ZW

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Syllabus van het oriënterend colloquium

Topologie

cursus 1966-1967

ZW

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.) and the Central Organization for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Colloquium "Topologie" (1966-1967)

1e bijeenkomst: 21 september 1966

Spreker: M.A. Maurice

1. Inleiding. We zullen trachten in deze paragraaf een intuitieve inleiding te geven tot enkele van de achtergronden die aanleiding hebben gegeven tot de ontwikkeling van de algemene topologie. Daarbij zullen sommige formuleringen noodzakelijkerwijs ietwat vaag en onscherp zijn. In de volgende paragraaf zullen we dan met de strenge opbouw van de theorie beginnen.

De topologie onderzoekt eigenschappen (de z.g. topologische eigenschappen) van "figuren" (topologische ruimten) *) die behouden blijven onder de z.g. topologische transformaties (topologische afbeeldingen, homeomorfieën). Dit zijn, ruwweg gezegd, transformaties waarbij niet gescheurd en niet geplakt wordt. Twee figuren die d.m.v. een topologische transformatie in elkaar zijn over te voeren zullen topologisch aequivalent of homeomorf heten. Twee homeomorfe figuren mogen dan op grond van andere, niet-topologische, eigenschappen nog zoveel verschillen, voor een topoloog zijn ze hetzelfde.

Voorbeeld:

Beschouw de volgende figuren

I. de rand van een vierkant

II. een cirkelrand

III. een lijnsegment

I en II zijn topologisch aequivalent (ze kunnen zonder plakken of scheuren in elkaar worden overgevoerd) maar III is topologisch een andere figuur (om II in III over te voeren zal men moeten scheuren of plakken, en om III in II over te voeren zal men moeten plakken).

Om in het algemeen te bepalen of twee figuren homeomorf zijn moet men een topologische transformatie construeren die de ene figuur in de andere overvoert. En om te laten zien dat twee figuren niet homeomorf zijn, dient men te laten zien, dat zo'n topologische trans-

---

*) de precieze definitie volgt later; voorlopig kan men denken aan figuren in het platte vlak, maar het algemene geval kan veel abstracter zijn.

formatie niet bestaat; meestal doet men dit door een topologische eigenschap op te sporen, die de ene figuur wel, en die de andere niet heeft.

Alvorens de hier weergegeven gedachten wat nader te concretiseren, herinneren we aan een paar definities.

Een functie (afbeelding) f van een verzameling X naar (in) een verzameling Y ($f: X \to Y$) voegt aan elke $x \in X$ een $y \in Y$ toe. y is door x en door f volledig bepaald; we schrijven $y = f(x)$.

Een functie $f: X \to Y$ heet 1-1-duidig indien uit $x_1 \neq x_2$ steeds volgt dat $f(x_1) \neq f(x_2)$. De functie $f^{-1}: Y \to X$ die gedefiniëerd wordt door: $f^{-1}(y) = x$ dan en dan slechts als $f(x) = y$, heet de inverse functie van f. f^{-1} is dan ook 1-1-duidig.

Een functie $f: X \to Y$ heet (afbeelding-) op indien bij elke $y \in Y$ een $x \in X$ is te vinden zodanig dat $y = f(x)$.

We kunnen nu zeggen dat een topologische transformatie van een figuur X in een figuur Y in ieder geval een functie van X op Y zal zijn (immers, er mag niet worden gescheurd, d.w.z. geen punt $x \in X$ mag in meer dan één punt $y \in Y$ worden overgevoerd) - en zelfs een 1-1-duidige functie (immers, er mag niet worden geplakt, d.w.z. geen twee verschillende punten $x_1, x_2 \in X$ mogen in hetzelfde punt $y \in Y$ worden overgevoerd).

De eis dat bij een topologische transformatie $f: X \to Y$ niet gescheurd mag worden, houdt echter nog meer in. Hij zal ook betekenen dat voor elke $x_0 \in X$ geldt dat $f(x)$ dichter bij $f(x_0)$ ligt naarmate x dichter ligt bij x_0; nauwkeuriger gezegd: voor elke $x_0 \in X$ geldt, dat bij iedere $\varepsilon > 0$, een $\delta > 0$ is te vinden zodanig dat de afstand tussen $f(x)$ en $f(x_0)$ kleiner is dan ε voor alle $x \in X$ waarvan de afstand tot x_0 kleiner is dan δ. (We zullen dan zeggen dat de functie f continu is.) En iets dergelijks moet gelden voor de functie $f^{-1}: Y \to X$.

Voor de formulering van deze eis is dus nodig dat zowel in X als in Y een afstand tussen de punten is gedefiniëerd. Vandaar dat we de opbouw van de theorie beginnen met het begrip metrische ruimte. Het algemenere begrip topologische ruimte zullen we dan daarna definiëren.

We eindigen deze inleiding nu met twee los van het voorgaande staande opmerkingen.

(i) Als X en Y verzamelingen zijn, dan wordt $X \times Y$ gedefiniëerd door

$$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X \text{ en } y \in Y\}.$$

Hierin is (x,y) een <u>geordend paar</u> met 1e coördinaat (component) x en 2e coördinaat (component) y.
($(x,y) = (y,x)$ dan en slechts dan als $x = y$.)

(ii) Als $f\colon X \to Y$ een functie is, en $A \subset X$, $B \subset Y$ dan definiëren we

$$f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$$

en

$$f^{-1}[B] = \{x \mid f(x) \in B\}.$$

(Als $f\colon X \to Y$ 1-1-duidig en op is, dan heeft $f^{-1}[B]$ formeel twee betekenissen; deze komen echter op hetzelfde neer.)

2. Zij X een verzameling, en zij R^+ de verzameling der niet-negatieve reële getallen.
Een functie

$$\rho : X \times X \to R^+$$

heet een <u>metriek</u> voor X, indien voor alle $x,y,z \in X$ geldt dat

(i) $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$
(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
(iii) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (driehoeksongelijkheid)

Het paar (X,ρ) heet dan een <u>metrische ruimte</u>. $\rho(x,y)$ heet <u>de afstand</u> tussen x en y.

De verzameling

$$B_r(p) = \{x \mid \rho(x,p) < r\} \quad (r > 0)$$

heet de (open) <u>bol</u>, met <u>straal</u> r en <u>middelpunt</u> p.

Voorbeelden :

I. Voor een willekeurige verzameling X kunnen we definieren

$$\begin{cases} \rho(x,y) = 0 & \text{als } x = y \\ \rho(x,y) = 1 & \text{als } x \neq y \end{cases} \qquad (x,y \in X)$$

Dan is (X,ρ) een metrische ruimte.

II. Zij R de verzameling der reële getallen.
Indien $\rho(x,y) = |x-y|$ $(x,y \in R)$ dan is (R,ρ) een metrische ruimte.

III. (generalisatie van II). Zij

$$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in R \text{ voor } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Indien $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in R^n$ en $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n) \in R^n$ dan definiëren we

$$\rho(x,y) = \{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\}^{\frac{1}{2}} \qquad (*)$$

We zullen bewijzen dat ρ een metriek is voor R^n. Eerst tonen we echter aan de volgende

Hulpstelling : Indien $p_i, q_i \in R$ voor $i = 1,2,\ldots,n$ dan geldt

$$(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} p_i^2) \cdot (\sum_{i=1}^{n} q_i^2)$$

Bewijs :
Voor alle reële t geldt

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (p_i t + q_i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} p_i q_i + \sum_{i=1}^{n} q_i^2$$

Maar dan is de discriminant van de kwadratische vorm in het rechterlid ≤ 0; d.w.z.

$$4(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i)^2 - 4(\sum_{i=1}^{n} p_i^2)(\sum_{i=1}^{n} q_i^2) \leq 0$$

of
$$(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} p_i^2)(\sum_{i=1}^{n} q_i^2)$$

Bewering : (*) is een metriek voor R^n.

Bewijs :
Van de drie eisen, die aan een metriek zijn gesteld, zijn de eerste twee evident. We behoeven dus slechts de driehoeksongelijkheid te bewijzen. D.w.z. we moeten aantonen dat

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} (x_i-z_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{i=1}^{n} (y_i-z_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

oftewel, als men stelt $x_i-y_i = p_i$, $y_i-z_i = q_i$ (zodat $x_i-z_i = p_i+q_i$),

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i+q_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} q_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

i.e.

$$2\sum_{i=1}^{n} p_i q_i \leq 2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

maar dit volgt onmiddellijk uit de hulpstelling.

(R^n,ρ) heet de n-dimensionale Euclidische ruimte (voor $n = 1$ is dit de rechte lijn, voor $n = 2$ het platte vlak).

IV. Zij $H = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in R \text{ voor } i = 1,2,\ldots;\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$.
Indien voor alle $x = (x_1,x_2,x_3,\ldots) \in H$ en $y = (y_1,y_2,y_3,\ldots) \in H$ $\rho(x,y)$ wordt gedefinieerd door

$$\rho(x,y) = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i-y_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

dan kunnen we weer aantonen dat ρ een metriek is voor H. (H,ρ) heet de Hilbert ruimte.

3. Laat nu (X,ρ) en (Y,σ) metrische ruimten zijn.
Een functie $f : X \to Y$ heet continu in $x_0 \in X$ indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is te vinden zodanig dat $\sigma(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ voor alle $x \in X$ die voldoen aan $\rho(x,x_0) < \delta$.

Opmerking : Het is duidelijk dat deze definitie een veralgemening is van de bekende definitie van continuïteit voor een functie $f : R \to R$ (waarbij R de gewone "absolute-waarde-metriek" heeft).

We kunnen de definitie ook nog wel anders formuleren. Daartoe voeren we het volgende begrip in.

Zij (M,d) een metrische ruimte. Zij $p \in M$. Een verzameling $O \subset M$ heet een omgeving van p, indien er een bol $B_r(p)$ bestaat zodanig dat $B_r(p) \subset O$.
I.h.b. is elke bol $B_r(p)$ zelf een omgeving van p.

Indien weer (X,ρ) en (Y,σ) metrische ruimten zijn, dan kunnen we de bovenstaande definitie nu ook als volgt onder woorden brengen :
Een functie $f : X \to Y$ heet continu in $x_0 \in X$ indien bij iedere omgeving $V_{f(x_0)}$ (van $f(x_0)$ in Y) een omgeving U_{x_0} (van x_0 in X) is te vinden met de eigenschap dat $f[U_{x_0}] \subset V_{f(x_0)}$.

Een functie $f : X \to Y$ heet continu, indien f continu is in iedere $x \in X$.

Ook deze definitie kunnen we op een andere wijze formuleren.
Daartoe hebben we het volgende begrip nodig.

Zij (M,d) een metrische ruimte. Een niet-lege verzameling $G \subset M$ heet open, indien bij elke $y \in G$ een bol $B_r(y)$ is te vinden, zodanig dat $B_r(y) \subset G$. (Anders gezegd : G is juist dan open als G een omgeving bevat van elk van zijn punten.)

Elke bol $B_r(x)$ is een open verzameling. M zelf is open. De lege verzameling ϕ is per definitie open.

Merk op dat een verzameling $O \subset M$ juist dan omgeving is van een punt $p \in M$ indien er een open verzameling G bestaat zodanig dat $p \in G \subset O$.

Bewering : Als (X,ρ) en (Y,σ) metrische ruimten zijn, dan is een functie $f : X \to Y$ continu, dan en slechts dan indien voor iedere open verzameling G in Y geldt dat $f^{-1}[G]$ open is in X.

Bewijs :

(i) Zij f continu.

Laat dan G een niet-lege open verzameling zijn in Y. Zij $x_0 \in f^{-1}[G]$. Dan is $f(x_0) \in G$. Daar G een omgeving is van $f(x_0)$ bestaat er een omgeving (waarvoor we zonder beperking der algemeenheid een bol kunnen nemen) $B_r(x_0)$ van x_0, zodanig dat $f[B_r(x_0)] \subset G$; maar dan is $B_r(x_0) \subset f^{-1}[G]$. Daar x_0 een willekeurig punt in $f^{-1}[G]$ was, volgt dat $f^{-1}[G]$ open is.

(ii) We bewijzen nu het omgekeerde. Kies daartoe $x_0 \in X$ en een willekeurige (zonder beperking der algemeenheid : open) omgeving $V_{f(x_0)}$ van $f(x_0)$. Dan is $f^{-1}[V_{f(x_0)}]$ een open omgeving van x_0, terwijl bovendien $f[f^{-1}[V_{f(x_0)}]] \subset V_{f(x_0)}$; d.w.z. f is continu in x_0. Daar x_0 echter willekeurig is in X, volgt dat f continu is.

4. We bewijzen nu twee fundamentele eigenschappen van open verzamelingen in een metrische ruimte. Deze eigenschappen zullen we gebruiken in de definitie van het begrip topologische ruimte - welk begrip dan als een generalisatie van het begrip metrische ruimte kan worden opgevat.

Bewering : Zij (X,ρ) een metrische ruimte.

(i) De vereniging van een willekeurige familie van open verzamelingen is een open verzameling.

(ii) De doorsnede van een eindige familie van open verzamelingen is een open verzameling.

Bewijs :

(We kunnen ons beperken tot niet-lege families van niet-lege verzamelingen).

(i) is onmiddellijk duidelijk.

Wat (ii) betreft merken we allereerst op, dat het voldoende is aan te tonen dat de doorsnede van twee open verzamelingen weer open is, en vervolgens, dat de bewering dan onmiddellijk volgt uit de volgende propositie :

Indien $y \in B_r(p) \cap B_s(q)$ dan bestaat er een $t > 0$ zodanig dat $B_t(y) \subset B_r(p) \cap B_s(q)$.

Dit laatste tonen we nu aldus aan.

Zij $t = \min(r-\rho(p,y),\ s-\rho(q,y))$; dan is $t > 0$.

Indien nu $x \in B_t(y)$ dan volgt

$$\rho(p,x) \leq \rho(p,y) + \rho(y,x) < \rho(p,y) + t < r, \text{ i.e. } x \in B_r(p).$$

Op dezelfde manier $x \in B_s(q)$. Dus $x \in B_r(p) \cap B_s(q)$. Daar x een willekeurig element $\in B_t(y)$ was, volgt het gestelde.

5. Zij X een verzameling. Een familie $\mathcal{T}$ van deelverzamelingen van X heet een <u>topologie voor X</u> indien

(i) $\phi \in \mathcal{T}$ en $X \in \mathcal{T}$

(ii) de vereniging van elke deelfamilie van $\mathcal{T}$ tot $\mathcal{T}$ behoort

(iii) de doorsnede van elke eindige deelfamilie van $\mathcal{T}$ tot $\mathcal{T}$ behoort

Het paar $(X,\mathcal{T})$ heet dan een <u>topologische ruimte</u>.

De verzamelingen $O \in \mathcal{T}$ heten <u>($\mathcal{T}$-)open</u>.

<u>Voorbeelden</u>

I. Zij X een verzameling. Indien $\mathcal{T}$ de familie van alle deelverzamelingen van X is, dan is $(X,\mathcal{T})$ een topologische ruimte. $\mathcal{T}$ heet dan de <u>discrete topologie</u> voor X.

II. Zij X een verzameling. Indien $\mathcal{T} = \{\phi, X\}$ dan is $(X,\mathcal{T})$ een topologische ruimte. $\mathcal{T}$ heet de <u>indiscrete topologie</u> voor X.

<u>Opmerking</u> : Indien $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ twee topologieën zijn voor X, zodanig dat $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, dan heet $\mathcal{T}_1$ <u>kleiner</u> (<u>grover</u>) dan $\mathcal{T}_2$; $\mathcal{T}_2$ heet <u>groter</u> (<u>fijner</u>) dan $\mathcal{T}_1$. De indiscrete topologie is de grofste en de discrete topologie is de fijnste topologie voor X.

III. Zij X een verzameling. Zij

$$\mathcal{T} = \{A \mid A \subset X,\ X \setminus A \text{ is eindig}\} \cup \{\phi\}.$$

Dan is $(X,\mathcal{T})$ een topologische ruimte. $\mathcal{T}$ heet de <u>eindig-complement topologie</u>.

IV. Zij (X,ρ) een metrische ruimte. Indien $\mathcal{T}$ de familie van alle open verzamelingen (zoals gedefiniëerd in §3) is, dan is $(X,\mathcal{T})$ een topologische ruimte. $\mathcal{T}$ heet de metrische topologie (geïnduceerd door de metriek ρ).

Indien $(X,\mathcal{T})$ een topologische ruimte is, en indien er een metriek ρ voor X bestaat, zodanig dat de door ρ geïnduceerde metrische topologie juist $\mathcal{T}$ is, dan heet $(X,\mathcal{T})$ metrizeerbaar.
(We zullen zien dat niet elke topologische ruimte metrizeerbaar is.)

V. Onder een geordende verzameling zullen we in het volgende verstaan een paar $(X,<)$, waarin X een verzameling is en $<$ een relatie ("kleiner dan") tussen de elementen van X zodanig dat

(i) voor elk tweetal elementen x en y van X geldt juist één van de betrekkingen

$$x < y \ , \quad y < x \ , \quad x = y$$

(ii) voor elk drietal elementen x, y en z uit X geldt

$$(x < y \ \text{ en } \ y < z) \implies x < z$$

Onder een (open) interval in $(X,<)$ zullen we verstaan een verzameling van de vorm $\{x \mid a < x < b\}$, en als X een kleinste element p (resp. een grootste element q) heeft ook elke verzameling van de vorm $\{x \mid p \leq x < b\}$ (resp. $\{x \mid a < x \leq q\}$).

Zij nu $(X,<)$ een geordende verzameling. Zij $\mathcal{T}_<$ de familie bestaande uit ϕ en alle deelverzamelingen G van X met de eigenschap dat er voor elke $g \in G$ een (open) interval I bestaat, zodanig dat $g \in I \subset G$. Dan is $(X,\mathcal{T}_<)$ een topologische ruimte. $\mathcal{T}_<$ heet de orde-topologie.

VI. De reële rechte R is zowel een metrische ruimte als een geordende verzameling. De metrische topologie valt samen met de orde-topologie. Men spreekt van de gewone topologie voor R.

6. Zij X een topologische ruimte (de aanduiding "$\mathcal{T}$" voor de topologie wordt bijna altijd weggelaten).
Een verzameling U heet omgeving van een punt $p \in X$, indien er een open verzameling G bestaat zodanig dat $p \in G \subset U$.
Merk op dat een verzameling juist dan open is als hij een omgeving bevat van al zijn punten.

Laat $(X,\mathcal{T}_1)$ en $(Y,\mathcal{T}_2)$ topologische ruimten zijn.
Een functie $f : X \to Y$ heet continu in $x_0 \in X$ indien bij iedere $\mathcal{T}_1$-omgeving $V_{f(x_0)}$ (van $f(x_0)$ in Y) een omgeving U_{x_0} (van x_0 in X) is te vinden met de eigenschap dat $f[U_{x_0}] \subset V_{f(x_0)}$.
Een functie $f : X \to Y$ heet continu, indien f continu is in iedere $x \in X$.

Bewering : Als $(X,\mathcal{T}_1)$ en $(Y,\mathcal{T}_2)$ topologische ruimten zijn, dan is een functie $f : X \to Y$ continu, dan en slechts dan indien voor iedere $\mathcal{T}_2$-open verzameling G (in Y) geldt dat $f^{-1}[G]$ $\mathcal{T}_1$-open is (in X).

Bewijs :
Volkomen analoog aan het bewijs van de analoge bewering in §3.

Twee topologische ruimten $(X,\mathcal{T}_1)$ en $(Y,\mathcal{T}_2)$ heten topologisch aequivalent of homeomorf indien er een 1-1-duidige functie van X op Y bestaat, zodanig dat f en f^{-1} beide continu zijn.
f heet dan een topologische afbeelding of een homeomorfie van X op Y.
Onder f worden de $\mathcal{T}_1$-open verzamelingen dan op de $\mathcal{T}_2$-open verzamelingen - en onder f^{-1} de $\mathcal{T}_2$-open verzamelingen op de $\mathcal{T}_1$-open verzamelingen afgebeeld.

Colloquium "Topologie"

5 oktober 1966

7. Zij $(X,\mathcal{T})$ een topologische ruimte.
Een deelfamilie $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$ heet een basis voor de topologie $\mathcal{T}$ indien iedere $O\in\mathcal{T}$ de vereniging is van elementen van $\mathcal{B}$.

Bewering: Een deelfamilie $\mathcal{B}$ van $\mathcal{T}$ is dan en slechts dan een basis voor $\mathcal{T}$ indien

$$\forall O\in\mathcal{T} \quad \forall x\in O \quad \exists B\in\mathcal{B} \quad : \quad x\in B\subset O$$

Bewijs: duidelijk.

Stelling 1: Laat $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ topologieën zijn voor de verzameling X.
Zij $\mathcal{B}_1$ een basis voor $\mathcal{T}_1$ en zij $\mathcal{B}_2$ een basis voor $\mathcal{T}_2$.
Dan is $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ dan en slechts dan indien

$$\forall B_1\in\mathcal{B}_1 \quad \forall x_1\in B_1 \quad \exists B_2\in\mathcal{B}_2 \quad : \quad x_1\in B_2\subset B_1 \tag{1}$$

en $$\forall B_2\in\mathcal{B}_2 \quad \forall x_2\in B_2 \quad \exists B_1\in\mathcal{B}_1 \quad : \quad x_2\in B_1\subset B_2 \tag{2}$$

Bewijs:

(i) Indien $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ dan volgen (1) en (2) direct uit de voorafgaande bewering.

(ii) Uit (1) volgt dat iedere $B_1\in\mathcal{B}_1$ de vereniging is van elementen $B_2\in\mathcal{B}_2$. Dan is ook iedere $O_1\in\mathcal{T}_1$ de vereniging van elementen $B_2\in\mathcal{B}_2$; d.w.z. $O_1\in\mathcal{T}_2$.
Ergo: $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2$.
Op dezelfde wijze volgt uit (2) dat $\mathcal{T}_2\subset\mathcal{T}_1$.
Maar dan is $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

In de volgende stelling is de topologie niet van te voren gegeven.

Stelling 2: Zij X een verzameling, en zij $\mathcal{B}$ een niet-lege familie van deelverzamelingen van X, met de eigenschap dat $\bigcup\mathcal{B} = X$.
Dan is $\mathcal{B}$ een basis voor een topologie, dan en slechts dan als

$$\forall U,V\in\mathcal{B} \quad \forall x\in U\cap V \quad \exists W\in\mathcal{B} \quad : \quad x\in W\subset U\cap V$$

Bewijs:

(i) Indien $\mathfrak{B}$ een basis is voor een topologie $\mathcal{T}$, dan geldt voor alle $U,V \in \mathfrak{B}$ dat $U \cap V \in \mathcal{T}$. De rest volgt dan onmiddellijk uit de bovenstaande bewering.

(ii) Om het omgekeerde te bewijzen definiëren we $\mathcal{T}$ als de familie van die verzamelingen van X, die de vereniging zijn van elementen van $\mathfrak{B}$. We tonen aan dat $\mathcal{T}$ een topologie is voor X (dan is $\mathfrak{B}$ een basis voor $\mathcal{T}$). In de eerste plaats is het duidelijk dat de vereniging van elke deelfamilie van $\mathcal{T}$ weer tot $\mathcal{T}$ behoort. Laat vervolgens U_1 en U_2 willekeurige elementen $\in \mathcal{T}$ zijn en zij $x \in U_1 \cap U_2$; daar zowel $x \in U_1$ als $x \in U_2$ volgt het bestaan van $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ zodanig dat $x \in B_1 \subset U_1$, $x \in B_2 \subset U_2$ en dus $x \in B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. Op grond van het gegeven bestaat er nu een $B_3 \in \mathfrak{B}$ zodanig dat $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. Daar dit geldt voor alle $x \in U_1 \cap U_2$ volgt dat $U_1 \cap U_2$ de vereniging is van elementen $B \in \mathfrak{B}$, d.w.z. $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Hieruit concludeert men onmiddellijk dat de doorsnede van elke eindige deelfamilie van $\mathcal{T}$ weer tot $\mathcal{T}$ behoort.

Zij $(X,\mathcal{T})$ een topologische ruimte.
Een deelfamilie $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ heet een <u>subbasis</u> voor de topologie $\mathcal{T}$ indien de familie $\mathfrak{B}$ van alle eindige doorsneden van elementen van $\mathcal{S}$ een basis is voor $\mathcal{T}$.

Uit stelling 2 volgt dan onmiddellijk

<u>Stelling 3</u>: Iedere niet-lege familie $\mathcal{S}$ van deelverzamelingen van een verzameling X met de eigenschap dat $\bigcup \mathcal{S} = X$ is de subbasis van een topologie $\mathcal{T}$.
($\mathcal{T}$ is natuurlijk eenduidig door $\mathcal{S}$ bepaald. $\mathcal{T}$ is de kleinste topologie $\supset \mathcal{S}$ voor X.)

<u>Voorbeelden</u>:

I. Zij (X,ρ) een metrische ruimte. De familie der open bollen is een basis voor de metrische topologie.

II. Zij $(X,<)$ een geordende verzameling. De familie der open intervallen (als gedefiniëerd in voorbeeld V op blz. 9) is een basis voor de orde-topologie. De familie der verzamelingen van de vorm $\{x \mid x > a\}$, $\{x \mid x < b\}$ $(a,b \in X)$ is een subbasis voor de orde-topologie.

Opgave: Zij $R^2 = \{(x_1,x_2) \mid x_1,x_2 \in R\}$.
Als $x = (x_1,x_2)$ en $y = (y_1,y_2)$ zij dan

$\rho(x,y) = \{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\}^{\frac{1}{2}}$ en $\sigma(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$.

Dan zijn (R^2,ρ) en (R^2,σ) metrische ruimten met dezelfde metrische topologie.

8. Men zegt dat een topologische ruimte X aan het 2e aftelbaarheids-axioma voldoet, indien er een aftelbare basis bestaat voor de topologie in X.

Voorbeeld: De metrische ruimten (R^n,ρ) van voorbeeld III op blz. 4 (en dus i.h.b. de reële rechte) voldoen aan het 2e aftelbaarheids-axioma.

Zij X een verzameling en zij $A \subset X$. Een familie $\mathcal{K}$ van deelverzamelingen van X heet een overdekking van A, indien $A \subset \bigcup \mathcal{K}$; men zegt dan ook dat $\mathcal{K}$ A overdekt.
Indien $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$, en indien ook $\mathcal{H}$ een overdekking is van A, dan heet $\mathcal{H}$ een deeloverdekking van $\mathcal{K}$ voor A.

Als $(X,\mathcal{T})$ een topologische ruimte is, en $A \subset X$ dan heet een overdekking $\mathcal{K}$ van A een open overdekking indien ieder element van $\mathcal{K}$ $\mathcal{T}$-open is.

Stelling 4 (Lindelöf): Zij $(X,\mathcal{T})$ een topologische ruimte die aan het 2e aftelbaarheidsaxioma voldoet. Zij $A \subset X$. Dan geldt: Iedere open overdekking $\mathcal{K}$ van A heeft een aftelbare deeloverdekking $\mathcal{H}$.

Bewijs:
Zij $\mathcal{B}$ een aftelbare basis voor $\mathcal{T}$.

$$\forall a \in A \quad \exists O_a \in \mathcal{K} \quad \exists B_a \in \mathcal{B} \; : \; a \in B_a \subset O_a .$$

Zij $\mathcal{B}' = \{B_a\}_{a\in A}$ $(\subset \mathcal{B})$. $\mathcal{B}'$ is aftelbaar en dus bestaan er aftelbaar vele $a_i \in A$ $(i = 1,2,3,\ldots)$ zodanig dat $\mathcal{B}' = \{B_{a_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Daar $\mathcal{B}'$ een overdekking is van A, geldt hetzelfde voor $\mathcal{H} = \{O_{a_i}\}_{i=1}^{\infty}$ $(\subset \mathcal{K})$.

Een Lindelöf-ruimte is een topologische ruimte met de eigenschap dat iedere open overdekking van de ruimte een aftelbare deeloverdekking heeft.

Als bijzonder geval van stelling 4 hebben we dus

Stelling 4a: Een topologische ruimte die aan het 2e aftelbaarheidsaxioma voldoet is een Lindelöf-ruimte.

Het omgekeerde van deze stelling is niet juist. We laten dit zien in een

Opgave: Indien α een ordinaalgetal is, dan definiëren we

$$W(\alpha) = \{\mu \mid \mu \text{ ordinaalgetal} < \alpha\}, \quad W'(\alpha) = W(\alpha) \cup \{\alpha\}$$

en we maken deze geordende verzamelingen tot topologische ruimten d.m.v. de orde-topologie.

Zij dan Ω het kleinste niet-aftelbare ordinaalgetal. Dan is $W'(\Omega)$ een Lindelöf-ruimte, maar $W'(\Omega)$ heeft geen aftelbare basis.

[Aanwijzing: (i) Zij $\mathcal{K}$ een open overdekking. Er is dan een $O \in \mathcal{K}$ zodanig dat $\Omega \in O$; zij I een open interval met $\Omega \in I \subset O$. Als $\alpha = \inf I$, dan wordt de aftelbare verzameling $W'(\alpha)$ zeker overdekt door een aftelbare deelfamilie $\mathcal{H}_1$ van $\mathcal{K}$. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \cup \{O\}$ is nu een aftelbare deeloverdekking van $\mathcal{H}$ voor $W'(\Omega)$.

(ii) Dat $W'(\Omega)$ niet aan het 2e aftelbaarheidsaxioma voldoet ziet men, na bestudering van de volgende paragraaf het gemakkelijkst in door op te merken dat $W'(\Omega)$ niet aan het 1e aftelbaarheidsaxioma voldoet: er is geen aftelbare locale basis in Ω].

9. Zij X een topologische ruimte.

Zij $x \in X$. Een locale basis in x, of een basis voor het omgevingensysteem in x is een familie $\mathcal{B}_x$ van omgevingen van x met de eigenschap dat er bij iedere omgeving U_x van x een $B_x \in \mathcal{B}_x$ bestaat zodanig dat $x \in B_x \subset U_x$.

Merk op dat de familie van de open omgevingen van x een locale basis is in x.

Men zegt dat een topologische ruimte X aan het <u>1e aftelbaarheidsaxioma</u> voldoet, indien er een aftelbare locale basis is in elk punt $x \in X$.

<u>Voorbeeld</u>: Elke metrische ruimte voldoet aan het 1e aftelbaarheidsaxioma.

<u>Stelling 5</u>: Een topologische ruimte X die aan het 2e aftelbaarheidsaxioma voldoet, voldoet ook aan het 1e aftelbaarheidsaxioma.

<u>Bewijs</u>:
Zij $\mathfrak{B}$ een aftelbare basis van X. Zij $x \in X$. Laat $\mathfrak{B}_x$ de deelfamilie van $\mathfrak{B}$ zijn die bestaat uit alle verzamelingen waartoe x behoort. Dan is $\mathfrak{B}_x$ een aftelbare locale basis in x.

Het omgekeerde van deze stelling is niet juist, zoals aangetoond wordt door het volgende

<u>Voorbeeld</u>: Als X een overaftelbare discrete ruimte is, dan voldoet X niet aan het 2e maar wel aan het 1e aftelbaarheidsaxioma.

10. Zij $(X,\mathcal{T})$ een topologische ruimte.
Een verzameling $F \subset X$ heet <u>($\mathcal{T}$-)gesloten</u> indien $X \setminus F$ $\mathcal{T}$-open is.

<u>Voorbeelden</u>:

I. X en ϕ zijn gesloten.

II. In elke metrische ruimte (X,ρ) is de verzameling

$$S_r(p) = \{x \mid \rho(x,p) \leq r\}$$

gesloten ("gesloten bol") $(r > 0)$.

Bovendien is elke verzameling die uit één punt bestaat gesloten.

III. In de reële rechte is de verzameling $\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\dots\}$ gesloten; de verzameling $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\dots\}$ echter niet.

Stelling 6: Zij $(X,\mathcal{T})$ een topologische ruimte.

(i) De doorsnede van een willekeurige familie van gesloten verzamelingen is weer een gesloten verzameling.

(ii) De vereniging van een eindige familie van gesloten verzamelingen is weer een gesloten verzameling.

Bewijs:
Volgt onmiddellijk uit de overeenkomstige eigenschappen van open verzamelingen, de definitie van een gesloten verzameling, en het feit dat

$$\bigcap_{i\in I} (X\setminus O_i) = X\setminus \bigcup_{i\in I} O_i, \quad \bigcup_{i=1}^{n} (X\setminus O_i) = X\setminus \bigcap_{i=1}^{n} O_i.$$

Als nu A een verzameling is in een topologische ruimte X, dan is de doorsnede van alle gesloten verzamelingen $\supset A$ kennelijk de kleinste gesloten verzameling $\supset A$. Men noemt deze verzameling het gesloten omhulsel of de afsluiting van A; notatie: $\overline{A}$.

Merk op dat uit $A\subset B$ volgt dat $\overline{A}\subset\overline{B}$.

Bewering: A is dan en slechts dan gesloten als $A = \overline{A}$.

Bewijs: duidelijk.

Opmerking: Voor open verzamelingen heeft men iets analoogs:

(i) De vereniging van alle open verzamelingen $\subset A$ is de grootste open verzameling $\subset A$. Men noemt deze verzameling het inwendige van A; notatie: A^0.

(ii) A is dan en slechts dan open als $A = A^0$.

Een verzameling A in een topologische ruimte X heet (overal)dicht als $\overline{A} = X$. Een topologische ruimte heet separabel, indien er een aftelbare verzameling dicht in ligt.

11. We zullen in deze paragraaf enkele andere karakteriseringen van de begrippen "gesloten verzameling" en "afsluiting" geven.

Zij A een verzameling in de topologische ruimte X.
Een punt $p \in X$ heet <u>verdichtingspunt</u> van A, indien voor iedere omgeving U_p van p geldt dat $U_p \cap (A \setminus \{p\}) \neq \phi$.

Merk op dat een verdichtingspunt van A al dan niet tot A kan behoren.

<u>Voorbeeld</u>: In de reële rechte is 0 verdichtingspunt zowel van de verzameling $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ als van de verzameling $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$.

De verzameling van alle verdichtingspunten van A heet de <u>afgeleide verzameling</u> van A; notatie: A'.

<u>Stelling 7</u>: A is dan en slechts dan gesloten als $A' \subset A$.

<u>Bewijs</u>:

(i) Zij $A' \subset A$.
Laat p een punt zijn $\in X \setminus A$. Dan is zeker $p \notin A'$ en dus is p geen verdichtingspunt van A. D.w.z. er is een omgeving U_p van p zodanig dat $U_p \cap (A \setminus \{p\}) = \phi$, oftewel, daar $p \notin A$, $U_p \cap A = \phi$; d.w.z. $U_p \subset X \setminus A$. Daar p een willekeurig punt uit $X \setminus A$ is, volgt dat $X \setminus A$ open is; A is dus gesloten.

(ii) Zij A gesloten.
Laat p een punt zijn $\in X \setminus A$. Daar $X \setminus A$ open is volgt dat er een omgeving U_p van p is zodanig dat $U_p \subset X \setminus A$, oftewel $U_p \cap A = \phi$, d.w.z. $U_p \cap (A \setminus \{p\}) = \phi$. Dus volgt dat $p \notin A'$. Daar p een willekeurig punt is van $X \setminus A$ volgt dat $A' \subset A$.

<u>Bewering</u>: (i) Als $A \subset B$ dan is $A' \subset B'$.
(ii) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

<u>Bewijs</u>:

(i) Zij $p \in A'$. Voor iedere omgeving U_p van p geldt dat $U_p \cap (A \setminus \{p\}) \neq \phi$; maar dan is zeker, daar $A \subset B$, $U_p \cap (B \setminus \{p\}) \neq \phi$. D.w.z. $p \in B'$.

(ii) Daar $A, B \subset (A \cup B)$ volgt $A', B' \subset (A \cup B)'$; dus $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$.
Indien $p \notin A' \cup B'$, d.w.z. $p \notin A'$ en $p \notin B'$, dan volgt het bestaan van twee omgevingen U_p en V_p van p, zodanig dat $U_p \cap (A \setminus \{p\}) = \phi$ en $V_p \cap (B \setminus \{p\}) = \phi$. Maar dan geldt voor de omgeving $W_p = U_p \cap V_p$ van p dat $W_p \cap ((A \cup B) \setminus \{p\}) = \phi$. Dus $p \notin (A \cup B)'$. Daar p willekeurig is volgt dat $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$.

Stelling 8: $\overline{A} = A \cup A'$.

Bewijs:

(i) We tonen eerst aan dat $A \cup A'$ gesloten is - waaruit dan onmiddellijk volgt dat $\overline{A} \subset A \cup A'$.
Aldus: Zij $p \in X \setminus (A \cup A')$. I.h.b. is dan $p \notin A'$ en dus bestaat er een open omgeving O_p van p zodanig dat $O_p \cap (A \setminus \{p\}) = O_p \cap A = \phi$. Daar O_p open is gekozen volgt dat O_p omgeving is van elke $q \in O_p$; maar dan is geen enkele $q \in O_p$ verdichtingspunt van A. Hieruit volgt dat $O_p \subset X \setminus (A \cup A')$. Daar p willekeurig is volgt het gestelde.

(ii) Voorts volgt uit $A \subset \overline{A}$ dat $A' \subset \overline{A}' \subset \overline{A}$, en dus $A \cup A' \subset \overline{A}$.

Gevolg: $p \in \overline{A}$ dan en slechts dan als voor iedere omgeving U_p van p geldt dat $U_p \cap A \neq \phi$.

Stelling 9: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Bewijs: $\overline{A \cup B} = (A \cup B) \cup (A \cup B)' = (A \cup B) \cup (A' \cup B') = (A \cup A') \cup (B \cup B') = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Voorbeelden:

I. In een metrische ruimte is de gesloten bol $S_r(p)$ niet noodzakelijk de afsluiting van de open bol $B_r(p)$.

II. Indien Q de verzameling der rationale getallen is in de reële rechte R, dan is $\overline{Q} = R$. R is dus een separabele ruimte.

III. Als $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ in R, dan is $\overline{A} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$.

12. Voor het speciale geval van metrische ruimten kunnen we de begrippen "afgeleide verzameling" en "afsluiting" nog op andere wijze karakteriseren. Dat zullen we in deze paragraaf doen.

Zij (X,ρ) een metrische ruimte.
Indien A en B deelverzamelingen van X zijn, dan definiëren we de afstand van A en B als

$$\rho(A,B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \rho(a,b).$$

Als A uit één punt bestaat, dus $A = \{a\}$, dan schrijven we $\rho(a,B)$ i.p.v. $\rho(\{a\},B)$.
Als A en B beide uit één punt bestaan, $A = \{a\}$ en $B = \{b\}$, dan is $\rho(A,B) = \rho(a,b)$.

<u>Stelling 10</u>: Zij A een verzameling in de metrische ruimte (X,ρ).
Dan geldt: (i) $A' = \{x \mid \rho(x,A\setminus\{x\}) = 0\}$
(ii) $\overline{A} = \{x \mid \rho(x,A) = 0\}$.

<u>Bewijs</u>: (i) $x \in A'$ $\Longleftrightarrow$ iedere $B_\varepsilon(x)$ $(\varepsilon > 0)$ bevat een punt $a \in A\setminus\{x\}$
$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists a \in A\setminus\{x\} \ : \ \rho(a,x) < \varepsilon$
$\Longleftrightarrow \rho(x,A\setminus\{x\}) = 0$

(ii) volgt uit stelling 8 en uit (i).

13. <u>Stelling 11</u>: Een topologische ruimte $(X,\mathcal{T})$ die aan het 2e aftelbaarheidsaxioma voldoet is separabel.

<u>Bewijs</u>: Zij $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ een aftelbare basis van $\mathcal{T}$. Kies voor elke $i = 1,2,3,\dots$ een punt $a_i \in B_i$. De aftelbare verzameling $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ is overal dicht in X (indien $p \notin A$, dan volgt uit het feit dat elke omgeving U_p van p een basis-element B_{i_0}, en dus een punt a_{i_0}, bevat, dat $U_p \cap A \neq \phi$; d.w.z. $p \in A'$).

Het omgekeerde van stelling 11 geldt niet:

<u>Voorbeeld</u>: Zij X een overaftelbare verzameling, en zij $\mathcal{T}$ de eindig-complement topologie voor X.

Iedere oneindige deelverzameling, en dus i.h.b. iedere aftelbaar-oneindige deelverzameling is dicht in X. De ruimte $(X,\mathcal{T})$ is dus separabel.

Dat $(X,\mathcal{T})$ geen aftelbare basis heeft, ziet men aldus: indien $\mathcal{B}$ een basis is, dan volgt gemakkelijk, voor een punt $x_0 \in X$, dat

$$\bigcap_{\substack{x_0 \in B \\ B \in \mathcal{B}}} B = \{x_0\};$$

indien $\mathcal{B}$ aftelbaar zou zijn, dan volgt dat het complement van $\{x_0\}$ een aftelbare vereniging van eindige verzamelingen, dat is een aftelbare verzameling is; maar dit is een contradictie.

Voor metrische ruimten geldt het omgekeerde van stelling 11 wel:

Stelling 12: Zij (X,ρ) een separabele metrische ruimte. Dan voldoet X aan het 2e aftelbaarheidsaxioma.

Bewijs: Zij $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ een overal dichte aftelbare verzameling.
We tonen aan dat de aftelbare verzameling

$$\mathfrak{B} = \{B_r(a_i)\}_{r \text{ rationaal } > 0;\ i=1,2,3,\dots}$$

een basis is voor de metrische topologie.
Aldus: Zij O een open verzameling en zij $p \in O$. Er bestaat dan een bol $B_s(p) \subset O$. Laat dan r een rationaal getal $< \frac{1}{2}s$ zijn. Omdat A overal dicht is bestaat er een $a_{i_0} \in B_r(p)$. Dan is ook $p \in B_r(a_{i_0})$. Bovendien is $B_r(a_{i_0}) \subset B_s(p)$ [want als $x \in B_r(a_{i_0})$ dan volgt $\rho(x,p) \leq \rho(x,a_{i_0}) + \rho(a_{i_0},p) < r + r < s$ en dus $x \in B_s(p)$].
Dit betekent $p \in B_r(a_{i_0}) \subset O$. $\mathfrak{B}$ is dan een basis op grond van de bewering in §7.

Colloquium "Topologie"(1966-1967)

19 oktober 1966

Spreker: J. v.d. Slot.

14. Inwendige, uitwendige en rand van een verzameling.

Stel T een topologische ruimte.
Met A^o noteren we het inwendige van een deelverzameling A. Het complement van een deelverzameling A noteren we als A^c.

Bewering: $A^o = A^{c-c}$

Bewijs: Omdat $E \subset A \iff A^c \subset E^c$ merken we op dat de open verzamelingen $E \subset A$ precies de complementen zijn van gesloten verzamelingen $\supset A^c$.
Dus $A^o = \bigcup\{F^c \mid F \text{ is gesloten } \& F \supset A^c\} = (\bigcap\{F \text{ is gesloten } \& F \supset A^c\})^c =$
$= A^{c-c}$.

Definitie. Is A een willekeurige deelverzameling van een topologische ruimte X dan valt X uiteen in drie disjuncte deelverzamelingen:

(a)	$A^{c-c} = A^o$	het inwendige van A
(b)	$A^{-c} = A^{co}$	het uitwendige van A
(c)	$(\bar{A}^c \cup A^{c-c})^c = \bar{A} \cap A^{c-}$	de rand van A, notatie b(A)

Punten van het inwendige, uitwendige of de rand van A heten respectievelijk inwendige punten, uitwendige punten en randpunten van A.

Voorbeelden: I. Stel $A \subset E^2$, $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Het inwendige van A is $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$; het uitwendige van A is $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$; de rand van A is $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Hoe vreemd de rand van een verzameling er i.h.a. uit kan zien getuige het volgende voorbeeld.
II. Stel Q de deelverzameling van R bestaande uit de rationale getallen. Het inwendige van Q is $\emptyset$, het uitwendige van Q is $\emptyset$ en de rand van Q is R.

Opgave. Stel A een deelverzameling van een top. ruimte X. $p \in X$ is randpunt van A $\Longleftrightarrow$ Iedere omgeving van p bevat zowel van A als van A^c punten.
Bewijs dat $\bar{A} = A \cup b(A)$.
Als A open is in X toon dan aan dat $b(A) \cap A = \emptyset$.

15. Deelruimten van een topologische ruimte

Stel $(X,\mathcal{T})$ een topologische ruimte. Een deelverzameling Y van X maken we tot een topologische ruimte door als stelsel open verzamelingen te nemen $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cap Y$ *). $(Y,\mathcal{T}')$ heet een deelruimte van $(X,\mathcal{T})$. De topologie op Y heet de relatieve topologie.

Wanneer we dus nu een willekeurige deelverzameling Y van een topologische ruimte X bekijken, dan is Y blijkbaar open en gesloten in de deelruimte Y, doch niet noodzakelijk open in X. Hieruit blijkt weer duidelijk dat het begrip open geen absolute betekenis heeft. We moeten expliciet de ruimte vermelden waar we de topologie van bedoelen.

Bewering: Stel $(X,\mathcal{T})$ een topologische ruimte en $(Y,\mathcal{T}')$ een deelruimte.

(1) Als $\{U_\alpha | \alpha \in A\}$ een basis (subbasis) voor $\mathcal{T}$ is, dan is $\{Y \cap U_\alpha | \alpha \in A\}$ een basis (subbasis) voor $\mathcal{T}'$.

(2) Een deelverzameling A van Y is $\mathcal{T}'$ - gesloten d.e.s.d. wanneer er een $\mathcal{T}$ - gesloten verzameling F van X is met $F \cap Y = A$.

(3) Stel $A \subset Y$. Dan is de afsluiting van A in de deelruimte Y (notatie $\bar{A}^Y$) gelijk aan $\bar{A} \cap Y$.
(de analoge uitspraak voor het inwendige van een verzameling A is onjuist).

Bewijs: (1) is triviaal

(2) Stel A gesloten in Y, dan is $A = Y \setminus W$ met W open in Y. Dan $W = Y \cap V$ met V open in X, en we vinden $A = Y \setminus (Y \cap V) = Y \cap (X \setminus V)$.

Is omgekeerd $A = Y \cap F$ met F gesloten in X, dan $Y \setminus A = Y \cap (X \setminus F)$ en dit toont aan dat $Y \setminus A$ open is in Y d.w.z. A is gesloten in Y.

*) Met $\mathcal{T} \cap Y$ bedoelen we $\{U \cap Y | U \in \mathcal{T}\}$

(3) $Y \cap \bar{A}$ is een gesloten verzameling van de deelruimte Y, die A omvat.
Dus $\bar{A}^Y \subset \bar{A} \cap Y$.
Anderzijds is $\bar{A}^Y$ gesloten in Y, dus er bestaat volgens (2) een gesloten verzameling G van X met $\bar{A}^Y = G \cap Y$. Blijkbaar $A \subset G$ en ook $\bar{A} \subset G$.
Dus $\bar{A} \cap Y \subset G \cap Y = \bar{A}^Y$.

Voorbeelden:

I. Een segment $[a, b]$ is een deelruimte van de reële rechte R. Een subbasis voor de open verzamelingen van de deelruimte $[a, b]$ wordt gevormd door de verzamelingen van het type $[a, x)$ en $(y, b]$ $(a < x , y < b)$.

II. De verzameling Q der rationale getallen is een deelruimte van de reële rechte R. De deelverzamelingen $\{x \in Q \mid a < x < b \quad a, b \text{ irrationaal}\}$ zijn zowel open als gesloten deelverzamelingen van de deelruimte Q. (maar niet van R).

III. De verzameling der natuurlijke getallen is met de relatieve topologie (geinduceerd door R) een discrete topologische ruimte.

IV. Beschouw E^2 met gewone topologie en hierin de deelverzameling $Y = \{(x, y) \in E^2 \mid y = 0\}$. Y is als deelruimte van E^2 homeomorf met R.

V. Elke rechte lijn in de E^n is als deelruimte homeomorf met R.

Stel nu (X, ρ) een metrische ruimte. X is dus een topologische ruimte d.m.v. de metrische topologie.
Een deelverzameling Y van X is op natuurlijke wijze een metrische ruimte (Y, ρ') als we afspreken dat de afstand $\rho'(y, z)$ tussen twee punten y, z van Y gelijk is aan $\rho(y, z)$.
De (open) bollen van (Y, ρ') zijn nu alle verzamelingen $B_r(p) \cap Y$ met $p \in Y$ en deze vormen een basis voor de metrische topologie op (Y, ρ').
Een basis voor de relatieve topologie op Y geinduceerd door de topologische ruimte X wordt gevormd door alle verzamelingen $B_r(p) \cap Y$ met $p \in X$. (zie de bewering in §15).

Bewering: De metrische topologie van (Y, ρ') is dezelfde als de relatieve topologie op Y.

<u>Bewijs</u>: Stel $\mathcal{B}_1 = \{B_r(p) \cap Y \mid r > 0,\ p \in X\}$ en $\mathcal{B}_2 = \{B_r(p) \cap Y \mid r > 0,\ p \in Y\}$. $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$ zijn bases voor de relatieve topologie en metrische topologie op Y. We gebruiken de Stelling 1 om te bewijzen dat de topologieen dezelfde zijn.

Stel $B_1 \in \mathcal{B}_1$ en $y \in B_1$. Dus $y \in B_r(p) \cap Y$ met $r > 0$ en $p \in X$.

Stel $s = r - \rho(p, y)$. Als we $B_2 = B_s(y) \cap Y$ stellen dan is $B_2 \in \mathcal{B}_2$ en geldt $y \in B_2 \subset B_1$ (want $y' \in B_2 \Rightarrow \rho(y, y') < r - \rho(p, y) \Rightarrow \rho(p, y') < \rho(y, y') + \rho(p, y) < r \Rightarrow y' \in B_r(p) \cap Y$).

Aan de eerste eis van Stelling 1 is dus voldaan. Er is ook aan de tweede eis voldaan, want $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$.

<u>Gevolg</u>: Een deelruimte van een metrizeerbare ruimte is metrizeerbaar.

Stel nu dat $(X, <)$ een geordende verzameling is. Op natuurlijke wijze is een deelverzameling Y van X geordend (m.b.v. de ordening op X). Als $\mathcal{T}_1$ de relatieve topologie is op Y en $\mathcal{T}_2$ de ordetopologie op Y, dan is gemakkelijk in te zien dat $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ maar nu geldt <u>niet</u> i.h.a. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Om het laatste in te zien nemen we $X = R$ en voor $<$ de natuurlijke ordening op R. Kies $Y = [0,1) \cup \{2\}$. Stel $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ zijn respectievelijk de relatieve topologie en de ordetopologie op Y.

Nu geldt $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$! Immers de eenpuntige verzameling $\{2\}$ is $\mathcal{T}_1$- open maar niet $\mathcal{T}_2$ - open, want iedere $\mathcal{T}_2$ - open verzameling die het punt 2 bevat, bevat ook een segment $(\varepsilon, 1)$ $(0 \leq \varepsilon < 1)$.

Merkwaardig is dat het punt 2 in de ordetopologie $\mathcal{T}_1$ op Y een verdichtingspunt is van de verzameling $[0, 1)$.

Verschillende eigenschappen van topologische ruimten worden overgedragen op hun deelruimten. Zulke eigenschappen heten <u>erfelijk</u>. We hebben al opgemerkt dat metrizeerbaarheid een erfelijke eigenschap is. Ook geldt:

<u>Stelling 12</u>: Iedere deelruimte van een ruimte die aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet, voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma.

Bewijs: Stel $\{U_i | i = 1, 2, \ldots\}$ een aftelbare basis van de ruimte X. Als $Y \subset X$, dan is $\{U_i \cap Y | i = 1, 2, \ldots\}$ een aftelbare basis voor de deelruimte Y.

Het is in het algemeen niet waar dat een deelruimte van een separabele ruimte weer separabel is.

Om dat te illustreren behandelen we het volgende voorbeeld.

Beschouw het gesloten bovenvlak P van E^2 gegeven door de voorwaarde $y \geq 0$.

Beschouw het volgende stelsel deelverzamelingen van P

1° alle open bollen van E^2 voor zover deze in P liggen

2° alle open bollen van E^2, die in P liggen en de x-as raken onder toevoeging van het betreffende raakpunt.

Dit stelsel is een basis van een topologie $\mathfrak{J}$ op de verzameling P. $(P, \mathfrak{J})$ is een separabele ruimte. Immers de verzameling $Q = \{(x,y) \in E^2 | x, y$ rationaal, $y \geq 0\}$ is een aftelbare overal dicht liggende deelverzameling van $(P, \mathfrak{J})$. De deelruimte $R = \{(x, y) \in P | y = 0\}$ van $(P, \mathfrak{J})$ is discreet en niet separabel, omdat R overaftelbaar is. (merk op dat een discrete ruimte met overaftelbaar veel punten nooit separabel is).

16. Enkele scheidingsaxioma's

Definitie: Men noemt een topologische ruimte T een T_1-ruimte wanneer aan het volgende axioma voldaan is (T_1 - axioma)

(T_1) Bij ieder paar verschillende punten van T bezit elk een omgeving die het andere punt vermijdt.

Stelling 13: Een topologische ruimte T is een T_1-ruimte d.e.s.d. wanneer iedere deelverzameling van T die uit één punt bestaat, gesloten is.

Bewijs: Stel T een T_1-ruimte. Als $p \in T$ kies dan van elk punt $q \neq p$ een open omgeving $U(q)$ die p vermijdt. $T \setminus \{p\} = \bigcup \{U(q) | q \neq p\}$ en deze verzameling is open als vereniging van open verzamelingen. $\{p\}$ is dus een gesloten verzameling van T.

Als omgekeerd elke punt van T gesloten is en p en q zijn twee verschillende punten van T, dan is $T\setminus\{q\}$ een omgeving van p die q vermijdt en $T\setminus\{p\}$ is een omgeving van q die p vermijdt. T is dus een T_1-ruimte.

Definitie: Men noemt een topologische ruimte een Hausdorffruimte wanneer aan het volgende axioma voldaan is (T_2- of Hausdorffaxioma).

(T_2) Iedere twee verschillende punten bezitten disjuncte omgevingen.

Het is duidelijk dat iedere Hausdorffruimte een T_1-ruimte is. Het omgekeerde geldt niet. Een voorbeeld van een topologische ruimte die een T_1-ruimte is doch geen Hausdorffruimte is een oneindige verzameling X tezamen met de eindig complement topologie (zie blz. 19)
Een voorbeeld van een topologische ruimte die noch een T_1-ruimte noch een Hausdorffruimte is, is een verzameling X met indiscrete topologie.

De meeste van de ruimten die in deze syllabus als voorbeeld gegeven zijn, zijn Hausdorffruimten.

Een discrete ruimte is een Hausdorffruimte; iedere metrische ruimte (X,ρ) met de metrische topologie is een Hausdorffruimte (als $p, q \in X$; $p \neq q$ en $r = \frac{1}{2}\rho(p, q)$ dan zijn $B_r(p)$ en $B_r(q)$ disjuncte omgevingen van p en q).
Verder is iedere deelruimte van een Hausdorffruimte een Hausdorffruimte (ga dit na).

In de topologie, vooral als het toepassingen in de Analyse betreft, beperken we ons meestal tot Hausdorffruimten, zelfs wel tot nog kleinere klassen ruimten.

17. Samenhangende topologische ruimten

Definitie: Een topologische ruimte X heet samenhangend wanneer $\emptyset$ en X de enige zowel open als gesloten deelverzamelingen zijn.
Een deelverzameling A van een topologische ruimte X heet samenhangend wanneer A als deelruimte samenhangend is.

Voor het gemak zullen we een zowel open als gesloten deelverzameling van een topologische ruimte opgesloten noemen.

Voorbeelden:

I. Een ruimte bestaande uit één punt is samenhangend.

II. De reële rechte R met de gewone topologie is samenhangend.

Bewijs: Veronderstel dat er toch een niet lege, echte opgesloten deelverzameling A van R bestond.
Stel $B = R\setminus A$. Kies $a \in A$ en $b \in B$, we mogen veronderstellen dat $a < b$. Zij $p = \sup (A \cap [a, b])$ p behoort tot A, want p is een punt van A of een verdichtingspunt van A en A is gesloten (St.8). Iedere (rechter) omgeving van p bevat punten van $R\setminus A = B$, dus A is niet open. Tegenspraak! Op dezelfde manier bewijst men dat ieder segment samenhangend is.

III. De E^n $(n > 1)$ met gewone topologie is samenhangend. Bewijs dit zelf.

IV. Stel $A \subset R$ gegeven door $A = (0,1) \cup (1,2)$. Dan is A niet samenhangend ((0,1) is een echte niet lege opgesloten deelverzameling).

V. Een discrete ruimte is niet samenhangend. Immers elke deelverzameling is opgesloten.

VI. De deelverzameling Q van R bestaande uit alle rationale getallen is niet samenhangend (als a,b irrationale getallen zijn, $a < b$, dan is $\{x \in Q | a < x < b\}$ een echte niet lege opgesloten deelverzameling van Q).

Bewering: Een topologische ruimte X is dan en slechts dan niet samenhangend wanneer er twee deelverzamelingen A en B bestaan met

1e. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

2e. $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$

3e. A en B gesloten in X.

Bewijs: Stel X is niet samenhangend, er bestaat dus een echte niet lege opgesloten deelverzameling Y. Als $A = Y$ en $B = X\setminus Y$ dan voldoen A en B aan 1e. t/m 3e.
Bestaan omgekeerd in X twee verzamelingen A en B die voldoen aan 1e. t/m 3e., dan is A een echte niet lege opgesloten deelverzameling van X en X is dus niet samenhangend.

Het is gebruikelijk om een niet samenhangende ruimte X <u>splitsbaar</u> te noemen. Als $X = A \cup B$ terwijl A en B aan 1e. t/m 3e van de vorige bewering voldoen, dan heet (A, B) een splitsing van X.
Een ruimte is dus dan en slechts dan samenhangend wanneer er geen splitsing bestaat.

<u>Stelling 14</u>: Stel X een topologische ruimte en A een samenhangende deelverzameling van X.
Dan is $\bar{A}$ samenhangend.

<u>Bewijs</u>: Stel C een opgesloten deelverzameling van $\bar{A}$, we moeten aantonen dat $C = \emptyset$ of $C = \bar{A}$.
$C \cap A$ is een opgesloten deelverzameling van A en omdat A samenhangend is, geldt blijkbaar $C \cap A = \emptyset$ of $C \cap A = A$.
$C \cap A = \emptyset$ impliceert $A \subset \bar{A} \setminus C$. Omdat $\bar{A} \setminus C$ gesloten is in $\bar{A}$ (want C is open in $\bar{A}$) en dus in X, volgt $\bar{A} \subset \bar{A} \setminus C$ d.w.z. $C = \emptyset$.
De tweede onderstelling $C \cap A = A$ impliceert dat $A \subset C$ en omdat C gesloten is in $\bar{A}$ (en dus in X) ook $\bar{A} \subset C$ d.w.z. $C = \bar{A}$.

<u>Stelling 15</u>: (generalisatie van stelling 14).
Zij A een samenhangende deelverzameling van een topologische ruimte X.
Als $A \subset B \subset \bar{A}$, dan is B samenhangend.

<u>Bewijs</u>: A is een samenhangende deelverzameling van de deelruimte B.
De afsluiting van A in B is volgens de eerste bewering uit §15 gelijk aan $\bar{A} \cap B = B$.
B is dus samenhangend volgens de vorige stelling.

<u>Stelling 16</u>: Zij $\{A_\alpha | \alpha \in I\}$ een familie samenhangende verzamelingen van een topologische ruimte en veronderstel dat voor elk paar (α, β) geldt $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$. Dan is $A = \bigcup \{A_\alpha | \alpha \in I\}$ samenhangend.

<u>Bewijs</u>: Stel C een opgesloten verzameling van de deelruimte A.
We moeten weer aantonen dat $C = \emptyset$ of $C = A$.
Elke A_α is samenhangend dus geldt $A_\alpha \subset C$ of $A_\alpha \subset A \setminus C$ (merk op dat $C \cap A_\alpha$ opgesloten is in A_α).

Het is onmogelijk dat voor verschillende indices α en β uit I geldt $A_\alpha \subset C$ en $A_\beta \subset A\backslash C$, want $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ voor $\forall \alpha, \beta \in I$.
Dus geldt $A_\alpha \subset C$ voor $\forall \alpha$, d.w.z. $A = \cup\{A_\alpha | \alpha \in I\} = C$ of $A_\alpha \subset A\backslash C$ voor $\forall \alpha$, d.w.z. $C = \emptyset$.

Toepassing van stelling 16
De deelverzameling A van de E^2 gedefinieerd door $A = \{(x,y) \in E^2 | y/x$ is rationaal$\}$ is samenhangend. (merk op dat $A = \cup\{A_\alpha | \alpha$ rationaal$\}$ met $A_\alpha = \{(x,y) | y = \alpha x\}$ en pas de vorige stelling toe).

Stelling 17: Stel f een continue afbeelding van de ruimte X op de ruimte Y.
Als X samenhangend is, dan is ook Y samenhangend.
Kortweg gezegd: "samenhang is een continue invariant".

Bewijs: Stel C een opgesloten deelverzameling van Y. Volgens de bewering van §6 is $f^{-1}(C)$ opgesloten in X.
X is samenhangend, dus $f^{-1}(C) = \emptyset$ of $f^{-1}(C) = X$. Blijkbaar $C = \emptyset$ of $C = Y$.

Voorbeelden en toepassingen

I. Er bestaan met uitzondering van de constante functies geen continue reële functies die slechts rationale waarden aannemen.
Immers bestond zo'n functie f wel, dan is $f : R \to Q$ een continue afbeelding van de samenhangende ruimte R op de slitsbare deelruimte fQ van de rationale getallen Q , in tegenspraak met de vorige stelling (merk op dat elke meerpuntige deelruimte van Q splitsbaar is).

II. $A = \{(x,y) | y = \sin 1/x, 0 < x \leq 1\} \subset E^2$ is samenhangend als continue beeld van de samenhangende ruimte $(0,1]$.
Uit stelling 15 volgt dat $\bar{A} = A \cup \{(0,y) | -1 \leq y \leq 1\}$ samenhangend is.
Merk op dat zelfs met weglating van een of andere deelverzameling van $\{(0,y) | -1 \leq y \leq 1\}$ de overblijvende verzameling samenhangend is.
Een niet samenhangende topologische ruimte kunnen we verdelen in samenhangende "componenten", het aantal componenten geeft dan een ruwe indicatie hoe onsamenhangend een ruimte is.

<u>Definitie</u>: Stel X een topologische ruimte en $x \in X$. De <u>component</u> $C(x)$ van x in X is de vereniging van alle samenhangende deelverzamelingen van X die x bevatten.

Direkt volgt uit Stelling 16 dat een component samenhangend is; een component van een punt is dus de "grootste" samenhangende verzameling die dat punt bevat.

De componenten van een ruimte X zijn <u>paarsgewijs disjunct</u> ($C(x) \cap X(y) \neq \emptyset \Rightarrow C = C(x) \cup C(y)$ is samenhangend (St. 16) $\Rightarrow C \subset C(x)$ & $C \subset C(y) \Rightarrow C(x) = C(y)$) en hun vereniging is X.

De componenten van een ruimte X zijn <u>gesloten</u> deelverzamelingen van X (als $x \in X$ dan is $\overline{C(x)}$ samenhangend volgens St. 15 en dus geldt $\overline{C(x)} \subset C(x)$ d.w.z. $C(x)$ is gesloten).

<u>Definitie</u>: Een ruimte waarin iedere component uit één punt bestaat heet <u>totaal onsamenhangend</u>.

<u>Voorbeelden</u>:

I. Stel X een samenhangende topologische ruimte. Voor ieder punt $x \in X$ geldt $C(x) = X$. Een samenhangende ruimte bestaat dus uit slechts één component.

II. Stel $A \subset R$ gegeven door $A = (0,1) \cup (1,2)$. De deelruimte A bestaat uit twee componenten : $(0,1)$ en $(1,2)$. Deze componenten zijn zelfs <u>opgesloten</u> verzamelingen van A.

III. Zij Q de deelruimte van R bestaande uit alle rationale getallen. Q is totaal onsamenhangend (merk op dat iedere samenhangende deelverzameling van R die uit meer dan een punt bestaat, een open interval van R moet bevatten).

Colloquium "Topologie"

23 november 1966

18. Compacte topologische ruimten

Definitie. Een topologische ruimte X heet compact (of bicompact), wanneer iedere open overdekking van X een eindige deeloverdekking bezit. Een deelverzameling Y van een topologische ruimte X heet compact, wanneer Y als deelruimte compact is.
Het is duidelijk dat: $Y \subset X$ is compact $\iff$ Iedere overdekking van Y met open verzamelingen van X heeft een eindige deeloverdekking.

Voorbeelden

1. De reële rechte is niet compact, want de overdekking van R bestaande uit alle open intervallen $(-n,n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ bezit geen eindige deeloverdekking.
2. Een segment $[a,b]$ is een compacte verzameling van R.

Bewijs. Stel $\mathcal{U}$ een open overdekking van $[a,b]$ (met open verzamelingen van R). Stel c het supremum van alle getallen x van $[a,b]$ met de eigenschap dat $[a,x]$ door een eindige deelcollectie van $\mathcal{U}$ wordt overdekt. Kies $U \in \mathcal{U}$ zó dat $c \in U$ (merk op dat $c \in [a,b]$) en kies een open interval (d,c) zó dat $[d,c] \subset U$. Er bestaat nu een eindige deelcollectie van $\mathcal{U}$ die $[a,d]$ overdekt en deze familie tezamen met U overdekt $[a,c]$.
Nu is $c = b$ want anders verkrijgen we zo een eindige deelcollectie van $\mathcal{U}$ die een interval $[a,c']$ overdekt met $b \geq c' > c$, wat in tegenspraak is met de definitie van c.

Stelling 18. Stel Y een gesloten deelverzameling van de compacte ruimte X. Dan is Y compact.

Bewijs. Stel $\mathcal{U}$ een willekeurige open overdekking van Y (met open verzamelingen van X). Omdat X compact is bezit de open overdekking $\mathcal{U} \cup \{X \setminus Y\}$ van X een eindige deeloverdekking $\mathcal{H}$. $\mathcal{H} \setminus \{X \setminus Y\}$ is het gevraagde eindige deelstelsel van $\mathcal{U}$ dat Y overdekt.

Stelling 19. Stel C een compacte deelverzameling van een Hausdorffruimte X. Dan is C gesloten in X.

Bewijs. Stel p een vast punt $\notin C$. Kies voor ieder punt $c \in C$ een open omgeving U_c van c en een omgeving U_p van p met $U_c \cap U_p = \emptyset$.
Omdat C compact is, bezit de overdekking $\{U_c \mid c \in C\}$ van C een eindige deeloverdekking $\{U_{c_i} \mid i = 1,\ldots,n\}$. $\bigcap\{U_{p_i} \mid i = 1,\ldots,n\}$ is nu een (open) omgeving van p die C vermijdt. Uit de willekeurigheid van p volgt dat $X \setminus C$ open is in X, dus C is gesloten in X.

Opgaven

1. (generalisatie van stelling 18). Bewijs dat de doorsnede van een compacte deelverzameling en een gesloten deelverzameling van een topologische ruimte compact is.

2. Bewijs dat de doorsnede van willekeurig veel compacte verzamelingen van een Hausdorffruimte weer compact is. Toon aan dat deze uitspraak niet juist is in een willekeurige topologische ruimte X. (Stel $A = \{a_n \mid n=1,2,\ldots\}$ een aftelbare verzameling en p en q twee vaste punten $\notin A$. Kies de volgende topologie $\mathcal{T}$ op $X = A \cup \{p,q\}$: $\mathcal{T} = \{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{p\} \cup \{$bijna alle $a_n\}$, $\{q\} \cup \{$bijna alle $a_n\}$. $A \cup \{p\}$ en $A \cup \{q\}$ zijn twee compacte verzamelingen van $(X, \mathcal{T})$ en hun doorsnede is niet compact.)

Stelling 20. Zij f een continue afbeelding van de compacte ruimte X op de ruimte Y. Dan is Y compact.
Anders gezegd: compactheid is een continue invariant.

Bewijs. Kies een willekeurige open overdekking $\mathcal{U}$ van Y. Het stelsel $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ is een open overdekking van X en uit de compactheid van X volgt dat voor eindig veel $U_i \in \mathcal{U}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ reeds geldt $X = \bigcup\{f^{-1}(U_i) \mid i=1,\ldots,n\}$. $\{U_i \mid i=1,\ldots,n\}$ is nu de gevraagde eindige deeloverdekking van $\mathcal{U}$.

Toepassing van stelling 20. Er bestaat geen continue afbeelding van een segment $[a,b]$ op de reële rechte R (anders zou R als continu beeld van de compacte ruimte $[a,b]$ compact zijn en dat is niet waar).

Stelling 21. Een 1-1 continue afbeelding f van een compacte ruimte X op een Hausdorffruimte Y is een homeomorfisme.

Bewijs. We zullen aantonen dat f gesloten verzamelingen van X op gesloten verzamelingen van Y afbeeldt. Dan volgt dat f^{-1} continu is.
Stel A een gesloten verzameling van X. Dan is A compact volgens stelling 18. f(A) is compact volgens stelling 20 en gesloten in Y volgens stelling 19.

19. Compactheid in de Euclidische ruimte

Definitie. Een deelverzameling A van R^m heet begrensd wanneer er een positief getal M is met de eigenschap: $\rho(x,0)<M$ voor $\forall x \in A$.

Een punt $a \in R^m$ heet limiet van een rij punten $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ van R^m wanneer voor iedere omgeving U van a in R^m voor bijna alle indices n geldt $a_n \in U$ (of equivalent, wanneer voor iedere $\varepsilon > 0$ een index $n_0(\varepsilon)$ bestaat met $\rho(a, a_n) < \varepsilon$ voor $n > n_0(\varepsilon)$).
Een rij punten van R^m die een limiet ~~heeft, heet~~ convergent (de limiet is eenduidig bepaald).

Lemma. Iedere begrensde rij punten van R^m bezit een convergente deelrij.

Bewijs. Voor m = 1 is dit een bekende eigenschap van de reële getallen. Stel m > 1 en veronderstel de eigenschap al bewezen voor k < m. Stel $\{a^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ een begrensde rij in R^m: $a^{(n)} = (a_1^{(n)}, \dots, a_m^{(n)})$ voor n = 1,2,... . De rij $\{b^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \{(a_1^{(n)}, \dots, a_{m-1}^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ is een begrensde rij punten van R^{m-1} en bezit dus volgens de inductie-onderstelling een convergente deelrij $\{b^{(n_j)}\}_{j=1}^{\infty}$. Kies ook een convergente deelrij $\{a_m^{(k_j)}\}_{j=1}^{\infty}$ van $\{a_m^{(n_j)}\}_{j=1}^{\infty}$. Dan is $\{(a_1^{(k_j)}, \dots, a_m^{(k_j)})\}$ een convergente deelrij van $\{a^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$.

Stelling 22. (Heine-Borel). Voor een deelverzameling A van R^m geldt:
A is compact $\Longleftrightarrow$ A is begrensd en gesloten.

Bewijs. $\Longrightarrow$ Stel A een compacte deelverzameling van R^m. Uit stelling 19 volgt dat A gesloten is in R^m. A is ook begrensd want anders zou de overdekking van A bestaande uit alle open bollen van R^m met middelpunt 0 en straal n (n = 1,2,...) geen eindige deeloverdekking bezitten, wat in tegenspraak is met de compactheid van A.

<== Stel A een begrensde gesloten deelverzameling van R^m. Met betrekking tot de stelling van Lindelöf (stelling 4) is het voldoende te bewijzen dat iedere aftelbare open overdekking van A een eindige deeloverdekking bezit.

Zij $\{O_n \mid n = 1,2,...\}$ een aftelbare open overdekking van A (met open verzamelingen van R^m) en veronderstel dat hier geen eindig deelstelsel uit te selecteren is dat A overdekt. We mogen aannemen dat alle verzamelingen $O_n \cap A$ niet leeg zijn. Met volledige inductie naar n construeren we een rij punten $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uit A zó dat voor elke n=1,2,... geldt $a_n \notin O_k$ als $k < n$. a_1 kiezen we willekeurig uit $O_1 \cap A$. Stel a_k voor $k < n$ reeds gedefiniëerd. Volgens onderstelling is $\{O_k \mid k < n\}$ geen overdekking van A; dus er bestaat een zeker punt van A dat tot geen enkele O_k met $k < n$ behoort. Noem dit punt a_n. Volgens het vorige lemma bezit de rij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ een convergente deelrij $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ met limiet $a \in R^m$. Blijkbaar $a \in A$ want A is gesloten (gebruik stelling 10). Nu bestaat er een index s met $a \in O_s$. O_s is een omgeving van a, dus $a_{n_k} \in O_s$ voor $k > k_0$. I.h.b. is er nu een natuurlijk getal $l > s$ met $a_l \in O_s$ (kies b.v. $k_0 > s$ en neem $l = n_{k_0} + 1$). Dit is echter in tegenspraak met het feit dat $a_l \notin O_j$ voor alle $j < l$. Hiermee is de stelling bewezen.

<u>Opgave</u>. Bewijs dat de compacte samenhangende deelverzamelingen van R juist de gesloten intervallen $[a,b]$ zijn (al of niet ontaard).

Colloquium "Topologie" (1966-1967)

7 december 1966

Spreker: A.B. Paalman-de Miranda.

20. Compactheid in metrische ruimten

Stelling 1. Als M een metrische ruimte is en x een verdichtingspunt van een verzameling $A \subset M$, dan is er een rij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ te vinden met $x_n \in A$, $x_n \neq x$ terwijl $x_n \to x$.

Bewijs.

Kies voor iedere $\frac{1}{n}$ een punt $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$, $x_n \neq x$. Dan $x_n \to x$.

Stelling 2. In een compacte ruimte heeft iedere oneindige deelverzameling minstens één verdichtingspunt.

Bewijs.

Zij A een oneindige deelverzameling van X en stel dat A geen verdichtingspunt in X bezit. Dan is er bij iedere $x \in X$ een open omgeving $U(x)$ zó dat $U(x)$ met A hoogstens één punt gemeen heeft.

$\{U(x) \mid x \in X\}$ is een open overdekking van X welke een eindige deeloverdekking $\{U(x_i)\}_{i=1}^{n}$ bezit. A zou nu hoogstens n punten bevatten, hetgeen een tegenspraak oplevert.

Gevolg. In een compacte metrische ruimte heeft iedere rij een convergente deelrij.

Bewijs.

Als de rij $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ eindig veel verschillende elementen bevat, dan is er een deelrij $\{x_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ zo dat $x_{i_1} = x_{i_j}$ voor alle j.

Bevat $\{x_i\}$ oneindig veel verschillende elementen, dan is er een punt $x \in M$ zó dat x verdichtingspunt is van $\{x_i\}$ en volgens st. 1 is dat punt dan limietpunt van een deelrij van $\{x_i\}$.

Definitie 1. Een compacte metrische ruimte heet een compactum.

Definitie 2. Als $\varepsilon > 0$ en als $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ een eindige verzameling is van een metrische ruimte M met metriek ρ, met de eigenschap dat bij ieder punt

$p \in M$ een k te vinden is met $1 \leq k \leq n$ en $\rho(p,x_k) < \varepsilon$, dan heet $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ een ε-net van M.

M heet <u>totaal-begrensd</u> als M voor iedere $\varepsilon > 0$ een ε-net heeft.

<u>Opmerking</u>. Het is duidelijk dat iedere totaal-begrensde metrische ruimte M begrensd is (d.w.z. er bestaat een reëel getal $C > 0$ zo dat $\rho(x,y) < C$ voor alle $x,y \in M$).

<u>Stelling 3</u>. Iedere totaal begrensde metrische ruimte M voldoet aan het 2e aftelbaarheidsaxioma.

<u>Bewijs</u>.

Zij A_n een $\frac{1}{n}$-net. Dan ligt de aftelbare verzameling $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ overal dicht in M.

M is dus separabel en uit stelling 12 volgt dan dat M aan het 2e aftelbaarheidsaxioma voldoet.

<u>Lemma</u>. Als in een metrische ruimte M iedere rij een convergente deelrij bezit, dan is M totaal begrensd. (Ieder compactum is dus totaal begrensd).

<u>Bewijs</u>.

Stel voor zekere $\varepsilon > 0$ geen ε-net te vinden. Dan is er een rij van verschillende punten $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ van M met $\rho(x_i,x_j) \geq \varepsilon$, $i \neq j$. Deze rij kan echter geen convergente deelrij hebben, daar voor een convergente rij $\{x_{i_j}\}$ geldt $\lim_{j,k\to\infty} (x_{i_j},x_{i_k}) = 0$.

<u>Stelling 4</u>. In een metrische ruimte zijn equivalent

1) M is compact;
2) Iedere oneindige deelverzameling heeft een verdichtingspunt;
3) Iedere rij heeft een convergente deelrij.

<u>Bewijs</u>.

1) → 2). Zie stelling 2.

2) → 3). Zie bewijs gevolg stelling 2.

3) → 1). Uit het bovenstaande lemma volgt dat M totaal begrensd is en dus aan het 2e aftelbaarheidsaxioma voldoet. Uit de stelling van Lindelöf (stelling 4 van paragraaf 8) volgt dat het voldoende is te bewijzen dat iedere aftelbare open overdekking van M een eindige deeloverdekking bezit.

Zij $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$, O_i open, en stel dat er geen eindige deeloverdekking is, dan is voor iedere n, $\bigcup_{i=1}^{n} O_i \neq M$ en er is dus een punt $a_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} O_i$.
De zo gekozen rij $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ heeft een convergente deelrij $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$
$a_{n_k} \to a$.
Daar $a \in M$ is er een n^* zo dat $a \in O_{n^*}$. Verder is a limietpunt van de rij a_{n_k} en is er dus een l zó dat $a_{n_k} \in O_{n^*}$ als $k \geq l$. Kies nu k zo groot dat $n_k > n^*$. Dan $a_{n_k} \in O_{n^*}$, in tegenspraak met het feit dat $a_{n_k} \notin \bigcup_{i=1}^{n_k} O_i$.

Voorbeeld. Zij H de Hilbertruimte en F de deelruimte van H bestaande uit alle $x = (x_1, x_2, \ldots)$ waarvoor geldt $|x_n| \leq \frac{1}{n}$, $n = 1,2,\ldots$.
De ruimte F heet de fundamentaalbalk van Hilbert. F is een compactum, daar iedere rij uit F een convergente deelrij bezit (Ga na!).
H is niet compact, daar de rij $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ met $p_n = (0, 0, \ldots 0, \underset{n^{\text{de}}\text{ coördinaat}}{1}, 0, 0, \ldots)$ geen convergente deelrij bezit.

Opmerking.
Het begrip "compact" in de zin van "iedere oneindige deelverzameling heeft een verdichtingspunt" is in de literatuur eerder opgetreden dan het begrip "bicompact" (iedere open overdekking een eindige deeloverdekking). Dit laatste is vaak belangrijker gebleken dan het eerste begrip "compact". Vandaar dat vele schrijvers het eerst gedefiniëerde compactheidsbegrip niet meer invoeren en het woord "bicompact" door "compact" vervangen.
Een ruimte waarin iedere rij een convergente deelrij heeft wordt wel een "rij-compacte" ruimte genoemd.
Zoals uit stelling 4 blijkt vallen in metrische ruimten al deze compactheidsbegrippen samen.

Een andere karakterizering van de (bi)compactheid van een topologische ruimte wordt gegeven door:

Stelling 5. Een topologische ruimte X is (bi)compact als van ieder stelsel gesloten verzamelingen van X met lege doorsnede een eindig deelstelsel te vinden is waarvan de doorsnede ook reeds leeg is.

Bewijs.
Stel $\{F_\alpha\}_{\alpha\ A}$ een stelsel gesloten deelverzamelingen van X met $\bigcap\{F_\alpha \mid \alpha \in A\} = \emptyset$.
Zij nu $O_\alpha = X \setminus F_\alpha$, dan is O_α open voor iedere α, en het stelsel $\{O_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is een open overdekking van X welke dus een eindige deeloverdekking, $O_{\alpha_1}, \ldots, O_{\alpha_n}$ bezit.
Daar $\bigcup_{i=1}^{n} O_{\alpha_i} = X$ volgt $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset$.

21. Volledige metrische ruimten

Definitie 1. Een rij punten $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ van een metrische ruimte M met metriek ρ heet een fundamentaalrij als bij iedere $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal n te vinden is met de volgende eigenschap: als $i > n$ en $j > n$ dan $\rho(x_i, x_j) < \varepsilon$.

Opmerking. Het is duidelijk dat iedere convergente rij uit M een fundamentaalrij is. Tevens is iedere deelrij van een fundamentaalrij weer een fundamentaalrij.

Definitie 2. Een metrische ruimte M heet volledig als iedere fundamentaalrij uit M naar een punt van M convergeert. M.a.w.: Als $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ een fundamentaalrij is uit M, dan is er een punt $x \in M$ zó dat $x = \lim_{i\to\infty} x_i$.

Voorbeeld 1. De reële rechte R is volledig, zoals bekend uit de analyse.
2. De verzameling Q der rationale getallen met de gewone metriek is niet volledig.
3. R^n is volledig evenals de Hilbertruimte H.
4. Het interval (0,1) met de gewone metriek is niet volledig.

Opmerking. Zoals uit voorbeeld 1 en 4 blijkt is volledigheid een eigenschap van een metriek en geen topologisch begrip. De reële rechte R is topologisch equivalent met (0,1), terwijl R volledig is en (0,1) niet. Wij zullen een topologische ruimte T topologisch volledig noemen als T homeomorf is met een volledige metrische ruimte. Het interval (0,1) is dus topologisch volledig.

Stelling 1. Een compacte metrische ruimte M met metriek ρ is een volledige metrische ruimte.

Bewijs.
Zij $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ een fundamentaalrij uit M. Als de rij slechts eindig veel verschillende elementen bevat, dan is er een natuurlijk getal n te vinden met $x_i = x_n$ voor $i \geq n$.
$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ convergeert dus naar x_n.
Stel nu dat $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ oneindig veel verschillende elementen bevat. Dan heeft de rij een verdichtingspunt x en is er een deelrij $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ welke naar x convergeert. Stel nu $\varepsilon > 0$, dan is er een n zó dat $\rho(x_i, x_j) < \varepsilon/2$ als $i > n$, $j > n$ en $\rho(x, x_{i_k}) < \varepsilon/2$ als $i_k > n$.
Dan is $\rho(x, x_i) \leq \rho(x, x_{i_k}) + \rho(x_{i_k}, x_i) < \varepsilon$ voor $i > n$. $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ convergeert dus naar M.

Stelling 2. Een gesloten deelverzameling A van een volledige metrische ruimte M is als metrische deelruimte weer volledig.
Is omgekeerd A een volledige metrische deelruimte van een metrische ruimte M dan is A gesloten in M.

Bewijs.
1e) Zij $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ een fundamentaalrij uit A. Dan is $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ een fundamentaalrij uit M en convergeert dus naar $x \in M$.
Maar $x \in \overline{\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \Longrightarrow x \in \bar{A}$.
2e) Stel $x \in \bar{A}$, dan is er een rij $\{a_n\}$ in A zó dat $a_n \to x$. De rij $\{a_n\}$ is een fundamentaalrij in A en convergeert dus naar een punt $a_0 \in A \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x = a_0 \in A$. Dus A is gesloten.

Definitie 3. Een metrische ruimte M met metriek ρ heet isometrisch ingebed in een metrische ruimte M^* met metriek ρ^* als er een afbeelding ϕ is van M in M^* zó dat $\rho(x,y) = \rho^*(\phi(x), \phi(y))$ voor alle $x,y \in M$.

Opmerking. Uit de definitie volgt onmiddellijk, dat de afbeelding een topologische afbeelding is van M in M^*.

Stelling 3. Iedere metrische ruimte M met metriek ρ is isometrisch in te bedden in een volledige metrische ruimte $\tilde{M}$ en wel zó, dat $\overline{\phi(M)} = \tilde{M}$, als ϕ de inbeddingsafbeelding is.

Bewijs. (schets)

Twee fundamentaalrijen $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ zullen wij equivalent noemen, als $\lim\limits_{i\to\infty} \rho(x_i,y_i) = 0$.

Zij $\tilde{M}$ de verzameling der aldus verkregen equivalentie klassen. In $\tilde{M}$ voeren wij nu een metriek $\tilde{\rho}$ in als volgt: Als $\xi,\eta \in \tilde{M}$ en $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \xi$, $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in \eta$, dan is

$$\tilde{\rho}(\xi,\eta) = \lim_{i\to\infty} \rho(x_i,y_i).$$

Men kan dan bewijzen dat $(\tilde{M},\tilde{\rho})$ een volledige metrische ruimte is.

M kan nu isometrisch ingebed worden in $\tilde{M}$ door te definiëren $\phi(x) = \xi$, waarbij ξ de equivalentie klasse uit $\tilde{M}$ is waartoe $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ met $x_i = x$ behoort. Tenslotte ligt $\phi(M)$ dicht in $\tilde{M}$, daar als $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \xi \in \tilde{M}$, dan is de rij ξ_1, ξ_2, ... met $\xi_i = \phi(x_i)$ een rij uit $\phi(M)$ die naar ξ convergeert.

Opmerking.

Zij Q de ruimte van de rationale getallen met de gewone metriek. Zoals bekend kan men de reële getallen invoeren door middel van equivalentie klassen van fundamentaal rijen uit Q: $\tilde{Q} = R$.

De bovenstaande constructie van $\tilde{M}$ is een generalisatie van dit procédé.

Als M een volledige metrische ruimte is, dan is iedere fundamentaalrij convergent en dus equivalent met de rij $\{x, x, x, \ldots\}$, waarbij x de limiet is van de gegeven fundamentaalrij. Er volgt dan onmiddellijk dat in dit geval $\tilde{M}$ homeomorf is met M.

Stelling 4 (Stelling van Cantor). Zij M een volledige metrische ruimte en $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ een rij niet-lege gesloten verzamelingen van M met $F_{i+1} \subset F_i$, $(i = 1,2,\ldots)$, terwijl voor de diameters van F geldt $\delta(F_i) \to 0$ als $i \to \infty$.

Dan bestaat $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ uit één punt.

Bewijs.

Neem $x_i \in F_i$ $(i = 1,2,\ldots)$. Dan is $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ een fundamentaalrij welke dus convergeert naar een punt $x \in M$. Daar de F_i gesloten zijn en $x_n \in F_i$, $n \geq i$, moet $x \in F_i$ $(i = 1,2,\ldots)$.

Dus $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$. Daar $\delta(F_i) \to 0$ kan deze doorsnede niet meer dan één punt bevatten.

Opmerking. Een toepassing van deze stelling is de "Stelling van de intervalschakeling". Als een rij gesloten intervallen in R inkrimpt tot 0, dan hebben deze intervallen één en slechts één getal gemeenschappelijk.

Stelling 5. Een metrische ruimte M is dan en slechts dan compact als M totaal begrensd en volledig is.

Bewijs.
Als M compact is, dan is M totaal begrensd (lemma §20) en M is volledig (stelling 1).
Zij nu omgekeerd M totaal begrensd en volledig. Uit §20 stelling 4 en §21 definitie 2 volgt dat het voor de compactheid van M voldoende is te bewijzen dat iedere rij een fundamentaalrij tot deelrij heeft.
Zij $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ een rij uit M en A_n een $\frac{1}{n}$-net. Dan is er een $p_1 \in A_1$ te vinden zó dat $B_1(p_1)$ een deelrij $\{x_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ van $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ omvat. Er is dan een punt $p_2 \in A_2$ te vinden zó dat $B_2(p_2)$ een deelrij $\{x_i^2\}_{i=1}^{\infty}$ van $\{x_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ omvat. Met inductie kan men de rijen $\{x_i^n\}_{i=1}^{\infty}$ definiëren voor $n = 1,2,\ldots$. De rij $x_1^1, x_2^2, x_3^3, \ldots$ is dan een deelrij van $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ welke een fundamentaalrij is, immers voor $k,l \geq n$ geldt $x_k^k \in B_n(p_n)$ dus $\rho(x_k^k, x_l^l) \leq \frac{2}{n}$.

Gevolg. Een deelruimte A van een volledige metrische ruimte M is dan en alleen dan compact als A totaal begrensd en gesloten is.

22. Stelling van Baire voor volledig metrische ruimten

Definitie 1. Een deelverzameling A van een topologische ruimte X heet nergens dicht in X als het inwendige van de afsluiting $\overline{A}$ van A de lege verzameling is, dus als $\overline{A}^0 = \emptyset$.

Opmerking. Uit de definities van afsluiting en inwendige volgt onmiddellijk dat A nergens dicht is in X, als iedere niet-lege open verzameling $O \subset X$ een niet-lege open verzameling O' omvat met $O' \cap A = \emptyset$.

Definitie 2. X heet van de eerste categorie als er nergens dichte verzamelingen A_i $(i = 1,2,\ldots)$ van X bestaan met $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. X heet van de tweede categorie als X niet van de eerste categorie is.

Voorbeeld. De verzameling Q der rationale getallen met de gewone topologie is van de eerste categorie immers $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{r_i\}$, waarbij $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ een aftelling is van Q.
Ieder punt r_i is nergens dicht in Q.
Zoals uit de volgende stelling blijkt is R van de tweede categorie.

Stelling 1. (Stelling van Baire). Zij M een volledige niet-lege metrische ruimte en $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ een aftelbaar stelsel nergens dichte verzamelingen van M. Dan is $\overline{\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)} = M$ i.h.b. is $M \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Bewijs.
Zij O een willekeurige niet-lege open verzameling uit X. Daar A_1 nergens dicht is, is er een open verzameling O_1^* zo dat $O_1^* \subset O$, $O_1^* \cap A_1 = \emptyset$. Daar M metrisch is, kan men binnen O_1^* een open verzameling vinden zó dat $\overline{O_1} \subset O_1^*$ en diameter $O_1 = \delta(O_1) < 1$. $O_1^* \supset O_1 \neq \emptyset$.
Er geldt dus $\overline{O_1} \subset O$, $\overline{O_1} \cap A_1 = \emptyset$ en $\delta(O_1) < 1$.
Kies nu een niet-lege open verzameling O_2 zo dat $\overline{O_2} \subset O_1$, $\overline{O_2} \cap A_2 = \emptyset$ en $\delta(O_2) < \frac{1}{2}$.
Met inductie definiëren wij zo de rij $O_1, O_2, \ldots$, met de eigenschap

$$\overline{O_n} \subset O_{n-1}\ , \quad \overline{O_n} \cap A_n = \emptyset \quad \text{en} \quad \delta(O_n) < \frac{1}{n}.$$

Volgens de stelling van Cantor is er een punt $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{O_n} \implies x \in \overline{O_n}$ voor alle n $\implies x \notin A_n$ voor alle n $\implies x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies x \in M \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
Daar $x \in O$, heeft iedere niet ledige open verzameling dus een niet-lege doorsnede met $M \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \overline{\left(M \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = M$.

Opmerking. Deze stelling geldt niet alleen voor volledig metrische ruimten, maar zelfs voor iedere topologisch volledige ruimte.
Met behulp van deze stelling kan men b.v. bewijzen dat Q niet topologisch volledig is. Immers Q is van de eerste categorie en is dus de vereniging van aftelbaar vele nergens dichte verzamelingen.
De ruimte I van alle irrationale getallen is van de tweede categorie.
Dit volgt o.a. uit het feit dat de vereniging van twee ruimten van de 1e categorie weer van de eerste categorie is, en $R = I \cup Q$ is van de 2e categorie.

<u>Voorbeeld</u>. Zij D de verzameling van alle reële getallen van de vorm

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{3^k} \qquad (\delta_k = 0 \text{ of } 2).$$

D is dan de doorsnede van alle D_i $(i = 1,2,\ldots)$, waarbij $D_1 = [0,1]$ en D_{i+1} uit D_i verkregen wordt door weglating van de open intervallen $\left(\frac{3k-2}{3^i}, \frac{3k-1}{3^i}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, 3^{i-1})$.
De machtigheid van D is <u>c</u> (de machtigheid van het continuum): Iedere rij $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\delta_k = 0$ of 2 levert een element van D op, terwijl twee verschillende rijen, twee verschillende elementen geven.
D heet de <u>verzameling van Cantor</u>. D is een gesloten deelverzameling van $[0,1]$ en is dus compact. D is nergens dicht in $[0,1]$ daar iedere open interval ter lengte $\frac{1}{3^k}$ een open interval ter lengte $\frac{1}{3^{k+1}}$ bevat, dat niets met D gemeen heeft.
Uit de stelling van Baire volgt nu dat het <u>Cantordiscontinuum</u> D isometrisch ingebed kan worden in de ruimte van alle irrationale getallen.
Stel nl. voor ieder rationaal getal r, $D_r = \{x + r \mid x \in D\}$. Daar D nergens dicht is in R is ook D_r nergens dicht in R. R is volledig metrisch, dus $R \neq \bigcup_{r\in Q} D_r$. Daar $Q \subset \bigcup_{r\in Q} D_r$ is er dus een irrationaal getal α zó dat $\alpha \notin D_r$ voor alle $r \in Q$.
De verzameling $\alpha - D$ bevat dan geen enkel rationaal punt en de afbeelding $D \to \alpha - D$ gedefiniëerd door $d \to \alpha - d$ is dan een isometrische afbeelding van D in de ruimte van alle irrationale getallen.

<u>Definitie 3</u>. Een verzameling V van een topologische ruimte X heet een <u>G_δ-verzameling</u> van X, als V de doorsnede is van aftelbaar veel open verzamelingen.
V heet een <u>F_σ-verzameling</u> van X, als V de vereniging is van aftelbaar veel gesloten verzamelingen.

<u>Stelling 2</u>. In een metrische ruimte M is iedere gesloten verzameling F een G_δ-verzameling.

Bewijs.

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{p \in F} B_{1/n}(p) \}.$$

Voorbeeld.

Q is een F_σ in R, maar geen G_δ.

Q is een F_σ, daar $Q = \bigcup_{r \in Q} \{r\}$.

Stel Q een G_δ, dan was $Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} O_i$, O_i open in R.

Daar $\overline{Q} = R$ en $Q_i \subset O_i$ is ook O_i dicht in R ==> $(O_i)^c = R \setminus O_i$ nergens dicht in R.

Ook de verzameling $A_r = R \setminus \{r\}$ r rationaal is nergens dicht in R.

Er geldt nu $\emptyset = \bigcap_{i=1}^{\infty} O_i \cap \bigcap_{r \in Q} A_r$ ==>

$$R = \bigcup_{i=1}^{\infty} (O_i)^c \cup \bigcup_{r \in Q} \{r\}.$$

Dit is in tegenspraak met het feit dat R volledig metrisch is.

15 februari 1967.

Spreker: J. van de Lune.

21. Indien X een compacte ruimte is en de funktie $f : X \to \mathbb{R}$ is continu, dan is, zoals bekend, het beeld $f(X)$ ook compact; omdat in ons geval $f(X)$ een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is kunnen we zeggen dat $f(X)$ begrensd en gesloten is. Een direct gevolg hiervan is dat een reëelwaardige continue funktie f op een compacte ruimte X zowel zijn kleinste als zijn grootste waarde aanneemt.

Aangezien met f en g ook de funktie $|f-g|$, welke als volgt gedefinieerd wordt

$$|f-g|\ (x) = |f(x) - g(x)| \text{ voor alle } x \in X,$$

continu is, kunnen we definiëren

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|;$$

men gaat gemakkelijk na dat voor continue funkties f, g en h geldt

(i) $\rho(f, g) = 0 \iff f = g$ (d.w.z. $f(x) = g(x)$ voor alle $x \in X$)

(ii) $\rho(f, g) = \rho(g, f)$

(iii) $\rho(f, h) \leq \rho(f, g) + \rho(g, h)$.

Duiden we de verzameling van alle reëelwaardige continue funkties op een compacte ruimte X aan met $C(X)$ dan kunnen we dus zeggen dat $C(X)$ een metrische ruimte is, met als metriek

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

De door deze metriek voortgebrachte topologie heet "de topologie van de uniforme convergentie".

Stelling 1. Met bovengenoemde metriek is $C(X)$ een volledige metrische ruimte.

Bewijs: Zij $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ een Cauchy-rij (= fundamentaal-rij) in $C(X)$:

$$\rho(f_m, f_n) = \max_{x \in X} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ zodra } m, n > N(\varepsilon).$$

Voor elk vast punt $x \in X$ geldt

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \rho\ (f_m, f_n) < \varepsilon \text{ zodra } m, n > N(\varepsilon),$$

met als gevolg dat $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ een Cauchy-rij is in $\mathbb{R}$.
Aangezien $\mathbb{R}$ volledig is bestaat voor elke vaste $x \in X$ dus $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$; deze limiet duiden we aan met $f(x)$.
We tonen nog aan dat f continu is en dat $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$.
Voor elke $x \in X$ geldt

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \rho(f_m, f_n) < \varepsilon \text{ zodra } m, n > N(\varepsilon);$$

daar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ bestaat, volgt hieruit dat

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ voor alle } x \in X, \text{ als } m > N(\varepsilon).$$

Het is duidelijk dat voor elk natuurlijk getal n geldt

$$|f(x_0) - f(x)| \leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|;$$

geven we n de vaste waarde $N = N(\varepsilon) + 1$ dan is

$$|f(x) - f_N(x)| \leq \varepsilon \text{ voor alle } x \in X;$$

wegens de continuïteit van f_N is er bij elke $\varepsilon > 0$ een omgeving O_ε van x_0 te vinden zodanig dat

$$|f_N(x_0) - f_N(x)| < \varepsilon \text{ zodra } x \in O_\varepsilon.$$

Voor alle $x \in O_\varepsilon$ geldt dus $|f(x_0) - f(x)| < 3\varepsilon$, waaruit volgt dat f continu is in $x_0 \in X$. Daar x_0 een willekeurig punt van X is, is f continu op X.
Uit $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ voor alle $x \in X$, als $n > N(\varepsilon)$, volgt tenslotte dat $\rho(f_n, f) \leq \varepsilon$ zodra $n > N(\varepsilon)$, zodat $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$.

Opgave 1. Zij X een compacte topologische ruimte, (Y, ρ) een volledige metrische ruimte en $C(X, Y)$ de verzameling van alle continue afbeeldingen van X in Y.
Definiëren we voor $f, g \in C(X, Y)$

$$\sigma(f, g) = \max_{x \in X} \rho(f(x), g(x))$$

dan is σ een metriek op $C(X, Y)$, terwijl $C(X, Y)$ met deze metriek een volledige metrische ruimte is.

In de volgende stelling bespreken we een voor de toepassingen belangrijk aspect van volledige metrische ruimten.

Stelling 2. (S. BANACH). Indien (X, ρ) een volledige metrische ruimte is en ϕ is een afbeelding van X in zichzelf zodanig dat

$$\rho(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leq k.\ \rho(x_1, x_2) \text{ waarbij } 0 \leq k < 1$$

(ϕ heet dan een contraherende afbeelding of een contractie operator), dan bestaat er in X één en slechts één punt $\hat{x}$ met de eigenschap

$$\hat{x} = \phi(\hat{x})$$

(een punt met deze eigenschap heet een dekpunt van ϕ).

Bewijs: Zij x_0 een willekeurig doch vast punt van X; definiëer $x_1 = \phi(x_0)$, $x_2 = \phi(x_1)$, $x_3 = \phi(x_2)$, ...
Wegens

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(\phi(x_n), \phi(x_{n-1})) \leq$$

$$\leq k.\ \rho(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq k^n.\ \rho(x_1, x_0),$$

en
$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leq \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n),$$

geldt voor de rij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leq (k^{n+p-1} + \dots + k^n)\ .\ \rho(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k}\ .\ \rho(x_1, x_0)$$

met als gevolg dat $\rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$ als n maar voldoende groot gekozen wordt.
De rij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is dus een Cauchy-rij in X; daar X volledig is, is $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergent met als limiet $\hat{x} \in X$.
Voor elk natuurlijk getal n geldt

$$\rho(\hat{x}, \phi(\hat{x})) \leq \rho(\hat{x}, x_n) + \rho(x_n, \phi(\hat{x})) =$$

$$= \rho(\hat{x}, x_n) + \rho(\phi(x_{n-1}), \phi(\hat{x})) \leq$$

$$\leq \rho(\hat{x}, x_n) + k.\ \rho(x_{n-1}, \hat{x});$$

Wegens $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(\hat{x}, x_n) = 0$ kunnen we hieruit concluderen dat

$$\rho(\hat{x}, \phi(\hat{x})) = 0$$

$$\text{of} \quad \hat{x} = \phi(\hat{x}).$$

X bevat dus zeker één dekpunt van ϕ.

Veronderstel dat $\hat{x}_1$ en $\hat{x}_2$ dekpunten zijn van ϕ; dan geldt

$$\rho(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \rho(\phi(\hat{x}_1), \phi(\hat{x}_2)) \leq k.\ \rho(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$$

maar dit is alleen mogelijk als $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$.

Er is dus slechts één dekpunt.

<u>Opgave 2.</u> Is (X, ρ) een metrische ruimte en ϕ een afbeelding van X in zichzelf zodanig dat

(i) $\phi(X)$ pre-compact is (d.w.z. de afsluiting van $\phi(X)$ is compact)

(ii) $\rho(\phi(x_1), \phi(x_2)) < \rho(x_1, x_2)$ als $x_1 \neq x_2$

dan bevat X precies één punt $\hat{x}$ met de eigenschap

$$\hat{x} = \phi(\hat{x}).$$

Aanwijzing: Beschouw de funktie $\rho(x, \phi(x))$.

<u>Toepassing 1.</u> Is ϕ een differentieerbare afbeelding van het interval $[0, 1]$ in zichzelf, terwijl voor alle $x \in (0, 1)$ geldt

$$|\phi'(x)| \leq k < 1,$$

dan heeft de vergelijking $x = \phi(x)$ precies één oplossing op $[0, 1]$.

Bewijs: Het interval $[0, 1]$ is, met de gewone metriek, een volledige metrische ruimte. Met behulp van de eerste middelwaardestelling uit de differentiaal rekening vinden we

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| = |x_1 - x_2| \cdot |\phi'(\zeta)| \quad (x_1 < \zeta < x_2)$$

$$\leq k \cdot |x_1 - x_2|,$$

zodat ϕ een contractie operator is op $[0, 1]$.

Volgens stelling 2 heeft ϕ dus precies één dekpunt.

Opgave 3. Tracht de bewering in Toepassing 1 te verscherpen m.b.v. Opgave 2.

Toepassing 2. We beschouwen de gewone differentiaal vergelijking (d.v.)

$$y' = f(x, y)$$

waarbij gegeven is

(i) $f(x, y)$ is reëel en continu op de rechthoek

$$R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

(ii) $a . M \leq b$ waarbij $M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)|$

(iii) (Lipschitz voorwaarde) er bestaat een constante N zodanig dat $a . N < 1$ en

$|f(x, y_1)-f(x, y_2)| \leq N . |y_1-y_2|$ voor alle x met $|x-x_0| \leq a$.

We zullen aantonen dat er op het interval $|x-x_0| \leq a$ precies één funktie y bestaat die aan de d.v. voldoet en in x_0 de waarde y_0 aanneemt.
Het is gemakkelijk in te zien dat elke oplossing y van de d.v. met $y(x_0) = y_0$ ook voldoet aan de integraal vergelijking (i.v.) in y

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

terwijl elke (continue) oplossing van deze i.v. tevens oplossing is van de d.v. met $y(x_0) = y_0$.
De d.v. en de i.v. zijn dus aequivalent.
Zij Y de verzameling van alle reëelwaardige continue funkties y op $|x-x_0| \leq a$ met

$$y(x_0) = y_0 \text{ en } \max_{|x-x_0|\leq a} |y(x) - y_0| \leq b.$$

Deze verzameling Y voorzien we van de volgende metriek

$$\rho(y_1, y_2) = \max_{|x-x_0|\leq a} |y_1(x) - y_2(x)|;$$

men gaat gemakkelijk na dat Y met deze metriek een volledige metrische ruimte is (Y is een gesloten deelruimte van $C([x_0-a, x_0+a])$).
Op Y definiëren we de operator ϕ als volgt

$$\phi(y)\ (x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y(t))\ dt;$$

we gaan na of voor elke $y \in Y$ ook $\phi(y) \in Y$.
Uit de definitie van ϕ volgt direct dat

$$\phi(y)\ (x_0) = y_0, \text{ terwijl}$$

$$|\phi(y)\ (x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(t,\ y(t))\ dt| \leq$$

$$\leq |x-x_0| \cdot M \leq a \cdot M \leq b \text{ voor alle } x \text{ die voldoen aan } |x-x_0| \leq a$$

zodat inderdaad $\phi(y) \in Y$.
Vervolgens tonen we aan dat ϕ een contractie operator is:

$$\rho(\phi(y_1),\ \phi(y_2)) = \max_{|x-x_0|\leq a} |\phi(y_1)\ (x) - \phi(y_2)\ (x)| =$$

$$= \max_x |\{y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y_1(t))\ dt\} - \{y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y_2(t))\ dt\}| =$$

$$= \max_x |\int_{x_0}^{x} \{f(t,\ y_1(t)) - f(t,\ y_2(t))\} dt| \leq$$

$$\leq \max_x |\int_{x_0}^{x} |f(t,\ y_1(t)) - f(t,\ y_2(t))| dt|$$

$$\leq \max_x |\int_{x_0}^{x} N \cdot |y_1(t) - y_2(t)| dt| \leq$$

$$\leq a.\ N.\ \rho(y_1,\ y_2) = k.\ \rho(y_1,\ y_2) \text{ met } 0 \leq k = a\,N < 1.$$

Op de volledige metrische ruimte Y hebben we dus een contractie operator ϕ, met als gevolg dat er in Y precies één punt (= funktie) $\hat{y}$ bestaat met de eigenschap $\phi(y) = y$. Y bevat dus precies één punt $\hat{y}$ dat voldoet aan de betrekking

$$\hat{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ \hat{y}(t))\ dt.$$

Het een en ander betekent dat deze funktie $\hat{y}$ op $|x-x_0| \leq a$ de enige oplossing is van de d.v. $y' = f(x,\ y)$ met $y(x_0) = y_0$.

Opgave 4. Bewijs dat het volgende stelsel differentiaal vergelijkingen

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

precies één oplossing $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n)$ heeft met $\hat{y}_i(x_0) = \bar{y}_i$.
Hierbij mag worden aangenomen dat

(i) de funkties f_i reëelwaardig en continu zijn op het blok

$$B = \{(x, y_1, \ldots, y_n) \,\big|\, |x-x_0| \leq a, \ |y_i-\bar{y}_i| \leq b_i, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

(ii) er constanten N_i bestaan zodanig dat

$$|f_i(x, y_1,\ldots,y_n) - f_i(x, \bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_n)| \leq N_i(|y_1-\bar{y}_1|+\ldots+|y_n-\bar{y}_n|)$$

voor alle x met $|x-x_0| \leq a$, terwijl $a. \sum_{i=1}^{n} N_i < 1$

(iii) $a\, M_i \leq b_i$ voor $i = 1, 2, \ldots, n$,

waarbij $M_i = \max_B |f_i(x, y_1, \ldots, y_n)|$.

Opgave 5. Bewijs dat de volgende d.v.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

met als randvoorwaarden $y^{(r)}(x_0) = \bar{y}_r$ eenduidig oplosbaar is.
Gegeven is dat

(i) f reëelwaardig en continu is op het blok

$$B = \{(x, y_1, \ldots, y_{n-1}) \,\big|\, |x-x_0| \leq a, \ |y_i-\bar{y}_i| \leq b_i\}$$

(ii) er een constante N is zodanig dat

$$|f(x, y_1,\ldots,y_{n-1}) - f(x, \bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_{n-1})| \leq N. \sum_{i=1}^{n-1} |y_i-\bar{y}_i|$$

voor alle x met $|x-x_0| \leq a$, terwijl $a\, N < 1$

(iii) $a\, M \leq b_i$ waarbij $M = \max_B |f(x, y_1, \ldots, y_{n-1})|$.

Een gevolg hiervan is dat de lineaire d.v.

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = q(x)$$

waarbij de reële funkties p_i en q continu zijn op een gesloten interval I, precies één oplossing $\hat{y}$ heeft die voldoet aan

$$\hat{y}(x_0) = \bar{y}_0,\ \hat{y}'(x_0) = \bar{y}_1,\ \ldots,\ \hat{y}^{(n-1)}(x_0) = \bar{y}_{n-1}.$$

Toepassing 3. Gevraagd wordt aan te tonen dat de lineaire integraal vergelijking in h

$$h(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, h(t)\, dt$$

voor voldoend kleine waarden van $|\lambda|$ eenduidig oplosbaar is.
Aangenomen mag worden dat h en g continu zijn op $[a, b]$ en dat de kern K continu is op het vierkant $a \leq x, t \leq b$.

Oplossing. Zij X de verzameling van alle reële continue funkties f op het interval $[a, b]$; nemen we

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

als metriek op X, dan is X volledig volgens stelling 1.
Definiëer $\phi : X \to X$ volgens

$$\phi(f)\,(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, f(t)\, dt.$$

We gaan na of er waarden van λ zijn waarvoor ϕ een contractie operator is op X.
Uit

$$\rho(\phi(f_1), \phi(f_2)) = \max_x |\phi(f_1)\,(x) - \phi(f_2)\,(x)| =$$

$$= \max_x \left|\lambda \int_a^b K(x, t)(f_1(t) - f_2(t))\, dt\right| \leq$$

$$\leq |\lambda| \cdot \max_x \int_a^b |K(x, t)|\, dt \cdot \rho(f_1, f_2)$$

volgt dat ϕ contraherend is voor $|\lambda| \cdot \max_x \int_a^b |K(x, t)|\, dt < 1.$
Volgens stelling 2 is de integraal vergelijking voor deze waarden van λ dus eenduidig oplosbaar.

Opgave 6. Laat zien dat de niet lineaire integraal vergelijking in h

$$h(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, h(t))\, dt$$

voor voldoend kleine waarden van $|\lambda|$ eenduidig oplosbaar is.
Hierbij mag verondersteld worden dat

(i) h en g continu zijn op $a \leq x \leq b$

(ii) de kern $K(x, t, h)$ continu is op $a \leq x, t \leq b$.

(iii) er een constante N bestaat zodanig dat

$$|K(x, t, h_1) - K(x, t, h_2)| \leq N.|h_1 - h_2|$$

voor alle x, t met $a \leq x, t \leq b$.

22. In paragraaf 21 hebben we gezien dat, indien X een compacte ruimte is, de verzameling C(X) van alle reëelwaardige continue funkties op X van een metriek ρ kan worden voorzien zodanig dat C(X) een volledige metrische ruimte wordt.

In deze paragraaf zullen we, met het oog op de toepassingen in de approximatie theorie, de overal dichte deelverzamelingen van C(X) wat nader bekijken.

Uit de analyse is bekend dat elke reële continue funktie op een gesloten interval $[a, b]$ uniform willekeurig dicht benaderd kan worden door polynomen; duiden we de verzameling van alle reële continue funkties op $[a, b]$ aan met $C[a, b]$ en voorzien we deze funktie klasse van de topologie der uniforme convergentie, dan kunnen we de zojuist genoemde approximatiestelling ook als volgt formuleren:

in de metrische ruimte $C[a, b]$ ligt de klasse van alle polynomen (met $[a, b]$ als definitie gebied) overal dicht.

Het doel van deze paragraaf is een generalisatie te geven van bovenstaande stelling van WEIERSTRASS. We beginnen met een aantal hulpbegrippen en lemma's te behandelen.

Definitie. Indien f en g reëelwaardige funkties zijn op zekere verzameling X dan definiëren we de funkties $f \vee g$ en $f \wedge g$ door

$$(f \vee g)(x) = \max \{f(x), g(x)\}$$

$$(f \wedge g)(x) = \min \{f(x), g(x)\}.$$

Men gaat gemakkelijk na dat deze definitie aequivalent is met de volgende

$$(f \vee g)(x) = \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

$$(f \wedge g)(x) = \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

Definitie. Zij X een verzameling en B een stelsel reëelwaardige funkties op X; dan heet B een gaas (een tralie) indien

$$f, g \in B \Rightarrow f \vee g \in B \text{ èn } f \wedge g \in B.$$

Lemma 1. Voor het geval dat X compact is en het gaas $B \subset C(X)$ is kunnen we de afsluiting $\bar{\bar{B}}$ van B (in de topologie van de uniforme convergentie) als volgt karakteriseren.

$$\bar{\bar{B}} = B^* \overset{\text{def}}{=} \left\{ f \in C(X) \,\middle|\, \forall p, q \in X \text{ en } \forall \varepsilon > 0 \; \exists g \in B : \begin{array}{l} |f(p) - g(p)| < \varepsilon \text{ en} \\ |f(q) - g(q)| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

Bewijs: Aangezien het zonder meer duidelijk is dat $\bar{\bar{B}} \subset B^*$ behoeven we slechts aan te tonen dat $B^* \subset \bar{\bar{B}}$.

Zij $f \in B^*$; we zullen aantonen dat voor elke $\varepsilon > 0$ er in B een funktie h bestaat zodanig dat $\rho(h, f) < \varepsilon$, zodat we kunnen zeggen dat f tot $\bar{\bar{B}}$ behoort.

Omdat $f \in B^*$ is er bij elk paar $p, q \in X$ een continue funktie $h_{p,q} \in B$ te vinden zodanig dat

$$|h_{p,q}(p) - f(p)| < \varepsilon$$

$$\text{en } |h_{p,q}(q) - f(q)| < \varepsilon.$$

Definiëren we $U_{p,q} = \{x \in X \mid h_{p,q}(x) < f(x) + \varepsilon\}$

dan is $U_{p,q}$ een open verzameling in X, die p (en q) als punt bevat.

Fixeren we q en laten we p geheel X doorlopen dan krijgen we een stelsel open verzamelingen in X dat X overdekt

$$X = \bigcup_{p \in X} U_{p,q}.$$

Wegens de compactheid van X kan deze overdekking worden gereduceerd tot een eindige deeloverdekking.

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{p_i,q}.$$

Definiëer $h_q = h_{p_1,q} \wedge h_{p_2,q} \wedge \ldots \wedge h_{p_k,q}$ $(\in B)$,

zodat $\quad h_q(x) \leqq h_{p_i,q}(x)$ voor alle $x \in X$.

Elke $x \in X$ ligt in zekere $U_{p_i,q}$, zodat volgens de definities van h_q en $U_{p_i,q}$

$$h_q(x) \leqq h_{p_i,q}(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Conclusie: $h_q(x) < f(x) + \varepsilon$ voor alle $x \in X$.

Voor elke p_i geldt: $h_{p_i,q}(q) > f(q) - \varepsilon$ zodat

$$h_q(q) = \min_i \{h_{p_i,q}(q)\} > f(q) - \varepsilon.$$

We hebben nu dus aangetoond dat er bij elke $q \in X$ een funktie $h_q \in B$ te vinden is zodanig dat

(i) $\quad h_q(x) < f(x) + \varepsilon$ voor alle $x \in X$

(ii) $\quad h_q(q) > f(q) - \varepsilon$

Definiëren we nu

$$V_q = \{x \in X \mid h_q(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

dan is V_q een open verzameling die q als punt bevat.
Bijgevolg is het stelsel $\{V_q\}_{q \in X}$ een open overdekking van X; wegens de compactheid van X kunnen we weer met een eindige deeloverdekking volstaan

$$X = \bigcup_{j=1}^{l} V_{q_j}.$$

Definiëer, $h = h_{q_1} \vee h_{q_2} \vee \ldots \vee h_{q_l}$ $\quad (\in B)$

dan geldt $h(x) < f(x) + \varepsilon$ voor alle $x \in X$ want volgens het bovenstaande is $h_{q_j}(x) < f(x) + \varepsilon$ voor alle $x \in X$ zodat

$$h(x) = \max_j \{h_{q_j}(x)\} < f(x) + \varepsilon.$$

Elke $x \in X$ ligt in zekere V_{q_j} zodat $h_{q_j}(x) > f(x) - \varepsilon$;
daar $h(x) = \max_j \{h_{q_j}(x)\}$ moet ook gelden

$$h(x) > f(x) - \varepsilon \text{ voor alle } x \in X.$$

Samenvattend kunnen we nu schrijven

$$f(x) - \varepsilon < h(x) < f(x) + \varepsilon \text{ voor alle } x \in X, \text{ met als gevolg}$$

$$\rho(f, h) = \max_{x \in X} |f(x) - h(x)| < \varepsilon.$$

<u>Definitie</u>. Zij X een topologische ruimte en B een stelsel reëelwaardige continue funkties op X; we zeggen dat B <u>de punten van X scheidt</u> indien bij elk paar verschillende punten $p, q \in X$ er in B een funktie f bestaat zodanig dat $f(p) \neq f(q)$.

<u>Lemma 2</u>. Is X een compacte Hausdorffruimte en $B \subset C(X)$ zodanig dat

(i) B is een gaas: $f, g \in B \Rightarrow f \vee g \in B$ èn $f \wedge g \in B$

(ii) B is een vectorruimte over $\mathbb{R}$: $f, g \in B \Rightarrow \alpha . f + \beta . g \in B$ voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(iii) $1 \in B$,

dan geldt: $\bar{\bar{B}} = C(X) \Leftrightarrow B$ scheidt de punten van X.

Bewijs: "$\Rightarrow$". Op iedere compacte Hausdorff ruimte kan men bij twee verschillende punten $p, q \in X$ altijd een reëelwaardige continue funktie f construeren die de punten p en q scheidt, d.w.z. waarvoor $f(p) \neq f(q)$. Van deze bewering zullen wij hier geen bewijs geven; wij volstaan met een verwijzing naar de literatuur: W.J. Pervin, Foundations of general topology.
Voor metrische ruimten (niet noodzakelijk compact) is bovenstaande bewering kennelijk juist; men neme f zodanig dat $f(x) = \rho(x, q)$ voor alle $x \in X$. Wegens $\bar{\bar{B}} = C(X)$ weten we nu dus dat $\bar{\bar{B}}$ een f bevat zodanig dat $f(p) \neq f(q)$. Daar $\bar{\bar{B}}$ de afsluiting is van B, bevat B dan ook wel een funktie die p en q scheidt.

"$\Longrightarrow$" Het is zonder meer duidelijk dat $\bar{\bar{B}}\subset C(X)$, zodat alleen nog aangetoond moet worden dat $C(X)\subset\bar{\bar{B}}$.

Zij $f\in C(X)$; we zullen aantonen dat dan ook $f\in\bar{\bar{B}}$.

Volgens lemma 1 is het voldoende aan te tonen dat er voor elke $\varepsilon > 0$ bij elk paar punten $p, q\in X$ een funktie $f_{p,q}\in B$ te vinden is zodanig dat

$$|f_{p,q}(p) - f(p)| < \varepsilon$$

$$\text{en } |f_{p,q}(q) - f(q)| < \varepsilon.$$

Is $p = q$ dan nemen we f zodanig dat $f_{p,q}(x) = f(p) = f(q)$ voor alle $x\in X$. Omdat B de 1 bevat en bovendien een lineaire ruimte is, kunnen we zeggen dat deze $f_{p,q}$ tot B behoort.

Is $p \neq q$, dan bevat B een funktie g zodanig dat $g(p) \neq g(q)$.

We lossen α en β op uit

$$\begin{cases} \alpha\, g(p) + \beta = f(p) \\ \alpha\, g(q) + \beta = f(q) \end{cases}$$

en nemen voor $f_{p,q}$ de funktie $\alpha . g + \beta \in B$. Deze funktie voldoet ten duidelijkste aan de gestelde eisen.

Lemma 3. Is X een compacte ruimte en B een deelverzameling van C(X) zodanig dat

(i) B is gesloten

(ii) B is een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$: $f, g\in B \Longrightarrow \alpha f + \beta g\in B$

(iii) met f en g behoort ook de funktie $f.g$ met $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ tot B

dan is B een gaas.

Bewijs: Wegens $f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$

$$\text{en } f \wedge g = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

en het gegeven dat B een lineaire ruimte is behoeven we slechts aan te tonen dat met f ook $|f|$ tot B behoort.

Uit de klassieke analyse is bekend dat

$$|t| = (t^2)^{\frac{1}{2}} = \{1 - (1-t^2)\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 - \binom{\frac{1}{2}}{1}(1-t^2) + \binom{\frac{1}{2}}{2}(1-t^2)^2 - + \ldots \text{ voor } |1-t^2| \leq 1$$

terwijl deze reeks op $|t| \leq 1$ uniform convergent is.
Kies $\varepsilon > 0$ en kies daarbij N zo groot dat

$$\Big| |t| - S_N(t) \Big| < \varepsilon \text{ voor alle } |t| \leq 1$$

waarbij

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n}(1-t^2)^n.$$

Zij nu $P_N(t) = S_N(t) - S_N(0)$; is $f \in B$ nu zodanig dat $|f(x)| \leq 1$ voor alle $x \in X$ dan geldt

$$\Big| |f(x)| - P_N(f(x)) \Big| \leq \Big| |f(x)| - S_N(f(x)) \Big| + \Big| S_N(0) \Big| <$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \text{voor alle } x \in X,$$

terwijl P_N in de volgende vorm geschreven kan worden

$$P_N(f(x)) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \ldots + \lambda_{2N} f^{2N}(x).$$

Uit deze gedaante van $P_N(f(x))$ blijkt dat $P_N(f(x))$ tot B behoort.
Conclusie $|f| \in B (= \bar{B})$.

Stelling. (STONE-WEIERSTRASS).
Is X een compacte Hausdorff ruimte en $B \subset C(X)$ zodanig dat

(i) B is een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$

(ii) $f, g \in B \Rightarrow f \cdot g \in B$

(iii) $1 \in B$

(iv) B is gesloten

dan geldt:

$$B = C(X) \Longleftrightarrow B \text{ scheidt de punten van } X.$$

Bewijs: Volgens lemma 3 is B een gaas, zodat volgens lemma 2 geldt

$$(B =)\bar{B} = C(X) \Longleftrightarrow B \text{ scheidt de punten van } X.$$

Als toepassing van deze stelling bewijzen we de bekende approximatiestelling van WEIERSTRASS.

Neem voor X het interval $[a, b]$ met de gewone topologie.
B_0 zij de verzameling van alle polynomen op $[a, b]$ met reële coëfficiënten en zij $B = \bar{\bar{B}}_0$. B is dus de verzameling van alle continue funkties die uniform willekeurig dicht benaderd kunnen worden door funkties uit B_0. We tonen aan dat $B = C(X)$, d.w.z. elke continue funktie op $[a, b]$ kan uniform willekeurig dicht benaderd worden met polynomen.
Men gaat gemakkelijk na dat (i) met B_0 ook B een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ is terwijl met f en g ook $f \circ g$ tot B behoort, (ii) $1 \in B$, (iii) $B = \bar{\bar{B}}_0$ gesloten is.
Omdat B de funktie f met $f(x) = x$ bevat, en dus de punten van X scheidt, mogen we concluderen: $B = C(X)$.

Opgave 1. Toon aan dat elke reële continue funktie op $[0, 1]$ uniform willekeurig dicht benaderd kan worden door polynomen waarin alle voorkomende exponenten van x deelbaar zijn door n; hierbij is n een vast natuurlijk getal.

Opgave 2. Is f een reële continue funktie op de rechthoek $[a, b] \times [c, d]$ in het platte vlak, dan geldt

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx.$$

Bewijs dit met behulp van de stelling van STONE-WEIERSTRASS.

<u>Colloquium "Topologie"</u> (1966-1967)

Spreker: P. van Emde Boas

§23. <u>Topologische producten</u>

In de inleiding is gedefiniëerd het begrip product van twee verzamelingen X en Y. De daar gegeven definitie laat zich zonder enige moeite generaliseren voor ieder eindig stelsel verzamelingen $X_1, \ldots, X_n$.

<u>Definitie</u>: Onder het (Cartesisch) product van de verzamelingen $X_1, \ldots, X_n$ (notatie $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ of ook wel $\prod_{i=1}^{n} X_n$) wordt verstaan de verzameling van alle geordende n-tupels $(x_1, \ldots, x_n)$ waarbij voor iedere i geldt $x_i \in X_i$, in formule uitgedrukt

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\}.$$

Bedenk hierbij dat twee n-tupels $(x_1, \ldots, x_n)$ en $(y_1, \ldots, y_n)$ dan en slechts dan gelijk zijn als voor iedere i $x_i = y_i$.

Het zal vaak nodig blijken ook producten van een stelsel van oneindig vele verzamelingen te beschouwen. Dergelijke stelsels zullen wij vaak aangeven met de notatie $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ waarbij I een verzameling is die de naam indexverzameling draagt. Bij iedere index $\alpha \in I$ is er een verzameling X_α gegeven.

Als I aftelbaar oneindig is mogen we voor I de natuurlijke getallen nemen. In dit geval kunnen we de boven gegeven definitie generaliseren door in plaats van n-tupels te bekijken rijtjes $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ waarbij $x_k \in X_k$ voor iedere k.

Deze oplossing is niet meer mogelijk als I overaftelbaar wordt. Wij zullen dan ook voor het product van het stelsel $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ een algemene definitie opstellen waarvan de boven gegeven definities speciale interpretaties zijn.

<u>Definitie</u>: Onder het <u>(Cartesisch) product van het stelsel verzamelingen</u> $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ verstaan we de collectie van afbeeldingen ϕ van I in de vereniging $\bigcup\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ die voldoen aan de voorwaarde: voor iedere $\alpha \in I$ is $\phi(\alpha)$ een element van X_α.

In formule:

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{\phi \mid \phi : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha) \text{ en } \forall_{\alpha \in I} \ (\phi(\alpha) \in X_\alpha)\}.$$

Het verband met de eerder gegeven definities wordt gelegd door de functie ϕ te noteren als $(\phi_\alpha)_{\alpha \in I}$.

<u>Definitie</u>: X_α heet de <u>α^e-coördinaat ruimte</u> van $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$.

Onder de projectie π_β van het product op de β^e-coördinaat ruimte verstaan we de afbeelding $\pi_\beta : \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\beta$ gedefiniëerd door

$$\pi_\beta(\phi) = \phi(\beta).$$

Indien de verzamelingen X_α allen gelijk zijn aan een vaste verzameling X dan noteren we het product ook wel als: $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha = X^I$.
X^I bestaat uit alle afbeeldingen van I in X.

Beschouw thans het voorbeeld van het Euclidische vlak E^2
$E^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ en } y \in \mathbb{R}\}$ met de gebruikelijke metrische topologie.
Als verzameling is E^2 het product van de reële rechte met zichzelve.
$E^2 = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$. $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_2 = \mathbb{R}$.
De reële rechte heeft een topologische structuur.

We willen nu op een of andere manier met behulp van de topologische structuur van $\mathbb{R}$ een topologische structuur op $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$ definiëren. Liefst zouden we natuurlijk ook nog willen zien dat de aldus gedefiniëerde topologische structuur samenvalt met de "natuurlijke" Euclidische structuur van E^2 zoals we die van ouds kennen.

Aan het voorbeeld van het Euclidische vlak kunnen we het volgende opmerken.

1e) De verzamelingen van de vorm $O_1 \times O_2$ waarbij O_1 open is in $\mathbb{R}_1$ en O_2 open in $\mathbb{R}_2$ zijn open in E^2. Deze familie vormt een basis voor de Euclidische topologie want de open rechthoeken $\{(x_1,x_2) \mid a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2\}$ zijn in de familie opgenomen.

2e) De verzamelingen van de vorm $\pi_1^{-1}(O_1)$ of $\pi_2^{-1}(O_2)$, O_1 open in $\mathbb{R}_1$ en O_2 open in $\mathbb{R}_2$ zijn open in E^2. Dit stelsel vormt een subbasis voor de Euclidische topologie want de stroken $\{(x_1,x_2) \mid a_1 < x_1 < b_1\}$ en $\{(x_1,x_2) \mid a_2 < x_2 < b_2\}$ zijn in het stelsel opgenomen.

Deze bevindingen laten zich rechtstreeks generaliseren voor <u>eindige</u> producten.

Zij $\{X_1,\mathcal{O}_1\}, \ldots, \{X_n,\mathcal{O}_n\}$ een eindig stel topologische ruimten. We kunnen een product-topologie op de verzameling $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ definiëren op twee manieren die voor dit eindige geval gelijkwaardig zijn:

1e) De producttopologie $\mathcal{O}$ is de topologie die gegenereerd wordt door de basis $\mathcal{B}$ die als volgt is gedefiniëerd:

$$\mathcal{B} = \{B \mid B = O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_n,\ O_i \in \mathcal{O}_i \text{ voor iedere } i = 1, \ldots, n\}.$$

Aangezien in het algemeen geldt voor productverzamelingen:

$$\prod_{\alpha\in I} A_\alpha \cap \prod_{\alpha\in I} B_\alpha = \prod_{\alpha\in I} A_\alpha \cap B_\alpha$$

kan men uit de definitie van $\mathcal{B}$ direct afleiden dat de doorsnede van twee elementen uit $\mathcal{B}$ weer in $\mathcal{B}$ is bevat. $\mathcal{B}$ is dus inderdaad een basis.

2e) De producttopologie $\mathcal{O}$ is de topologie die gegenereerd wordt door de subbasis $\mathcal{S}$ die als volgt is gedefiniëerd:

$$\mathcal{S} = \{S \mid \exists_\nu \quad S = \pi_\nu^{-1}(O_\nu),\ O_\nu \in \mathcal{O}_\nu,\ \nu = 1, \ldots, n\}.$$

We merken op dat de definities gelijkwaardig zijn aangezien het stelsel eindige doorsneden van verzamelingen uit $\mathcal{S}$ precies gelijk is aan de basis $\mathcal{B}$.

Beide definities laten zich zonder meer generaliseren voor oneindige producten maar houden dan op equivalent te zijn.
Als definitie van de producttopologie is de 2e definitie gekozen waarbij de topologie gedefiniëerd wordt door middel van de subbasis $\mathcal{S}$.

Definitie Topologisch product:

Zij voor iedere $\alpha \in I$ X_α een topologische ruimte met topologie $\mathcal{O}_\alpha$.
Het topologisch product van het stelsel $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bestaat dan uit de verzameling:

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

met daarop de topologie $\mathcal{O}$ die gegenereerd wordt door de volgende subbasis $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{S} = \{S \mid \exists_{\alpha \in I} : S = \pi^{-1}(O_\alpha) \text{ en } O_\alpha \in \mathcal{O}_\alpha\}.$$

Allereerst kunnen we bekijken welke basis door $\mathcal{S}$ wordt gegenereerd.
Dit is juist de familie van alle verzamelingen van de vorm:

$O = \prod_{\alpha \in I} O_\alpha$, $O_\alpha = X_\alpha$ voor alle $\alpha \in I$ op eindig vele uitzonderingen na waarvoor $O_\alpha \in \mathcal{O}_\alpha$.

De verzamelingen van de vorm $\prod_{\alpha \in I} O_\alpha$ waarbij de O_α voor oneindig vele α echte open deelverzamelingen zijn van X_α zijn dus niet open in de producttopologie; zij hebben zelfs een leeg inwendige.
Het is zeer goed denkbaar om het stelsel verzamelingen $\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha \in I} O_\alpha \mid O_\alpha \in \mathcal{O}_\alpha \text{ voor iedere } \alpha \in I\}$ op te vatten als basis voor een topologie (zoals we dit ook gedaan hebben voor eindige producten).

De topologie die we dan krijgen is bekend als de <u>doosproduct-topologie</u> en is sterker dan de boven ingevoerde producttopologie. Zij bezit enkele onaangename eigenschappen. Zo is het doosproduct van compacte (resp. samenhangende) verzamelingen niet noodzakelijk weer compact (resp. samenhangend). Wij zullen ons niet met deze topologie bezighouden.

Een eenvoudige eigenschap van het topologisch product is de volgende:

<u>Prop.</u>: De afbeeldingen $\pi_\beta: \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to X_\beta$ zijn continu en het beeld van een open verzameling is weer open.

<u>Bewijs</u>: Zij O_β open in X_β dan is $\pi_\beta^{-1}(O_\beta)$ per definitie open in het product.

Zij $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ bevat in O, O open in het product, dan is $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ bevat in een open basisverzameling van de vorm: $B = \prod_{\alpha\in I} O_\alpha$.

Dus $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} O_\alpha \subset O$

dus $\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in I}) = x_\beta \in O_\beta \subset \pi_\beta(O)$.

$\pi_\beta(O)$ is dus omgeving van ieder van zijn punten, dus open.

<u>Opm.</u>: Een afbeelding die iedere open verzameling overvoert in een open verzameling heet een <u>open afbeelding</u>.

<u>Opm.</u>: Het is mogelijk de producttopologie te karakteriseren als volgt: De producttopologie is de zwakste topologie op $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ waarvoor alle projecties π_β continu zijn.

Een belangrijke eigenschap is de volgende:

<u>Stelling 1</u>: Zij f een afbeelding van een topologische ruimte Y in het topologisch product $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Dan is f continu dan en slechts dan als voor iedere $\alpha \in I$ de samenstelling $\pi_\alpha \circ f: Y \to X_\alpha$ continu is.

Bewijs: $\Longrightarrow$ Zij f continu. Voor iedere $\alpha \in I$ is π_α continu dus $\pi_\alpha \circ f$ is als samenstelling van continue afbeeldingen weer continu.

$\Longleftarrow$ Zij O open in $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$.

$p \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ en $p \in O$. Dan is er een basisverzameling $B = \prod_{\alpha \in I} O_\alpha$ met $O_\alpha = X_\alpha$ voor alle $\alpha \in I$ op eindig veel na en $O_\alpha \in \mathcal{O}_\alpha$ voor iedere α zodanig dat $p \in B \subset O$.

Noem de α waarvoor $O_\alpha \neq X_\alpha$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Dan volgt $B = \pi^{-1}_{\alpha_1}(O_{\alpha_1}) \cap \pi^{-1}_{\alpha_2}(O_{\alpha_2}) \cap \ldots \cap \pi^{-1}_{\alpha_k}(O_{\alpha_k})$.

Nu is $f^{-1}(B) = f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{k} \pi^{-1}_{\alpha_i}(O_{\alpha_i}))$.

Men kan gemakkelijk nagaan dat het totaal origineel van de doorsnede van een stelsel verzamelingen gelijk is aan de doorsnede van de totale originelen van dit stelsel verzamelingen.

Dus $f^{-1}(B) = f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{k} \pi^{-1}_{\alpha_i}(O_{\alpha_i})) = \bigcap_{i=1}^{k} f^{-1}(\pi^{-1}_{\alpha_i}(O_{\alpha_i})) =$

$$= \bigcap_{i=1}^{k} (\pi_{\alpha_i} \circ f)^{-1}(O_{\alpha_i}).$$

Maar voor iedere α_i is $(\pi_{\alpha_i} \circ f)$ continu dus $(\pi_{\alpha_i} \circ f)^{-1}(O_{\alpha_i})$ is open in Y. Hieruit volgt dat $f^{-1}(B)$ de doorsnede is van eindig veel open verzamelingen dus open.

Hieruit volgt dat $f^{-1}(O)$ omgeving is van ieder van zijn punten dus $f^{-1}(O)$ is open.

Aangezien O willekeurig was gekozen is f continu.

24. Voorbeelden van topologische producten

I. De n-dimensionale Euclidische ruimte E^n is homeomorf met het topologisch product van n copieën van de reële rechte.

Dit is een generalisatie van het voorbeeld van het platte vlak behandeld in de vorige paragraaf. Ga na dat de n-dimensionale blokken van de vorm $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_i < x_i < b_i, i = 1, \ldots, n\}$ een basis voor E^n vormen.

II. Het eindige topologische product van discrete ruimten is weer discreet.

(Iedere verzameling bestaande uit één punt is als product van open éénpuntsverzamelingen uit de coördinaatruimten weer open.)

III. De torus is homeomorf met het topologisch product van twee cirkels.

We kunnen dit het eenvoudigste inzien door het product van twee cirkels te schrijven als:

$\{(\phi, \eta) \mid 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \eta < 2\pi\}$

en de torus voor te stellen door de volgende parameter voorstelling.

$T_2 = \{(x,y,z) \in E^3 \mid x = \cos\phi(1 + \frac{1}{3}\cos\eta), y = \sin\phi(1 + \frac{1}{3}\cos\eta), z = \frac{1}{3}\sin\eta\}$.

Men gaat nu gemakkelijk na dat de afbeelding

$(\phi,\eta) \to (x(\phi,\eta), y(\phi,\eta), z(\phi,\eta))$ een homeomorfie is.

We kunnen nu het begrip torus generaliseren voor hogere dimensies.

Definitie: De n-dimensionale torus T_n is het topologisch product van n cirkels.

Noemen we de discrete ruimte bestaande uit twee punten: $\{0,2\}$ een doublet dan kunnen we bewijzen.

Stelling 2: Het Cantordiscontinuum D (zie voor de definitie blz. 43) is homeomorf met het topologisch product van aftelbaar oneindig veel doubletten.

<u>Bewijs</u>: Merk allereerst op dat voor twee punten in het Cantordiscontinuum: $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$ en $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{3^k}$ $x_k, y_k = 0$ of 2 geldt:

a) $|x - y| < 3^{-N} \implies x_i = y_i$ voor $1 \leq i \leq N$.

b) $x_i = y_i$ voor $1 \leq i \leq N \implies |x - y| \leq 3^{-N}$.

We beelden nu het punt $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uit $P = \prod_{k=1}^{\infty} \{0_k, 2_k\}$ af op het getal $\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$.

Dit is inderdaad een afbeelding van P in het Cantordiscontinuum. We bewijzen dat deze afbeelding ϕ een homeomorfie is.

<u>ϕ is éénéénduidig</u>: Stel $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \neq (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dan volgt dat er een kleinste index N is met $x_N \neq y_N$ zodat $|\phi(x) - \phi(y)| \geq 3^{-N} > 0$ dus $\phi(x) \neq \phi(y)$.

<u>ϕ is op</u>: Uit de mogelijkheid om een willekeurig getal uit het Cantordiscontinuum te schrijven als de som van een reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ met $a_k = 0$ of $a_k = 2$ volgt dat ϕ op is.

<u>ϕ is continu</u>: Stel $x \in P$ en laat $\varepsilon > 0$ gegeven zijn. Neem N zo groot dat $3^{-N} < \varepsilon$. Dan geldt voor iedere y P met $x_k = y_k$ voor $1 \leq k \leq N$ $|\phi(x) - \phi(y)| \leq 3^{-N} < \varepsilon$. Hieruit volgt dat het beeld van de open verzameling $O = \bigcap_{k=1}^{N} \pi_k^{-1}(\{x_k\}) = \{(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid y_i = x_i$ voor $1 \leq i \leq N\}$ geheel bevat is in de open ε-omgeving van $\phi(x)$. Hieruit volgt de continuïteit van ϕ in x. Aangezien x willekeurig gekozen was in P volgt dat ϕ continu is.

<u>ϕ^{-1} is continu</u>: ϕ^{-1} is een afbeelding van een ruimte in een topologisch product waarop stelling 1 van toepassing is. Neem een $k \in \mathbb{N}$ en stel $\pi_k \circ \phi^{-1} = \psi_k$. We moeten bewijzen dat ψ_k continu is.

Nu is $\psi_k^{-1}(\{2_k\}) = \{x \in D \mid x_k = 2\} = A_k$. Neem $y \in A_k$ vast. Stel $z \in D$ en $|y - z| < 3^{-k}$ dan volgt $y_k = z_k = x_k$ dus $z \in A_k$. A_k is dus omgeving van ieder van zijn punten dus open. Analoog bewijst men dat $\psi_k^{-1}(\{0_k\})$ open is, dus ψ_k is continu.

Uit deze vier eigenschappen volgt per definitie dat ϕ een homeomorfie is.

<u>Stelling 3</u>: De fundamentaalbalk van Hilbert F (zie voor een definitie blz. 37) is homeomorf met het aftelbaar oneindige product van gesloten intervallen.

<u>Bewijs</u>: De fundamentaalbalk F is een metrische ruimte waarvan de verzameling beschouwd mag worden als het Cartesisch product van de gesloten intervallen $[-\frac{1}{k}, +\frac{1}{k}]$,

$$F = \{ \prod_{k=1}^{\infty} [-\frac{1}{k}, +\frac{1}{k}], \rho \}.$$

We kunnen F dus ook opvatten als topologisch product met behulp van de producttopologie die in §23 is ingevoerd. We zullen stelling 3 bewijzen door te laten zien dat de metrische topologie en de product topologie gelijk zijn. Dit bewijzen we met behulp van stelling 1 uit §7.

(1) Stel $x \in F$ en $x \in O$, O een basisomgeving van de producttopologie. Dan omvat O een verzameling O' van de vorm:

$$O' = \prod_{k=1}^{N} I_k \times \prod_{k=N+1}^{\infty} [-\frac{1}{k}, +\frac{1}{k}]$$

waarbij I_k een open interval is in $[-\frac{1}{k}, +\frac{1}{k}]$ dat x_k omvat. (Let op dat open hier bedoeld is in de zin van open in de relatieve topologie.) Er is dus voor iedere k, $1 \leq k \leq N$ een $\varepsilon_k > 0$ met $U_{\varepsilon_k}(x_k) \subset I_k$.

Stel nu $\min_{k=1 \ldots N} \varepsilon_k = \varepsilon$. Dan gaat men gemakkelijk na dat de verzameling $U_\varepsilon(x)$ uit de metrische topologie geheel bevat is binnen O'. We hebben dus binnen de productbasisomgeving een basisomgeving uit de metrische topologie gevonden die x omvat.

(2) Stel $x \in F$ en $\varepsilon > 0$. Kies een N met $\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{4}{k^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Stel verder voor $k = 1 \ldots N$: $I_k = (x_k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}, x_k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}) \cap [-\frac{1}{k}, +\frac{1}{k}]$. Stel tenslotte $O = \prod_{k=1}^{N} I_k \times \prod_{k=N+1}^{\infty} [-\frac{1}{k}, +\frac{1}{k}]$. Men gaat nu gemakkelijk na dat O een open basisverzameling is uit de producttopologie met $x \in O \subset U_\varepsilon(x)$. We hebben dus binnen de metrische basisomgeving een product basisomgeving gevonden die x omvat.

Uit (1) en (2) volgt dat de metrische topologie en de producttopologie aan elkaar gelijk zijn.

Opgave: Bewijs de volgende generalisatie van stelling 3.

Stelling 4: Het topologisch product van aftelbaar veel metrische ruimten is metriseerbaar. (Er is dus een metriek te definiëren zodanig dat de producttopologie en de metrische topologie gelijk zijn. Zie ook blz. 9.)

Aanwijzing: Stel $\rho(x,y)$ is een metriek op X. Dan is ook de functie $\rho'(x,y) = \text{Min}\ (1, \rho(x,y))$ een metriek op X die dezelfde topologie bepaalt. De metriek $\rho'(x,y)$ is echter begrensd. Definiëer nu uitgaande van deze begrensde metrieken op het product een metriek analoog aan het voorbeeld uit stelling 3.

Opmerking: Het topologisch product van aftelbaar veel open intervallen is homeomorf met de Hilbert-ruimte (zie blz. 5). Deze stelling is pas omstreeks 1965/66 bewezen door R.D. Anderson, nadat het sinds 1928 een onopgelost probleem was geweest.

Stelling 5: De ruimte der irrationale getallen is homeomorf met het product van aftelbaar veel copieën van de natuurlijke getallen.

Bewijsgang: Voeg aan het rijtje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $a_n \in \mathbb{N}$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$ het irrationale getal toe dat de limiet is van de oneindige kettingbreuk: $a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \frac{1}{a_4 +} \dots$.

Men gaat nu gemakkelijk na dat deze afbeelding een homeomorfie is van het product op de ruimte der positieve irrationale getallen.

25. Eigenschappen en toepassingen van topologische producten.

Stelling 6: Het topologische product van Hausdorff-ruimten is weer een Hausdorff-ruimte.

Bewijs: Stel $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ en $(y_\alpha)_{\alpha\in I}$ punten uit $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.
Als $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \neq (y_\alpha)_{\alpha\in I}$ is er een index α_0 met $x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$.
In X_{α_0} bezitten x_α en y_α disjuncte omgevingen U_{α_0} en V_{α_0}.
Dan zijn $\pi_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$ en $\pi_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})$ disjuncte omgevingen van $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ en $(y_\alpha)_{\alpha\in I}$.

Opgave: Bewijs dat het product van T_1-ruimten weer een T_1-ruimte is.

Stelling 7: Het product van samenhangende ruimten is weer samenhangend.

Bewijs: We bewijzen de stelling achtereenvolgens voor het product van twee ruimten, voor eindige producten en voor willekeurige producten.

We gebruiken hierbij wezenlijk de volgende eigenschap.

Stel $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ en $J\subset I$.

Stel voor iedere $\alpha\in I\setminus J$ p_α een vast punt uit X_α.
Dan is de verzameling $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha \times \prod_{\alpha\in I\setminus J} \{p_\alpha\}$ als deelruimte homeomorf met het topologisch product $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$.
In het bijzonder is $X_\alpha \times \prod_{\beta\neq\alpha} \{p_\beta\}$ homeomorf met X_α.

Stel nu dat X_1 en X_2 twee samenhangende ruimten zijn.
Neem p_1 vast in X_1. De verzameling $\{p_1\} \times X_2$ is homeomorf met X_2 dus samenhangend.
Voor iedere $p_2\in X_2$ is de ruimte $X_1 \times \{p_2\}$ samenhangend.
Verder is $\{p_1\} \times X_2 \cap X_1 \times \{p_2\} = \{(p_1, p_2)\}$ niet leeg dus $\{p_1\} \times X_2 \cup X_1 \times \{p_2\}$ is samenhangend.

Als we p_2 de ruimte X_2 laten doorlopen vinden we een stelsel samenhangende verzamelingen die onderling een niet lege doorsnede hebben ($\{p_1\} \times X_2$ zit in allemaal) waarvan de vereniging gelijk is aan $X_1 \times X_2$.
Volgens §17 s t. 16 is $X_1 \times X_2$ dus samenhangend.

Neem nu aan dat we reeds bewezen hebben dat het product van k samenhangende ruimten weer samenhangend is (k∈$\mathbb{N}$). Aangezien

$\prod_{n=1}^{k+1} X_n = \prod_{n=1}^{k} X_n \times X_{k+1}$ is ook het product van k+1 samenhangende ruimten samenhangend.

Op deze wijze bewijzen we met volledige inductie de invariantie van samenhang voor eindige producten.

Stelling 7 laat zich nu als volgt bewijzen:

Zij $p = (p_\alpha)_{\alpha\in I}$ een vast punt uit de verzameling $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

Zij $A_p = \{(y_\alpha)_{\alpha\in I} \mid y_\alpha = p_\alpha$ voor alle α op eindig veel na.$\}$

Men gaat nu gemakkelijk na dat A_p de vereniging is van het stelsel verzamelingen

$$\prod_{\alpha\in J} X_\alpha \times \prod_{\alpha\in I\setminus J} \{p_\alpha\}$$

als J het stelsel eindige deelverzamelingen van I doorloopt. Al deze verzamelingen bevatten het punt p en ze zijn homeomorf met een eindig product van samenhangende ruimten. Hieruit volgt met st 16, §17 dat A_p samenhangend is.

Tevens kan men gemakkelijk nagaan dat A_p dicht ligt in X.

Uit st 14, §17 volgt nu dat $\bar{A}_p = X$ samenhangend is, hetgeen te bewijzen viel.

Zonder bewijs vermelden we de zeer belangrijke stelling van Tychonoff:

Stelling 8: Het topologisch product van compacte ruimten is compact.

Deze stelling is niet elementair te bewijzen; men moet het keuze-axioma gebruiken. Sterker nog: de stelling van Tychonoff is gelijkwaardig met het keuze-axioma.

Zie voor bewijs: J.L. Kelley: General topology. blz. 143.

J.L. Kelley: The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, Fund Math 37 (1959) blz. 75-76.

W.J. Pervin: Foundations of General Topology, blz. 142.

Bij de toepassing van topologische producten treedt het product van gesloten intervallen op de voorgrond; wij zullen het daarom een eigen naam geven:

Definitie: Een kubus is het topologisch product van intervallen.

Notatie: $C_I = [0, 1]^I$.

Veronderstel dat we op een ruimte X een stelsel continue functies $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ gegeven hebben van de ruimte X in het interval $[0, 1]$. We kunnen dan de volgende afbeelding $e : X \to [0, 1]^I$ die bekend is als de "evaluatie afbeelding" bekijken:

$e(x) \overset{D}{=} (x_\alpha)_{\alpha\in I}$ met $x_\alpha = f_\alpha(x)$.

We zeggen dat het stelsel $\{f_\alpha\}$ punten scheidt als er bij ieder paar punten $p, q\in X$ een functie f_α is met $f_\alpha(p) \neq f_\alpha(q)$ (Vgl. blz. 56).

We zeggen dat het stelsel $\{f_\alpha\}$ punten en gesloten verzamelingen scheidt als er bij ieder punt $p\in X$ en bij iedere gesloten verzameling $G\subset X$ die p niet omvat een functie f is met $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(G)}$.

We kunnen nu de volgende stelling bewijzen:

Stelling 9: a) De evaluatie-afbeelding $e : X \to [0, 1]$ is continu.

b) Als $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ punten en gesloten verzamelingen scheidt is e een open afbeelding van X op $e(X)\subset C_I$.

c) Als $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ punten scheidt is e een ééneénduidige afbeelding.

Bewijs: a) De afbeelding e is een afbeelding in het product. Aangezien $\pi_\alpha \circ e = f_\alpha$ voor iedere $\alpha\in I$ continu is is volgens stelling 1 e zelf continu.

b) Stel O open in X en $x\in O$. $X\backslash O$ is een gesloten verzameling die x niet bevat dus er is een functie $f_{\alpha_0} \in \{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ zodanig dat $f_{\alpha_0}(x) \notin \overline{f_{\alpha_0}(X\backslash O)}$.

Er is dus een omgeving $U_{\alpha_0} \subset [0, 1]_{\alpha_0}$ van $f_{\alpha_0}(x)$ die $\overline{f_{\alpha_0}(X\backslash O)}$ mijdt. Hieruit volgt dat:

$$\pi_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) \cap \pi_{\alpha_0}^{-1}(\overline{f_{\alpha_0}(X\backslash O)}) = \emptyset.$$

$\pi_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) \cap e(X)$ is een open verzameling in $e(X)$ die $e(x)$ omvat

en de verzameling $e(X\setminus O)$ die geheel bevat is in $\pi_{\alpha_0}^{-1}(f_{\alpha_0}(X\setminus O))$ mijdt.
Hieruit volgt dat $e(O)$ in $e(X)$ een omgeving is van ieder van zijn punten dus $e(O)$ is open in $e(X)$.

c) Stel $x \neq y$. Dan is er een f_{α_0} met $f_{\alpha_0}(x) \neq f_{\alpha_0}(y)$ dus $x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$.
Hieruit volgt $e(x) \neq e(y)$.

Uit stelling 9 volgt direct de volgende inbeddingsstelling:

Stelling 10: [Inbeddings-lemma]. Als er op een ruimte X een stelsel continue functies van X naar $[0, 1]$ te vinden is dat punten scheidt en punten en gesloten verzamelingen scheidt dan is X homeomorf met een deelruimte van een kubus.

Een ruimte waarvoor een stelsel functies $\{f_\alpha\}$ als bedoeld in stelling 10 te vinden is heet een volledig reguliere ruimte.
De klasse van volledig reguliere ruimten is dus precies gelijk aan de klasse van deelruimten van kubussen.

Als we een volledig reguliere ruimte hebben ingebed in een kubus en we bekijken de afsluiting van het beeld in de kubus dan is dat een gesloten deel van een compacte ruimte (Stelling 8) dus compact.
We hebben hier dus de situatie dat een ruimte X is ingebed in een compacte ruimte $\overline{e(X)}$ zodanig dat het beeld $e(X)$ er dicht in ligt. In deze situatie spreken we van een compactificatie van X.

Een ander soort toepassingen hebben we in het geval dat het stelsel functies $\{f_\alpha\}$ uit stelling 10 aftelbaar is.
We hebben al bewezen dat het aftelbare product van intervallen $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ metriseerbaar is (stelling 3). Een deelruimte van $C_{\mathbb{N}}$ is dus ook metriseerbaar (Zie blz. 23).

We kunnen dus aan stelling 10 toevoegen:

Als het stelsel $\{f_\alpha\}$ aftelbaar te kiezen is dan is de ruimte X metriseerbaar.

Colloquium "Topologie" (1966-'67)

10 en 24 mei 1967
Spreker: M.A. Maurice

§26. Scheidingsaxioma's

Opmerking vooraf: In het volgende zullen we diverse malen een bewering uitspreken, zonder er een bewijs van te geven; zulke beweringen zijn bedoeld als opgaven.

1. T_1-ruimten. Zie §16.

   Bewering: (i) Het product van T_1-ruimten is weer een T_1-ruimte.
   (ii) Een deelruimte van een T_1-ruimte is weer een T_1-ruimte.

2. T_2-ruimte = Hausdorff-ruimte. Zie §16.

   Bewering: (i) Het product van T_2-ruimten is weer een T_2-ruimte.
   (ii) Een deelruimte van een T_2-ruimte is weer een T_2-ruimte.

   Bewering: (i) Een T_2-ruimte is een T_1-ruimte.
   (ii) Er zijn T_1-ruimten, die geen T_2-ruimte zijn.

3. Een topologische ruimte X heet regulier, indien $\forall$ gesloten F:
   $\forall x \notin F : \exists$ open O_x, O_F : $[x \in O_x,\ F \subset O_F$ en $O_x \cap O_F = \emptyset]$.

   Lemma: X is regulier $\Longleftrightarrow$ $\forall$ open U : $\forall p \in U$: $\exists$ open O : $p \in O \subset \overline{O} \subset U$.

   Een T_3-ruimte is een reguliere T_1-ruimte.

   Bewering: (i) Het product van reguliere ruimten (resp. T_3-ruimten) is weer een reguliere ruimte (resp. T_3-ruimte).
   (ii) Een deelruimte van een reguliere ruimte (resp. T_3-ruimte) is weer een reguliere ruimte (resp. T_3-ruimte).

Bewering: (i) Een T_3-ruimte is een T_2-ruimte.

(ii) Er zijn T_2-ruimten die geen T_3-ruimte zijn.

Bewijs:

(ii) zie bijv. Dugundji, blz. 141.

4. Een topologische ruimte X heet volledig regulier, indien bij alle $x \in X$ en alle omgevingen O_x van x een continue functie ϕ: $X \to [0,1]$ bestaat zodanig dat: $\phi(x) = 0$ en $\phi(y) = 1$ voor $y \in X \setminus O_x$.

Een Tychonoff-ruimte is een volledig reguliere T_1-ruimte.

N.B. Ga na dat de definitie van een volledig reguliere ruimte zoals die op blz. 73 is gegeven overeenstemt met de definitie van een Tychonoff-ruimte zoals we die hier boven gaven.

Bewering: (i) Het product van volledig reguliere ruimten (resp. Tychonoff-ruimten) is weer een volledig reguliere ruimte (resp. Tychonoff-ruimte).

(ii) Een deelruimte van een volledig reguliere ruimte (resp. Tychonoff-ruimte) is weer een volledig reguliere ruimte (resp. Tychonoff-ruimte).

Bewijs:

(i) Laat X_i volledig regulier zijn voor $i \in I$ en zij $X = \prod_{i \in I} X_i$.

Zij $x \in X$ en zij U een omgeving van x in X; zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen dat

$$U = \prod_{i \in I} U_i,$$

waarbij U_i een omgeving is van x_i in X_i, terwijl slechts eindig vele $U_i \neq X_i$ zijn; bijv. alleen $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}$.

Er bestaan nu continue functies

$$f_k : X_{i_k} \to [0,1]$$

zodanig dat

$$\begin{cases} f_k(x_{i_k}) = 0 \\ f_k(y_{i_k}) = 1 \text{ voor } y_{i_k} \in X_{i_k} \setminus U_{i_k} \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Men gaat nu gemakkelijk na dat de functie $f\colon X \to [0,1]$ die gedefiniëerd wordt door

$$f = \sup_{k=1,2,\dots,n} f_k \circ \pi_{i_k}$$

een continue functie is, die voldoet aan

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ f(y) = 1 \quad \text{voor } y \in X \setminus U. \end{cases}$$

Bewering: (i) Een Tychonoff-ruimte is een T_3-ruimte.
(ii) Er bestaan T_3-ruimten, die geen Tychonoff-ruimte zijn.

Bewijs:

(i) Zij U open en zij $p \in U$.
Er bestaat dan een continue functie $\phi\colon X \to [0,1]$, zodanig dat $\phi(p) = 0$ en $\phi(q) = 1$ voor $q \in X \setminus U$.
Dan volgt $O = f^{-1}[[0,\frac{1}{2})]$ is open, $F = f^{-1}[[0,\frac{1}{2}]]$ is gesloten, en $p \in O \subset \overline{O} (\subset F) \subset U$.

(ii) zie bijv. Dugundji, blz. 154.

5. Een topologische ruimte X heet normaal, indien $\forall$ gesloten F, G: $F \cap G = \emptyset \implies \exists$ open O_F, O_G : $[F \subset O_F,\ G \subset O_G,\ O_F \cap O_G = \emptyset]$.

Lemma: X is normaal $\iff$ $\forall$ open U : $\forall$ gesloten $G \subset U$: $\exists$ open O : $G \subset O \subset \overline{O} \subset U$.

Een T_4-ruimte is een normale T_1-ruimte.

6. Stelling: Een metrische ruimte is een T_4-ruimte.

Bewijs:

Laat F en H disjuncte gesloten verzamelingen zijn in de metrische ruimte (X,ρ).

Zij nu $\varepsilon_p = \frac{1}{2}\rho(p,H)$ voor $p \in F$

$\eta_q = \frac{1}{2}\rho(q,F)$ voor $q \in H$;

dan is $\varepsilon_p > 0$ en $\eta_q > 0$.

We schrijven

$$U = \bigcup_{p \in F} B_{\varepsilon_p}(p) \ , \quad V = \bigcup_{q \in H} B_{\eta_q}(q).$$

Dan zijn U en V open, en $F \subset U$, $H \subset V$.

We behoeven nog slechts aan te tonen dat $U \cap V = \emptyset$.

Aldus: indien $x \in U \cap V$ dan volgt

$$\exists p \in F: \rho(p,x) < \varepsilon_p$$

$$\exists q \in H: \rho(q,x) < \eta_q$$

en dus

$$\rho(p,q) \leq \rho(p,x) + \rho(q,x) < \varepsilon_p + \eta_q \leq 2\max(\varepsilon_p,\eta_q) \overset{\text{bijv.}}{=\!=} 2\varepsilon_p;$$

echter: $\rho(p,H) = 2\varepsilon_p$. Tegenspraak.

<u>Stelling</u>: Een compacte T_2-ruimte X is een T_4-ruimte.

<u>Bewijs</u>:

Laat A en B disjuncte gesloten verzamelingen zijn in X, A en B zijn dan ook compact.

(i) Zij $p \notin B$. $\forall b \in B$ bestaan er disjuncte open omgevingen $O_p^{(b)}$ en O_b van p resp. b. $\{O_b\}_{b \in B}$ is een open overdekking van B, die dus een eindige deeloverdekking $\{O_{b_i}\}_{i=1}^n$ heeft. Dan zijn $\bigcap_{i=1}^n O_p^{(b_i)}$ en $\bigcup_{i=1}^n O_{b_i}$ disjuncte open omgevingen van p resp. B.

(ii) Dus: $\forall a \in A$ bestaan er disjuncte open omgevingen O_a en $O_B^{(a)}$ van a resp. B. Dan is $\{O_a\}_{a \in A}$ een open overdekking van A, die dus een eindige deeloverdekking $\{O_{a_i}\}_{i=1}^m$ heeft. Dan zijn $\bigcup_{i=1}^m O_{a_i}$ en $\bigcap_{i=1}^m O_B^{(a_i)}$ disjuncte open omgevingen van A resp. B.

7. Lemma van Urysohn: Zij X normaal. Als A en B disjuncte gesloten verzamelingen zijn in X, dan bestaat er een continue functie $f: X \to [0,1]$, zodanig dat $f(a) = 0$ voor alle $a \in A$ en $f(b) = 1$ voor alle $b \in B$.

Bewijs:

(a) Zij $D = \{\frac{k}{2^n} \mid k,n \text{ geheel } \geq 0\}$.

Elke $d \in D$, $d \neq 0$, is eenduidig te schrijven als

$d = \frac{2m+1}{2^n}$, $m = m(d)$ en $n = n(d)$ geheel.

Voorts ligt D dicht in de verzameling der niet-negatieve reële getallen.

(b) We zullen nu voor alle $t \in D$ een open verzameling $U_t \subset X$ definiëren, zodanig dat

$$\overline{U}_s \subset U_t \quad \text{als } s < t \qquad \ldots\ldots (*)$$

en $A \subset U_r$, $U_r \cap B = \emptyset$ $(r \leq 1)$.

Aldus:

(i) Voor $d > 1$ zij $U_d = X$.

(ii) Zij $U_1 = X \setminus B$.

Voorts: Daar X normaal is, bestaan er disjuncte open verzamelingen U_0 en O_0 zó dat $A \subset U_0$, $B \subset O_0$.

(iii) Men verifiëert gemakkelijk dat voor de tot hiertoe gevonden U's (nl. U_d voor $d = 0$ en $d \geq 1$) aan de voorwaarde $(*)$ is voldaan.

Voor de overige waarden van d gebruiken we inductie naar $n = n(d)$.

Laat dus U_d gevonden zijn voor alle $d \in D$ met $0 < d < 1$ en $n(d) \leq n-1$.

Zij dan $t \in D$, $0 < t < 1$, zodanig dat $n(t) = n$; zeg $t = \frac{2m+1}{2^n}$. Indien nu $d_1 = \frac{2m}{2^n} = \frac{m}{2^{n-1}}$ en $d_2 = \frac{2m+2}{2^n} = \frac{m+1}{2^{n-1}}$ dan is

$$d_1 < t < d_2\ , \quad n(d_1) \leq n-1 \text{ en } n(d_2) \leq n-1.$$

Op grond van de inductie-aanname zijn U_{d_1} en U_{d_2} al geconstrueerd, terwijl voldaan is aan $\overline{U}_{d_1} \subset U_{d_2}$.
Dan zijn $\overline{U}_{d_1}$ en $X \setminus U_{d_2}$ disjuncte gesloten verzamelingen in X. Omdat X normaal is, bestaan er dus disjuncte open verzamelingen U_t en O_t zodanig dat $\overline{U}_{d_1} \subset U_t$, $X \setminus U_{d_2} \subset O_t$. Dan volgt ook dat $\overline{U}_t \subset (X \setminus O_t \subset) U_{d_2}$.
d_1 en d_2 zijn opvolgende elementen in de verzameling D_{n-1} der indices $s \in D$ waarvoor U_s reeds geconstrueerd werd verondersteld en waarvoor aan $(*)$ is voldaan.
Is dan D_n de verzameling der indices die uit D_{n-1} ontstaat door toevoeging van alle $t \in D$, $0 < t < 1$, met $n(t) = n$, dan volgt onmiddellijk dat ook alle U_s met $s \in D_n$ aan $(*)$ voldoen.
Hierdoor is de constructie van alle U_s, $s \in D$, door inductie voltooid.

(c) Elke $x \in X$ behoort tot ten minste één U_t, $t \in D$. Definiëer nu een reëelwaardige functie ϕ op X door

$$\phi(x) = \inf\{t \in D \mid x \in U_t\}.$$

Dan geldt

$$0 \leq \phi(x) \leq 1 \qquad \text{voor alle } x \in X$$
$$\phi(a) = 0 \qquad \text{voor alle } a \in A$$
$$\phi(b) = 1 \qquad \text{voor alle } b \in B.$$

(d) Een subbasis voor de (gewone) topologie in $[0,1]$ wordt gevormd door de familie $\mathcal{T}$ van alle verzamelingen van de vorm

$$L_p = \{z \in [0,1] \mid z < p\} \qquad R_p = \{z \in [0,1] \mid z > p\}.$$

Men gaat nu gemakkelijk na dat

$$\phi^{-1}[L_p] = \bigcup_{\substack{t \in D \\ t < p}} U_t$$

en

$$\phi^{-1}[[0,1]\setminus R_p] = \bigcap_{\substack{t\in D\\ t>p}} U_t,$$

waaruit volgt dat het inverse beeld onder ϕ van elk element van de subbasis $\mathcal{J}$ open in X is. Dit houdt in dat ϕ continu is.

Bewering: (i) Een T_4-ruimte is een Tychonoff-ruimte.
(ii) Er bestaan Tychonoff-ruimten, die geen T_4-ruimte zijn.

Bewijs:

(i) Zij V_p een omgeving van p. Dan zijn $\{p\}$ en $X\setminus V_p^0$ disjuncte gesloten verzamelingen.
Op grond van het lemma van Urysohn bestaat er dus een continue functie ϕ: $X \to [0,1]$ zodanig dat $f(p) = 0$ en $f(q) = 1$ voor $q \in X\setminus V_p^0$.

(ii) Zij ω het kleinste niet-eindige ordinaalgetal, en zij Ω het kleinste niet-aftelbare ordinaalgetal. Laat X_ω (resp. X_Ω) de verzameling van alle ordinaalgetallen $\leq \omega$ (resp. $\leq \Omega$) zijn. Maak X_ω en X_Ω tot topologische ruimten d.m.v. de orde-topologie. X_ω en X_Ω zijn dan compacte T_2-ruimten. Ook het topologisch product T van X_ω en X_Ω (de z.g. "Tychonoff-plank") is dan compact T_2. T is dan ook een T_4-ruimte en dus zeker een Tychonoff-ruimte. Beschouw de deelruimte $Y = T\setminus\{(\omega,\Omega)\}$. Deze is zeker een Tychonoff-ruimte. Men kan echter bewijzen dat Y géén normale ruimte is.

8. Voortzettingsstelling van Tietze: Zij X normaal. Als A een gesloten deelverzameling is van X, en f: $A \to \mathbb{R}$ is een continue functie, dan bestaat er een continue voortzetting ϕ: $X \to \mathbb{R}$ van f.
Bovendien geldt: Als $|f(a)| < c$ voor alle $a \in A$, dan kan men ϕ zo kiezen dat ook $|\phi(x)| < c$ voor alle $x \in X$.

Bewijs:

(i) Als $g: A \to \mathbb{R}$ continu is, en $|g(a)| \leq c$ voor alle $a \in A$, dan bestaat er een continue $h: X \to \mathbb{R}$ zó, dat

$$\begin{cases} |h(x)| \leq \frac{1}{3} c & \text{voor alle } x \in X \\ |g(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3} c & \text{voor alle } a \in A. \end{cases}$$

Immers:

$P = \{a \in A \mid g(a) \geq \frac{1}{3} c\}$ en $Q = \{a \in A \mid g(a) \leq -\frac{1}{3} c\}$ zijn gesloten in A - en dus ook in X (daar A gesloten is in X). Bovendien is $P \cap Q = \emptyset$.

Lemma van Urysohn ==> $\exists$ continue $h: X \to [-\frac{1}{3} c, +\frac{1}{3} c]$ zodanig dat

$$f(p) = +\frac{1}{3} c \quad \text{voor } p \in P, \text{ en}$$
$$f(q) = -\frac{1}{3} c \quad \text{voor } q \in Q.$$

h is de gezochte functie.

(ii) Zij $|f(a)| \leq c$ op A.

Past men (i) toe op f dan volgt de existentie van een continue functie $h_0: X \to \mathbb{R}$ zó, dat

$$\begin{cases} |h_0(x)| \leq \frac{1}{3} c & \text{voor } x \in X \\ |f(a) - h_0(a)| \leq \frac{2}{3} c & \text{voor } a \in A. \end{cases}$$

Vervolgens past men (i) toe op $f - h_0$; ==> $\exists$ continue functie $h_1: X \to \mathbb{R}$, zó, dat

$$\begin{cases} |h_1(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} c & \text{voor } x \in X \\ |f(a) - h_0(a) - h_1(a)| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} c & \text{voor } a \in A. \end{cases}$$

Daarna passen we (i) toe op $f - h_0 - h_1$; enz.

Enzovoort.

Voor alle n = 0, 1, 2, ... vinden we zo continue functies $h_n: X \to \mathbb{R}$ zodanig dat

$$\begin{cases} |h_n(x)| \leq \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^n c & \text{voor } x \in X \\ |f(a) - h_0(a) - \dots - h_n(a)| \leq \frac{2}{3} (\frac{2}{3})^n c & \text{voor } a \in A. \end{cases}$$

Dan geldt:

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$ convergeert uniform op X, en dus is $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$ een continue functie.

Voorts volgt uit de eerste ongelijkheid dat

$$|\phi(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^n c = c$$

en uit de tweede ongelijkheid dat

$$\phi(a) = f(a) \quad \text{voor } a \in A$$

- zodat ϕ een voortzetting is van f.

(iii) Zij $|f(a)| < c$ op A.
Volgens (ii) bestaat er in ieder geval een continue voortzetting ϕ: X → R van f die voldoet aan $|\phi(x)| \leq c$ voor $x \in X$.
Zij dan $B = \{x \mid |\phi(x)| = c\}$; B is gesloten in X, en $A \cap B = \emptyset$. Lemma van Urysohn ==> $\exists$ continu ψ: $X \to [0,1]$ zodanig dat $\psi(a) = 1$ voor $a \in A$ en $\psi(b) = 0$ voor $b \in B$.
Men verifiëert onmiddellijk dat nu $\overline{\phi} = \phi \cdot \psi$ een continue voortzetting is van f, die voldoet aan $|\overline{\phi}(x)| < c$ voor $x \in X$.

(iv) Zij f niet noodzakelijk begrensd.
Laat χ een homeomorfie zijn van $\mathbb{R}$ op (-1,+1). Op grond van (iii) heeft $\chi \circ f$: A → (-1,+1) een continue voortzetting ϕ: X → (-1,+1).
Dan is $\chi^{-1} \circ f$: X → $\mathbb{R}$ een continue voortzetting van f.

9. Bewering: (i) Het product van twee T_4-ruimten is niet noodzakelijk weer een T_4-ruimte.
(ii) Een deelruimte van een T_4-ruimte is niet noodzakelijk weer een T_4-ruimte.

Bewijs:

(i) Zij S de verzameling der reële getallen. We topologiseren S door middel van de half-open-interval-topologie; d.w.z. we kiezen als basis voor de topologie in S de familie van alle half-open intervallen van de vorm $[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$. Men gaat gemakkelijk na dat S een T_4-ruimte is.

$S \times S$ is echter niet normaal. Men kan dit direct aantonen. Wij schetsen een bewijs dat gebruik maakt van de stelling van Tietze:

α. De aftelbare verzameling N van alle punten (s,t) waarvan beide coördinaten rationaal zijn, ligt dicht in $S \times S$.
Een continue functie $f: S \times S \to \mathbb{R}$ is dan volledig bepaald door zijn waarden op N. Hieruit volgt dat er ten hoogste $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ van zulke continue functies bestaan.

β. De deelruimte $A = \{(s,t) \mid s+t = 0\}$ van $S \times S$ is discreet. Elke functie $\phi: A \to \mathbb{R}$ is dus continu. Er zijn $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$ van zulke functies.

γ. Tenslotte is A gesloten in $S \times S$.

δ. Dan volgt onmiddellijk uit de stelling van Tietze dat $S \times S$ niet normaal kan zijn.

(ii) We gebruiken het al eerder gegeven voorbeeld van de Tychonoff-plank T (zie punt 7): T is normaal, maar de deelruimte Y is niet normaal.

Literatuur

T.O. Moore : "Elementary general topology"
(Prentice Hall)

W. Franz : "Topologie I"
(Sammlung Göschen)

W.J. Pervin : "Foundations of general topology"
(Academic Press)

J.L. Kelley : "General topology"
(Van Nostrand)

Hocking-Young: "Topology"
(Addison-Wesley)

J. Dugundji : "Topology"
(Allyn and Bacon)

Colloquium "Topologie"

18 januari 1967

1. Zij $X = \{1, 2, 3\}$.

   a) Zij $\mathcal{T} = \{\phi, X, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.
   Is $\mathcal{T}$ een topologie voor X?

   b) Zij $\mathcal{T} = \{\phi, X, \{1, 2\}\}$.
   Is $\mathcal{T}$ een topologie voor X?
   Is 3 verdichtingspunt van $\{1, 2\}$?
   Wat is $\overline{\{3\}}$?
   Wat is $\overline{\{1, 2\}}$?
   Wat is $\overline{\{1\}}$?

2. Zij A een verzameling.
   Definiëer $\rho(x,y) = 1 \quad x \neq y \quad x,y \in A$
   $\rho(x,y) = 0 \quad x = y$

   Bewijs dat ρ een metriek op A is.
   Stel p een vast punt van A. Hoe ziet voor $r = 2, 1, \frac{1}{2}$ $B_r(p)$ eruit?

3. Beschouw R^n met de gewone metrische topologie (n vast).
   Bewijs dat de afsluiting van een open bol $B_r(p) = \{x \in R^n \mid \rho(x,p) < r\}$ gelijk is aan de gesloten bol $S_r(p) = \{x \in R^n \mid \rho(x,p) \leq r\}$.
   Geef een voorbeeld van een metrische ruimte waarin bovenstaande eigenschap niet geldt.

4. Bewijs dat de deelruimte van R bestaande uit alle natuurlijke getallen discreet is.
   Is de deelruimte van R bestaande uit alle rationale getallen discreet?

5. Zij Q de deelruimte van R bestaande uit alle rationale getallen.
   Stel α een willekeurig irrationaal getal.
   Bewijs dat de verzamelingen $\{x \in Q \mid x > \alpha\}$ en $\{x \in Q \mid x < \alpha\}$ zowel open als gesloten in Q zijn.

6. Beschouw de verzameling R met gewone topologie.
Wat zijn de inwendige punten van het segment $[0,1]$?
Wat is de rand van $[0,1]$ in R?
Dezelfde vragen als men $[0,1]$ vervangt door $[0,1]\setminus\{\frac{1}{2}\}$.

7. Bestaat er een homeomorfisme van een open interval op een gesloten interval? (Beschouw topologische eigenschappen.)

8. Bewijs dat de ruimte der rationale getallen van $[0,1]$ niet compact is.
Bewijs ook dat de ruimte der irrationale getallen van $[0,1]$ niet compact is.

9. Stel R de verzameling der reële getallen.

   a) Beschouw alle verzamelingen $(a,b]$ met $a,b \in R$; $a < b$.
   Bewijs dat dit een basis is voor een topologie op R.
   Toon aan dat de verkregen ruimte aan het eerste aftelbaarheids-axioma voldoet. Is de topologie verschillend van de gewone topologie op R?

   b) Beschouw alle deelverzamelingen van R van de vorm $[a,b)$; $(a,b]$ met $a,b \in R$; $a < b$.
   Bewijs dat dit een subbasis is voor een topologie op R die geen basis is. Is de topologie verschillend van de gewone topologie op R en de topologie in (a) beschreven?

10. Zij Q de deelruimte van R bestaande uit alle positieve rationale getallen en $\mathcal{I}$ de deelruimte van R bestaande uit alle irrationale getallen.
Kies een vaste aftelling van Q; dus $Q = r_1, r_2, \ldots, \ldots$
Voor elk punt $x \in I$ zij i het natuurlijke getal met de eigenschap $i-1 < x < i$ en $f(x) = r_i$.
Bewijs dat f een continue afbeelding is van I op Q.

11. Zij C de familie van alle functies die gedefiniëerd zijn op een vaste verzameling A met waarden in $[0,1]$.
Definiëer $\rho(f,g) = \sup \{ |f(x) - g(x)| \mid x \in A \}$ voor $f,g \in C$.
Bewijs dat (C,ρ) een metrische ruimte is.

12. Zij (X,τ) het platte vlak met de gewone metrische topologie.
Zij $V(a,b,c,d)$ met $a < b$; $c < d$ de verzameling van alle punten (x,y) met $a < x < b$ en $c < y < d$.
Bewijs dat $\mathcal{B} = \{V(a,b,c,d) \mid a < b;\ c < d\} \cup \{\emptyset\}$ een basis is van de topologische ruimte (X,τ).
Zij $U(a,b) = \{(x,y) \mid a < x < b\}$
en $\hat{U}(c,d) = \{(x,y) \mid c < y < d\}$.
Bewijs nu dat $\mathcal{S} = \{U(a,b) \mid a < b\} \cup \{\hat{U}(c,d) \mid c < d\}$ een subbasis is voor de topologische ruimte (X,τ).

13. Beschouw de deelruimte C van het platte vlak gegeven door
$C = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

Stel D de deelruimte van C gegeven door
$D = \{(x,y) \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1,\ \frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$.

Wat zijn de inwendige punten van de verzameling D in de ruimte C?
Wat is de rand van de verzameling D in de ruimte C?

14. Stel X een topologische ruimte.

Bewijs: 1) Als O_1 en O_2 niet lege disjuncte open verzamelingen zijn van X, dan is de deelruimte $O_1 \cup O_2$ van X niet samenhangend.
2) Als S_1 en S_2 disjuncte gesloten verzamelingen zijn van X, dan is de deelruimte $S_1 \cup S_2$ van X niet samenhangend.

15. a) Zij (X,τ) een Hausdorffruimte waarin een echte open deelverzameling bestaat die compact is.
Bewijs dat (X,τ) onsamenhangend is.
b) Zij (X,τ) een compacte onsamenhangende ruimte.
Bewijs dat er een compacte echte open deelverzameling in deze ruimte is.
c) Toon aan dat het gegeven "compact" in b) noodzakelijk is.

16. Stel X een overaftelbare verzameling met de eindig complement topologie.
Bewijs dat X niet aan het eerste en niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet, doch wel separabel is.
Bewijs dat iedere deelverzameling van X compact is.

17. Stel X een overaftelbare verzameling met de aftelbaar complement topologie (d.w.z. een deelverzameling A van X is open d.e.s.d. wanneer $X \setminus A$ aftelbaar is).
Bewijs dat X niet aan het eerste en niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet; X is ook niet separabel.
Bewijs dat iedere open overdekking van een deelverzameling van X een aftelbare deeloverdekking bezit.

18. Stel X een vaste verzameling.
Stel $\mathfrak{B}$ een familie van deelverzamelingen van X met de eigenschap dat iedere doorsnede van eindig veel elementen van $\mathfrak{B}$ weer tot $\mathfrak{B}$ behoort.
Als $\bigcup \mathfrak{B} = X$ bewijs dan dat $\mathfrak{B}$ een basis voor een topologie op X is.