeerd is. Is het eerste getal groter of gelijk aan het tweede dan definiëren we xRy en anders yRx i.e. xRy, de gemeenschap vindt x beter of gelijkwaardig met y, is desda het geval als er evenveel of meer mensen zijn die x beter of gelijkwaardig vinden met y dan er mensen zijn die y beter of gelijkwaardig vinden met x. Dit staat bekend als simple majority rule. Het volgende voorbeeld laat zien dat hier moeilijkheden gaan ontstaan. Dit voorbeeld schijnt afkomstig te zijn van Condorcet.

Stel er zijn drie individuen 1, 2, 3 en drie alternatieven x, y, z en de individuele preferenties van deze drie individuen worden gegeven door onderstaande ordeningen.

1	2	3
x	y	z
y	z	x
z	x	y

(i.e. individu 1 vindt dat xR_1y, yR_1z, xR_1z, niet yR_1x, niet zR_1y, niet zR_1x, analoog voor individuen 2,3). Volgens simple majority rule krijgen we dan xRy, yRz en zRx niet yRx, niet zRy, niet xRz.
Dus R is niet transitief (consistent).

We proberen nu te definiëren wat een democratische sociale beslissing functie f zou zijn. Een beslissing functie f heet democratisch als geldt:

a. f is gedefiniëerd voor alle $R_1, \dots, R_n$ (Dat dit nodig (c.q. wenselijk) is vermeldden we hierboven al).
b. of $xf(R_1, \dots, R_n)y$ geldt, hangt alleen daarvan af of voor de diverse i xR_iy of yR_ix gelden of niet. (i.e. eventuele andere alternatieven dan x,y mogen geen invloed hebben op hoe x sociaal gewaardeerd wordt ten opzichte van y.
c. Als xR_iy voor alle i dan $xf(R_1, \dots, R_n)y$ (als iedereen x beter of gelijkwaardig vindt dan y dan vindt de gemeenschap als geheel dat ook; het Pareto principe).
d. Er is geen dictator. I.e. er is een individu i_o zodat: als $xR_{i_o}y$ dan $xf(R_1, \dots, R_n)y$.

Tenslotte is het ook gewenst, dat de sociale beslissingen consistent zijn. I.e.

e. Als $xf(R_1, \dots, R_n)y$ en $yf(R_1, \dots, R_n)z$ dan $xf(R_1, \dots, R_n)z$

Nu blijkt echter de volgende stelling te gelden:

<u>Stelling</u> (Arrow)

Als X drie of meer elementen heeft, dan bestaat er geen (sociale beslissingsfunctie die aan a) t/m e) voldoet.

Een resultaat, dat men ook (min of meer) kan weergeven als: om consistent beslissingen te nemen dient men een dictator aan te stellen.

Hier ziet U dus een voorbeeld van een analyse resulterende in het feit, dat vijf alleszins redelijke eisen ineens inconsistent blijken te zijn. Dit opvallende resultaat heeft zeer veel verder onderzoek geinspireerd, waarin de condities a) - e) soms verzwakt worden, en heeft geleid tot hele series verwandte resultaten. Cf. bijv. [27], [35], [44].

Het zij overigens opgemerkt, dat de Paradox ogenschijnlijk verdwijnt als er oneindig veel individuen zijn; cf [25]. Echter dit is maar schijn. In [25] wordt aangetoond (in iets andere omstnadigheden dan de bovenstaande), dat een bij elke sociale beslissingsfunctie f die aan a), b), c), e) voldoet een ultrafilter op de verzameling individuen hoort en omgekeerd. I.e. dan is er wel een dictator maar hij is (mogelijk) onzichtbaar.

Bij verdere analyse blijkt, dat speciaal eis b) (naast het de niet dictator eis) de boosdoener is. Kunnen we bijvoorbeeld rekening houden met de intensiteiten waarmee de individuen der gemeenschap het ene alternatief boven het andere prefereren en zijn bovendien deze intensiteiten onderling vergelijkbaar tussen de verschillende individuen dan verdwijnt Arrow's paradox. Dit is dus het geval als er onderling vergelijkbare cardinale nutsfuncties zijn voor de individuen der gemeenschap. Voor een verdere bespreking van resultaten en problemen rond Arrow's paradox cf [4] en [49].

De wiskundige analyse hierboven beschreven suggereert ook nog meteen een verdere vraag: zal het vaak voorkomen, dat met <u>simple majority rule</u> of een ander er goed uitziend systeem, intransitiviteiten optreden. Ook hieraan is al veel aandacht besteed. Cf. [44], 10.2 voor een discussie en verdere referenties. Zo is bijv. als alle individuele ordeningen dezelfde kans hebben om voor te komen, de kans op intransitiviteit bij 3 alternatieven en veel individuen gelijk aan 0.0877. Helaas loopt deze kans snel op naarmate het aantal alternatieven toeneemt.

Bij het zojuist besproken voorbeeld is de functie van wiskunde als laboratorium heel sterk (geweest). Teneerste in de zin dat van 5 intuitief alleszins redelijke eisen aangetoond is, dat ze incompatibel zijn; ten tweede in de zin, dat er aanwijzingen zijn aan welke van de eisen eventueel gesleuteld moet worden; en ten derde in de zin dat de analyse suggesties levert voor verder onderzoek zowel experimenteel als theoretisch.

4B. Stabiliteit in markten (Tatônnement processen)

Voor ons volgende voorbeeld beschouwen we een markt. Er zijn ℓ individuen en n goederen; ieder van die ℓ individuen heeft een utiliteitsfunctie $U_i(x_1,\ldots,x_n)$, die hij door geslaagd handelen (ruilen) tracht te maximeren. Iedere handelaar heeft een beginvector goederen $(I_1^i,\ldots,I_n^i)$. Een initiëel systeem van prijzen $p_1,\ldots,p_n$ voor de goederen vordt geannonceerd. Zich richtend naar deze prijzen bepaald iedereen wat hij vil verkopen en wat hij wil kopen. Zij voor ieder goed j, $h_j(p_1,\ldots,p_n)$ het verschil : (totale aangeboden hoeveelheid van goed j) −(totale gevraagde hoeveelheid van goed j); i.e. $h_j(p_1,\ldots,p_n)$ is de excess vraag naar goed j gegeven de prijzen $p_1,\ldots,p_n$. We stellen ons nu voor, dat de prijzen zich ontwikkelen volgens het volgende systeem differentiaal-vergelijkingen.

$$\dot{p}_j = f_j(p_1,\ldots,p_n) \qquad j = 1,\ldots,n \tag{4.B.1}$$

waarbij f_j een functie is met de eigenschappen

als $h_j(p_1,\ldots,p_n) \geq 0$ dan $f_j(p_1,\ldots,p_n) \geq 0$

als $h_j(p_1,\ldots,p_n) \leq 0$ dan $f_j(p_1,\ldots,p_n) \leq 0$

Dit systeem differentiaal vergelijkingen geeft dus weer dat prijzen stijgen als de vraag aanbod overtreft en dat prijzen dalen als het aanbod de vraag overtreft, en niets meer. Voorbeelden voor de f_j zijn bijvoorbeeld functies $f_j = r_j h_j$ waarbij r_j een constante is (rate of adjustment).

Een natuurlijke vraag is nu of er door middel van dit marktmechanisme zich een evenwichtssituatie gaat voordoen. I.e. of de prijzen zich ontwikkelen naar een stel prijzen $p_1^*, \ldots, p_n^*$ waarbij vraag en aanbod met elkaar in evenwicht zijn; i.e. een stel prijzen zodat $h_j(p_1^*, \ldots, p_n^*) = 0, j = 1, \ldots, n$ (en dus $f_j(p_1^*, \ldots, p_n^*) = 0$).

Ons gezond verstand suggereert, dat dit wel eens zo zou kunnen zijn. Een wiskundige analyse laat al snel zien, dat dit beslist niet zo is in het algemeen. Teneerste is het mogelijk gegeven genoeg verschillende utiliteitsfuncties elke willekeurige functie g willekeurig dicht te benaderen met een excess vraag functie. Echter ook als men aan de utiliteitsfuncties U_i alle mogelijke mooie eisen oplegd (convexiteit, differentiabiliteit,...) dan blijkt het mogelijk voorbeelden te maken zoals de hieronder geschetsten. (cf. [42]).

In het geval van fig. 4 zijn er drie individuen en drie goederen. Voor specificatie van hun utiliteitsfuncties en initiële goederen bundels cf. Scarf [42]. De prijzen bewegen zich over het bolsegment $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_3 \geq 0$. Er is één evenwichtsprijzenstelsel en als men niet toevallig met dat stelsel begint blijft men eeuwig rondcirkelen.

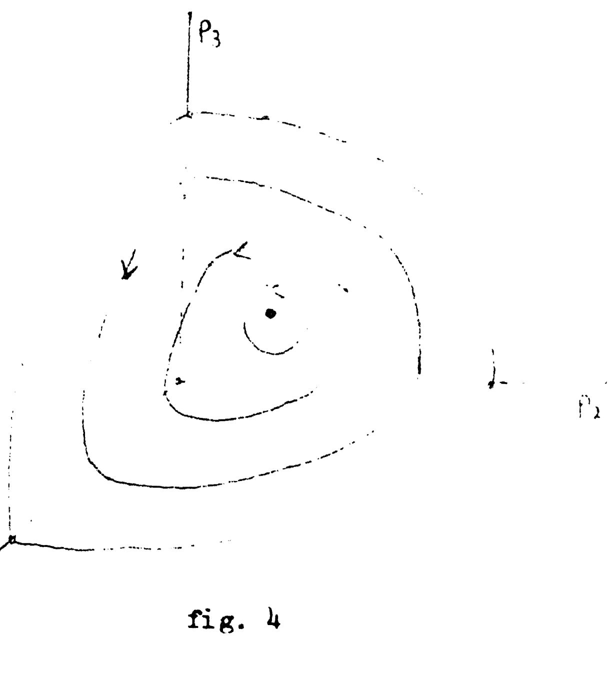

fig. 4

Het voorbeeld van fig. 5 ontstaat uit dat van fig. 4 door een kleine perturbatie van de utiliteits-functies en initiële goederen bundels. Er is weer precies één evenwichtspunt, en er is één stabiele baan (dik getekend), hetwelk suggereert, dat hier misschien iets als "business cycles" optreden. Cf. [42].
Het evenwichtspunt is niet stabiel.

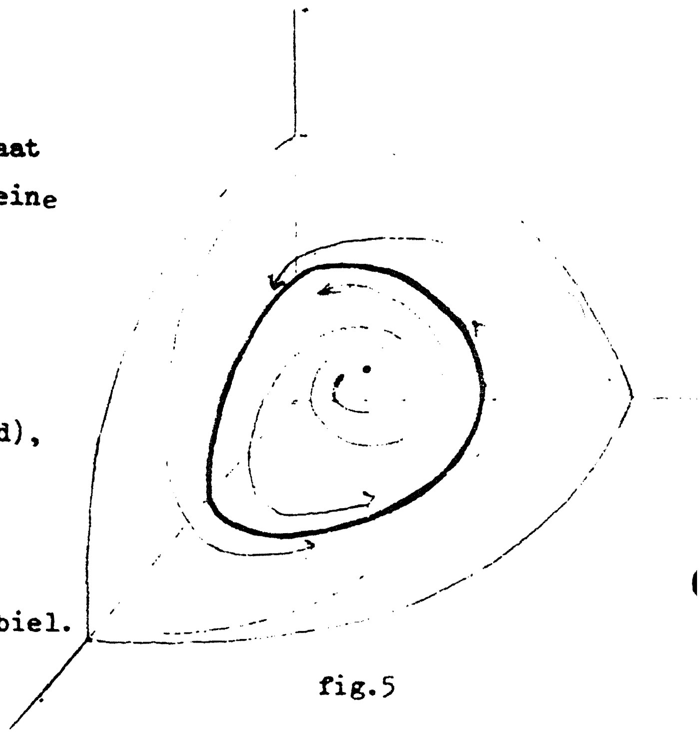

fig.5

Een tweede belangrijke vraag is of een eventueel bestaand evenwichtsprijzensysteem stabiel is; i.e. een evenwichtsprijzen systeem waarop kleine toevallige storingen kleine effecten hebben. Een mogelijke ideale situatie zou zijn als er precies één prijzen-stel $(p_1^*, \ldots, p_n^*)$ zou zijn met de eigenschap dat waar we ook mee beginnen de prijsontwikkeling volgens (4.1.B) ons tenslotte willekeurig dicht bij $(p_1^*, \ldots, p_n^*)$ doet komen. Dan zou je zo zeggen, kan er weinig naars meer gebeuren. Deze definitie komt economisch veel voor als definitie van globale stabiliteit. Helaas ook hier weer heeft ons gezonde verstand ons om de tuin geleid. Deze situatie hoeft helemaal niet zo ideaal te zijn zoals het volgende voorbeeld (fig. 6) laat zien.

In het voorbeeld van fig. 6 kunnen de kleinste storingen uit e zeer grote gevolgen hebben. Wel is waar, verdwijnen deze vanzelf weer (als geen verdere storingen optreden), maar mogelijk pas na zeer lange tijd.

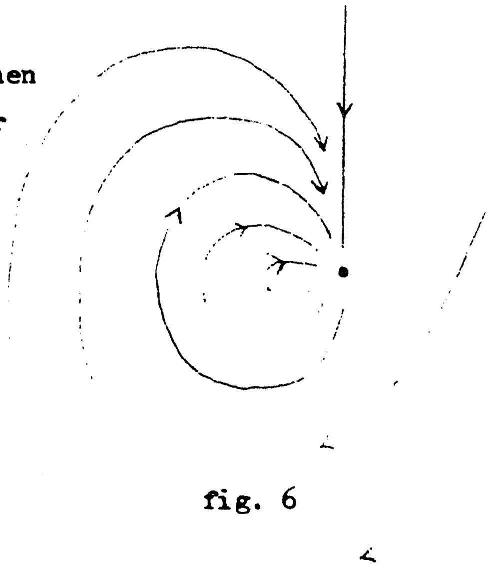

fig. 6

Alleen in zeer speciale gevallen zoals "gross substitutability" kunnen we bewijzen, dat er precies één globaal stabiel evenwichtspunt bestaat.

Wel suggereren de voorbeelden, dat er een goede kans is, dat het gebied waarin de prijzen blijven bewegen naar verhouding wel eens erg klein zou kunnen zijn mits we over veel handelaars beschikken en hun utiliteiten niet te woest verschillend zijn. Een onderzoek hierna (en een precisering van deze uitspraak) moet nog gedaan worden.

4.C. De Core

We blijven voorlopig markten beschouwen, i.e. economieën zonder productie. In het voorgaande hebben we in hoofdzaak gelet op prijzen. Echter prijzen zijn niet waar het in eerste instantie om gaat. Het gaat om een zo goed mogelijke verdeling van de beschikbare goederen in termen van de utiliteiten die diverse consumenten daaraan toekennen. Prijzen kunnen hierbij een hulpmiddel zijn. Deze overweging leidt tot een statische (niet dynamische) analyse van een marktsituatie in termen van een begrip dat oorspronkelijk uit de spel theorie stamt : de Core.

We verkeren in dezelfde situatie als voorheen: er zijn ℓ-individuen, n goederen elk individu heeft een utiliteitsfunctie (of, iets algemener, een preferentierelatie) en een initiële goederen bundel $(a_1^{(i)},\ldots,a_n^{(i)})$.

Zij A de verzameling van alle individuen en E een deelverzameling van A. We definiëren nu:

1. Een E-allocatie is een functie $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ (≥ 0), i.e. een toewijzing van een bundel goederen aan elk individu uit E zodat

$$\sum_{i\in E} f(i) = \sum_{i\in E} a^{(i)}$$

(i.e. een herverdeling van de goederen die de individuen uit E tesamen bezitten).

2. Een A-allocatie g wordt geblokkeerd door de coalitie E als er een E-allocatie f is zodat $U_i(f(i)) > U_i(g(i))$ voor alle i in E
3. Een A-allocatie g is in de Core als er geen coalitie ($\neq$ A) is die g blokkeert. I.e. een allocatie is in de core als er geen echte deelverzameling E van A is die beter af is als ze de individuen uit A buiten E negeren. Om de brug te leggen naar het idee van prijzen als hulpmiddel bij het vinden van goede allocatie nog één definitie.

4. Een A-allocatie g heet <u>competitief</u> als er een stel prijzen $p_1, \ldots, p_n$ is zodat

$$U(g(i)) = \max U(g) \text{ voor } a \in \{x \in \mathbb{R}^n \ (\geq 0) \mid p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \leq p_1 a_1^{(i)} + \ldots + p_n a_n^{(i)}\}$$

i.e. g(i) is optimaal onder de goederen bundels die individu i zich gegeven de prijzen $p_1, \ldots, p_n$ kan aanschaffen.

Men verwacht nu, als prijzen inderdaad een goed werkend mechanisme zijn, dat Core en competitieve allocaties veel met elkaar te maken zullen hebben. En inderdaad onder enkele redelijke veronderstellingen geldt

$$\text{Competitieve allocaties} \subset \text{Core}$$

echter het blijkt, dat bijna altijd de Core veel groter is dan de verzameling van de competitieve allocaties.

Een oorzaak is hiervoor wel aan te wijzen. Immers de achtergrond veronderstelling bij algemene evenwichtstheorie is perfecte concurrentie en dat de invloed van elk afzonderlijk individu verwaarloosbaar is. Echter in het bovenstaande model is deze laatste eis niet vervuld zolang we met eindig vele individuen blijven werken. Dit bracht Aumann [1] tot het idee de eindige verzameling A te vervangen door een maatruimte A, zonder atomen. Individuen uit A hebben dan maat nul, i.e. geen enkele invloed. De begrippen core en competitieve allocaties worden analoog gedefiniëerd (sommen worden integralen en er zijn wat technische kwesties) en dan blijkt, dat inderdaad geldt

$$\text{Core} = \text{competitieve allocaties}$$

Bovendien, zoals zo vaak bij een geslaagde formalisatie krijgen we extra cadeautjes. In het geval van een markt met een continuum aan handelaars is het onder algemenere voorwaarden mogelijk te bewijzen, dat de Core niet leeg is dan in het geval van een eindig aantal handelaars cf [2]
Verder is zo een conceptueel apparaat ontstaan waarin men gemakkelijk kan praten over syndicaatvorming, coalities,...etc. Een markt met een monopolist bijvoorbeeld is een maatruimte A met één atoom (de monopolist) en een stuk zonder atomen (de anderen). En met deze precisering van dit begrip kan men zich afvragen of een monopolie voordelig is in de volgende zin

"voor elke allocatie g uit de core bestaat er een competitieve allocatie f zodat $U_m(f(m)) \leq U_m(g(m))$ waarbij m de monopolist is en U_m zijn utiliteitsfunctie"

Dit is een formalisering van de uitspraak, dat de monopolist beter af is omdat hij concurrentie kan vermijden. Men kan zich nu afvragen of deze uitspraak altijd waar is. Het antwoord is dan: nee, er zijn hele normale situaties waarin dit niet het geval is; er zijn zelfs situaties waarin de competitieve allocaties voor de monopolist de besten zijn. Cf. hiervoor verder [4]. Deze theorie waarover hier een heel klein beetje gezegd is is nog in volle ontwikkeling. Een groot gebrek is nog het volslagen statisch karakter der analyse.

5. WISKUNDE EN GEZOND VERSTAND

Na de ietwat gedetailleerde en technische voorbeelden van de vorige paragraaf wil ik nog een paar voorbeelden geven waaruit blijkt, dat ons gezonde verstand ons nog wel eens de verkeerde richting op wil sturen. De eerste twee zijn voorbeelden van wat Baumol "theorems for skeptics" noemt.

5A. Het Lipsey-Lancaster second best theorema cf. [33].

Het eerste voorbeeld betreft het zogenaamde Lipsey-Lancaster second best theorema. Dit is eigenlijk een heel eenvoudige opmerking uit de theorie van het optimeren onder restricties.

"Als we niet in de optimum situatie zijn, dan kunnen maatregelen die er op gericht zijn sommige variabelen, maar niet alle, te brengen op hun waarde in de optimum situatie zeer wel resulteren in een daling van "social welfare".

Als bijvoorbeeld een optimale allocatie van grondstoffen eist, dat een zeker systeem van 400 vraag-aanbod vergelijkingen is vervuld dan is er geen reden om aan te nemen, dat we beter af zijn als er 390 zijn vervuld dan als er 200 zijn vervuld. Voor enkele bekende toepassingen van deze stellingen zie bijv. [8] .

5.B. De Friedman, Philips, Baumol stabilisatie paradox.

Ons tweede voorbeeld betreft het nemen van stabilisatie maatregelen tegen economische fluctuaties. Men zou de volgende "policies" redelijk kunnen vinden (cf. [8]).

1. Als de totale economische activiteit toeneemt, laat dan het volume van de regerings economische activiteit afnemen
2. Als het nationale inkomen beneden het geen-werklozen-niveau blijft verhoog dan de regerings economische activiteit evenredig met de grootte van het tekort.

Echter in een wereld die zich gedraagt volgens het Samuelson multiplier accelerator-model zullen deze beide economisch maatregelen verergerend werken.

Voor een recente beschouwing over deze paradox die misschien laat zien dat het wat minder erg is, zie [40].

5.C. Spelen met tijdreeksen.

Het laatste voorbeeld van vandaag betreft economische tijdreeksen en betreft een functie van de wiskundige analyse waar we nog niet over gesproken hebben.

Voor het geval U eens wat tijd over heeft (in de lange zomerochtenden) stel ik U het volgende spelletje voor. U neemt een of ander berucht moeilijke tijdreeks: zeg bijvoorbeeld de Financial Times share index en U zoekt een stel andere tijdreeksen op uit dezelfde omgeving. Bijv. autoproductie, Financial Times commodity index en bankvoorschotten. Daarna probeert U de eerste te "verklaren" middels de anderen met behulp van een vergelijking als

$$\begin{aligned}(\text{F.T. share index})_t = \text{constante} &+ a_1(\text{F.T. commodity index})_{t-n_1} \\ &+ a_2(\text{auto productie})_{t-n_2}\end{aligned}$$

waarbij de n_1, n_2 gehele getallen zijn (lags) en de a_1 en a_2 te berekenen constanten. De n_1 en n_2 bepaalt U door de grafieken van de diverse tijdreeksen op doorzichtig papier te tekenen en over elkaar te schuiven. Daarna berekent U de beste a_1 en a_2 en constante . En U bereikt tot Uw verrassing een verrassend goede fit. Uiteraard moet U wellicht de verklarende tijdreeksen een beetje met verstand uitzoeken. De vraag is echter, betekent dit iets ? Het bovenbeschreven spelletje is gedaan cf. [12]. In de discussie betreffende dit artikel suggereert Burman (cf. [12] p.154), dat er gegeven 40 of 50 tijdreekzen als de bovenstaande met ongeveer gelijke fluctuatie lengtes altijd wel een verklarende vergelijking als de bovenstaande, met hoge correlatie tussen verklaarde en echte waarde, te vinden is. Voor zover ik weet is dit probleem nog niet wiskundig aangepakt, maar het lijkt inderdaad niet onwaarschijnlijk dat zo'n vergelijking heel weinig betekent.

Voor verdere opmerkingen aangaande metingen zonder dat daaraan een theorie ten grondslag ligt cf. bijvoorbeeld ook Koopmans. Measurement without theory [26].

6. CONCLUSIES.

Zoals aan alle machtige gereedschappen zijn er ook aan het gebruik van wiskundige methoden gevaren verbonden. Zie hiervoor bijvoorbeeld [7], [43]. De voordelen wegen hier echter ruim tegen op. In het voorgaande heb ik speciaal geprobeerd het belang van de interactie tussen intuitie en wiskundige formalisering te accentueren. De noodzaak hiervoor treedt vooral daar op waar simultane verschijnselen, feedback en interacties tussen verschillende delen van een systeem, aanwezig zijn, daar deze precies het soort verschijnselen zijn waar onze lineaire taal-logica slecht mee kan opschieten. Hoe ernstig al deze interacties zijn en dus hoe ernstige gevolgen bijv. de stellingen voorsceptici aan de vorige paragraaf voor de praktijk zullen hebben is op het ogenblik nog niet te zeggen. De kunst om een groot systeem met vele zwakke interacties en groepen sterke interacties op een goede manier te decomponeren staat nog in zijn kinderschoenen.

Mijne Heren leden van het Trustfonds,

Het benoemen van een van origine zuiver wiskundige tot hoogleraar in een Economische Faculteit is geen voor de hand liggende bezigheid. Als fel tegenstander van het opsplitsen van de wetenschap in wel omschreven specialismen ben ik dankbaar dat U het met mij heeft aangedurfd en ik dank U voor het vertrouwen, dat U kennelijk in mij stelt.

Dames en Heren leden van het wetenschappelijk corps van de Erasmus Universiteit,

Niemand weet waar de potentiële toepassingen der wiskunde ophouden. Ik hoop, dat U gelegenheid zult hebben van deze ambivalente situatie te profiteren.

Dames en Heren leden van het wetenschappelijk corps van de Economische Faculteit,

In zijn boek: "Stabilité et dynamique de la production dans l'economie politique"

schrijft G. Evans:

> "Opdat de wiskunde werkelijk belangrijk wordt voor een gegeven wetenschap is het niet alleen nodig, dat deze wetenschap wiskundige redeneringen nodig heeft, maar ook dat deze redeneringen interessant zijn voor de wiskundige".

In het geval van de economie acht ik het niet onwaarschijnlijk, dat ook deze tweede voorwaarde nu langzamerhand vervuld is.

Dames en Heren leden van het Econometrisch Instituut,

Dat de samenwerking en verstandhouding voortreffelijk zijn moge reeds blijken uit het feit, dat het voorgaande U vast niet geheel nieuw was en tevens uit het feit, dat ik in het verhaal van vanmiddag enkele opmerkingen van U verwerk heb. Moge dit zo blijven.

Hooggeleerde Kuiper, Hooggeleerde Oort,

Welke de samenstelling is van het voor effectief onderzoek nodige mengsel van intuitie, kennis, aanpak, stijl en handen zwaaien, dat een begaafd onderzoeker aan sommige van zijn leerlingen kan overdragen, weet ik niet. Ik prijs mij gelukkig twee zulke leermeesters getroffen te hebben.

Dames en Heren Studenten,

Wiskunde is een hulpmiddel bij het denken, zoals een auto een hulpmiddel is bij het zich voortbewegen. Van dit laatste hulpmiddel maakt U blijkens de toestanden op ons parkeerterrein hier een veelvuldig gebruik, mogelijk zult U dat ook nog eens met het eerstgenoemde hulpmiddel doen.

Ik heb gezegd.

Literatuur:

1. R.J. Aumann Markets with a continuum of traders. Econometrica 32 (1964), 39-50
2. R.J. Aumann Existence of competitive equilibria in markets with a continuum of traders. Econometrica 34 (1966), 1-17
3. S. Axinn Mathematics as an experimental science. Phil. Math. 5, 1-10
4. R.J. Aumann Disadvantageous monopolies. J. Ec. Theory 6 (1973), 1-11
5. W.J. Baumol Pitfalls in contracyclical policies, some tools and results. Rev. Ec. and Stat. Febr. 1961.
6. W.J. Baumol External economies and second order optimality conditions. Am. Ec. Rev., June 1964.
7. W.J. Baumol Economic models and mathematics. In : Sh. R. Krupp (ed). The structure of economic science, Prentice Hall, 1966.
8. W.J. Baumol Informed judgement, rigorous theory and public policy. Southern Economic J. (1965-66), 137-145.
9. E.T. Bell Mathematics, queen and servant of science. Mac Graw-Hill, 1951
10. S. Bochner The role of mathematics in the rise of science. Princeton Univ.Pr'6
11. E. De Bono New think (= the use of lateral thinking) Avon, 1971
12. P.J. Coen, E.D. Gomme, M.G. Kendall Lagged relationship in economic forecasting. Paper Read before Royal Statistical Society on Jan. 15, 1969.
13. H. Cohen Mathematics and the biomedical sciences. In: The mathematical sciences. Essays for cosrims. M.I.T. 1970,217-231.
14. G. Debreu, H. Scarf A limit theorem on the core of an economy. Int. Ec. Rev. 4, 3 (1963), 235-246.
15. A. Diez Blanco, P. Gomez Bosque Die mathematisierung der Wissenschaft. Ergebnis einer Umfrage.
16. F.J. Dyson Mathematics in the physical sciences. Scientific American.
17. M. Friedman The effects of a full-employment policy on economic stability. A formal analysis. In: Essays in positive economics. Univ. of Chicago Pr. 1953.
18. R.W. Hamming Intellectual implications of the computer revolution. In: T.L. Saaty, F.J. Weyl. The spirit and the uses of the mathematical sciences. McGraw-Hill.
19. E.R. Hilgard Theories of learning. Methuen 1948
20. M. Kac Probability. In: The Mathematical sciences. Essays for Cosrims. M.I.T. , 1970.
21. J.G. Kemeny The social sciences call on mathematics. In: The mathematical sciences. Essays for Cosrims. M.I.T. 1970.
22. J.G. Kemeny, J.L. Snell Finite markov chains. v. Nostrand,1960.

23. J.G. Kemeny, J.L. Snell
Mathematical models in the social sciences. Ginn & Cy 1962

24. M. Kline — Mathematics in western culture

25. A.P. Kirman, D. Sondermann
Arrow's theorem, many agents and invisible dictators. Core discussion paper 7142.

26. Tj. C. Koopmans — Measurement without theory. Rev. of Economic Statistics 29 (1947) 161-172 (Review van A.I. Burns, W.C. Mitchell. Measuring Business cycles).

27. G.H. Kramer — On a class of equilibrium conditions for majority rule. Preprint Univ. of Essex 1972.

28. Th. J. Kuhn — The structure of scientific revolutions. Univ. of Chicago Press, 1962.

29. P.F. Lazarsfeld — N.W. Henry (eds). Readings in mathematical social science. M.I.T. 1966.

30. D. Lacaze — Sur l'interpretation economique du principe maximum. Bull. de Math Ec. 2 (Oct 1969)

31. W. Leontieff — Theoretical assumptions and observed facts. Am. Ec. Rev. 61, 1 (1971), 1-8.

32. P. Levy — Quelques aspects de la pensée d'un mathematicien. A. Blanchard, 1970

33. R. Lipsey, K. Lancaster
The general theory of second best. Rev. of Ec. Studies, Dec. 1956

34. B. McMillan — Applied mathematics in engineering. In: T.L. Saaty, F.J. Weyl (eds) The spirit and the uses of the mathematical sciences. MacGraw-Hill

35. A. Mas-Colell, H. Sonnenschein
General possibility theorems for group decisions. Rev. of Ec. Studies 39 (1972), 185-192.

36. A. Newell — Remarks on the relationship between artificial intelligence and cognitive psychology. In: R. Banerji, M.D. Mesarovic (eds) Theoretical approaches to non-numerical problem solving. Springer, 1970.

37. J. Perrin — Les atomes. Libr. Felix Alcan, Paris 1930.

38. A.W. Phillips — Stabilization policy in a closed economy. Ec. J. 64 (1954), 290-323

39. M. Planck — Scientific autobiography and other papers. Philosophical Libr. 1949.

40. A.J. Preston — A paradox in the theory of optimal stabilization. Rev. Ec. studies 39 (1972), 423-432.

41. W.C. Salmon — Confirmation. Scientific American, May 1973

42. H. Scarf — Some examples of global instability of the competitive equilibrium. Int. Ec. Rev. 1 (1960), 157-172.

43. J.T. Schwartz — The pernicious influence of mathematics on science. In: P. Sappes, A. Tarski, E. Nagel (eds) Philosophy and methodology of science, p. 356-360.

44. A. Sen — Collective choice and social welfare. Holden Day, San Francisco 1970.

45. M. Shubik — Games, decisions and industrial organization. Management Science VI, 4 (1960).

46. H.A. Simon, H. Guetskov — Mechanisms involved in pressures toward uniformity in groups. In: H.A. Simon. Models of man, Wiley, 1957 reprinted in: P.F. Lazarsfeld, N.W. Henry (eds). Readings in mathematical social science. M.I.T., 1966.

47. H.A. Simon — Models of man , Wiley.

48. R. Stone — Mathematics in the social sciences and other essays. Chapman & Hall, 1966.

49. M. Taylor — Mathematical political theory. Brit. J. Pol. Sc. 1, 339-382

50. M. Taylor — On the theory of government coalition formation. Brit. J. Pol. Sc. 2 , 361-389.

51. J. Tinbergen — The functions of mathematical treatment

52. J. Tinbergen — In hoeverre kunnen economische stellingen zonder wiskunde worden bewezen.

53. S. Ulam — The applicability of mathematics. In: The mathematical Sciences: essays for Cosrims. M.I.T. Press, 1969.

54. O. Varsavsky — Mathematics in the social sciences. L'âge de la science, avril/juin 1968. 89-98, Dunod.

55. Th. Vogel — Philosophie naturelle et théorie des systèmes évolutifs. L'âge de la science, Oct. 1968, 258-288.

56. N. Wiener — I am a mathematician, M.I.T.

57. N. Wiener — Ex-prodigy. M.I.T.

58. W.J. Youden — How mathematics appraises risks and gambles. In: T.L. Saaty, F.J. Weyl (eds). The spirit and the uses of the mathematical sciences. McGraw-Hill.

59. H.W. Brand — The fecundity of mathematical methods in economic theory Reidel, 1961.

60. G. Canquilhem (ed) — La mathématisation des doctrines informes. Hermann, 1973.

61. M. McLuhan — The medium is the message

62. B. Barber — Resistance of scientists to scientific discovery. Science Vol. 134.

63. P.K. Feyerabend — Philosophy of science: a subject with a great past.

64. J. Jaynes — The routes of science. American Scientist 64, 1, 1966.

65. R. Dorfman — The economic interpretation of optimal control theory.

66. F. Machlup — Operationalismeand pure theory in economics. In Sh. R. Krupp (ed) The structure of economic science. Prentice Hall, 1966.

67. M. Jammer — Concepts of Mass 1961, Harvard Univ. Pr.

68. M. Jammer — Concepts of space 1954, Harvard Univ. Pr.

69. M. Jammer — Concepts of force 1957, Harvard Univ. Pr.

70. M. Jammer — The conceptual development of quantum mechanics. MacGraw-Hill, 1966.