GRAFENTHEORIE

STICHTING MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM 1978

Uitgegeven door:

Stichting Mathematisch Centrum,
Tweede Boerhaavestraat 49,
Amsterdam.

Samengesteld door:

G. Bakker-Plooijer
Stedelijke Scholengemeenschap "Hugo Grotius", Delft

M.R. Best
Mathematisch Centrum, Amsterdam

W.J.F. Hertoghs
Lodewijk Makeblijde College, Rijswijk (Z.H.)

F.J. Rondaij
Gemeentelijke School voor HAVO, Amsterdam

A. Schrijver
Mathematisch Centrum, Amsterdam

J.M. Wijnbeek
Chr. Scholengemeenschap "Groen van Prinsterercollege", 's-Gravenhage

Geïllustreerd door:

R.T. Baanders
Mathematisch Centrum, Amsterdam

VOORWOORD

Dit boek is bedoeld als eerste kennismaking met de grafentheorie. Het is in eerste instantie bestemd voor gebruik bij het onderdeel wiskunde-2 op het V.W.O.
Voor het onderwijs heeft grafentheorie een aantal aantrekkelijke aspecten. Zo komt het in dit vak meer aan op "begrijpen" dan op "rekenen". De begrippen en problemen zijn meestal aanschouwelijk van aard en zullen de leerling aanspreken. Ook kunnen vele bewijzen op elementair niveau gebracht worden. Hierdoor kan de leerling al snel in contact komen met leuke resultaten, en zelfs met de ontwikkelingen van de laatste jaren.
Het boek bestaat uit vijf hoofdstukken. In de eerste twee hoofdstukken worden aan de hand van de klassieke problemen van Euler en Hamilton de basisbegrippen uit de grafentheorie ingevoerd. In hoofdstuk 3 worden bomen behandeld, terwijl de hoofdstukken 4 en 5 over vlakke grafen en kleuringen gaan.
Een verkorte leergang zou kunnen bestaan uit de hoofdstukken 1, 2 en 3, of uit de hoofdstukken 1, 2, 4 en 5. Paragrafen die zonder bezwaar voor het vervolg kunnen worden overgeslagen zijn in de inhoudsopgave met een '-' aangegeven.
In de tekst verwerkte opgaven worden voorafgegaan door een '*'. De laatste paragraaf van ieder hoofdstuk bevat een aantal extra opgaven.
Deze eerste uitgave heeft een experimenteel karakter; op- en aanmerkingen van gebruikers worden door de auteurs op hoge prijs gesteld (zend deze aan het Mathematisch Centrum, Afdeling Zuivere Wiskunde).
Wie zich verder wil oriënteren op het gebied van de grafentheorie kunnen wij het boek van R.J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, aanbevelen (Longman Ltd., London, £ 1.95).

INHOUD

1. GRAFEN EN EULER-PADEN 1

1a. Wandelen door Koningsbergen 1
-1b. Tekenen met potlood en papier 3
1c. Wandelen in een graaf 3
1d. Enige definities 5
1e. Een kaartspel 7
1f. Eulergrafen 10
1g. Opgaven 12

2. HAMILTON-GRAFEN 15

2a. Wandelen langs pleinen 15
2b. Hamilton en dodecaëders 16
-2c. Euler-, Hamilton- en lijngrafen 17
2d. De stelling van Dirac 19
2e. Opgaven 22

3. BOMEN EN WOUDEN 23

3a. Stambomen 23
-3b. Bomen in de scheikunde 24
3c. Bomen 26
-3d. Wouden 28
-3e. Genummerde bomen 29
3f. Opgaven 33

4. VLAKKE GRAFEN 35

4a. Isomorfie van grafen 35
4b. Drie problemen 36
4c. Het tekenen van grafen zonder doorsnijdingen van lijnen 38
4d. Enkele definities 39
4e. De stelling van Euler voor vlakke grafen 39
4f. Enige gevolgen van de stelling van Euler 41
-4g. Vlak of niet vlak? 43
-4h. Duale grafen 44
4i. Opgaven 45

5. KLEURINGEN 49

5a. Het kleuren van landkaarten 49
5b. Landkaarten en vlakke grafen 51
5c. Het kleuren van grafen 53
5d. Bipartiete grafen 55
5e. Het kleuren van vlakke grafen 57
-5f. Het kleuren van lijnen 62
5g. Opgaven 64

INDEX 69

Een '-' voor het nummer wil zeggen dat de betreffende paragraaf zonder bezwaar kan worden overgeslagen.

1. GRAFEN EN EULER-PADEN

1a. WANDELEN DOOR KONINGSBERGEN

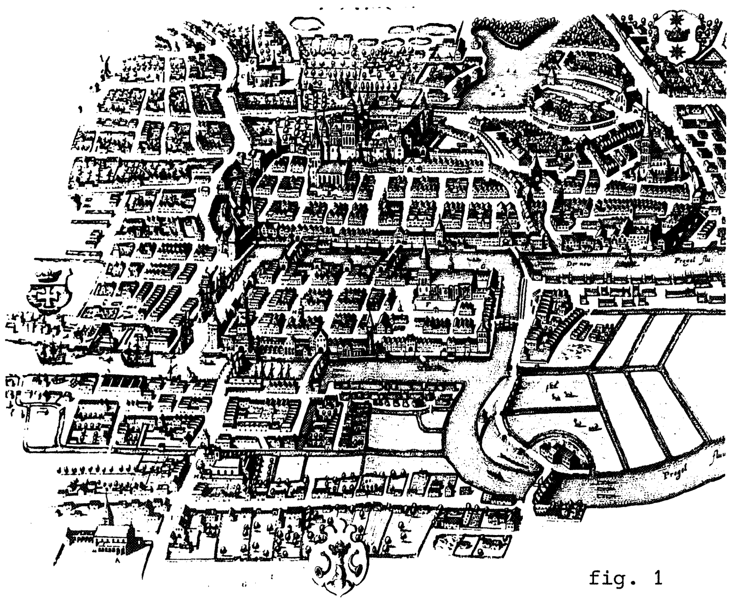


fig. 1

Dit is een vogelvluchtkaart van het 18e eeuwse Koningsbergen, liggend in Oost-Pruisen aan de rivier de Pregel. Tegenwoordig heet de stad Kaliningrad en de rivier de Pregolya. Zoals je ziet verdeelt de rivier de stad in vier delen (waaronder het eiland Kneiphof), die zijn verbonden door zeven bruggen. De bewoners van Koningsbergen vroegen zich af of het mogelijk zou zijn een wandeling te maken zodanig dat iedere brug precies eenmaal werd gebruikt. Omdat hun pogingen steeds faalden, geloofden zij dat een dergelijke wandeling niet mogelijk was.

De eerste die het probleem wiskundig benaderde en ook oploste was de beroemde Zwitserse wiskundige Leonhard Euler (1707-1783). In het artikel "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" uit 1736 begon hij het probleem te ontdoen van overbodige franje. Hij kwam tot het plaatje op de volgende bladzijde.

fig. 2

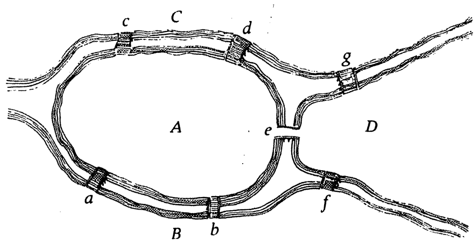


fig. 3

Euler merkte eerst op dat men uiteraard alle mogelijke wandelingen zou kunnen bekijken, maar dat dit nogal tijdrovend is. Daarom zocht hij naar een algemene regel om eenvoudig te bepalen of een dergelijke wandeling te maken is.
Teneinde deze regel te vinden gaan we het probleem verder *abstraheren*. Het probleem gaat in wezen om vier stukken land met daartussen zeven bruggen. Van een brug is alleen van belang welke stukken land hij verbindt. Dit kunnen we als volgt schematisch weergeven.

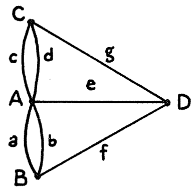


fig. 4

* Leg uit, aan de hand van de figuur, waarom een wandeling door Koningsbergen waarbij men precies eenmaal over iedere brug heengaat, niet mogelijk is.

* Maak van de volgende plattegronden een schema als figuur 4 en ga met behulp hiervan na of een wandeling mogelijk is waarbij iedere brug precies eenmaal gebruikt wordt.

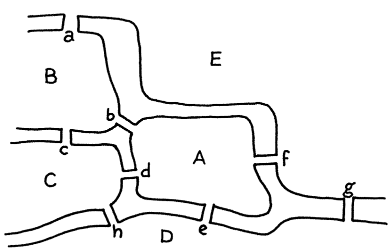


fig. 5

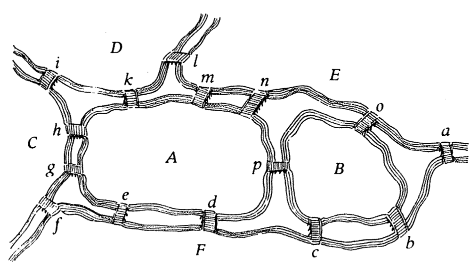


fig. 6

* Kan een touringcar-bedrijf zijn passagiers precies eenmaal over alle bruggen en dammen van de Zuidhollandse en Zeeuwse eilanden voeren ?
Zo ja, is een *rondreis* mogelijk ?

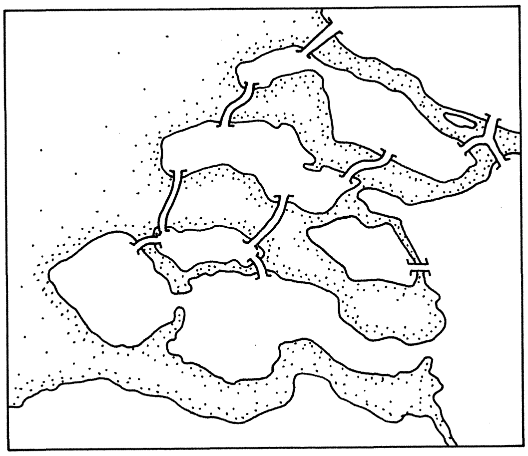


fig. 7

1b. TEKENEN MET POTLOOD EN PAPIER

* Ga van de volgende figuren na of ze te tekenen zijn zonder een lijn dubbel te trekken en zonder het potlood van het papier te nemen.

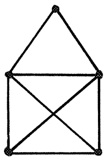


fig. 8

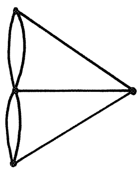


fig. 9

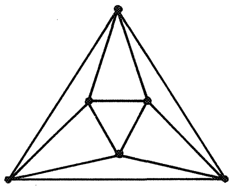


fig. 10

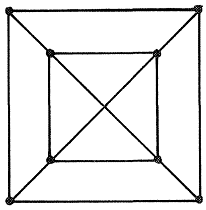


fig. 11

* Kun je na deze voorbeelden een eenvoudige regel vinden om te bepalen of een figuur volgens bovenstaande voorschriften te tekenen is ?
Wat is het verband met de wandelingen uit 1a ?

1c. WANDELEN IN EEN GRAAF

De problemen hierboven hebben we steeds geabstraheerd tot problemen over *punten* en *lijnen*. We geven een punt aan met •; lijnen verbinden (twee) punten. Lijnen hebben maar een eindige lengte en behoeven zelfs niet recht te zijn ! Punten kunnen staan voor eilanden, steden, enz. en lijnen stellen bruggen, spoorlijnen, enz. voor. Zo'n schematische voorstelling met (een eindig aantal) punten en lijnen noemen we in het vervolg een *graaf.*

Een graaf bestaat dus uit een (eindig) aantal punten en een (eindig) aantal verbindingslijnen. Hieronder staan enige voorbeelden van grafen.

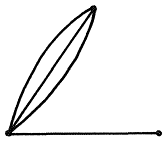


fig. 12

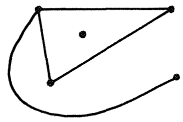


fig. 13

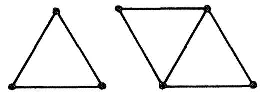


fig. 14

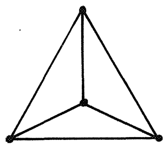


fig. 15

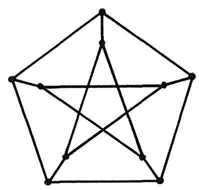


fig. 16

fig. 17

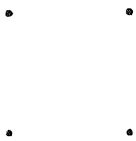


fig. 18

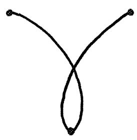


fig. 19

fig. 20

Let op: de niet-dik getekende snijpunten in de figuren 16, 17 en 19 zijn géén punten van de graaf !

Hoe luidt nu ons probleem in grafentaal ? We willen weten in welke grafen een rij "aan elkaar aansluitende" lijnen bestaat zodat iedere lijn precies eenmaal voorkomt.

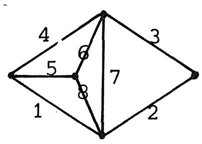


fig. 21

Bijvoorbeeld in figuur 21 vormen de lijnen 1,2,3,4,5,6,7,8 zo'n rij.

* Beredeneer waarom in een graaf die een dergelijke rij heeft de volgende twee voorwaarden nodig zijn:

(1) in ieder punt, op ten hoogste twee na, komt een even aantal lijnen samen,

(2) de graaf moet "uit één stuk bestaan" (dus niet zoals fig. 14).

Het zal blijken dat de voorwaarden (1) en (2) ook voldoende zijn !

In de formuleringen hierboven komen nog veel vage termen voor; voordat we tot een bewijs kunnen komen zullen we enige begrippen netjes moeten invoeren. Dit doen we in de volgende paragraaf.

1d. ENIGE DEFINITIES

Meestal zullen we grafen tegenkomen waarin tussen ieder tweetal punten ten hoogste één lijn loopt en waarin nooit een lijn van een punt naar zichzelf loopt. Zulke grafen noemen we *enkelvoudige* grafen. Soms echter, zoals we al zagen, lopen er soms twee of meer lijnen tussen twee punten. Zulke lijnen heten *meervoudige lijnen*. We zullen zelfs wel eens grafen tegenkomen waarin lijnen voorkomen die van een punt naar datzelfde punt lopen. Zo'n lijn heet een *lus*.

* Welke van de grafen in de figuren 12-20 zijn enkelvoudige grafen ?

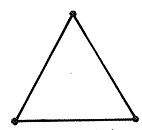
Als tussen *ieder* tweetal punten *precies* één lijn loopt dan heet de graaf *volledig*. Een volledige graaf met n punten wordt aangegeven met K_n.

K_1

fig. 22

K_2

fig. 23



K_3

fig. 24

* Teken K_4, K_5 en K_6.

Twee punten waartussen een lijn loopt noemen we *buren*, of *verbonden* punten. Figuren 13 en 18 laten zien dat in een graaf ook punten zonder buren mogen voorkomen: zulke punten heten *geïsoleerde* punten.
Nu voeren we het begrip "pad" in.
Een *pad* in een graaf is een niet-lege rij van afwisselend punten en lijnen

$$(p_0,\ell_1,p_1,\ell_2,\ldots\ldots,p_{k-1},\ell_k,p_k)$$

waarbij iedere lijn ℓ_i loopt tussen de punten p_{i-1} en p_i.
Bijvoorbeeld:

$(p_4, \ell_3, p_1, \ell_4, p_5, \ell_5, p_2, \ell_6, p_6)$ is een pad in de graaf

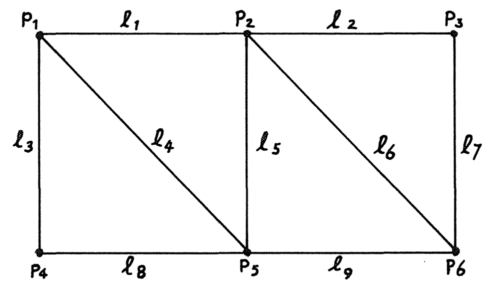


fig. 25

en $(p_4, \ell_4, p_1, \ell_1, p_2, \ell_2, p_3, \ell_3, p_1, \ell_4, p_4)$ is een pad in de graaf

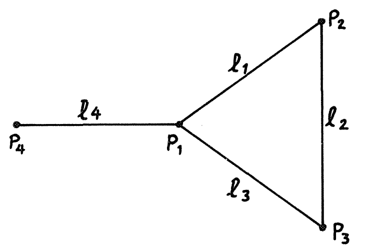


fig. 26

Soms zullen we (als geen misverstand mogelijk is) kortweg alleen de punten of alleen de lijnen van een pad opschrijven ! Bijv. het pad in figuur 25 kan worden aangegeven met $p_4 \to p_1 \to p_5 \to p_2 \to p_6$ of met $\cdot\ell_3\cdot\ell_4\cdot\ell_5\cdot\ell_6\cdot$.
Een pad begint met een punt en het eindigt met een punt: deze heten daarom het *beginpunt* en het *eindpunt*. We sluiten niet uit dat een punt of zelfs een lijn meer dan eenmaal in een pad voorkomt. Een pad dat geen punt meer dan eenmaal bevat heet een *keten*. Als beginpunt en eindpunt van een pad gelijk zijn dan heet het pad een *gesloten* pad. De *lengte* van een pad is het aantal keren dat er een lijn in voorkomt.

* Bepaal in de graaf van figuur 25 een pad van p_3 naar p_4 waarvan de lengte 5 bedraagt.

Als tussen ieder tweetal verschillende punten van een graaf een pad loopt dan heet de graaf *samenhangend*.

* Welke grafen van de figuren 12-20 zijn samenhangend?

* Ga na dat in een samenhangende graaf tussen ieder tweetal punten een *keten* loopt.

Een niet-samenhangende graaf valt dus uiteen in een aantal zgn. *componenten* die ieder op zich samenhangend zijn, maar waartussen geen lijnen lopen. Een samenhangende graaf bestaat uit één component.

* Wat zijn de componenten van de grafen in de figuren 12-20 ?

Als in een zeker pad iedere lijn van een graaf precies eenmaal voorkomt dan heet dat pad een *Euler-pad*. Het probleem van dit hoofdstuk is nu: wanneer heeft een graaf een Euler-pad ?
Een graaf met een Euler-pad noemen we een *semi-Euler-graaf*. Een graaf met een gesloten Euler-pad heet een *Euler-graaf*.

Om na te gaan welke grafen Euler-grafen zijn voeren we tenslotte het begrip "valentie" in.
De *valentie* van een punt in een graaf is gelijk aan het aantal lijnen met dat punt als eindpunt, waarbij een lus voor twee telt.

* Wat zijn de valenties van de punten van de grafen in de figuren 12, 16 en 18?

Als we de valenties van alle punten in een graaf bij elkaar optellen, dan krijgen we tweemaal het aantal lijnen, want iedere lijn draagt één bij tot de valentie van ieder van zijn beide eindpunten. De som van de valenties is dus even. Dit resultaat staat bekend als het "handenschud-lemma".

STELLING 1. *De som van de valenties van alle punten in een graaf is een even getal; het is namelijk tweemaal het aantal lijnen in de graaf.*

* Als in een groep mensen sommigen elkaar een hand geven, dan is het totaal aantal gegeven handen even. Bewijs dit.

* In een graaf is het aantal punten met oneven valentie altijd even. Toon dit aan.

1e. EEN KAARTSPEL

Het *klokkespel* is een kaartspel voor één persoon. Dit zijn de spelregels. Neem een spel van 52 kaarten. Leg de bovenste 12 kaarten in een cirkel op tafel (als een klok). Leg de 13de kaart in het midden. Leg nu de volgende 12 kaarten bovenop de eerste 12, en de volgende bovenop de kaart in het midden (alles met de rugzijde naar boven).

Doe dit nog twee keer. We hebben nu 13 stapeltjes van 4, 12 in een cirkel en één in het midden. Nummer de stapeltjes in de cirkel als een klok van 1 t/m 12. Keer nu de onderste kaart van het stapeltje in het midden om. Als deze bijv. een 5 is, leg hem dan bovenop stapeltje 5. Neem nu de onderste kaart van dit stapeltje, leg deze waar hij thuishoort, en ga zo lang mogelijk door. Hierbij staat een aas voor 1, een boer voor 11, een vrouw voor 12. Als je een heer trekt, leg deze dan op het stapeltje in het midden, en ga door met de onderste kaart van dat stapeltje.
Als op het laatst alle kaarten omgedraaid zijn, dan heb je gewonnen, anders verloren. Hoewel het spelen van dit spel niet zo erg moeilijk is, en de speler geen enkele invloed kan uitoefenen op de uitslag, zitten er voor ons een aantal leuke aspecten aan.

* Speel het spel voor jezelf, en noteer wat je gedaan hebt, bijv.

$$13 \to 5 \to 9 \to 12 \to 12 \to 2 \to 13 \to 3 \to 8 \to \dots$$

* Hoe eindigt het spel ? Beredeneer dat het niet anders kan eindigen.

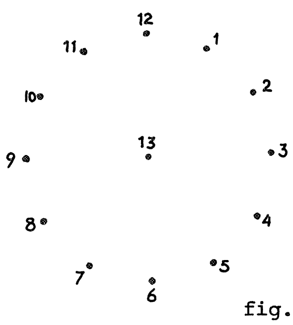


fig. 27

Laten we de stapeltjes voorstellen door punten in het vlak.
We noteren de punten met 1 t/m 13.
Veronderstel dat we voor iedere kaart met nummer i die in stapeltje j zit, een lijn tussen i en j zouden trekken. Dan krijgen we een graaf.

* Wat kun je vertellen van deze graaf ? (Aantal punten, aantal lijnen, valentie, meervoudige lijnen, lussen.) Zou de graaf een Eulergraaf zijn ?

Wat hebben we nu geleerd van ons spel? Welnu, *er is een pad* (*met lengte tenminste één*)*, beginnend in een punt* (13)*, en eindigend in dat zelfde punt.*
In ons voorbeeld is het pad "at random" geconstrueerd, nl. door een kaart om te keren. Het pad hoeft natuurlijk geen Eulerpad te zijn, omdat niet alle kaarten omgekeerd behoeven te zijn.
We formuleren deze vondst in de volgende stelling.

STELLING 2. *In een graaf waarin alle punten een even valentie hebben is bij ieder niet-geïsoleerd punt* p *een pad met de volgende eigenschappen.*

1) *de lengte is tenminste één,*
2) p *is begin- en eindpunt,*
3) *iedere lijn komt ten hoogste eenmaal voor in het pad.*

BEWIJS: Laat p een niet-geïsoleerd punt zijn. Dan is er een lijn ℓ_1 die van p naar een punt p_1 loopt. Er zijn nu twee mogelijkheden:

1. $p_1 = p$. In dit geval is ℓ_1 een lus, en heeft het pad (p,ℓ_1,p_1) de in de stelling genoemde eigenschappen.
2. $p_1 \neq p$. Veeg nu ℓ_1 weg. Nu houden alle punten behalve p en p_1 even valentie. Omdat p_1 oneven valentie heeft, loopt er een lijn ℓ_2 van p_1 naar een punt p_2. Er zijn nu weer twee mogelijkheden:

2.1. $p_2 = p$. Het pad $(p,\ell_1,p_1,\ell_2,p_2)$ heeft nu de in de stelling genoemde eigenschappen.

2.2. $p_2 \neq p$. Veeg nu ℓ_2 weg. Nu hebben alleen p en p_2 oneven valentie. Dus loopt er een lijn ℓ_3 van p_2 naar een punt p_3.

Zolang we niet in p terugkomen, kunnen we op deze manier doorgaan. Daar we slechts eindig veel lijnen kunnen wegvegen, is het *noodzakelijk* dat we vroeg of laat in p terugkomen. We hebben dan een pad

$$(p,\ell_1,p_1,\ell_2,\dots,p)$$

geconstrueerd dat aan de drie eisen van de stelling voldoet. □

Laten we nu eens aannemen dat we ons niet neerleggen bij ons verlies, en aan het klokkespel de extra spelregel toevoegen, dat, als het spel doodloopt, het toegestaan is van een willekeurig stapeltje *waar al een open kaart op ligt* de onderste kaart te nemen en daarmee door te gaan.

* Speel het spel verder met deze extra spelregel totdat je voor de tweede keer doodloopt. (Of had je toevallig gewonnen ? Speel het spel dan als beloning nog eens over!) Noteer weer wat je gedaan hebt.

Stel dat je verder gegaan bent met de onderste kaart van stapeltje a.
Dan *moet* je na verloop van tijd de vierde kaart van soort a op dit stapeltje terugleggen.

* Leg dit uit.

Je hebt nu twee gesloten paden die het punt a gemeen hebben.

* Combineer deze twee tot één groot pad met dezelfde lijnen.

* Speel het spel uit.

Bijna zeker zul je het spel nu "gewonnen" hebben. Verlies blijft toch nog mogelijk!

* Leg uit hoe het spel ook met de extra spelregel verloren kan worden. Waarmee correspondeert dit in onze graaf ?

Ons spelletje levert ons een methode om in een graaf waarin alle punten even valentie hebben een zo groot mogelijk gesloten pad zonder "dubbele" lijnen te construeren.
Ruwweg gaat dit als volgt:

1. Kies een punt.
2. Maak een pad beginnend en eindigend in dat punt.
3. Schakel er zo lang mogelijk andere gesloten paden tussen.

Vanzelfsprekend levert deze algoritme lang niet altijd een gesloten Eulerpad af.

* Beredeneer dat dit wel gebeurt als de graaf samenhangend is.

Feitelijk heb je nu zelf een bewijs geleverd van stelling 3 in de volgende paragraaf. Het bewijs dat wij zullen geven is niet wezenlijk anders, maar eenvoudiger netjes op te schrijven.

1f. EULERGRAFEN

De oplossing van ons probleem formuleren we in de volgende stelling.

STELLING 3. (EULER 1736) *Een graaf is een Euler-graaf als en slechts als de graaf samenhangend is (afgezien van geïsoleerde punten) en alle punten een even valentie hebben.*

<u>BEWIJS</u>. Bij een stelling als deze, waarin *nodige* en *voldoende* voorwaarden worden gegeven, valt het bewijs uiteen in twee delen.

1) De voorwaarden zijn nodig, d.w.z. we moeten aantonen dat iedere Euler-graaf samenhangend is (afgezien van geïsoleerde punten), en dat de valentie van ieder punt even is.

* Bewijs dit zelf.

2) De voorwaarden zijn voldoende, d.w.z. we moeten aantonen dat in iedere graaf die aan de voorwaarden voldoet een gesloten Eulerpad is.
Het bewijs gaat als volgt. Als de graaf alleen uit geïsoleerde punten bestaat, dan is het een Eulergraaf. Verwijder nu eerst alle geïsoleerde punten uit de graaf. Nu is de graaf samenhangend.
Er zijn gesloten paden die geen enkel lijn twee maal bevatten (zie bijv. stelling 2). Dus er is ook een *langste* pad met die eigenschap.

* Beredeneer dit.

Noem dit pad P. Is het mogelijk dat er nog lijnen zijn in de graaf die niet in P voorkomen? (Als deze er niet zouden zijn, dan zijn we klaar, want dan is P een gesloten Eulerpad.) Als er zo'n lijn is, dan moet er - op grond van de samenhang - ook een lijn zijn die niet in het pad zit, maar er wel een punt, zeg p, mee gemeen heeft. Veeg nu de lijnen van P uit de graaf weg. Nadat we dit gedaan hebben geldt nog steeds dat de valentie van ieder punt even is. Bovendien is p niet geïsoleerd. Dus is er een pad met de in stelling 2 genoemde eigenschappen. Als we dit pad in het punt p koppelen aan het pad P, dan vinden we een gesloten pad dat langer is dan het pad P en dat iedere lijn nog steeds ten hoogste éénmaal bevat. Dit is in strijd met de maximaliteit van P.
Conclusie: er zijn geen lijnen in de graaf buiten P. Dus iedere lijn van de graaf komt precies éénmaal voor in P, dus P is een Eulerpad. □

<u>STELLING 4</u>. (EULER 1736) *Een graaf is een semi-Euler-graaf als en slechts als hij samenhangend is (afgezien van geïsoleerde punten) en ten hoogste twee punten een oneven valentie hebben.*

<u>BEWIJS</u>. Het bewijs valt weer uiteen in twee delen.

1) De voorwaarden zijn nodig - ga dit zelf na.
2) De voorwaarden zijn voldoende, d.w.z. we moeten aantonen dat in iedere

graaf die aan de voorwaarden voldoet een Eulerpad is.
Dit bewijzen we als volgt.
Volgens het handenschud-lemma zijn er nul of twee punten met oneven valentie. Als het er nul zijn, dan levert stelling 3 het antwoord. Als het er twee zijn, dan voegen we in gedachte een lijn tussen die twee punten toe aan de graaf. Nu is er volgens stelling 3 een gesloten Eulerpad. Laten we de lijn nu weer weg, dan houden we het gevraagde Eulerpad over! □

1g. OPGAVEN

1. Hoe groot is de valentie van de punten in K_n?

2. Wat is de som van de valenties van alle punten van K_n? Is deze som even?

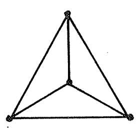
3. Hoeveel lijnen heeft K_n?

4. Een enkelvoudige samenhangende graaf heeft n punten. Wat kan je zeggen over het aantal lijnen van G als $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, of $n = 5$? Wat kan je zeggen over het aantal lijnen van G voor willekeurige n?

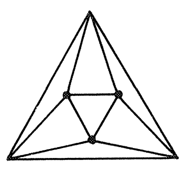
5. Teken alle verschillende enkelvoudige grafen op 3 en 4 punten.

6. Als je n punten hebt, en je weet van tevoren dat als je m lijnen naar willekeur tussen de punten tekent (maar nooit meer dan één lijn per puntenpaar), dat dan een samenhangende graaf ontstaat, wat kan je dan zeggen van m?

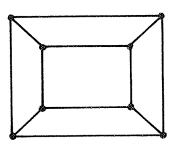
7. Wat zijn de valenties van de punten van de grafen in de volgende figuren? Welke zijn Eulergrafen? Zie je overeenkomst met de regelmatige veelvlakken?



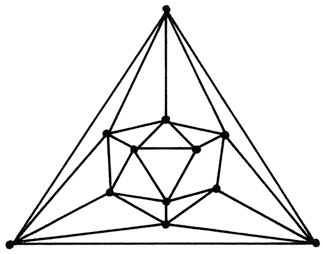
tetraëdergraaf
fig. 28



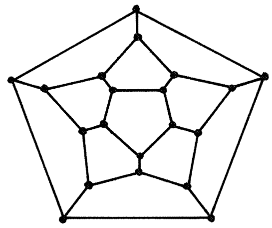
octaëdergraaf
fig. 29



hexaëdergraaf
fig. 30



icosaëdergraaf
fig. 31



dodecaëdergraaf
fig. 32

8. Je hebt acht punten. Kun je met deze acht punten een enkelvoudige graaf maken als de valenties van de punten zijn:

   a) 1,1,1,1,1,1,1,2;
   b) 2,2,2,2,2,2,2,2;
   c) 1,2,1,2,1,2,1,2;
   d) 1,2,3,4,5,6,7,8;
   e) 0,1,2,3,4,5,6,7;
   f) 1,2,3,4,5,6,2,2?

   Zo nee, waarom niet? Zo ja, geef een voorbeeld.
   Hoe zit het als je de eis van het enkelvoudig-zijn laat vervallen?

9. Laat zien dat in een enkelvoudige graaf (met tenminste twee punten) altijd twee punten met gelijke valentie voorkomen.

10. Voor welke getallen n is K_n een Euler-graaf?

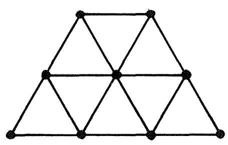
11. Teken alle verschillende Euler-grafen op vijf punten.

12. Pas de algoritme die beschreven is aan het eind van § 1e toe op de volgende grafen:

    a) K_7
    b) de octaëdergraaf uit figuur 29.

13. Ga na of er Euler-grafen bestaan met een even aantal punten en een oneven aantal lijnen.

14. Op 6 april 1977 stond in de Volkskrant de volgende "Hersenspoeler":

> "Wie ooit een bezoek brengt aan Ratselheim zal ongetwijfeld de Stephanskirche en het Volksmuseum willen bekijken. En dan is de verleiding groot om van de ene bezienswaardig naar de andere de ondergrondse te nemen. Maar doe dat niet!
>
> 
>
> Het kaartje toont alle lijnen en stations, waarbij elk stukje onderbroken lijn 1 kilometer lang is. Maar niet elke trein stopt bij elk station waar hij langs komt. Er daardoor bedraagt de afstand tussen Stephanskirche en Volksmuseum per ondergrondse een belachelijke 16 kilometer, waarbij je verschillende keren moet overstappen maar nooit twee keer over hetzelfde stuk lijn komt.
> Terwijl je, als je de rechtstreekse afstand te voet aflegt, hoe ver moet lopen?"

Los dit probleem op met behulp van de grafentheorie.

2. HAMILTON-GRAFEN

2a. WANDELEN LANGS PLEINEN

Een reisorganisatie heeft in haar veertiendaagse reis een rustdag ingelast waarbij de toeristen in een hotel van een grote stad ondergebracht zijn. Deze stad telt een aantal bezienswaardigheden, die alle op verschillende pleinen liggen. Een der deelnemers wil op die dag langs iedere bezienswaardigheid precies eenmaal gaan, en weer uitkomen waar hij begonnen is. Hij vraagt zich af of dit mogelijk is. Een plattegrond van de stad vind je hieronder.

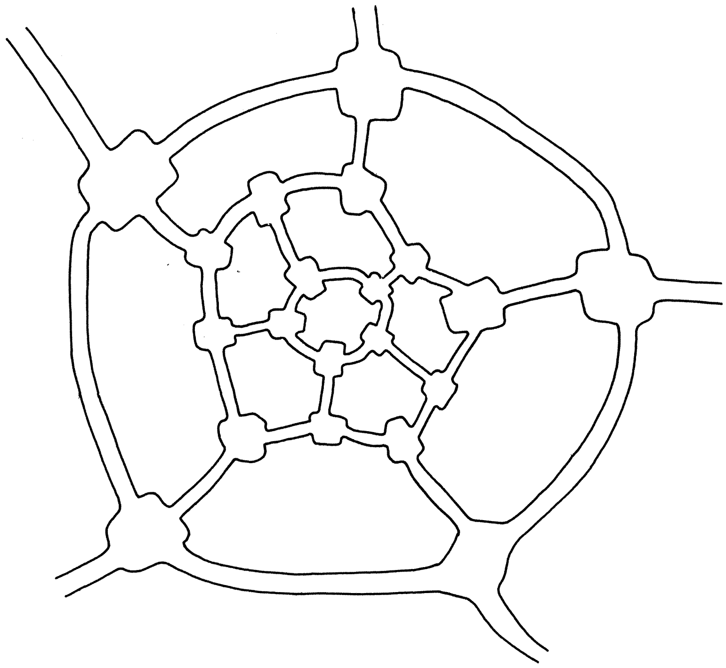


fig. 34

Om dit probleem op te lossen gaan we het abstraheren. De pleinen worden voorgesteld door punten, de verbindende straten door lijnen. Zo ontstaat een graaf. Wat zoekt onze rondwandelaar nu? Hij zoekt een gesloten pad door de graaf dat ieder van de punten precies één keer bevat.

*   Geef een routebeschrijving.

*   Is het mogelijk over de Zuidhollandse en Zeeuwse eilanden (zie figuur 7) rond te reizen en daarbij ieder eiland precies eenmaal te bezoeken?

2b. HAMILTON EN DODECAËDERS

Een van de eerste wiskundigen die zich met dit probleem heeft beziggehouden was Sir William Hamilton (1805-1865). Vandaar de volgende definities.

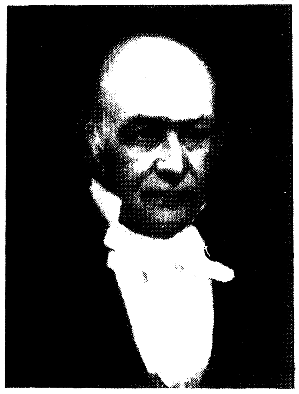


fig. 35

Een *circuit* is een gesloten pad, met lengte tenminste één, waarin geen punt of lijn meer dan eenmaal voorkomt (behalve het begin- en eindpunt, dat natuurlijk tweemaal voorkomt).

Een *Hamiltoncircuit* is een circuit waarin ieder punt van de graaf voorkomt.

Een *Hamiltongraaf* is een graaf waarin een Hamiltoncircuit voorkomt.

Hamilton vroeg zich af of een dergelijk circuit te vinden is langs de ribben van een dodecaëder (een regelmatig twaalfvlak).

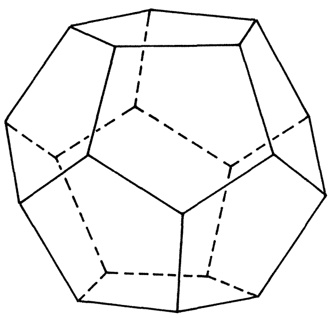


fig. 36

Het kostte Hamilton niet veel moeite het bestaan van zo'n gesloten pad aan te tonen. Voor het probleem waar het nu om gaat zijn natuurlijk alleen essentieel de hoekpunten van de dodecaëder en hoe deze verbonden zijn door ribben. Vandaar dat men bovenstaande ruimtelijke figuur vervangt door de volgende figuur.

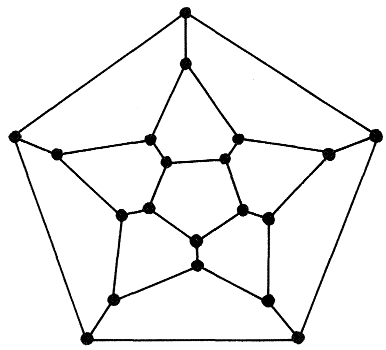


fig. 37

*   Geef een Hamiltoncircuit in bovenstaande figuur en zie het verband met de routebeschrijving uit § 2a.

2c. EULER-, HAMILTON- EN LIJNGRAFEN

*   Geef voorbeelden van:

(1) een Hamiltongraaf die geen Eulergraaf is;

(2) een Eulergraaf die geen Hamiltongraaf is;

(3) een graaf die geen Eulergraaf en ook geen Hamiltongraaf is;

(4) een Eulergraaf die ook een Hamiltongraaf is.

Uit deze voorbeelden lijkt het of er geen enkele relatie tussen Eulergrafen en Hamiltongrafen bestaat. Toch is er een zeker verband tussen het Eulerprobleem en het Hamiltonprobleem. Om dit verband te zien heb je een nieuw begrip nodig.

Veronderstel dat je een graaf hebt met m lijnen. Nummer die m lijnen. Teken m nieuwe punten met diezelfde nummers. Nu gaan we met die m nieuwe punten een nieuwe graaf maken, als volgt: punt i en punt j ($i \neq j$) worden verbonden als lijn i en lijn j een eindpunt gemeenschappelijk hebben, en anders niet. De nieuwe graaf die zo ontstaat noemen we de *lijngraaf* van de oorspronkelijke graaf.

Bijvoorbeeld, de lijngraaf van

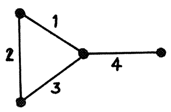


fig. 38

is

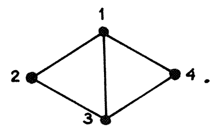


fig. 39

*   Bepaal op deze manier de lijngraaf van onderstaande grafen.

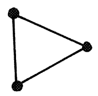


fig. 40

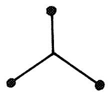


fig. 41

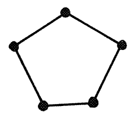


fig. 42

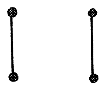


fig. 43

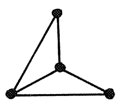


fig. 44

*   Ga voor elk van de volgende grafen na of het een lijngraaf is.

fig. 45

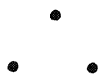


fig. 46

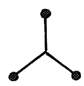


fig. 47

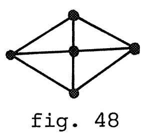


fig. 48

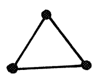


fig. 49

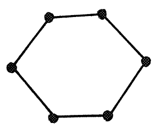


fig. 50

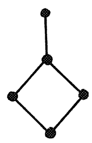


fig. 51

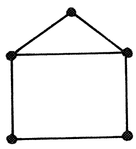


fig. 52

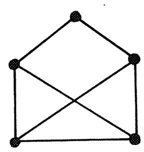


fig. 53

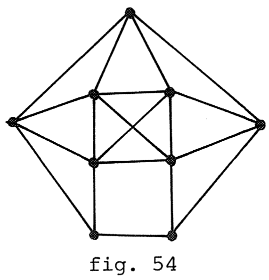


fig. 54

* Toon aan dat de lijngraaf van een Eulergraaf een Hamiltongraaf is.

Je kunt je afvragen of de omkering van deze laatste bewering ook waar is, met andere woorden: is iedere Hamiltongraaf de lijngraaf van een Eulergraaf?

* Laat zien dat onderstaande graaf een Hamiltongraaf is die niet de lijngraaf van een Eulergraaf is.

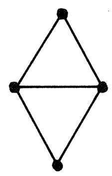


fig. 55

Dus de bovengenoemde omkering is niet waar.
Je voelt nu wel aan dat we het oplossen van het Hamiltonprobleem niet zo makkelijk terug kunnen brengen tot het oplossen van het Eulerprobleem.

Bij het Eulerprobleem zagen we een eenvoudige methode om na te gaan of een gegeven graaf een Eulergraaf is: we hoefden slechts naar de samenhang en naar de valenties van de punten te kijken. Voor het Hamiltonprobleem is zo'n eenvoudige methode nog niet bekend; dat wil zeggen men kent nog geen bruikbare nodige en voldoende voorwaarden waaraan een graaf moet voldoen om een Hamiltongraaf te zijn.
In de volgende paragraaf zullen we zien dat er wel stellingen bestaan die voldoende voorwaarden geven.

2d. DE STELLING VAN DIRAC

De stelling van Dirac zegt ruwweg dat een graaf een Hamiltoncircuit bezit zodra er maar voldoende lijnen zijn. Nauwkeuriger geformuleerd:

STELLING 1. (DIRAC 1952) *Zij* G *een enkelvoudige graaf met* n *punten* ($n>2$) *waarin de valentie van ieder punt tenminste* $\frac{1}{2}n$ *bedraagt. Dan is* G *een Hamiltongraaf.*

Op het eerste gezicht is het verwonderlijk dat niet wordt geëist dat G samenhangend moet zijn: dat is toch een vanzelfsprekende nodige voorwaarde!

Deze eis is echter niet nodig: hij volgt namelijk uit de gegevens. Hoewel niet strikt noodzakelijk, zullen we dit eerst aantonen, als een aanloopje naar het bewijs van stelling 1.
We bewijzen zelfs iets sterkers:

STELLING 2. *Zij* G *een enkelvoudige graaf met* n *punten waarin de valentie van ieder punt tenminste* $\frac{1}{2}(n-1)$ *bedraagt. Dan is* G *samenhangend.*

BEWIJS. We moeten aantonen dat G samenhangend is, dus dat tussen ieder tweetal verschillende punten een pad loopt. Welnu, neem twee verschillende punten x en y. Als x en y buren zijn, dan zijn we klaar. We mogen dus aannemen dat x en y geen buren zijn.
Volgens het gegeven heeft x tenminste $\frac{1}{2}(n-1)$ buren, evenals y. Kunnen deze buren alle verschillend zijn? Neen, want dan zouden x en y totaal tenminste n-1 buren hebben. Hiervoor zijn echter maar n-2 kandidaten, namelijk alle punten op x en y na. Dus x en y hebben een gemeenschappelijke buur, dus tussen x en y loopt een pad (ter lengte 2).
Dit geldt voor ieder tweetal verschillende punten x en y, dus G is samenhangend. □

We hebben in dit bewijs een veelgebruikte gedachtengang toegepast: we hebben een verzameling V met n elementen en twee deelverzamelingen A en B met respectievelijk a en b elementen; als a+b > n dan zijn A en B niet disjunct.

* Zij G een enkelvoudige graaf met n punten; v en w zijn twee punten van G waarvan de som van de valentie tenminste n-1 is. Bewijs dat tussen v en w een pad met lengte ten hoogste 2 loopt.

BEWIJS van stelling 1. We willen een circuit in een graaf construeren dat door ieder punt gaat. Hoe dat moet is niet zo direct duidelijk. Laten we ons daarom eerst eens tevreden stellen met een "*circuit-in-aanleg*", d.w.z. een rondreis P: $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \dots \to v_{n-1} \to v_n = v_0$ die wel precies éénmaal door ieder punt gaat, maar niet steeds langs lijnen van de graaf loopt: tussen v_{i-1} en v_i *hoeft* geen lijn te lopen. We zullen ons circuit-in-aanleg *beter* noemen naarmate hij vaker langs lijnen van de graaf loopt; het ideaal is dan een Hamiltoncircuit. We geven nu een procédé om ons circuit-in-aanleg te verbeteren.
Laten we aannemen dat tussen v_{i-1} en v_i geen lijn loopt. Laten we ook eens aannemen dat we kunnen bewijzen dat er een punt v_j is zodat v_i verbonden is

met v_j en v_{i-1} met v_{j-1}. Dan maken we het circuit-in-aanleg
$v_i \to v_j \to v_{j+1} \to \ldots \to v_{i-1} \to v_{j-1} \to v_{j-2} \to \ldots \to v_i$.

* Ga na dat dit circuit-in-aanleg beter is dan P.

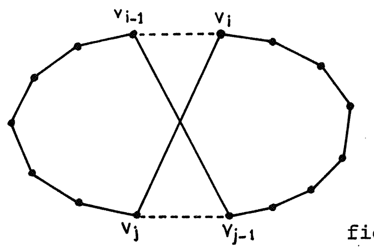


fig. 56

Op dit verbeterde circuit-in-aanleg kunnen we hetzelfde procédé toepassen. Dit gaat net zolang totdat ons circuit-in-aanleg een echt circuit is, d.w.z. totdat we een Hamiltoncircuit hebben geconstrueerd.
Ons bewijs is nu klaar, behalve dat we nog moeten aantonen dat er een j uit $\{1,2,\ldots,n\}$ bestaat zodat

1) v_j is verbonden met v_i, en
2) v_{j-1} is verbonden met v_{i-1}.

Er zijn tenminste $\frac{1}{2}n$ waarden van j die aan eis 1) voldoen.
Er zijn tenminste $\frac{1}{2}n$ waarden van j die aan eis 2) voldoen.
j = i voldoet noch aan 1), noch aan 2).

* Controleer de laatste drie beweringen.

Onder de overige n-1 waarden van j moet er dus tenminste één zijn die zowel aan 1) als aan 2) voldoet. Dit toont aan dat v_j echt bestaat. □

Er geldt nog de volgende verscherping van de stelling van Dirac:

<u>STELLING 3.</u> (ORE 1960) *Zij* G *een enkelvoudige graaf met* n *punten* (n>2), *waarin voor ieder tweetal verschillende, niet-naburige punten geldt dat de som van hun valenties tenminste* n *is. Dan is* G *een Hamiltongraaf.*

2e. OPGAVEN

1. Hoeveel kanten heeft een Hamiltongraaf op n punten minimaal?

2. Bedenk een enkelvoudige graaf op 6 punten met zoveel mogelijk kanten, die geen Hamiltongraaf is.

3. Met welke schaakstukken (koning, dame, toren, loper, paard) is het mogelijk een tocht over het schaakbord te maken van veld a1 naar veld h8 zodat ieder veld precies éénmaal wordt aangedaan?

4. Een groep mensen gaat eten in een restaurant. Ze willen zó rond een tafel gaan zitten, dat iedereen zijn beide buren kent. Hoe zou je dit probleem in grafentaal formuleren?

5. Vind alle verschillende enkelvoudige Hamiltongrafen op 5 punten.

6. Laat zien dat de grafen van figuur 28 t/m 32 Hamiltongrafen zijn, en vind een Hamiltoncircuit in ieder van die grafen.

7. Laat zien dat de lijngraaf van een samenhangende graaf samenhangend is.

8. Laat zien dat de lijngraaf van een Hamiltongraaf weer een Hamiltongraaf is.

9. Laat zien dat de lijngraaf van een enkelvoudige Eulergraaf weer een Eulergraaf is.

10. Een graaf heeft n punten en m lijnen. De valenties van die n punten zijn $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. Wat kan je zeggen over het aantal punten en het aantal lijnen van de lijngraaf van de gegeven graaf?

11. Bedenk een graaf met 2p+1 punten waarin de valentie van ieder punt tenminste p is, maar die geen Hamiltongraaf is:
    a) voor p=1;
    b) voor p=2;
    c) voor p=3;
    d) voor willekeurige p.

12. a) Stel G is een onsamenhangende graaf met n punten. Bewijs dat G een component heeft met ten hoogste ½n punten.
    b) Bewijs stelling 2 met behulp van opgave 12a.

13. Bewijs stelling 3 naar analogie met het bewijs van stelling 1.

3. BOMEN EN WOUDEN

3a. STAMBOMEN

Piet is geïnteresseerd in alle afstammelingen van zijn overgrootvader Jan. Hij heeft alle namen van hen opgeschreven, en om de verwantschap duidelijk aan te geven heeft hij de volgende "stamboom" gemaakt.

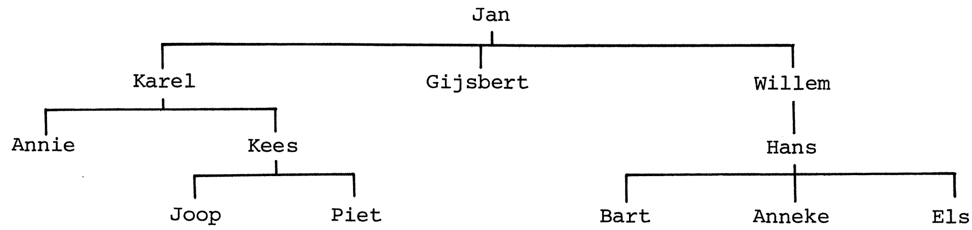


fig. 57

*   Maak van deze stamboom een graaf door iedere naam te vervangen door een punt en lijnen te trekken tussen ouders en kinderen.

*   Wat kun je vertellen over deze graaf? (Heeft de graaf lussen, meervoudige lijnen, circuits? Is de graaf samenhangend?)

Hieronder zie je een kaartje van de Mississippi met een aantal zijrivieren.

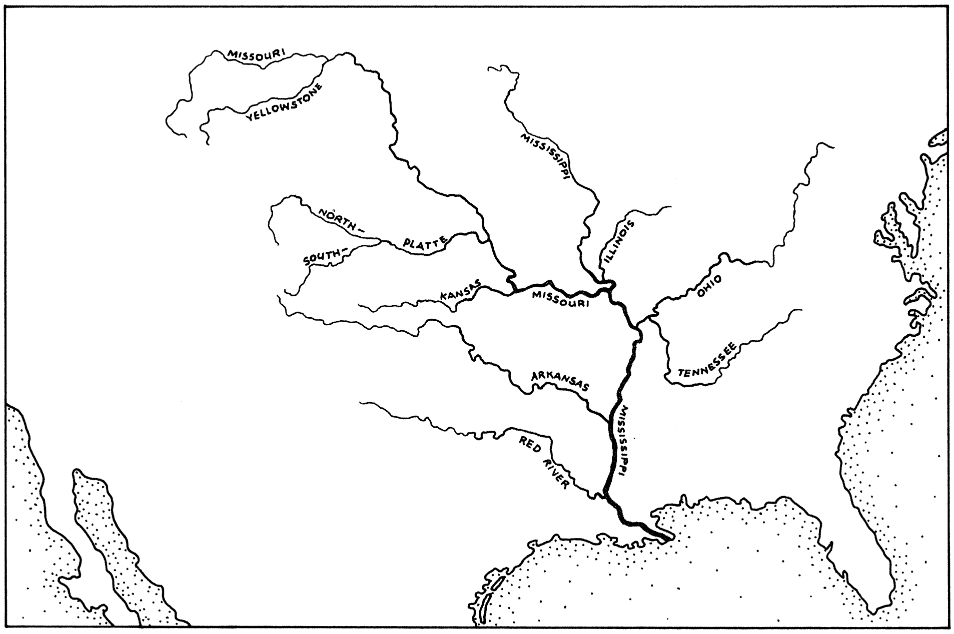


fig. 58

* Teken bij dit plaatje op de volgende manier een graaf. Geef iedere oorsprong, iedere splitsing en iedere uitmonding aan door een punt, en verbind twee punten door een lijn als er water direct van het ene naar het andere punt stroomt.

* Koning Willem III had drie zonen: Willem, Alexander en Maurits, en één dochter: Wilhelmina. Teken een graaf die de stamboom van Willem III (tot op heden) weergeeft.

3b BOMEN IN DE SCHEIKUNDE

Je kent allemaal wel de structuurformules in de scheikunde. Bijv.:

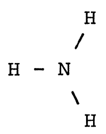


fig. 59

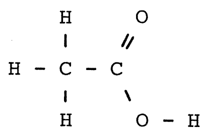


fig. 60

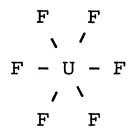


fig. 61

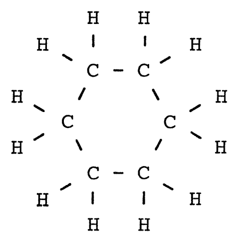
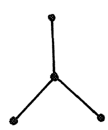


fig. 62

voor achtereenvolgens moleculen van ammoniak (NH_3), azijnzuur ($C_2H_4O_2$), uraniumhexafluoride (UF_6), en cyclohexaan (C_6H_{12}). Deze plaatjes zijn natuurlijk maar schema's. Zo liggen de moleculen geen van alle in een plat vlak. We interesseren ons nu niet voor de preciese ruimtelijke ligging, maar willen alleen weten welk atoom aan welk atoom is "gebonden". We kunnen daarom volstaan met een graaf. Bij het ammoniakmolecule hoort bijvoorbeeld de volgende graaf.

fig. 63

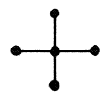
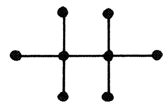


* Teken de grafen die bij de andere drie genoemde moleculen horen.

Bij de punten van de graaf kunnen we zetten welke atomen erbij horen, maar vaak is dit niet nodig, omdat we dat wel kunnen zien aan de valentie (zowel in scheikundige als grafentheoretische zin!)

Laten we eens de *alkanen* beschouwen. De moleculen daarvan hebben de vorm C_nH_{2n+2}. Ze bestaan dus uitsluitend uit koolstof- en waterstofatomen. Verder zijn ze *verzadigd* (d.w.z. er zijn geen dubbele bindingen), en *acyclisch* (wat dat betekent mag je zelf raden).

Voorbeelden zijn:

naam	*samenstelling*	*structuurformule*	*graaf*
methaan	CH_4	$\begin{array}{c} H \\ \vert \\ H - C - H \\ \vert \\ H \end{array}$	
ethaan	C_2H_6	$\begin{array}{ccccccc} & & H & & H & & \\ & & \vert & & \vert & & \\ H & - & C & - & C & - & H \\ & & \vert & & \vert & & \\ & & H & & H & & \end{array}$	
propaan	C_3H_8		

*   Teken zelf de structuurformule en de graaf behorend bij propaan.

*   Teken de graaf behorend bij een molecule C_4H_{10}. Merk op dat er twee mogelijkheden zijn.

Het is een vermoeiend karwei om al die waterstofatomen te tekenen, zeker bij grotere alkaanmoleculen. Het is echter voldoende om alleen het *koolstofskelet* te geven. Voor methaan, ethaan en propaan is dit achtereenvolgens:

methaan:	C	of:	
ethaan :	C - C	of:	
propaan:	C - C - C	of:	

*   Geef aan hoe je bij deze koolstofskeletten het gehele molecule terugvindt. Merk op dat dit altijd op precies één manier kan.

*   Teken de koolstofskeletten van de beide moleculen C_4H_{10}.

*   Teken alle verschillende moleculen C_5H_{12}. Hoeveel zijn er?

*   Teken alle verschillende moleculen C_6H_{14}, C_7H_{16} en, als je zin hebt, C_8H_{18}. Doe het systematisch, anders raak je gauw de kluts kwijt. Hoeveel zijn er van elk?

*   Vul de gevonden aantallen in onderstaande tabel in.

n	aantal verschillende moleculen C_nH_{2n+2}
1	1
2	1
3	1
4	2
5	...
6	...
7	...
8	...
9	35
10	75

*   Zie je een regelmaat in deze aantallen? (Wij niet!)

Het aantal verschillende moleculen C_nH_{2n+2} stijgt zeer snel met n. Voor n = 20 is dit aantal 366.319; voor n = 40 zelfs 62.491.178.805.831 !

3c BOMEN

We hebben in de voorafgaande voorbeelden verscheidene grafen gezien.

*   Zijn deze grafen samenhangend? Hebben ze circuits?

De meeste zijn van een bijzonder soort; ze vertonen enige overeenkomst met wat we in het dagelijks leven een boom noemen. Daarom definiëren we:

Een *boom* is een samenhangende graaf zonder circuits.

*   Welke van de onderstaande grafen zijn bomen?

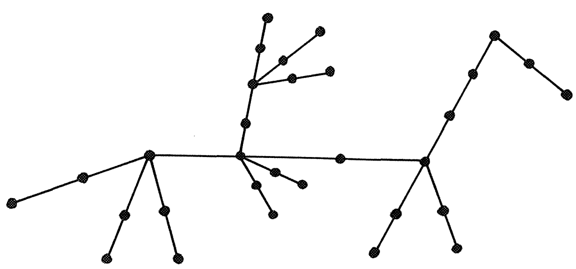


fig. 64

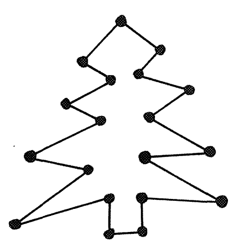


fig. 65

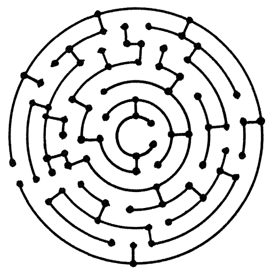


fig. 66

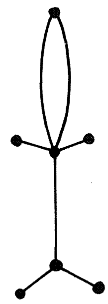


fig. 67

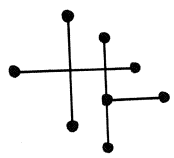


fig. 68

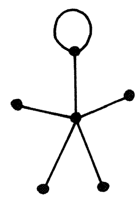


fig. 69

* Kan een boom meervoudige lijnen hebben?

* Kan een boom lussen hebben?

* Teken alle verschillende bomen op 4 punten.

* Toon aan dat tussen ieder tweetal punten van een boom precies één keten loopt.

Belangrijke eigenschappen van bomen worden geformuleerd in de volgende twee stellingen.

STELLING 1. *Trekken we tussen twee punten van een boom een nieuwe lijn dan ontstaat een circuit.*

* Bewijs stelling 1.

STELLING 2. *Als we uit een boom een lijn verwijderen dan ontstaat een onsamenhangende graaf.*

* Bewijs stelling 2.

Uit deze twee stellingen blijkt dat een boom, in zekere zin, zowel (1) een maximale graaf zonder circuits is, als (2) een minimale samenhangende graaf.

* Tel van ieder van de bomen van de figuren 63-69 het aantal punten en het aantal lijnen. Wat valt je op?

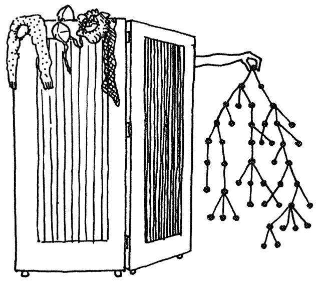


fig. 70

We maken een model van een boom door voor de punten balletjes te nemen, en voor de lijnen touwtjes die de balletjes verbinden. Pak nu het model op bij een van de balletjes en laat de rest vrij hangen. Ieder balletje heeft nu een touwtje (direct) boven zich, behalve het balletje dat vastgehouden wordt. Dus er is één balletje meer dan er touwtjes zijn. Hieruit volgt:

STELLING 3. *Een boom met* n *punten heeft precies* n-1 *lijnen.*

3d. WOUDEN

Evenals we in het dagelijks leven zeggen dat een aantal bomen een woud vormt definieren we in de grafentheorie:

Een *woud* is een graaf waarvan iedere component een boom is.

Een voorbeeld van een woud is de volgende graaf.

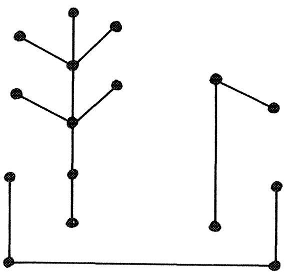


fig. 71

* Toon aan dat iedere graaf zonder circuits een woud is.

* Zij G een woud met k componenten. Bewijs dat we van G een boom kunnen maken door het trekken van k-1 nieuwe lijnen.

STELLING 4. *Een woud met* n *punten en* k *componenten heeft precies* n-k *lijnen.*

*   Bewijs stelling 4 met behulp van stelling 3 en de vorige opgave.

3e GENUMMERDE BOMEN

Laten we eens aannemen dat we de een of andere boom hebben, bijv. de boom die hieronder getekend is.

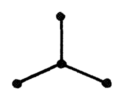


fig. 72

We kunnen nu de punten van deze boom gaan nummeren van 1 t/m 4. (We zullen in het vervolg kortweg bijv. nummer 3 zeggen als we het punt met nummer 3 bedoelen.) We krijgen dan o.a. de volgende nummeringen.

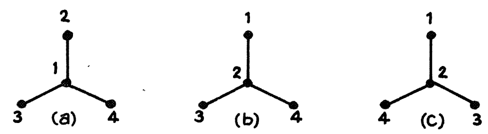


fig. 73

*   Op hoeveel manieren kan je de boom van figuur 72 nummeren ?

*   Hoe groot is het aantal nummeringen van een willekeurige boom op 4 punten? En van een boom op 5 punten? En op n punten?

Als we deze nummeringen wat nader bekijken, dan zien we dat (b) en (c) in wezen hetzelfde zijn: als twee nummers in (b) verbonden zijn, dan is dat ook het geval in (c), en omgekeerd.
De nummeringen (a) en (b) zijn *niet* hetzelfde, want in (a) zijn bijv. 1 en 4 verbonden, maar in (b) niet.

*   Onderzoek welke van onderstaande nummeringen hetzelfde zijn en welke niet.

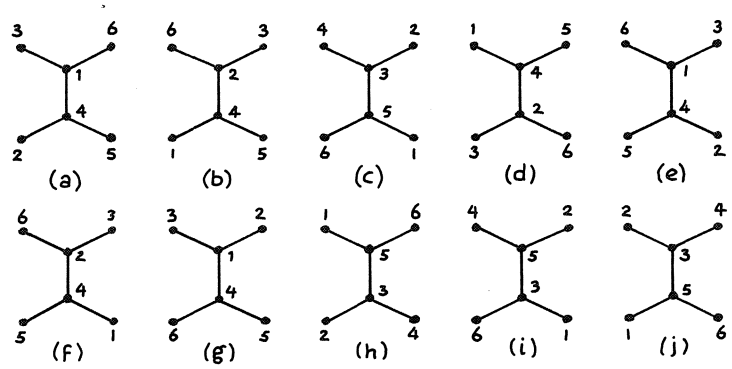


fig. 74

We zullen nu een en ander preciseren. Een boom op n punten waarvan de punten genummerd zijn van 1 t/m n, noemen we een *genummerde boom*. Gelijkheid van genummerde bomen definiëren we als volgt. Stel dat we twee genummerde bomen V en W hebben, beide op n punten. Als nu voor iedere k en ℓ uit $\{1,\ldots,n\}$ geldt:

nummer k en nummer ℓ zijn verbonden in V $\Longleftrightarrow$ nummer k en nummer ℓ zijn verbonden in W,

dan noemen we de genummerde bomen V en W *gelijk*.

*   Ga aan de hand van deze definitie na dat de genummerde bomen (b) en (c) uit figuur 73 gelijk zijn maar dat de genummerde bomen (a) en (b) uit dezelfde figuur niet gelijk zijn.

We kunnen ons nu afvragen hoeveel verschillende genummerde bomen er zijn op n punten.

*   Onderzoek hoeveel verschillende genummerde bomen er zijn op 3 punten en op 4 punten.

*   Probeer ook het aantal verschillende genummerde bomen op 5 punten te vinden. Mocht dit niet lukken, bestudeer dan eerst het volgende.

Om het aantal verschillende genummerde bomen op bijv. 6 punten te vinden, zouden we als volgt kunnen redeneren.

Een boom op 6 punten heeft 5 lijnen. Volgens het handenschudlemma is de som van de valenties van alle punten dus gelijk aan 10. Verder is de valentie van ieder punt ten hoogste 5 en tenminste 1.

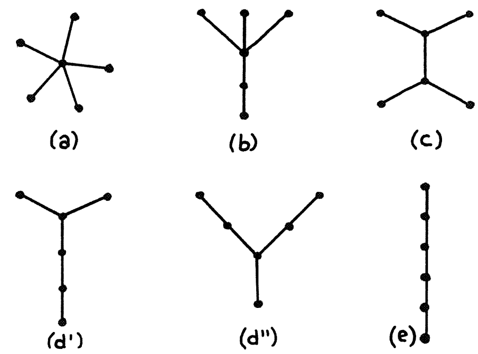
*   Ga dit alles nog eens na.

Voor de valenties van de 6 punten hebben we dan de volgende mogelijkheden:

a) 5, 1, 1, 1, 1, 1;
b) 4, 2, 1, 1, 1, 1;
c) 3, 3, 1, 1, 1, 1;
d) 3, 2, 2, 1, 1, 1;
e) 2, 2, 2, 2, 1, 1.

Bij deze vijf mogelijkheden horen de volgende types bomen:

fig. 75



We hebben al gezien dat een boom op 6 punten op 6! = 720 manieren genummerd kan worden, als we niet letten op gelijkheid van nummeringen.
We moeten nu alleen nog berekenen hoeveel van deze nummeringen *verschillend* zijn.

*   Beredeneer dat de boom van type (a) op 6 verschillende manieren genummerd kan worden.

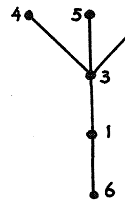
Bij de boom van type (b) gaan we als volgt te werk.
Neem eens een genummerde boom van type (b). Als we de nummers permuteren van de punten met valentie 1 die aan het punt met valentie 4 vastzitten, dan krijgen we een genummerde boom die gelijk is aan de oorspronkelijke.

*   Ga na dat iedere andere permutatie een genummerde boom levert die *niet* gelijk is aan de oorspronkelijke.

Uit een genummerde boom ontstaan door permutatie van de nummers precies zes genummerde bomen die gelijk zijn aan de gegeven boom (vergeet de identieke permutatie niet).

* Laat dit zien aan de hand van onderstaand voorbeeld.

fig. 76

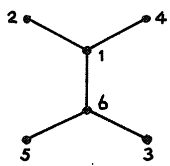


De 720 genummerde bomen vallen dus uitéén in 120 groepjes van 6 gelijke. Daarom zijn er $\frac{720}{6} = 120$ verschillende genummerde bomen van type (b).

* Beredeneer nu zelf dat het aantal verschillende genummerde bomen van type (d') gelijk is aan $\frac{720}{2} = 360$, van type (d'') $\frac{720}{2} = 360$ en van type (e) $\frac{720}{2} = 360$.

* Ga na dat door permutatie van de nummers uit onderstaande genummerde boom precies 8 genummerde bomen verkregen kunnen worden die gelijk zijn aan de oorspronkelijke.

fig. 77



* Beredeneer dat het aantal verschillende genummerde bomen van type (c) gelijk is aan $\frac{720}{8} = 90$.

Onze slotconclusie luidt: het aantal verschillende genummerde bomen op 6 punten is gelijk aan 1296.

* Ga dit na.

* Bereken op soortgelijke wijze het aantal verschillende genummerde bomen op 5 punten, als dit niet eerder gelukt is.

We vatten de tot nu toe gevonden resultaten samen in onderstaande tabel:

Aantal punten	Aantal verschillende genummerde bomen
2	1
3	3
4	16
5	125
6	1296

* Zie je een verband?

Het bedoelde verband formuleren we in de volgende stelling, die we niet zullen bewijzen omdat het bewijs nogal lastig is.

STELLING 5 (CAYLEY, 1889). *Het aantal verschillende genummerde bomen op* n *punten is gelijk aan* n^{n-2}.

3f. OPGAVEN

1. Hoeveel kanten moeten uit de dodecaëder (fig. 37) worden weggelaten om een boom over te houden?

2. Toon aan dat iedere boom (behalve K_1) ten minste twee punten met valentie 1 heeft.

3. Toon aan dat iedere samenhangende graaf op n punten ten minste n-1 lijnen heeft.

4. Vind alle verschillende bomen op 7 punten, uitgaande van de in § 3e gevonden bomen op 6 punten.

5. Teken achtereenvolgens een boom waarvan de punten de volgende valenties hebben:

   1,1;
   1,1,2;
   1,1,2,2;
   1,1,1,2,3;
   1,1,1,2,2,3.

6. Laat n positieve gehele getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeven zijn zodat $n \geq 2$,

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n,$$

en

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2(n-1).$$

a. Bewijs dat $a_1 = a_2 = 1$, en $a_n \geq 2$ (behalve als $n = 2$).
b. Toon aan dat er een boom bestaat op n punten met valenties $a_1,\ldots,a_n$.

7. Teken 6 punten. Verbind ieder tweetal punten door òf een rode, òf een groene, òf een blauwe lijn zó dat zowel de rode, als de groene, als de blauwe lijnen een boom vormen.

8. Definieer het begrip genummerde enkelvoudige graaf op n punten. Definieer voor genummerde enkelvoudige grafen het begrip gelijkheid.

9. Bereken voor n = 1, 2, 3, 4 het aantal verschillende genummerde enkelvoudige grafen op n punten. Zie je een verband?

4. VLAKKE GRAFEN

4a. ISOMORFIE VAN GRAFEN

Stel eens dat je de graaf K_4 wil tekenen. Dan zou je tekening er als volgt kunnen uitzien:

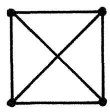


fig. 78

Maar je zou ook onderstaande figuur getekend kunnen hebben:

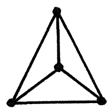


fig. 79

Je gevoel zegt je dat beide plaatjes "in-wezen-hetzelfde" zijn.
We zullen dit begrip "in-wezen-hetzelfde-zijn" eens in het algemeen bekijken. Neem eens even aan dat je iemand wil vertellen wat voor graaf je in gedachten hebt. Je zou dan de punten van die graaf kunnen nummeren, bijv. van 1 t/m n en voor iedere i en j uit $\{1,...,n\}$ kunnen vertellen hoeveel lijnen er tussen punt i en punt j lopen. Degene aan wie je dit vertelt kan de graaf dan tekenen. Hierbij heeft hij echter nog een zekere vrijheid: hij kan de punten neerzetten waar hij wil en hoe hij de lijnen tekent is ook nogal willekeurig. Je kan dus een heleboel verschillende figuurtjes verwachten. Toch zal je van ieder figuurtje zeggen dat het de graaf is die jij in gedachten had, dus dat als graaf gezien al die figuurtjes "hetzelfde" zijn. We zullen nu van dit "hetzelfde-zijn" een exacte definitie geven.
Laten we aannemen dat we twee grafen G en G' hebben en dat beide n $(n \geq 1)$ punten bezitten. Als het mogelijk is om de punten van G, evenals die van G', van 1 t/m n te nummeren, zo dat voor alle i en j uit $\{1,...,n\}$ geldt dat tussen punt i en punt j van G evenveel lijnen lopen als tussen punt i en punt j van G', dan noemen we G en G' *isomorf*.

* Ga na welke van onderstaande grafen isomorf zijn en welke niet.

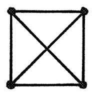


fig. 80

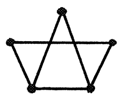


fig. 81

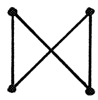


fig. 82

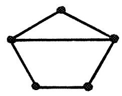


fig. 83

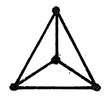


fig. 84

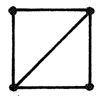


fig. 85

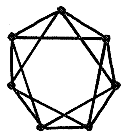


fig. 86

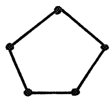


fig. 87

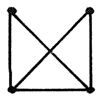


fig. 88

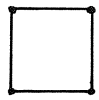


fig. 89

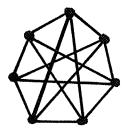


fig. 90

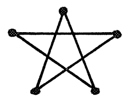


fig. 91

We zullen afspreken dat we in het vervolg met "teken die graaf" zullen bedoelen: teken een graaf die isomorf is met die graaf.

4b. DRIE PROBLEMEN

PROBLEEM 1. Het eerste probleem is je waarschijnlijk wel bekend. Je hebt drie huizen, een electriciteitscentrale, een gasfabriek en een waterleidingbedrijf. Je wil ieder huis met ieder van deze bedrijven verbinden door middel van leidingen die elkaar nergens overkruisen.
De vraag is nu: is dit mogelijk?
Als je dit probleem in grafentaal vertaalt, dan luidt de vraag: bestaat er een graaf waarvan de punten en lijnen in één plat vlak liggen zo dat geen twee lijnen elkaar tussen twee punten van de graaf doorsnijden en die bovendien isomorf is met onderstaande graaf?

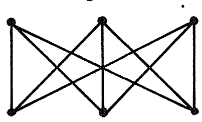


fig. 92

Wat losser geformuleerd: kun je bovenstaande graaf zo in het platte vlak tekenen dat geen twee lijnen elkaar tussen twee punten doorsnijden?

PROBLEEM 2. Het tweede probleem lijkt nogal op het eerste. Je hebt vijf huizen. Je wil ieder huis verbinden met ieder van de andere door middel van telefoonlijnen die elkaar nergens overkruisen.
Vertaald in grafentaal: kun je onderstaande graaf zo in het platte vlak tekenen dat geen twee lijnen elkaar tussen twee punten doorsnijden?

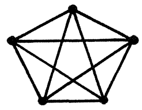


fig. 93

PROBLEEM 3. Zes huizen staan in een kring, zoals in onderstaande figuur is weergegeven.

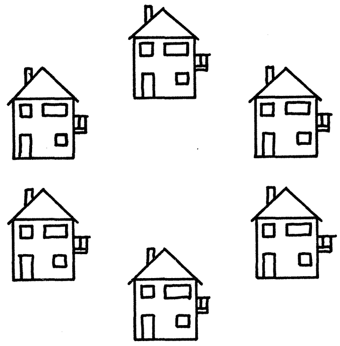


fig. 94

De bewoners van deze huizen willen onderling wel eens een praatje maken. Met hun naaste buren doen ze dit vanaf het balkon. Tussen niet naast elkaar gelegen huizen vindt het contact per telefoon plaats. Deze telefoonlijnen mogen elkaar niet kruisen.
Vertaald in grafentaal: kun je de volgende graaf zó in het platte vlak tekenen dat de lijnen elkaar nergens doorsnijden?

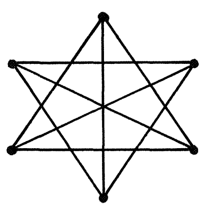


fig. 95

* Probeer zelf de drie genoemde problemen op te lossen.

4c. HET TEKENEN VAN GRAFEN ZONDER DOORSNIJDINGEN VAN LIJNEN

Als we de grafen uit de problemen 1 en 2 zonder doorsnijdingen van lijnen proberen te tekenen, dan komen we in moeilijkheden. Deze moeilijkheden hebben te maken met het feit dat in beide grafen "teveel" circuits zitten. We zullen daarom eerst het tekenen van een circuit P wat nader gaan bekijken. Als je dit circuit zonder doorsnijdingen van lijnen in een plat vlak tekent dan merk je dat het platte vlak door P in twee stukken wordt verdeeld. Wanneer je vervolgens twee punten van P verbindt door een lijn ℓ_1 die niet in P zit en geen enkele lijn van P doorsnijdt, dan moet ℓ_1 in één van de twee stukken liggen waarin P het vlak verdeelt (zie onderstaande figuren).

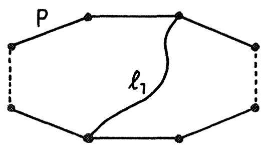


fig. 96

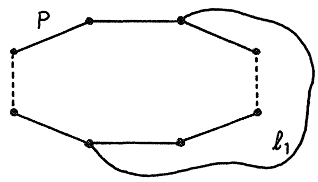


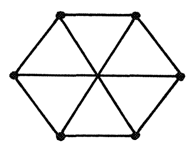
fig. 97

Je ziet dat het platte vlak nu door P en ℓ_1 in drie stukken wordt verdeeld.

* Laat met tekeningetjes zien dat het mogelijk is om zonder doorsnijdingen van lijnen nogmaals twee willekeurige punten van P door een lijn ℓ_2 te verbinden. We zullen nu de bovenstaande gedachtengang gaan gebruiken om de problemen uit 4b op te lossen.

* Laat zien dat onderstaande graaf isomorf is met de graaf uit probleem 1.

fig. 98



Toon vervolgens aan dat deze graaf niet zonder doorsnijdingen van lijnen in een plat vlak getekend kan worden. Geef tenslotte de oplossing van probleem 1.

* Laat op soortgelijke wijze zien dat K_5 niet zonder doorsnijdingen van lijnen getekend kan worden in een plat vlak en los ten slotte probleem 2 op.

Je hebt nu dus beredeneerd dat onderstaande grafen niet zonder doorsnijdingen van lijnen in een plat vlak getekend kunnen worden.

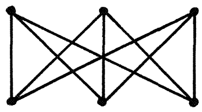


fig. 99

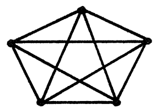


fig. 100

We zullen dit in een van de volgende paragrafen ook nog op een andere manier afleiden.

4d. ENKELE DEFINITIES

Een graaf die zonder doorsnijdingen van lijnen in een plat vlak te tekenen is, noemen we een *vlakke* graaf.

* Onderzoek welke van onderstaande grafen vlak zijn en welke niet.

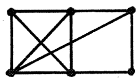


fig. 101

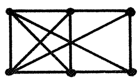


fig. 102

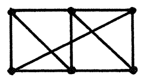


fig. 103

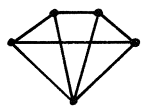


fig. 104

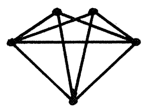


fig. 105

Als we een vlakke graaf zonder doorsnijdingen van lijnen in het platte vlak tekenen, dan wordt het platte vlak in een aantal stukken verdeeld. Deze stukken noemen we de *facetten* van de vlakke graaf. Één van deze facetten is onbegrensd. Dit noemen we het *oneindige* facet.

* Teken onderstaande graaf opnieuw, zó dat het oneindige facet door de lijnen a, b en c begrensd wordt. Doe het ook nog eens zo dat het oneindige facet door de lijnen b,c,d,e,f,g en h wordt begrensd.

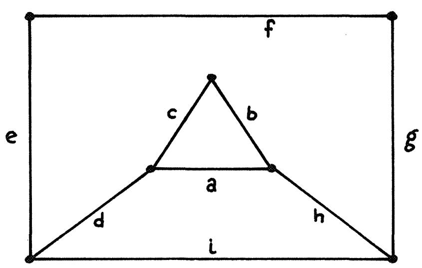


fig. 106

4e. DE STELLING VAN EULER VOOR VLAKKE GRAFEN

* Bereken voor ieder van onderstaande grafen:

1) aantal punten + aantal facetten,
2) aantal lijnen.

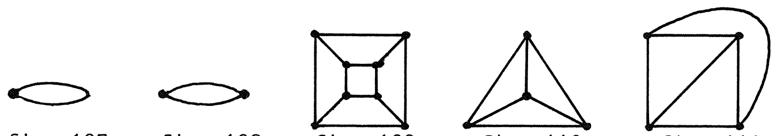


fig. 107 fig. 108 fig. 109 fig. 110 fig. 111

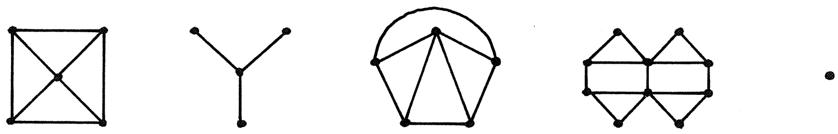


fig. 112 fig. 113 fig. 114 fig. 115 fig. 116

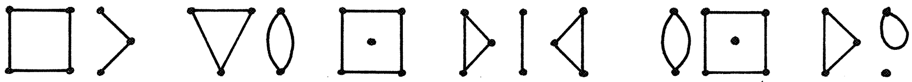


fig. 117 fig. 118 fig. 119 fig. 120 fig. 121 fig. 122

Wat merk je op?
Uit bovenstaande opdracht heb je waarschijnlijk al het verband gehaald dat er bestaat tussen het aantal punten, het aantal facetten en het aantal lijnen van een *samenhangende* vlakke graaf.
We zullen dit verband nu ook nog algemeen bewijzen.

<u>STELLING 1</u>. (EULER, 1752)
Als G *een samenhangende vlakke graaf is met* n *punten,* m *lijnen en* f *facetten, dan geldt*: $n + f = m + 2$.

<u>BEWIJS</u>. We beginnen met vast te stellen dat iedere samenhangende vlakke graaf uit K_1 (de graaf bestaande uit één enkel punt) verkregen kan worden door een aantal malen een van de volgende handelingen te verrichten:
1) het toevoegen van een nieuw punt en een nieuwe lijn van dat nieuwe punt naar één van de al aanwezige punten, zó dat deze nieuwe lijn geen enkele van de al aanwezige lijnen doorsnijdt;
2) het toevoegen van een nieuwe lijn tussen twee al aanwezige punten, zó dat deze nieuwe lijn geen enkele van de al aanwezige lijnen doorsnijdt.

Door het verrichten van handeling 1) neemt het aantal punten met één toe, het aantal facetten neemt met nul toe en het aantal lijnen neemt met één toe.

Dus het aantal punten plus het aantal facetten minus het aantal lijnen blijft hetzelfde.

Door het verrichten van handeling 2) neemt het aantal punten toe met nul, het aantal facetten met één en het aantal lijnen ook met één.

Dus het aantal punten plus het aantal facetten minus het aantal lijnen blijft hetzelfde.

Voor K_1 geldt: aantal punten plus aantal facetten minus het aantal lijnen $= 1 + 1 - 0 = 2$.

Dus voor G geldt: $n + f - m = 2$, oftewel:

$$n + f = m + 2. \quad \square$$

4f. ENIGE GEVOLGEN VAN DE STELLING VAN EULER

STELLING 2. *Veronderstel dat* G *een samenhangende vlakke graaf is met* n $(n \geq 3)$ *punten en* m *lijnen, terwijl bovendien ieder facet van* G *begrensd wordt door precies* 3 *lijnen. Dan geldt*:

$$m = 3(n-2).$$

BEWIJS. Stel het aantal facetten f. Noem de facetten van G: $F_1, \ldots, F_f$. Schrijf nu de drie lijnen op die F_1 begrenzen, daarachter de drie lijnen die F_2 begrenzen, enzovoort. We krijgen dan een rij met 3f termen. Daar iedere lijn aan twee kanten een facet begrenst (ga na!), komt ieder van de m lijnen precies tweemaal in bovengenoemde rij voor. Hieruit volgt: $2m = 3f$. Uit de stelling van Euler volgt: $3n + 3f = 3m + 6$.
Dus:

$$\begin{aligned} 3n + 2m &= 3m + 6, \\ m &= 3n-6, \\ m &= 3(n-2). \quad \square \end{aligned}$$

STELLING 3. *Als* G *een enkelvoudige, samenhangende vlakke graaf is met* n $(n \geq 3)$ *punten en* m *lijnen, dan geldt*: $m \leq 3(n-2)$.

* Toon dit aan. Bekijk het geval $n = 3$ en $m = 2$ apart.

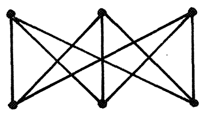
* Toon m.b.v. stelling 3 aan, dat K_5 niet vlak is.

STELLING 4. *Als* G *een samenhangende vlakke graaf is met* n ($n\geq 3$) *punten en* m *lijnen, terwijl bovendien ieder facet van* G *begrensd wordt door tenminste* k ($k\geq 3$) *lijnen, dan geldt:* $(k-2).m \leq k.(n-2)$.

* Toon dit aan.

* Laat m.b.v. stelling 4 zien dat de volgende graaf niet vlak is.

fig. 123



De bovenstaande graaf, die we al in verband met probleem 1 zijn tegengekomen, speelt een belangrijke rol in de theorie van de vlakke grafen, zoals nog zal blijken. Bovendien is deze graaf van een speciaal type. Daarom geven we de volgende definitie. Teken p ($p\geq 1$) punten en nog eens q ($q\geq 1$) andere punten. Verbind nu ieder van de eerste p punten met ieder van de q andere punten. Trek verder geen andere lijnen. De graaf die we nu gekregen hebben (en alle grafen die met deze graaf isomorf zijn) geven we aan met $K_{p,q}$ en noemen we een *volledige bipartiete graaf.*

* Hoe kunnen we nu bovenstaande graaf aangeven?

* Teken $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{1,3}$, $K_{2,2}$, en $K_{3,4}$.

* Hoeveel lijnen heeft $K_{p,q}$?

* Wat kan je van de valenties van de punten van $K_{p,q}$ vertellen?

We zullen nu een eigenschap gaan bekijken die we later nodig hebben.

STELLING 5. *Als* G *een enkelvoudige vlakke graaf is, dan heeft* G *tenminste één punt waarvan de valentie kleiner is dan zes.*

BEWIJS. Veronderstel dat bovenstaande bewering niet waar is. Dan is er een enkelvoudige vlakke graaf G waarin de valentie van ieder punt tenminste zes is. We mogen wel aannemen dat G samenhangend is, want anders was er wel een enkelvoudige vlakke component geweest waarin de valentie van ieder punt tenminste zes is (en hadden we die component kunnen nemen).
Zij n het aantal punten van G en m het aantal lijnen.

*   Ga na dat geldt:

1) $2m \geq 6n$ (denk aan het handenschudlemma), en

2) $m \leq 3(n-2)$.

Leid hieruit een tegenspraak af. □

4g. VLAK OF NIET VLAK?

In het voorgaande hebben we, door gebruik te maken van de stelling van Euler en een aantal gevolgen van deze stelling, aangetoond dat bepaalde grafen, zoals K_5 en $K_{3,3}$, niet vlak zijn.

We zullen nu, zonder bewijs, een stelling formuleren waarmee we, in principe, te weten kunnen komen of een gegeven graaf vlak is of niet. Om deze stelling te formuleren hebben we een tweetal nieuwe begrippen nodig.

Een graaf G_0 noemen we een *deelgraaf* van een graaf G als G_0 isomorf is met een graaf die we uit G kunnen verkrijgen door uit G een aantal punten en/of lijnen weg te laten.

*   Teken alle niet-isomorfe deelgrafen van K_4.

*   Teken van onderstaande grafen alle niet-isomorfe deelgrafen die tevens bomen zijn.

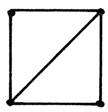


fig. 124

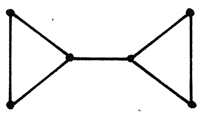


fig. 125

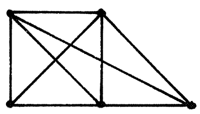


fig. 126

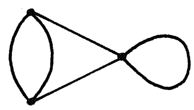


fig. 127

Veronderstel eens dat we een of andere graaf hebben, bijvoorbeeld K_4. We kunnen uit die graaf een (andere) graaf maken door op een aantal lijnen tussen de al aanwezige punten één of meer nieuwe punten te tekenen. Uit K_4 kunnen we dan o.a. de volgende grafen maken:

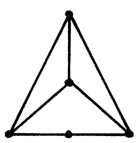


fig. 128

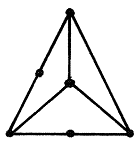


fig. 129

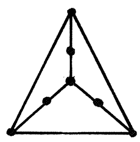


fig. 130

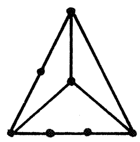


fig. 131

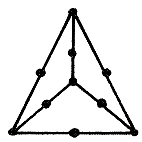


fig. 132

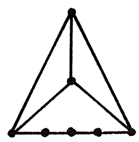


fig. 133

We zullen twee grafen *homeomorf* noemen als ze op bovenstaande wijze afgeleid kunnen worden uit isomorfe grafen.

* Ga na welke van de volgende grafen homeomorf zijn en welke niet.

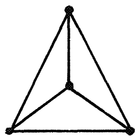


fig. 134

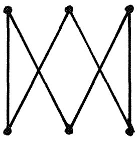


fig. 135

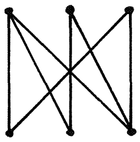


fig. 136

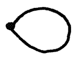


fig. 137

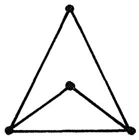


fig. 138

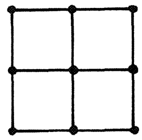


fig. 139

Dan nu de aangekondigde stelling.

<u>STELLING 6</u>. (KURATOWSKI, 1930)

G *is een vlakke graaf dan en alleen dan als* G *geen deelgraaf heeft die homeomorf is met* K_5 *of* $K_{3,3}$.

* Toon aan: als G een vlakke graaf is, dan heeft G *geen* deelgraaf die homeomorf is met K_5 of $K_{3,3}$.

Het bewijs van het tweede gedeelte van de stelling, namelijk van de bewering: als G *geen* deelgraaf heeft die homeomorf is met K_5 of $K_{3,3}$, dan is G vlak, is erg ingewikkeld en daarom laten we dit achterwege.

4h. DUALE GRAFEN

Bij een gegeven vlakke graaf G, die zonder doorsnijdingen getekend is, kunnen we een nieuwe graaf G^* maken op de volgende manier.
Teken in ieder facet van G een punt. Trek nu tussen twee nieuwe punten (of tussen een nieuw punt en zichzelf) een lijn als het mogelijk is deze nieuwe lijn zó te tekenen dat hij precies één lijn van G doorsnijdt. Teken verder géén nieuwe lijnen. De graaf G^* bestaande uit nieuwe punten en nieuwe lijnen noemen we de *duale* graaf van G.

* Teken de duale grafen van de volgende grafen:

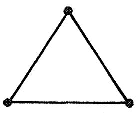


fig. 140

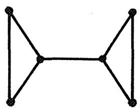


fig. 141

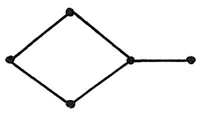


fig. 142

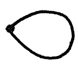


fig. 143

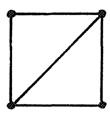


fig. 144

Het volgende vraagstuk toont aan dat je niet kunt spreken van "de" duale graaf van een graaf, maar dat deze kan afhangen van de manier waarop je de gegeven graaf in het platte vlak tekent.

*   Toon aan dat onderstaande grafen isomorf zijn, maar dat hun duale grafen niet isomorf zijn.

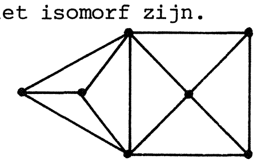


fig. 145

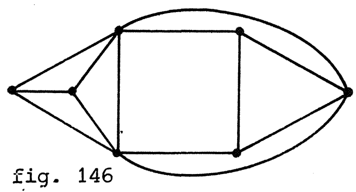


fig. 146

*   Ga na wanneer de duale graaf van een gegeven vlakke graaf G enkelvoudig is.

*   Als G een samenhangende vlakke graaf is met n punten, m lijnen en f facetten en als de duale graaf G^* precies n^* punten, m^* lijnen en f^* facetten heeft, dan geldt:

$$n^* = f \quad \text{en } m^* = m \quad \text{en } f^* = n.$$

Toon dit aan.

*   Onderzoek of het mogelijk is om een vlakke graaf met vijf facetten te vinden zó dat ieder tweetal facetten aan elkaar grenst langs een lijn.

4i. OPGAVEN

1. Ga na voor welke waarden van p en q de volledige bipartiete graaf $K_{p,q}$ vlak is en voor welke waarden van p en q hij niet vlak is.

2. Ga na welke van de volgende grafen vlak zijn en welke niet.

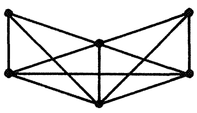


fig. 147

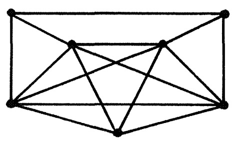


fig. 148

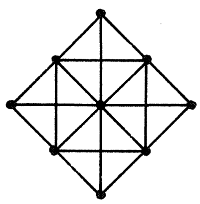


fig. 149

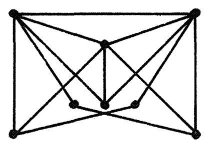


fig. 150

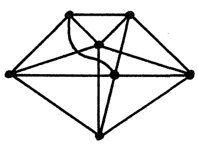


fig. 151

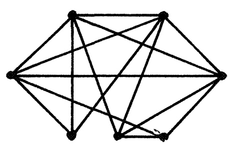


fig. 152

3. Toon aan dat de lijngraaf van K_5 een deelgraaf heeft die isomorf is met onderstaande graaf.

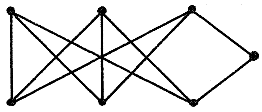


fig. 153

4. Ga na dat de lijngraaf van onderstaande graaf (die isomorf is met $K_{3,3}$) een deelgraaf heeft die homeomorf is met $K_{3,3}$.

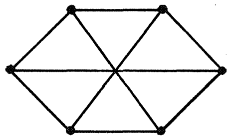


fig. 154

5. Ga na of de lijngrafen van homeomorfe grafen altijd homeomorf zijn.

6. Ga na of de lijngraaf van een vlakke graaf altijd vlak is.

7. Als in een samenhangende vlakke graaf met n punten ($n \geq 3$) en m lijnen ieder facet door precies k lijnen ($k \geq 3$) wordt begrensd, dan geldt:

$$(k-2).m = k.(n-2).$$

Toon dit aan. (Wat moet je doen met een lijn die aan beide kanten aan hetzelfde facet grenst?)

8. Laat zien dat onderstaande graaf (de zgn. Petersengraaf) niet vlak is
   a. met behulp van stelling 4;
   b. met behulp van stelling 6.

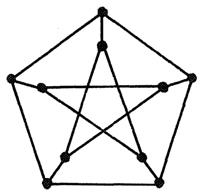


fig. 155

9. Teken voor iedere $v \in \{3,4,5\}$ en iedere $k \in \{3,4,5\}$ alle (onderling niet-isomorfe) vlakke grafen met de volgende eigenschappen:
   1) de valentie van ieder punt is gelijk aan v en,
   2) ieder facet van de graaf wordt begrensd door k lijnen.

   Welke grafen zijn dit?

10. G is een vlakke graaf. Ieder punt van G heeft valentie zes. Toon aan dat G niet enkelvoudig is.

11. G is een vlakke, samenhangende graaf. Ieder facet wordt door vijf of zes lijnen begrensd en in ieder punt komen drie facetten samen. Toon aan dat G precies twaalf vijfhoekige facetten heeft.

12. G is een vlakke graaf met minder dan twaalf facetten. Ieder punt van G heeft valentie tenminste drie. Toon aan dat G tenminste één facet heeft dat door vier of meer lijnen wordt begrensd.

13. Als G een vlakke graaf is met n punten, m lijnen, f facetten en c componenten, dan geldt:

$$n + f = m + c + 1.$$

Toon dit aan.

14. Het kleinste aantal doorsnijdingen van lijnen dat nodig is om een graaf G in een plat vlak te tekenen, noemen we het *doorsnijdingsgetal* van G. We zullen dit aangeven met ds(G).
a. Hoe groot is ds(G) als G vlak is?
b. Bepaal ds(K_5) en ds($K_{3,3}$).
c. Teken de Petersengraaf met twee doorsnijdingen.

15. Uit het vorige vraagstuk blijkt dat het mogelijk is tussen vijf steden een volledig wegennet zonder gelijkvloerse kruisingen of splitsingen aan te leggen met behulp van één viaduct.
Ga na dat dit ook mogelijk is voor zes steden (over of onder een viaduct mag meer dan één weg lopen). Ga na dat dit zelfs mogelijk is bij zeven steden. (Voor acht steden heb je twee viaducten nodig.)

5. KLEURINGEN

5a. HET KLEUREN VAN LANDKAARTEN

Hieronder zie je een kaart van West-Europa.

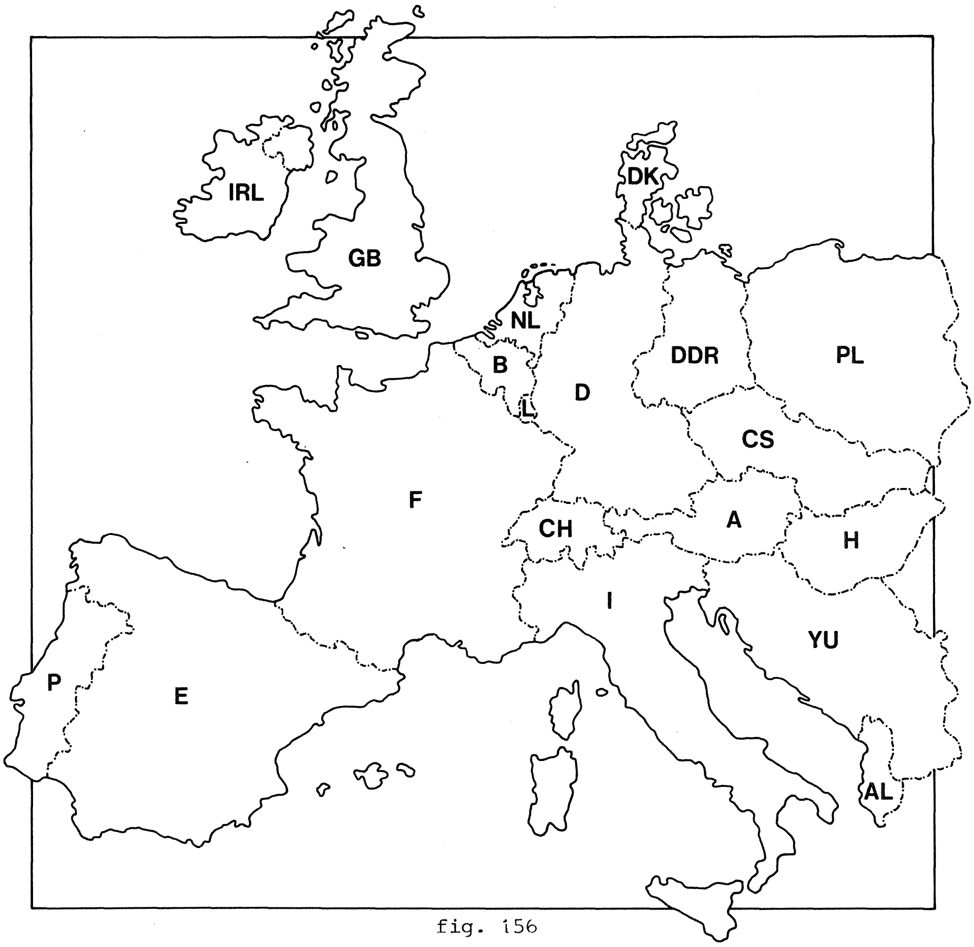


fig. 156

*   Probeer de landen van deze kaart met vier kleuren zó te kleuren dat aan elkaar grenzende landen verschillend gekleurd worden.

*   Waarom kan de kaart niet met drie kleuren gekleurd worden?

In 1852 vroeg Francis Guthrie zich af of *iedere* landkaart te kleuren is met vier kleuren. Sedertdien heeft deze vraag grote bekendheid gekregen onder de naam van "Het Vierkleurenprobleem".
Om dit probleem nauwkeuriger te formuleren moeten we eerst enige afspraken maken.
Ten eerste moeten landen "uit één stuk" bestaan, dat wil zeggen, tussen ieder tweetal punten van een land moet een weg aan te leggen zijn binnen de grenzen van dat land.

*   Laat zien dat de volgende kaart niet met vier kleuren te kleuren is (er zijn vijf landen: A, B, C, D en E, waarvan land A uit twee stukken bestaat).

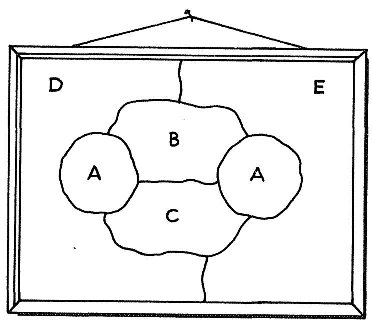


fig. 157

We nemen daarom in het vervolg aan dat alle landen uit één stuk bestaan.
Ook landen van de volgende vorm sluiten we uit:

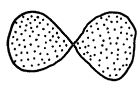


fig. 158

Ten tweede noemen we twee landen pas *aangrenzend*, als ze werkelijk een grenslijn gemeen hebben; dus landen die elkaar in een enkel punt raken mogen dezelfde kleur hebben.

*   Laat zien dat de volgende kaart, met landen A, B, C, D, E en F wel

met vier kleuren te kleuren is.

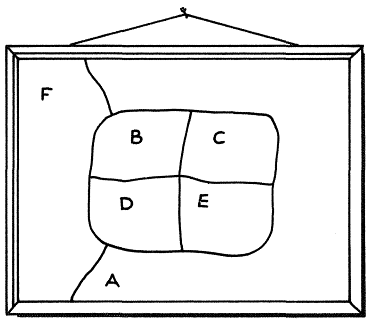


fig. 159

We formuleren nu het VIERKLEURENVERMOEDEN:

Iedere landkaart, waarvan de landen uit één stuk bestaan, is te kleuren met vier kleuren zó dat landen die aan elkaar grenzen langs een grenslijn, verschillende kleuren hebben.

Tijdenlang zijn er zowel mensen geweest die geloofden in de juistheid van dit vermoeden, als mensen die meenden dat er een tegenvoorbeeld te vinden zou zijn.

*   Tot welke groep behoor jij?

5b. LANDKAARTEN EN VLAKKE GRAFEN

We zullen nu de problemen uit de vorige paragraaf vertalen in grafentaal. Kies daartoe binnen ieder land een punt (bijvoorbeeld de hoofdstad). Twee punten verbinden we juist dan door een lijn als de betreffende landen een grenslijn gemeen hebben.
Bijvoorbeeld met onderstaande landkaart correspondeert de ingetekende graaf.

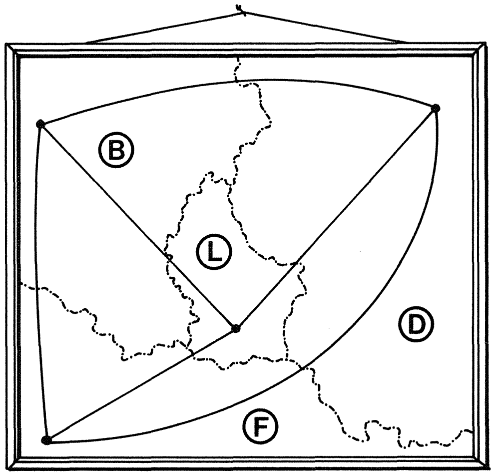


fig. 160

We kunnen ervoor zorgen dat iedere getrokken lijn door precies twee landen loopt, en wel zo dat de lijnen elkaar onderling niet doorsnijden. Dus de graaf die uit deze punten en lijnen bestaat, is vlak. Op deze manier kunnen we van iedere landkaart een *vlakke* graaf maken.

* Teken de vlakke graaf die behoort bij de kaart van West-Europa (figuur 156).

* Ga na dat een graaf die op deze manier ontstaat enkelvoudig is.

* Leg uit dat omgekeerd iedere enkelvoudige vlakke graaf op de bovenstaande manier verkregen kan worden uit een landkaart.

Hoe kunnen we nu onze graaf gebruiken om het kleuren van de kaart te beschrijven? Het kleuren van landen correspondeert met het toekennen van kleuren aan *punten* van de graaf. De eis dat aangrenzende landen verschillend gekleurd worden komt overeen met de eis dat punten waartussen een lijn loopt een verschillende kleur krijgen. Het vierkleurenvermoeden kan dus als volgt geformuleerd worden:

De punten van iedere enkelvoudige vlakke graaf kunnen met vier kleuren gekleurd worden zó dat verbonden punten verschillende kleuren hebben.

5c. HET KLEUREN VAN GRAFEN

We hoeven ons, wat het kleuren betreft, niet te beperken tot vlakke grafen. We kunnen namelijk over het kleuren van willekeurige grafen spreken. Dan is het natuurlijk mogelijk dat er meer dan vier kleuren nodig zijn. Bijvoorbeeld voor de volgende graaf zijn vijf kleuren nodig:

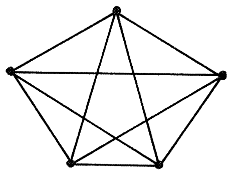


fig. 161

* Ga na hoeveel kleuren nodig zijn om de volgende grafen te kleuren.

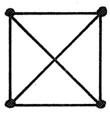


fig. 162

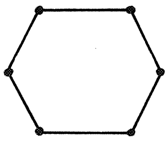


fig. 163

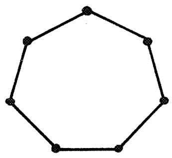


fig. 164

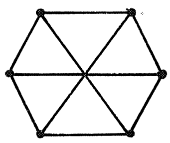


fig. 165

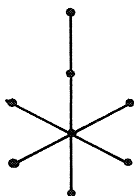


fig. 166

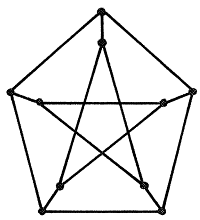


fig. 167

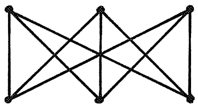


fig. 168

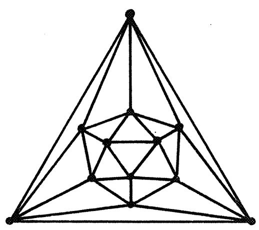


fig. 169

We noemen een graaf k-*kleurbaar* als we de punten met k kleuren kunnen kleuren zo dat verbonden punten verschillend gekleurd worden.
Hierbij wordt niet geëist dat alle k kleuren echt gebruikt worden. Dus

bijvoorbeeld de volgende graaf is (ook) 5-kleurbaar.

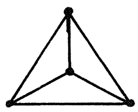


fig. 170

Het *chromatisch getal* van een graaf G is het minimale aantal kleuren waarmee we G kunnen kleuren. Dit getal geven we aan met $\chi(G)$ (χ is de Griekse letter chi). Dus: G is k-kleurbaar als en alleen als $\chi(G) \leq k$.

* Welke grafen zijn 1-kleurbaar?

* Wat is het chromatisch getal van een boom?

* Wat is $\chi(K_n)$?

Met C_n wordt de "circuit-graaf" op n punten aangegeven. Bijvoorbeeld:

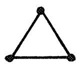
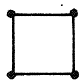
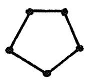
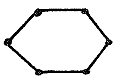
C_3 =  C_4 =  C_5 =  C_6 = 

fig. 171 fig. 172 fig. 173 fig. 174

* Wat is $\chi(C_n)$?

Stel we hebben een graaf G waarvan ieder punt valentie 3 heeft. Nu kunnen we G met 4 kleuren kleuren: we kunnen achtereenvolgens ieder punt een kleur geven, zó dat verbonden punten nooit dezelfde kleur krijgen; we zullen nooit moeilijkheden krijgen want bij ieder punt zijn maar ten hoogste drie kleuren "verboden", namelijk de kleuren van zijn reeds gekleurde buren.

Algemener geldt:

<u>STELLING 1</u>. *Het chromatisch getal van een graaf* G *is ten hoogste één groter dan* $\Delta(G)$, *de maximale valentie van de punten; in formule*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

* Bewijs deze stelling.

* Bepaal voor de volgende twee grafen $\chi(G)$ en $\Delta(G)$.

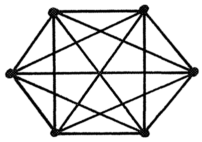
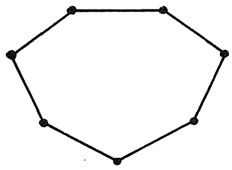
K_6 =  C_7 = 

fig. 175 fig. 176

Steeds geldt: $\chi(K_n) = \Delta(K_n) + 1$, en

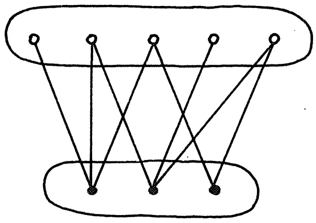
$\chi(C_n) = \Delta(C_n) + 1$, als n oneven is.

* Ga dit na.

Zijn er meer grafen G met $\chi(G) = \Delta(G) + 1$? In 1941 bewees R.L. Brooks dat de volledige grafen K_n en de oneven circuitgrafen C_n de enige samenhangende grafen zijn met $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.
Voor alle overige samenhangende grafen geldt dus: $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

5d. BIPARTIETE GRAFEN

In deze paragraaf bekijken we *twee-kleurbare* grafen.
Stel we hebben een graaf G gekleurd met 2 kleuren, zeg rood en blauw.
De verzameling punten is dan opgesplitst in een verzameling rode punten en een verzameling blauwe punten. Tussen de rode punten onderling lopen geen lijnen; ook blauwe punten zijn onderling niet verbonden. We kunnen G zo tekenen dat de rode punten "boven" en de blauwe punten "onder" staan. Er lopen dan alleen lijnen van boven naar beneden.



rode punten

blauwe punten

fig. 177

Een 2-kleurbare graaf heet dan ook wel *bipartiet*.

* Welke van de volgende grafen zijn bipartiet?


fig. 178


fig. 179

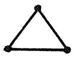


fig.180

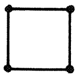


fig. 181

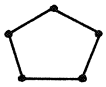


fig. 182

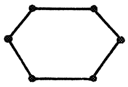


fig. 183

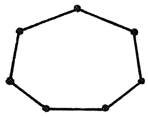


fig. 184

* Bewijs dat een gesloten pad van oneven lengte niet met twee kleuren te kleuren is.

* Bewijs dat in een bipartiete graaf geen gesloten paden van oneven lengte voorkomen.

Zou, omgekeerd, iedere graaf zonder gesloten paden van oneven lengte, 2-kleurbaar zijn? Stel we hebben een samenhangende graaf G die we met twee kleuren, zeg rood en blauw, willen kleuren. We mogen aannemen dat een zeker punt P rood gekleurd wordt. De buren van P moeten dan blauw worden gekleurd; de buren (behalve P) van deze blauwe punten moeten weer rood gekleurd worden. Daarna kleuren we de nog niet gekleurde buren van deze rode punten weer blauw. En zo voorts, totdat alle punten gekleurd zijn.
We moeten ons nu afvragen of verbonden punten steeds verschillende kleuren hebben.

* Pas bovenstaande methode toe op de volgende grafen (beginnend bij P).

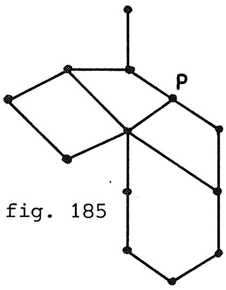


fig. 185

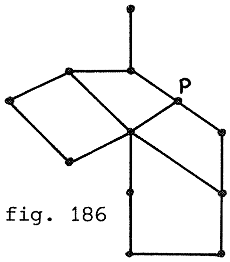


fig. 186

* Wat volgt hieruit voor de twee-kleurbaarheid van deze grafen? Wat is de oorzaak hiervan?

* Toon aan dat de methode werkt als de graaf geen gesloten paden van oneven lengte heeft.

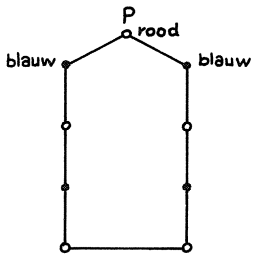


fig. 187

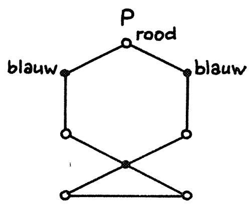


fig. 188

Je hebt nu aangetoond dat een samenhangende graaf die *niet* twee-kleurbaar is, een gesloten pad van oneven lengte heeft. Het is duidelijk dat hetzelfde ook voor niet-samenhangende grafen geldt. (Waarom?)
We hebben dus bewezen:

Een graaf is bipartiet als en alleen als de graaf geen gesloten paden van oneven lengte bevat.

* Ga na, dat een graaf met een gesloten pad van oneven lengte, ook een *circuit* van oneven lengte bevat.

Hieruit volgt:

STELLING 2. *De volgende beweringen over een graaf* G *zijn equivalent*:
1) G *is bipartiet*;
2) G *heeft geen gesloten paden van oneven lengte*;
3) G *heeft geen circuits van oneven lengte*.

5e. HET KLEUREN VAN VLAKKE GRAFEN

We keren nu terug tot het kleuren van vlakke grafen; we nemen hierbij aan dat de grafen enkelvoudig zijn.
We weten dat er vlakke grafen zijn die niet met drie kleuren te kleuren zijn; de vraag ligt voor de hand of iedere vlakke graaf met *vier* kleuren te kleuren is.
Het VIERKLEURENVERMOEDEN (four-colour-conjecture, gewoonlijk afgekort met 4CC) kan in grafentaal geformuleerd worden als:

Iedere enkelvoudige vlakke graaf is vier-kleurbaar.

Zoals al eerder is opgemerkt heeft dit probleem lange tijd talrijke wiskundigen (en ook niet-wiskundigen) bezig gehouden. In 1879 gaf Alfred Kempe een bewijs van 4CC; het bewijs was zo eenvoudig dat het probleem zelfs als vraagstuk aan scholieren werd opgegeven.
In 1890 vond Percy Heawood echter een fout in Kempe's bewijs; hoewel Heawood zich hiervoor wel verontschuldigde, was en bleef het bewijs fout.
Wel was Heawood in staat, met behulp van Kempe's methode, aan te tonen dat iedere vlakke graaf met *vijf* kleuren gekleurd kon worden.
Pas in 1976 slaagden Kenneth Appel en Wolfgang Haken erin het vierkleurenvermoeden te bewijzen; hun bewijs is gebaseerd op dat van Kempe. Zij reduceerden het probleem tot het controleren van 1879 grafen; dit laatste kostte vele uren rekentijd op de computer.
We zullen dit bewijs hier dan ook niet behandelen; wel zullen we de "vijfkleurenstelling" van Heawood bewijzen.
Eerst bewijzen we de eenvoudiger stelling dat iedere vlakke graaf *zes*-kleurbaar is.

STELLING 3. (ZESKLEURENSTELLING) *Iedere enkelvoudige vlakke graaf is zeskleurbaar.*

BEWIJS. Het bewijs is gebaseerd op de volgende twee ideeën:

(1) Als er een enkelvoudige vlakke graaf bestaat die niet zes-kleurbaar is, dan is er ook een niet-zes-kleurbare vlakke, enkelvoudige graaf G met zo min mogelijk punten.

* Ga dit na.

(2) Iedere enkelvoudige vlakke graaf heeft een punt P met valentie ten hoogste vijf (dit is gevolg 2 in §4b).

* Maak zelf het bewijs af. □

De redenering werkt niet voor de *vijf*kleurenstelling omdat het mogelijk is dat de vijf buren van P alle een verschillende kleur hebben; dan kan P alleen met de zesde overgebleven kleur gekleurd worden.

Toch werkt een soortgelijke redenering voor de vijfkleurenstelling.

STELLING 4. (VIJFKLEURENSTELLING) *Iedere enkelvoudige vlakke graaf is vijf-kleurbaar.*

BEWIJS. Stel er zijn niet-vijf-kleurbare vlakke grafen. Dan is er ook een kleinste niet-vijf-kleurbare vlakke graaf G; we mogen aannemen dat deze graaf G geen meervoudige kanten heeft.
Dus volgens (2) moet G een punt P van valentie ten hoogste vijf hebben.
Laat G' de graaf zijn die uit G ontstaat door weglating van het punt P en alle lijnen die het punt P als eindpunt hebben. Dan is G' weer een vlakke graaf, met minder punten dan G. Omdat we het aantal punten van G zo klein mogelijk hebben genomen moet G' *wel* vijf-kleurbaar zijn.
Laten we nu eens aannemen dat G' zo gekleurd kan worden dat de buren van P met vier of minder kleuren gekleurd kunnen worden. Deze aanname bewijzen we in de hulpstelling hieronder!
Dan blijft er ten minste één kleur over om P mee te kleuren. Dus dan kan ook G met vijf kleuren gekleurd worden. □

We hebben in dit bewijs een aanname gemaakt. Deze aanname gaan we nu bewijzen.

HULPSTELLING. *Zij* G *een enkelvoudige vlakke graaf en* P *een punt daarin met buren* A,B,C,D *en* E. G' *is de graaf die ontstaat uit* G *door* P *en de vijf lijnen eindigend in* P *weg te laten. Veronderstel dat* G' *met vijf kleuren is gekleurd. Dan bestaat er ook een kleuring van* G' *met vijf kleuren zó dat de punten* A, B, C, D *en* E *maar vier kleuren hebben.*

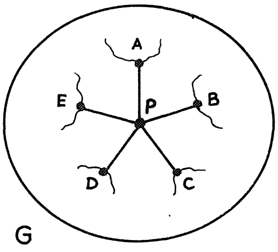


fig. 189

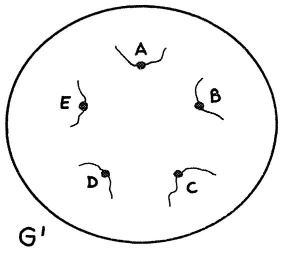


fig. 190

<u>BEWIJS</u>. Veronderstel dat A,B,C,D en E gekleurd zijn met vijf verschillende kleuren, zeg rood, oranje, geel, groen en blauw, in de volgorde zoals aangegeven in de figuur.

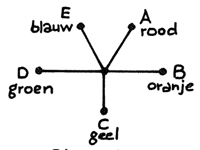


fig. 191

Bekijk nu de graaf G" bestaande uit alle groene en oranje punten van G', en hun onderlinge verbindingslijnen.

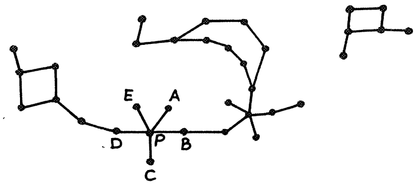


fig. 192

Als B en D niet in dezelfde component van G" liggen dan kunnen we een gedeelte van de oranje en groene punten van kleur laten wisselen zo dat de buren van P als volgt gekleurd worden:

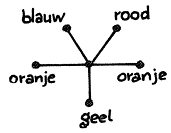


fig. 193

*   Toon dit aan.

Dus in dat geval kunnen we de buren van P met *vier* kleuren kleuren.
Maar we zijn nog niet klaar: B en D kunnen best in dezelfde component van G" zitten. Stel dat dit zo is.

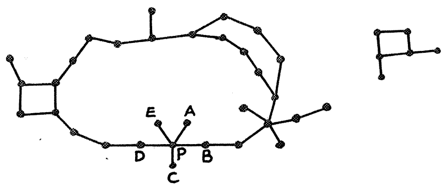


fig. 194

Bekijk dan de graaf G"', bestaande uit de rode en gele punten van G', en hun onderlinge verbindingslijnen.

*   Bewijs dat A en C niet in dezelfde component van G"' liggen.

Net als hierboven kunnen we nu de kleuring van G' zo veranderen dat A en C dezelfde kleur krijgen, d.w.z. de buren van P kunnen met vier kleuren gekleurd worden. □

Tenslotte noemen we

STELLING 5. (VIERKLEURENSTELLING) (APPEL & HAKEN 1976) *Iedere enkelvoudige vlakke graaf is vierkleurbaar.*

*   Kleur de volgende grafen met vier kleuren.

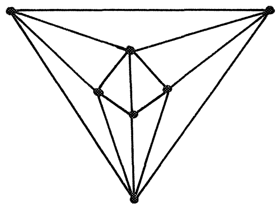


fig. 195

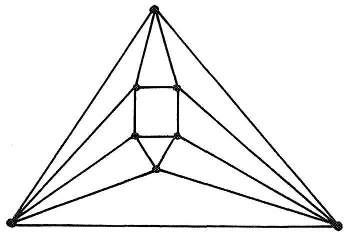


fig. 196

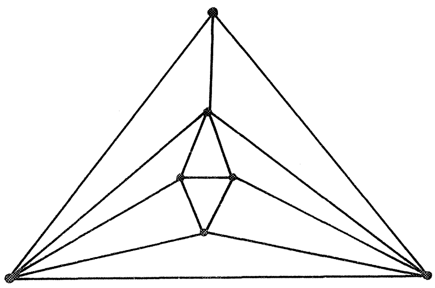


fig. 197

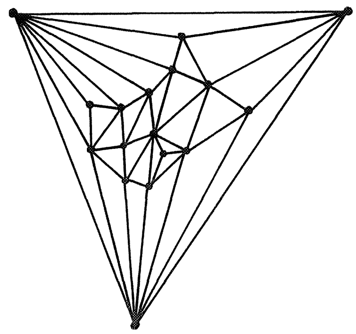


fig. 198

*   Probeer de vierkleurenstelling te bewijzen met behulp van de bewijsmethode van de vijfkleurenstelling. Waar loopt de redenering mis?

5f. HET KLEUREN VAN LIJNEN

Op een voetbaltoernooi komen zes ploegen: Ajax, Barcelona, Cambuur, Dynamo, Excelsior en Feijenoord. Tussen deze ploegen wordt een halve competitie gespeeld, d.w.z. ieder tweetal ploegen ontmoet elkaar één keer. Dus iedere ploeg moet vijf maal spelen, en in totaal zijn er 15 wedstrijden. De organisator wil het toernooi in vijf ronden afwerken, d.w.z. in iedere ronde vinden gelijktijdig drie wedstrijden plaats.
Op zijn kladpapier tekent de organisator de volgende diagrammen.

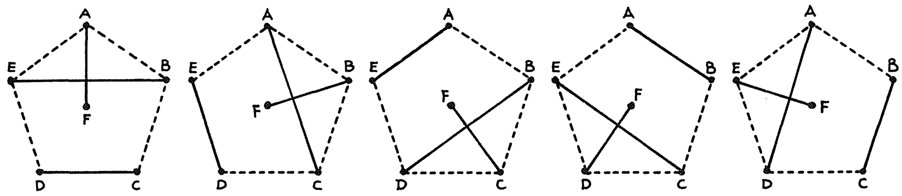


fig. 199

- * Wat stellen deze plaatjes voor?
- * Leid hieruit een toernooi-schema af.
- * Ontwerp zelf een toernooi-schema voor 8 en 10 ploegen.
- * Hoeveel ronden heb je nodig voor een toernooi met vijf ploegen? Geef een schema. (Aanwijzing: laat Feijenoord weg.)
- * Doe hetzelfde voor 7 en 9 ploegen.

Wat hebben we nu eigenlijk gedaan? We hebben de ploegen voorgesteld door de punten van een volledige graaf; in het geval van zes ploegen dus door K_6. Een wedstrijd wordt voorgesteld door een lijn van K_6. De 15 lijnen van K_6 zijn gesplitst in 5 klassen ("ronden") zo dat de lijnen van één klasse geen punten gemeenschappelijk hebben (want anders zou één ploeg tegelijk twee wedstrijden moeten spelen!).

We zouden dus bij iedere lijn van K_6 een (ronde-)nummer tussen 1 en 5 kunnen zetten zó dat in geen der punten twee lijnen met hetzelfde nummer samenkomen.

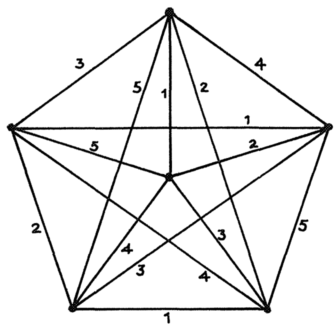


fig. 200

Dit doet ons denken aan het kleuren van grafen; we moeten nu echter niet de punten maar de lijnen kleuren. Daarom definiëren we:

het *lijn-chromatisch getal* $\chi_\ell(G)$ van een graaf G is het minimale aantal kleuren nodig om de lijnen van G te kleuren zó dat nergens twee lijnen met dezelfde kleur samenkomen. (Eigenlijk is $\chi_\ell(G)$ niets anders dan het chromatisch getal van de lijngraaf van G.)

* Wat is $\chi_\ell(K_{10})$, $\chi_\ell(K_9)$, $\chi_\ell(K_8)$, $\chi_\ell(K_7)$, $\chi_\ell(K_6)$, $\chi_\ell(K_5)$, $\chi_\ell(K_4)$, $\chi_\ell(K_3)$, $\chi_\ell(K_2)$, $\chi_\ell(K_1)$?

Het is duidelijk dat steeds $\chi_\ell(G) \geq \Delta(G)$ (waarbij $\Delta(G)$ de maximale valentie van de punten is), want de lijnen samenkomend in een punt met maximale valentie hebben elk een verschillende kleur.

* Bepaal $\chi_\ell(K_{3,3})$, $\chi_\ell(K_{4,3})$, $\chi_\ell(K_{10,10})$, $\chi_\ell(K_{n,n})$, $\chi_\ell(K_{m,n})$.

* Bepaal $\chi_\ell(C_3)$, $\chi_\ell(C_4)$, $\chi_\ell(C_5)$, $\chi_\ell(C_n)$.

In al deze voorbeelden zagen we dat $\chi_\ell(G) \leq \Delta(G) + 1$. In 1964 bewees V.G. Vizing dat iedere enkelvoudige graaf deze eigenschap heeft, d.w.z. voor iedere enkelvoudige graaf G geldt:

$$\chi_\ell(G) = \Delta(G) \quad \text{of} \quad \chi_\ell(G) = \Delta(G) + 1.$$

Er is nog geen eenvoudige methode bekend om, voor een willekeurige enkelvoudige graaf G, te bepalen welke van deze twee mogelijkheden zich voordoet.

5 . OPGAVEN

1. Teken, zo mogelijk, een graaf G
   a. met $\chi(G) = 2$ zo dat ieder punt van G valentie 2 heeft;
   b. met $\chi(G) = 3$ zo dat ieder punt van G valentie 2 heeft;
   c. met $\chi(G) = 4$ zo dat ieder punt van G valentie 2 heeft;
   d. met $\chi(G) = 2$ zo dat ieder punt van G valentie 3 heeft;
   e. met $\chi(G) = 3$ zo dat ieder punt van G valentie 3 heeft;
   f. met $\chi(G) = 4$ zo dat ieder punt van G valentie 3 heeft;
   g. met $\chi(G) = 5$ zo dat ieder punt van G valentie 3 heeft;
   h. met $\chi(G) = 4$ zo dat ieder punt van G valentie 4 heeft.

2. Een circusdirecteur reist met een aantal dieren, welke vervoerd worden in wagens. Leeuwen en paarden kunnen niet in dezelfde wagen ondergebracht worden, en zo zijn er meer diersoorten die niet bij elkaar kunnen. De directeur wil echter zijn dieren in zo min mogelijk wagens vervoeren.

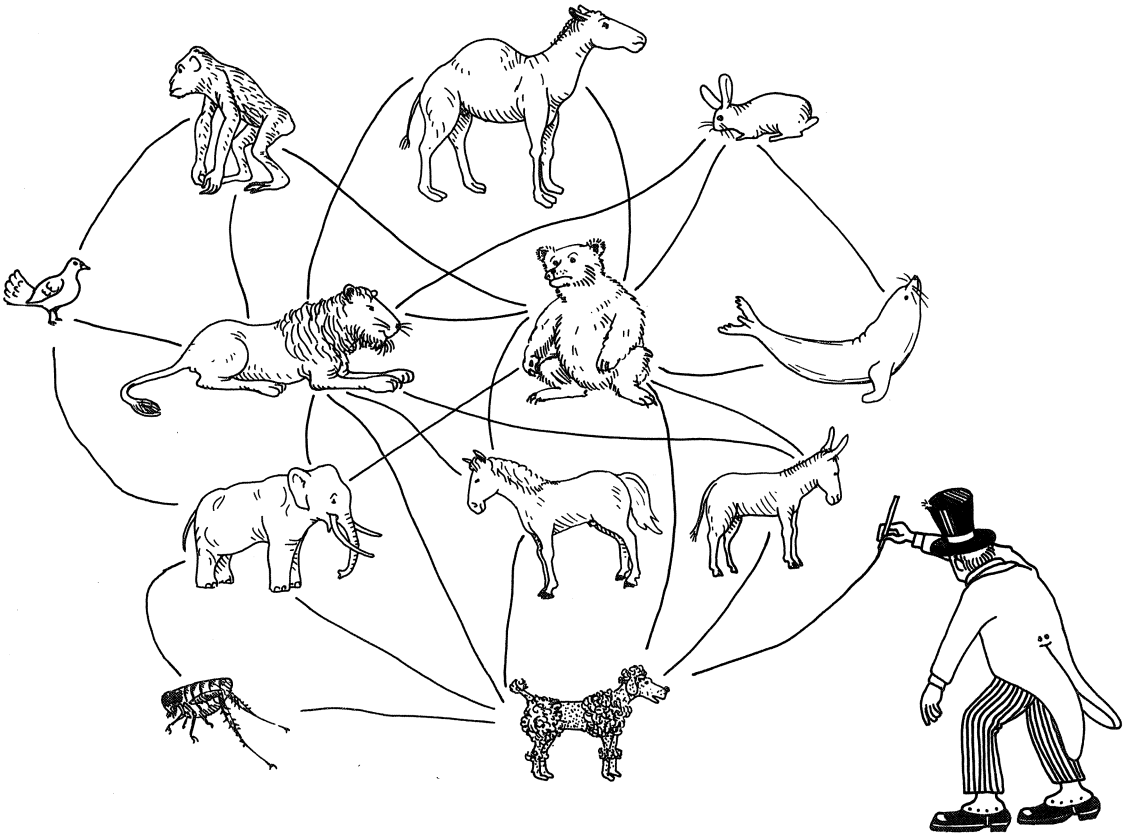


fig. 201

Hoe lost de directeur zijn probleem grafentheoretisch op?

3. Laat G een vlakke Eulergraaf zijn. Beschouw de facetten van G als landen, en de lijnen van G als grenslijnen. Toon aan dat deze landkaart met twee kleuren gekleurd kan worden.

4. Bepaal het chromatisch getal van de grafen van de figuren 16 en 28 t/m 32.

5. Bepaal het lijnchromatisch getal van de grafen van de figuren 16 en 28 t/m 32.

6. In april 1975 stond in het Amerikaanse tijdschrift "Scientific American" de volgende landkaart, waarvan beweerd werd dat deze niet met vier

kleuren te kleuren zou zijn.

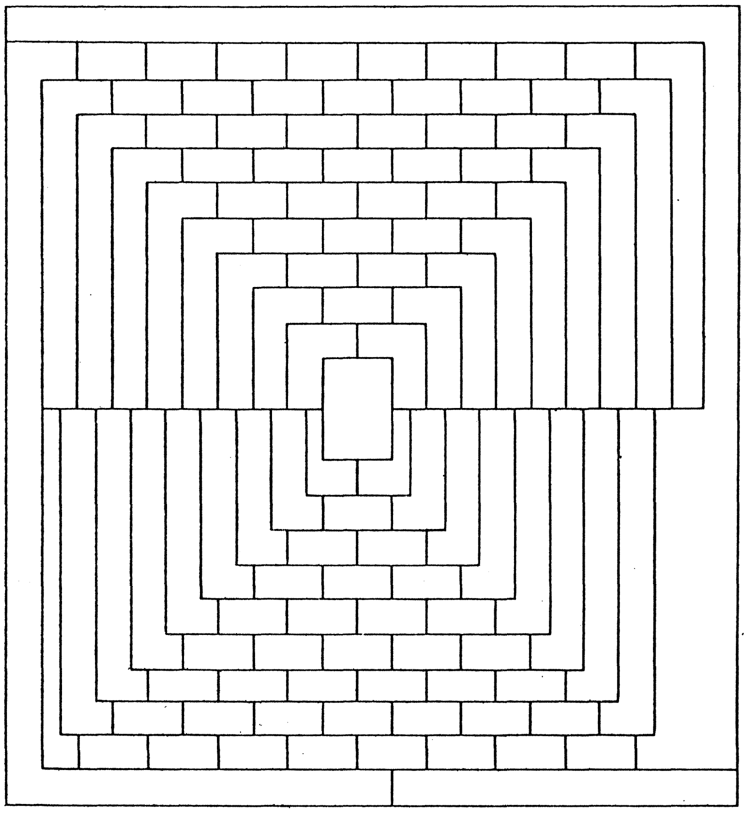


fig. 202

Was deze kaart een tegenvoorbeeld tegen het vierkleurenvermoeden?

7. Laat G en H twee grafen zijn, die geen punten gemeen hebben.

fig. 203

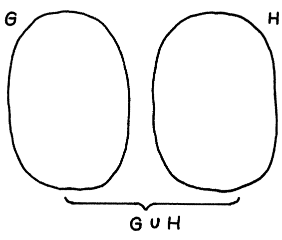
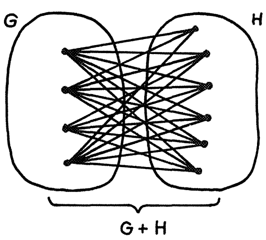


fig. 204



a. G+H ontstaat uit G en H door van ieder punt van G naar ieder punt van H een lijn te trekken. Bewijs dat $\chi(G+H) = \chi(G) + \chi(H)$.

b. Met G∪H geven we de graaf aan die ontstaat door G en H "los" naast elkaar te tekenen. Bewijs dat $\chi(G \cup H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

8. Welke grafen G hebben:
   a. $\chi_\ell(G) = 1$;
   b. $\chi_\ell(G) = 2$?

9. Beredeneer dat het lijnchromatisch getal van een graaf G gelijk is aan het chromatisch getal van de lijngraaf L(G) van G, d.w.z.

$$\chi_\ell(G) = \chi(L(G)).$$

10. Een enkelvoudige graaf G heet k-*kritisch* als (1) $\chi(G) = k$, en (2) iedere graaf G' die ontstaat uit G door weglating van één punt en alle lijnen die in dat punt samenkomen is te kleuren met k-1 kleuren.
    Toon aan dat voor een k-kritische graaf G geldt:
    a. $\chi(G') = k-1$ voor iedere graaf G' die op bovenstaande manier uit G ontstaat;
    b. G is samenhangend;
    c. de valentie van ieder punt van G is tenminste k-1.

11. a. Toon aan dat K_n n-kritisch is.
    b. Toon aan dat C_n 3-kritisch is, mits n oneven en ongelijk aan 1 is.

12. a. Bepaal alle 2-kritische grafen.
    b. Bepaal alle 3-kritische grafen. (Aanwijzing: gebruik stelling 2.)

INDEX

C_n	54
K_n	5
$K_{p,q}$	42
Δ ; χ	54
χ_ℓ	63
Alkanen	25
Beginpunt	6
bipartiet	56
boom	26
Brooks	55
buren	5
Cayley, stelling van	33
chromatisch getal	54
circuit	16
circuit-graaf	54
component	7
Deelgraaf	43
Dirac, stelling van	19
dodecaëder	16
dodecaëdergraaf	13
doorsnijdingsgetal	47
duale graaf	44
Eindpunt	6
enkelvoudige graaf	5
Euler	1
Euler, stelling van	10, 11, 40
Euler-graaf	7
Euler-pad	7
Facet	39
Geïsoleerd punt	5
gelijke genummerde bomen	30
gelijke genummerde enkelvoudige grafen	34
genummerde boom	30
genummerde enkelvoudige graaf	34
gesloten pad	6
graaf	3
Hamilton	16
Hamiltoncircuit	16
Hamiltongraaf	16
handenschud-lemma	7
hexaëdergraaf	12
homeomorfe grafen	43
Icosaëdergraaf	13
isomorfe grafen	35
Keten	6
k-kleurbaar	53
k-kritisch	67
Kuratowski, stelling van	44
Lengte	6
lus	5
lijn	3
lijn-chromatisch getal	63
lijngraaf	17
Meervoudige lijnen	5
Octaëdergraaf	12
oneindig facet	39
Ore, stelling van	21
Pad	5
Petersengraaf	46
punt	3
Samenhangende graaf	6
semi-Euler-graaf	7
structuurformule	24
Tetraëdergraaf	12
Valentie	7
verbonden punten	5
vierkleurenprobleem	50
vierkleurenstelling	59
vierkleurenvermoeden	51, 52, 57
vlakke graaf	39
volledige bipartiete graaf	42
volledige graaf	5
vijfkleurenstelling	59
Woud	28
Zeskleurenstelling	58