stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BC 2/70 NOVEMBER

G. DE LEVE en J.C. VAN DALEN
INLEIDING IN DE BESLISKUNDE, deel II

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

INLEIDING BESLISKUNDE

INHOUDSOPGAVE DEEL II

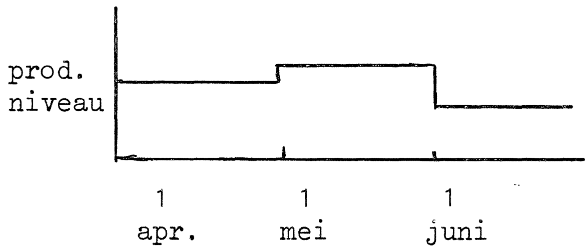
6. MEER-STAPSBESLISSINGSPROBLEMEN: DYNAMISCHE PROGRAMMERING.

6.1. Het meer-stapsbeslissingsprobleem.

In dit hoofdstuk zullen wij ons bezig houden met beslissingsproblemen, waarin op discrete tijdstippen beslissingen moeten worden genomen. Niet zomaar losse beslissingen, maar beslissingen, die nauwkeurig op elkaar zijn afgestemd. Om een indruk te geven van het type problemen waar aan wordt gedacht, schetsen we eerst een drietal varianten van een probleem.

voorbeeld 6.1: eerste probleem.
Sallandria N.V. brengt onder de naam "Lentegroet" in de maanden april, mei en juni een vruchtencompôte van vroege aardbeien, bessen en frambozen op de markt. De hoeveelheden die op 30 april, 31 mei en 30 juni verzendklaar moeten zijn, zijn reeds op 1 april bekend. Op die datum kan ook met de april-produktie van Lentegroet worden begonnen.

Het produktieniveau voor de maanden april, mei en juni zal op de eerste dag van de desbetreffende maanden worden vastgesteld en kan in de loop van een maand niet meer worden gewijzigd.



Als op 1 mei of op 1 juni in vergelijking met de vorige maand de produktie wordt verhoogd of verlaagd, dan zijn daaraan extra kosten verbonden. Een beperkte gelegenheid tot voorraadvorming is aanwezig; voorraden brengen echter ook extra kosten met zich mee. Van de chef produktie wordt nu verlangd dat hij voor de maanden april, mei en juni die produktieniveau's kiest, waarvoor geldt dat de totale kosten minimaal zijn.

voorbeeld 6.2: tweede probleem.

Het tweede probleem is bijna identiek aan het eerste. In tegenstelling tot het gestelde in het voorgaande probleem zijn nu echter de hoeveelheden, die op 30 april, 31 mei en 30 juni gereed moeten zijn niet van te voren bekend. Op grond van omzetcijfers uit voorgaande jaren beschikt de chef produktie evenwel over de kansverdelingen van de vraag in de maanden mei, juni en juli. Indien Salandria N.V. niet aan de vraag kan voldoen, wordt een verlies aan good-will geleden.

voorbeeld 6.3: derde probleem.

Naast Lentegroet behoort ook appelstroop tot het assortiment van Sallandria N.V. In tegenstelling tot Lentegroet wordt appelstroop iedere maand geproduceerd en verkocht. De kansverdeling van de vraag naar appelstroop blijkt voor iedere maand dezelfde te zijn. Ook nu geldt dat het niet voldoen aan de vraag leidt tot een verlies aan good-will.

Aan de hand van deze drie voorbeelden bespreken we hierna een aantal kenmerkende eigenschappen van meer-stapsbeslissingsproblemen. In de eerste plaats maken wij een onderscheid tussen N-stapsbeslissingsproblemen en ∞-stapsbeslissingsproblemen. Aangezien zowel in het eerste als in het tweede probleem een drietal beslissingen moet worden genomen (de produktieniveau's, resp. x_1, x_2 en x_3), worden beide problemen 3-stapsbeslissingsproblemen genoemd. Op grond van het onbegrensde aantal beslissingen in het derde probleem, spreekt men daar van een ∞-stapsbeslissingsprobleem.

Verder kennen wij een indeling naar deterministische en stochastische meer-stapsbeslissingsproblemen. Het eerste probleem is een

	deterministisch	stochastisch
N-staps	det N	stoch N
∞-staps	det ∞	stoch ∞

deterministisch 3-stapsbeslissingsprobleem. Immers men kan zonder enig bezwaar de beslissingen x_j (j=2,3), te nemen op 1 mei en 1 juni, reeds op 1 april vaststellen *). Dit geldt evenwel niet voor het tweede probleem. Daar de vraagcijfers voor de maanden april en mei op 1 april nog niet bekend zijn, kan men b.v. niet met zekerheid voorspellen hoe groot de voorraden zullen zijn op 1 mei en 1 juni en op 1 april ontbreekt dan noodzakelijke informatie voor het vaststellen van de produktieniveau's voor de maanden mei en juni. Deze onzekerheid komt tot uitdrukking in de benaming van het probleem: een stochastisch 3-stapsbeslissingsprobleem. Het zal nu niemand verwonderen dat het derde probleem een stochastisch ∞-stapsbeslissingsprobleem voorstelt.

Bij stochastische meer-stapsbeslissingsproblemen is de reeks te nemen beslissingen x_j dus niet van te voren met zekerheid aan te geven. De beslissingen zullen n.l. mede afhangen van de "toestand van het systeem"**) welke op het beslissingstijdstip wordt aangetroffen. Wel is dikwijls van te voren vast te stellen welke toestanden op een beslissingstijdstip mogelijk zijn. In dat geval kan men wel op het eerste beslissingstijdstip j = 1 aan iedere mogelijke toestand S_j op een later tijdstip j > 1 een beslissing x_j toevoegen. Wanneer men op deze wijze te werk gaat, bepaalt men geen beslissingen maar beslissingsregels $x_j = z_j(S_j)$. Zo'n beslissingsregel is een voorschrift, dat voor een bepaald beslissingstijdstip j aan iedere mogelijke toestand S_j een toegelaten beslissing x_j toevoegt.

Oplossingen van meer-stapsbeslisingen, welke in dit hoofdstuk zullen worden besproken, bestaan dan ook uit rijtjes beslissingsregels, en wel voor ieder beslissingstijdstip één. Een volledige rij beslissingsregels $x_j = z_j(S_j)$ (j=1,2,...,N indien het een N-stapsbeslissingsprobleem betreft) wordt een strategie genoemd.

In N-stapsbeslissingsproblemen zijn de beslissingsregels voor de verschillende beslissingstijdstippen meestal ongelijk. In ∞-stapsbeslissingsproblemen daarentegen blijkt dikwijls dat er voor alle tijdstippen één en de-

*) vgl. voorbeeld 3.3 (blz. 77).

**) aangeduid met S_j voor de toestand op tijdstip j.

zelfde beslissingsregel $x_j = z_j(S_j)$ is.

6.2. De wiskundige formulering (het model).

Het behoeft geen betoog dat de hierboven vermelde beslissingsproblemen niet volledig genoeg zijn gedefinieerd om opgelost te kunnen worden. Laten wij eens het eerste probleem beschouwen en stel dat de vraag naar Lentegroet voor de drie maanden gegeven wordt door d_i (i=1,2,3), terwijl de verkoopprijs a per eenheid bedraagt. Stel vervolgens dat de produktiekosten c_1 per eenheid bedragen en de voorraadkosten c_2 per eenheid en per tijdseenheid en neem aan dat de kosten voor verhoging resp. verlaging van het produktieniveau c_3 en c_4 bedragen per eenheid.

Indien aan het begin van maand j de omvang van de voorraad v_j is, het produktieniveau in de voorafgaande maand x_{j-1} bedraagt en in deze maand x_j, dan wordt in het eerste probleem de winst, te maken in maand j, gegeven door:

$$ad_j - c_1x_j - c_2v_j + \begin{cases} - c_3(x_j-x_{j-1}) \text{ als } x_j \geq x_{j-1} \\ - c_4(x_{j-1}-x_j) \text{ anders} \end{cases} \qquad (6.1)$$

(merk overigens op dat voor $x_j = x_{j-1}$ beide formules correct zijn).
Wij constateren dat deze winst o.a. afhangt van de voorraad v_j en het produktieniveau x_{j-1} van de voorafgaande maand. Beide grootheden zijn op beslissingstijdstip j bekend. Wij spraken in de vorige paragraaf van de toestand van het systeem S_j op het beslissingstijdstip j, die mede bepalend was voor de keuze van de beslissing x_j. De bovenstaande winstfunctie geeft ons nu aanleiding voor de toestand S_j op beslissingstijdstip j de vector

$$S_j = (S_{j1},S_{j2}) = (v_j,x_{j-1})$$

te kiezen.

Wanneer wij de te maken winst in periode j aangeven met $h_j(S_j;x_j)$ dan volgt uit (6.1) dat deze functie alsvolgt is gedefinieerd.

$$h_j(S_j;x_j) = ad_j - c_1x_j - c_2S_{j1} + \begin{cases} - c_3(x_j-S_{j2}) & \text{als } x_j \geq S_{j2} \\ - c_4(S_{j2}-x_j) & \text{anders.} \end{cases}$$

Aangezien aan de vraag in periode j in ieder geval moet worden voldaan, dient de beslissing x_j zo gekozen te worden dat geldt

$$x_j \geq d_j - S_{j1} \ . \tag{6.2}$$

De beslissingen die aan (6.2) voldoen, vormen de verzameling $\chi_j(S_j)$ van toegelaten beslissingen. Merk op dat uit (6.2) volgt, dat de verzameling toegelaten beslissingen inderdaad afhangt van de toestand S_j en het beslissingstijdstip j (wegens $S_{j1}=v_j$).

Uit de probleemstelling volgt bovendien, dat de toestand S_j en de beslissing x_j de toestand S_{j+1} op het volgende tijdstip ondubbelzinnig vastleggen. Immers

$$S_{j+1} = (S_{j+1\ 1},S_{j+1\ 2}) = (S_{j1}+x_j-d_j,x_j).$$

Deze relatie, de transformatie (overgang) van toestand S_j op tijdstip j naar de volgende toestand S_{j+1}, zullen wij voor deterministische meerstapsbeslissingsproblemen in het vervolg aanduiden met

$$S_{j+1} = T_j(S_j,x_j).$$

Resumerend kunnen wij vaststellen, dat uit de probleemstelling van het eerste probleem voor ieder beslissingstijdstip j kan worden afgeleid:

1 - verzamelingen van toegelaten beslissingen $\chi_j(S_j)$;
2 - een opbrengstfunctie $h_j(S_j;x_j)$ voor de opbrengst over periode j;
3 - een transformatiefunctie $T_j(S_j,x_j)$, die op een ondubbelzinnige wijze de toestand S_{j+1} aanwijst, als S_j en x_j zijn gegeven.

Indien deze functies en verzamelingen zijn gegeven, dan is het probleem, wiskundig gezien, geheel gedefinieerd. Dit laatste zal in het algemeen gelden voor deterministische N-stapsbeslissingsproblemen.

Thans zullen we het tweede probleem aan een onderzoek onderwerpen. De notaties, die we hierbij zullen gebruiken sluiten geheel aan bij die welke gebruikt zijn bij het eerste probleem. Wij beginnen ermee de veronderstelling te maken, dat de vraag een discrete kansverdeling volgt. Stel dat $P(\underline{d}_j=i) = p_j(i)$ de kans voorstelt op een vraag van de omvang i in periode j. Voorts nemen we aan dat het verlies aan good-will c_5 per eenheid bedraagt.

Als de vraag achteraf gelijk blijkt te zijn aan i, dan bedraagt de winst (vgl. (6.1)) voor het geval $i \leq S_{j1} + x_j$

$$ai - c_1x_j - c_2S_{j1} + \begin{cases} - c_3(x_j-S_{j2}) \text{ als } x_j \geq S_{j2} \\ - c_4(S_{j2}-x_2) \text{ anders} \end{cases}$$

en voor het geval $i > S_{j1} + x_j$

$$a(S_{j1}+x_j) - c_5(i-x_j-S_{j1}) - c_2S_{j1} + \begin{cases} - c_3(x_j-S_{j2}) \text{ als } x_j \geq S_{j2} \\ - c_4(S_{j2}-x_j) \text{ anders.} \end{cases}$$

Voor de verwachting van de winst vinden wij derhalve

$$\sum_{i=0}^{S_{j1}+x_j} ai\cdot p_j(i) + \sum_{i=S_{j1}+x_j+1}^{\infty} a(S_{j1}+x_j)\cdot p_j(i) +$$

$$- c_2S_{j1} - \sum_{i=S_{j1}+x_j+1}^{\infty} c_5(i-S_{j1}-x_j)\cdot p_j(i) +$$

$$+ \begin{cases} - c_3(x_j-S_{j2}) \text{ als } x_j \geq S_{j2} \\ - c_4(S_{j2}-x_j) \text{ anders.} \end{cases} \tag{6.3}$$

Ook voor de verwachting van de winst geldt dat zij volledig wordt bepaald door de toestand S_j en de beslissing x_j. Deze verwachting wordt eveneens aangeduid met $h_j(S_j;x_j)$.

Daar men in het tweede probleem de vraag naar Lentegroet van te voren niet kent kan er, als aan de vraag geen bovengrens gesteld wordt, niet voor gezorgd worden dat aan het eind van de maand altijd voldoende Lentegroet voorradig is. Een voorwaarde van het type (6.2) kan en mag dus niet worden opgelegd. Wel zou men b.v. kunnen eisen dat de kans op een tekort kleiner dan of gelijk aan 0,05 moet wezen. M.a.w.

$$\sum_{i=x_j+S_{j1}+1}^{\infty} p_j(i) \leq 0{,}05. \tag{6.4}$$

De verzameling van de beslissingen welke voldoen aan (6.4) hangt af van de toestand S_j en het tijdstip j. Wij schrijven voor deze verzameling derhalve wederom $\chi_j(S_j)$.

De toestand $\underline{S}_{j+1}$ op tijdstip j+1 is stochastisch en voldoet aan

$$\underline{S}_{j+1} = (\underline{S}_{j+1\ 1}, S_{j+1\ 2}) = \begin{cases} (S_{j1}+x_j-\underline{i}, x_j) & \text{als } \underline{i} \leq S_{j1} + x_j \\ (0, x_j) & \text{anders} \end{cases}$$

waarin $\underline{i}$ de vraag in periode j voorstelt.

Bijgevolg geldt voor de overgang van toestand S_j op tijdstip j naar toestand S_{j+1} op tijdstip j+1, gegeven de beslissing x_j:

$$P\{\underline{S}_{j+1} = (q_1,q_2) \mid S_j;\ x_j\} = \begin{cases} p_j(S_{j1}+x_j-q_1) & \text{als } 0 < q_1 < S_{j1} + x_j \\ & \text{en } q_2 = x_j \\ \sum_{i=S_{j1}+x_j}^{\infty} p_j(i) & \text{als } q_1 = 0 \\ & \text{en } q_2 = x_j \\ 0 & \text{anders.} \end{cases} \tag{6.5}$$

Voor het linker lid van (6.5) schrijven wij kortweg $P(S_{j+1}|S_j,x_j)$, waarbij S_{j+1} dan staat voor (q_1,q_2).

In het deterministische meer-stapsbeslissingsprobleem werd de toestand op beslissingstijdstip j+1 volledig bepaald door toestand en beslissing op tijdstip j. In het stochastische meer-stapsbeslissingsprobleem wordt de kansverdeling van de toestand op beslissingstijdstip j+1 volledig bepaald door toestand en beslissing op het vorige tijdstip.

Tot dusver hebben wij verondersteld dat de vraag een discrete kansverdeling volgt; laat nu echter eens gegeven zijn dat de vraag $\underline{d}_j$ continu verdeeld is met kansverdeling

$$G_j(y) = P(\underline{d}_j \leq y)$$

en een bijbehorende kansdichtheid $g_j(y)$.

Met behulp van deze kansdichtheid vinden we voor de verwachting van de winst (vgl. (6.3)):

$$\int_0^{S_{j1}+x_j} ay \cdot g_j(y)\, dy + \int_{S_{j1}+x_j}^{\infty} a(S_{j1}+x_j)\cdot g_j(y)\, dy +$$

$$- c_2 S_{j1} - \int_{S_{j1}+x_j}^{\infty} c_5(y-S_{j1}-x_j)\cdot g_j(y)\, dy +$$

$$+ \begin{cases} - c_3(x_j - S_{j2}) & \text{als} \quad x_j \geq S_{j2} \\ - c_4(S_{j2}-x_j) & \text{anders.} \end{cases} \tag{6.6}$$

De uitdrukking (6.6) kunnen wij wederom aangeven met $h_j(S_j;x_j)$.

Inplaats van (6.4) komt nu

$$\int_{S_{j1}+x_j}^{\infty} g_j(y)\, dy \leq 0{,}05.$$

De toestand $\underline{S}_{j+1}$ op het tijdstip j+1 is wederom stochastisch en bezit voor $0 < S_{j+1} \leq S_{j1} + x_j$ de volgende voorwaardelijke kansdichtheid.

$$q_j(S_{j+1\ 1}, x_j | S_j; x_j) = g_j(S_{j1} + x_j - S_{j+1\ 1}). \qquad (6.7)$$

Voor $S_{j+1\ 1} = 0$ schrijven we de kans

$$P_j(0, x_j | S_j; x_j) = \int_{S_{j1}+x_j}^{\infty} g_j(y)\, dy. \qquad (6.8)$$

Uit (6.7) en (6.8) volgt dat ook in het geval van een continue vraagverdeling de toestand $\underline{S}_{j+1}$ volledig wordt bepaald door de toestand S_j en de beslissing x_j op het voorafgaande tijdstip. Resumerend kunnen we vaststellen dat uit de probleemstelling van het tweede probleem voor elk beslissingstijdstip j kan worden afgeleid:

1 - verzamelingen van toegelaten oplossingen $\chi_j(S_j)$;
2 - een verwachte opbrengstfunctie $h_j(S_j; x_j)$;
3 - een kansverdeling voor $\underline{S}_{j+1}$, die alleen afhangt van de toestand S_j en de beslissing x_j op het voorafgaande beslissingstijdstip j.

Wanneer wij nu ook het derde beslissingsprobleem analyseren, dan zullen wij ontdekken dat de verzameling van toegelaten beslissingen, de opbrengstfunctie en de kansverdeling van $\underline{S}_{j+1}$ op dezelfde wijze zijn gedefinieerd als in het tweede probleem is geschied. Deze grootheden (verzamelingen en functies) zullen bij stochastische ∞-stapsbeslissingsproblemen veelal voor ieder beslissingstijdstip gelijk zijn en wij gebruiken daarom ook de volgende notaties:

1 - $\chi(S_j)$ of $\chi(S)$ i.p.v. $\chi_j(S_j)$
2 - $h(S_j; x_j)$ of $h(S; x)$ i.p.v. $h_j(S_j; x_j)$
3 - $P(S_{j+1} | S_j; x_j)$ i.p.v. $P_j(S_{j+1} | S_j; x_j)$.

Overigens gaat dit ook op voor deterministische ∞-stapsbeslissingsproblemen, en we schrijven dan

3a - $$S_{j+1} = T(S_j,x_j) \text{ i.p.v. } S_{j+1} = T_j(S_j,x_j).$$

Tot zover hebben wij, wat betreft de opbrengsten (winsten), alleen aandacht geschonken aan de directe opbrengsten gedurende één periode (stap). Het zal niemand verwonderen, dat we bij N-stapsbeslissingsproblemen als criterium $y(S_0;z)$ voor de optimaliteit van een strategie de totale opbrengst over de N perioden tesamen nemen:

$$y(S_0;z) = \sum_{j=0}^{N-1} h_j(S_j;x_j).$$

Bij ∞-stapsbeslissingsproblemen ($N\to\infty$) kunnen we hier in moeilijkheden geraken, daar de som van de directe opbrengsten $h(S_j;x_j)$ voor verschillende strategieën onbegrensd groot kan zijn. Het is dan onmogelijk om ondubbelzinnig een optimale strategie aan te wijzen. Voorzover het om economische problemen gaat, zoals bij het derde probleem het geval is, kan men ons echter aanwrijven dat we geen juist criterium hanteren. Immers een gulden, waarover we nu kunnen beschikken heeft niet dezelfde waarde als een gulden die we over tien jaar zullen ontvangen. M.a.w. we mogen niet zonder meer de som van de directe opbrengsten als criterium gebruiken; we moeten die opbrengsten wegen met een factor die kleiner wordt naarmate de opbrengst verder in de toekomst gerealiseerd zal worden. Dit wordt verdisconteren (discounting of contant maken) genoemd, en we krijgen dan als criterium

$$y_\alpha(S_0;z) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j h(S_j;x_j).$$

Resumeren we nu het voorgaande, dan stellen we vast dat we als criterium voor N-stapsbeslissingsproblemen zonder bezwaar de som van de directe opbrengsten $h_j(S_j;x_j)$ kunnen hanteren en voor de ∞-stapsbeslissingsproblemen al naar gelang de structuur van het probleem:

1 - indien aan de beslissing x_j op tijdstip j de volledige directe opbrengst moet worden toegekend: de som van de directe opbrengsten;

2 - indien aan de beslissing x_j op tijdstip j een verdisconteerde directe opbrengst moet worden toegekend: de som van de verdisconteerde directe opbrengsten.

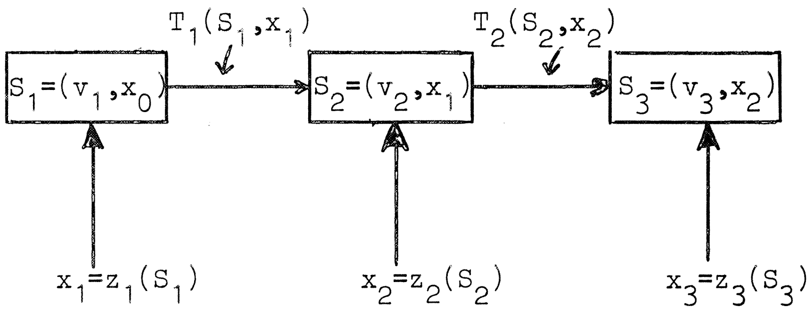
6.3. De oplossingsmethoden: dynamische programmering.

Deterministische N-stapsbeslissingsproblemen.

We lossen het eerste probleem op m.b.v. dynamische programmering. Zoals hiervoor al is geconstateerd hebben we te maken met een 3-stapsbeslissingsprobleem, en de situatie die zich daarbij voordoet is, schematisch weergegeven, alsvolgt.

toestand S_j:
de huidige voorraad en het oude produktieniveau.

beslissing x_j:
het nieuwe produktieniveau.



Wij nemen in het algemeen aan dat bij het bepalen van een optimale beslissingsregel z_j alle informatie, die kenmerkend is voor het tijdstip j en bovendien noodzakelijk om die beslissingsregel te definieren in de toestand S_j besloten is; andere gegevens over het verleden van het systeem doen derhalve niet ter zake. Verder stellen we vast dat een optimale strategie $z = (z_1,z_2,\ldots,z_N)$ optimale beslissingen dicteert vanaf het eerste beslissingstijdstip. Beschouwen we het probleem nu vanaf het tweede tijdstip i.p.v. het eerste en laten we de eerste beslissingsregel z_1 weg, dan krijgen we een strategie $z^{(2)} = (z_2,\ldots,z_N)$, die, wil de optimaliteit gehandhaafd blijven, optimale beslissingen vanaf het tweede tijdstip zal voorschrijven. Dit kan men voortzetten, en we concluderen dat uit een optimale strategie $z = (z_1,z_2,\ldots,z_N)$ andere strategieen

$z^{(k)} = (z_k,\ldots,z_N)$, $1 < k \leq N$, afgeleid kunnen worden, die vanaf een later tijdstip k optimaal zijn. Omgekeerd kan ook een optimale strategie $z^{(k)}$ door het toevoegen van een optimale beslissingsregel z_{k-1} uitgebreid worden tot een optimale strategie $z^{(k-1)}$. Van deze eigenschap maken we gebruik bij de oplossingsmethode. In de eerste stap wordt alleen de laatste optimale beslissingsregel $x_N = z_N(S_N)$ - in het eerste probleem z_3 - bepaald, d.w.z. bij iedere toestand S_N wordt een optimale beslissing $x_N = z_N(S_N)$ aangewezen. Het criterium is hierbij de directe opbrengst over de laatste periode, $h_N(S_N;x_N)$, die gemaximaliseerd moet worden.

$$\max_{x_N \in \chi(S_N)} \{h_N(S_N;x_N)\}. \quad {}^{*)}$$

De notatie voor dit maximum is $f_1(S_N)$, waarmee aangeduid wordt de maximale opbrengst vanaf tijdstip N. We krijgen op deze wijze in het algemeen een lijstje met mogelijke waarden van S_N, met daarnaast de optimale beslissingen x_N en hun opbrengst.

S_N	x_N	$f_1(S_N)$
...	...	...

Is de beslissingsregel $z_N(S_N)$ eenmaal bepaald, dan gaan we in de tweede stap de optimale strategie $z^{(N)} = (z_N)$ uitbreiden tot de optimale strategie $z^{(N-1)} = (z_{N-1},z_N)$. We doen in het beslissingsprobleem dus een stap terug naar het vorige beslissingstijdstip, en moeten nu de opbrengst <u>vanaf</u> het op één na laatste beslissingstijdstip N-1 maximaliseren, waarvoor we schrijven

$$f_2(S_{N-1}) = \max_{x_{N-1} \in \chi(S_{N-1})} \{h_{N-1}(S_{N-1};x_{N-1}) + f_1(S_N)\} =$$

$$= \max_{x_{N-1} \in \chi(S_{N-1})} \{h_{N-1}(S_{N-1};x_{N-1}) + f_1(T_{N-1}(S_{N-1};x_{N-1}))\}. \tag{6.9}$$

*) Ten behoeve van de duidelijkheid in de notatie zijn hier (en ook wel later) de indices van de verzamelingen χ_j weggelaten.

Merk op dat door de transformatie $T_{N-1}(S_{N-1};x_{N-1})$ het rechterlid van (6.9) alleen afhankelijk is van S_{N-1} en x_{N-1}, zodat we terecht voor iedere waarde van S_{N-1} het maximum kunnen bepalen. De beslissingsregel $z_{N-1}(S_{N-1})$ wordt hierdoor vastgelegd.

Op deze wijze voortgaande wordt in stap k de volgende opbrengst vanaf tijdstip N-k+1 gemaximaliseerd (ga na).

$$f_k(S_{N-k+1}) = \max_{x_{N-k+1}\in\chi(S_{N-k+1})} \{h_{N-k+1}(S_{N-k+1};x_{N-k+1}) + f_{k-1}(S_{N-k+2})\} =$$

$$= \max_{x_{N-k+1}\in\chi(S_{N-k+1})} \{h_{N-k+1}(S_{N-k+1};x_{N-k+1}) +$$

$$+ f_{k-1}(T_{N-k+1}(S_{N-k+1};x_{N-k+1}))\},\ 1 < k \leq N. \qquad (6.10)$$

Voor k = N verkrijgt men in de laatste stap:

$$f_N(S_1) = \max_{x_1\in\chi(S_1)} \{h_1(S_1;x_1) + f_{N-1}(S_2)\} =$$

$$= \max_{x_1\in\chi(S_1)} \{h_1(S_1;x_1) + f_{N-1}(T_1(S_1;x_1))\} =$$

$$= \max_{z} y(S_1;z), \qquad (6.11)$$

(merk op dat hier de beslissingstijdstippen vanaf 1 geteld worden i.p.v. 0, wat bij de meeste meer-stapsbeslissingsproblemen gebruikelijk is).

Voordat we deze aanpak toepassen op het eerste probleem uit paragraaf 6.1, hetgeen, zoals zal blijken, nogal lastig is, lossen we een eenvoudig minimalisatieprobleem m.b.v. dynamische programmering op. Tevoren zij opgemerkt, dat de behandeling van minimalisatieproblemen geheel gelijk is aan die van maximalisatieproblemen, met dien verstande, dat overal waar max in de formules stond geschreven nu min moet worden gelezen. In plaats van de directe opbrengsfuncties $h_j(S_j;x_j)$ leest men dan de directe kostenfuncties $h_j(S;x_j)$ en overeenkomstig de minimale kostenfuncties $f_j(S_{N-j+1})$.

voorbeeld 6.4:

De federatieve staat Allergië bestaat uit drie landen. Bij de laatste volkstelling op 1 april j.l. bleken die landen resp. $i_1 = 2600$, $i_2 = 3200$ en $i_3 = 10200$ inwoners te hebben. Alle inwoners moeten op korte termijn een geneeskundig onderzoek ondergaan en daartoe zal het federale departement van volksgezondheid een achttal medische teams vormen. Taalbarrières zijn er de oorzaak van dat het werkterrein van een team beperkt moet blijven binnen één land. Ongeacht het aantal personen, dat door een team onderzocht zal worden, wordt aan ieder team een bedrag van ƒ 3000,-- uitbetaald. Bovendien ontvangt een team dat meer dan 2000 personen onderzoekt ƒ 8,-- per persoon voor het aantal dat de 2000 overtreft. Bij het departement is men nu geïnteresseerd in die indeling van de teams, waarbij de kosten zo laag mogelijk zijn.

We formuleren nu het probleem als een dynamisch programmeringsprobleem:

1 - de verzameling toegelaten beslissingen $\chi_j(S_j)$

Als beslissingen x_i nemen we het aantal teams dat naar land j gezonden wordt en als toestand S_j nemen we het aantal reeds ingedeelde teams:

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = x_1$$

$$S_3 = x_1 + x_2$$

$$\chi_j(S_j) = \{x_j \mid 1 \leq x_j \leq (8-S_j) - (3-j)\} =$$

$$= \{x_j \mid 1 \leq x_j \leq 5 + j - S_j\} \qquad j = 1, 2.$$

$$\chi_3(S_3) = \{x_3 \mid x_3 = 8 - S_3\}$$

opm. (3-j) wordt afgetrokken wegens het aantal zeker naar de volgende landen te zenden teams.

2 - de directe kostenfunctie $h_j(S_j;x_j)$.

$$h_j(S_j;x_j) = 3000\,x_j + \begin{cases} +\,8(i_j-2000\,x_j) & \text{als } i_j > 2000\,x_j \\ +\,0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$j = 1, 2, 3.$$

3 - de transformatieformule $T_j(S_j,x_j)$.

$$S_{j+1} = T_j(S_j,x_j) = S_j + x_j \qquad j = 1,\ 2.$$

In de eerste stap wijzen we teams toe aan het derde land met inwoneraantal $i_3 = 10200$. We krijgen dan, omdat moet gelden $S_3 + x_3 = 8$, eenvoudig het tabelletje:

derde land		
toestand S_3	beslissing x_3	kosten $h_3(S_3;x_3) = f_1(S_3)$
2	6	$3000\times6 + 0 = 18.000$
3	5	$3000\times5 + 200\times8 = 16.600$
4	4	$3000\times4 + 2200\times8 = 29.600$
5	3	$3000\times3 + 4200\times8 = 42.600$
6	2	$3000\times2 + 6200\times8 = 55.600$
7	1	$3000\times1 + 8200\times8 = 68.600$

Op deze wijze is aan iedere mogelijke toestand S_3 een beslissing x_3 toegevoegd met (minimale) kosten $f_1(S_3)$. De beslissingsregel $z_3(S_3)$ hebben we hier dan gegeven in de vorm van een simpele tabel, zoals in het begin van deze paragraaf is gesuggereerd.

We gaan nu een stap terug naar het tweede land met inwoneraantal $i_2 = 3200$. De transformatieformule levert ons overigens $S_3 = S_2 + x_2$ en met behulp hiervan zullen we straks de beste beslissing x_3 vaststellen. De toestand S_2 is groter of gelijk aan één team. Bij iedere mogelijke toestand $S_2 \geq 1$ kan nu meer dan één beslissing x_2 genomen worden en we vinden achtereenvolgens voor $S_2 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ tabelletjes, zoals hieronder alleen voor $S_2 = 1$ en $S_2 = 2$ zijn uitgewerkt. Uit deze tabelletjes zoeken we, zoals de formule

$$f_2(S_2) = \min_{x_2 \in X_2(S_2)} \{h_2(S_2;x_2) + f_1(S_2+x_2)\}$$

ons voorschrijft, de beslissing met de laagste kosten.

tweede land			
toestand S_2	beslissing x_2	kosten $h_2(S_2;x_2) + f_1(S_2+x_2)$	minimale kosten $f_2(S_2)$
1	6	3000×6 + 68.600	
	5	3000×5 + 55.600	
	4	3000×4 + 42.600	
	3	3000×3 + 29.600	
	2	3000×2 + 16.600	22.600
	1	3000 + 8×1200 + 18.000	
2	5	3000×5 + 68.600	
	4	3000×4 + 55.600	
	3	3000×3 + 42.600	
	2	3000×2 + 29.600	
	1	3000 + 8×1200 + 16.600	29.200

Evenzo maakt men tabellen voor $S_2 = 3, 4, 5, 6$. Daaruit volgt voor het tweede land als resultaat:

tweede land		
toestand S_2	beslissing x_2	minimale kosten $f_2(S_2)$
1	2	22.600
2	1	29.200
3	1	42.200
4	1	55.200
5	1	68.200
6	1	81.200

In de derde stap beschouwen we het eerste land, met inwoneraantal $i_1 = 2600$. Omdat het hier het eerste land betreft en er dan nog geen teams zijn ingedeeld,is $S_1 = 0$. In onderstaande tabel zijn de beslissingen x_1 vermeld met hun kosten.

eerste land			
toestand S_1	beslissing x_1	kosten $h_1(S_1;x_1) + f_2(S_1+x_1)$	minimale kosten $f_3(S_1)$
0	6	3000×6 + 81.200	
	5	3000×5 + 68.200	
	4	3000×4 + 55.200	
	3	3000×3 + 42.200	
	2	3000×2 + 29.200	
	1	3000 + 8×600 + 22.600	30.400

Omdat we nu te maken hebben met een deterministische N-stapsbeslissingsprobleem, kunnen we op het eerste beslissingstijdstip alle optimale beslissingen reeds vastleggen. Daartoe werken we vanaf het eerste land via de toestandstransformaties naar het laatste land. We stellen vast

$$x_1 = 1$$

en dus

$$S_2 = S_1 + x_1 = 1.$$

We zoeken deze toestand $S_2 = 1$ in de tabel voor het tweede land op en constateren dat de beslissingsregel $z_2(S_2)$ de beslissing $x_2 = 2$ dicteert. Daaruit volgt

$$S_3 = S_2 + x_2 = 1 + 2 = 3.$$

In de eerste tabel, voor het derde land, ziet men dat aan de toestand $S_3 = 3$ de beslissing $x_3 = 5$ toegevoegd wordt, en we verkrijgen als optimale beslissingsvector

$$(x_1,x_2,x_3) = (1,2,5)$$

met als opbrengst

$$y(S_1;z) = y(0;(1,2,5)) = f30.400,\text{--}.$$

Aan de hand van de oplossing van dit probleem zal stellig duidelijk zijn geworden hoe de dynamische programmeringsaanpak voor N-stapsbeslissingsproblemen zo al werkt. Wij geven nu - schematisch - deze werkwijze weer:

Gegeven is een probleem, dat de volgende eigenschappen bezit:

1. wanneer op tijdstip j ($1 \leq j \leq N$) de toestand S_j optreedt, dan bestaat bij die toestand een verzameling toegelaten oplossingen $\chi_j(S_j)$.
   [in het voorbeeld: $\chi_j(S_j) = \{x_j \mid 1 \leq x_j \leq 5 + j - S_j\}$ voor $j = 1, 2$]
2. wordt op tijdstip j ($1 \leq j \leq N$) in de toestand S_j een beslissing $x_j \in \chi_j(S_j)$ genomen, dan is er een opbrengst $h_j(S_j;x_j)$ over de periode van tijdstip j tot j+1.
   [in het voorbeeld: de respectieve $h_j(S_j;x_j)$; zie blz. 212]
3. wordt op tijdstip j ($1 \leq j \leq N$) in toestand S_j een beslissing $x_j \in \chi_j(S_j)$ genomen, dan wordt de toestand S_{j+1} op tijdstip j+1 ondubbelzinnig gegeven door $S_{j+1} = T_j(S_j,x_j)$.
   [in het voorbeeld: $T_j(S_j,x_j) = S_j + x_j$]

We lossen het N-stapsbeslissingsprobleem alsvolgt op (aangenomen dat het een maximalisatieprobleem betreft): *)

begin op tijdstip N:

1. bepaal de verzameling toegelaten oplossingen $\chi_N(S_N)$;
2. bepaal de opbrengstfunctie $h_N(S_N;x_N)$ naar x_N;
3. maximaliseer $h_N(S_N;x_N)$ naar x_N:

$$f_1(S_N) = \max_{x_N \in \chi_N(S_N)} \{h_N(S_N;x_N)\};$$

4. bepaal de transformatieformule $T_{N-1}(S_{N-1};x_{N-1}) = S_N$;
5. formuleer $f_1(S_N)$ als $f_1(T_{N-1}(S_{N-1};x_{N-1}))$.

Voor j = 1, 2, ..., N-1 volgen analoog de resterende N-1 stappen:

1a) bepaal $\chi_{N-j}(S_{N-j})$;
2a) bepaal $h_{N-j}(S_{N-j};x_{N-j})$;
3a) maximaliseer

$$h_{N-j}(S_{N-j};x_{N-j}) + f_j(T_{N-j}(S_{N-j},x_{N-j}))$$

naar x_{N-j}, dat geeft $f_{j+1}(S_{N-j})$;
4a) bepaal $T_{N-j-1}(S_{N-j-1},x_{N-j-1}) = S_{N-j}$;
5a) formuleer $f_{j+1}(S_{N-j})$ als

$$f_{j+1}(T_{N-j-1}(S_{N-j-1},x_{N-j-1})).$$

*) ga na dat het voorgaande probleem volgens deze regels is opgelost, zij het dat min i.p.v. max is uitgevoerd.

We passen deze regels nu nog eens toe op het eerste probleem (voorbeeld 6.1). Gemakshalve resumeren we nog de noodzakelijke modelelementen, waarover wij moeten beschikken aleer het probleem te kunnen oplossen:

1 - $\chi_j(S_j) = \{x_j \mid x_j \geq d_j - S_{j1}\}$ $\qquad j = 1, 2, 3.$

2 - $$h_j(S_j;x_j) = ad_j - c_1x_j - c_2S_{j1} + \begin{cases} - c_3(x_j-S_{j2}) & \text{als } x \geq S_{j2} \\ - c_4(S_{j2}-x_j) & \text{anders} \end{cases}$$

$j = 1, 2, 3.$

3 - $T_j(S_j,x_j) = (S_{j1}+x_j-d_j,x_j) = (S_{j+1\ 1},S_{j+1\ 2})$ $\quad j = 1, 2.$

Teneinde het inzicht in de structuur van het probleem te verdiepen zullen we nagaan hoe nu de toestanden op elkaar volgen en hoe de criteriumfunctie $y(S_1;z) = y(S_1;(x_1,x_2,x_3))$ geformuleerd wordt.

We veronderstellen dat aan het begin van de eerste maand geen voorraad aanwezig is en dat het produktieniveau van Lentegroet dan nul is.

$$S_1 = (0,0)$$
$$S_2 = (x_1-d_1,x_1)$$
$$S_3 = (S_{21}+x_2-d_2,x_2) = (x_1+x_2-d_1-d_2,x_2)$$

$$y(S_1;(x_1,x_2,x_3)) = ad_1 - c_1x_1 - c_3x_1 + ad_2 - c_1x_2 - c_2(x_1-d_1) +$$

$$+ \begin{cases} - c_3(x_2-x_1) + ad_3 - c_1x_3-c_2(x_1+x_2-d_1-d_2) + \begin{cases} - c_3(x_3-x_2) & 1) \\ - c_4(x_2-x_3) & 2) \end{cases} \\ \\ - c_4(x_1-x_2) + ad_3 - c_1x_3-c_2(x_1+x_2-d_1-d_2) + \begin{cases} - c_3(x_3-x_2) & 3) \\ - c_4(x_2-x_3) & 4) \end{cases} \end{cases}$$

1) als $x_3 \geq x_2 \geq x_1$

2) als $x_2 \geq x_1$ en $x_2 > x_3$

3) als $x_2 < x_1$ en $x_2 \leq x_3$

4) als $x_3 < x_2 < x_1$

In de derde maand starten we vanuit de, ons nog onbekende, toestand $S_3 = (S_{31}, S_{32}) = (v_3, x_2)$ en de maximale opbrengst, die over die maand bereikt kan worden luidt

$$f_1(S_3) = \max_{x_3 \in X_3(S_3)} \{h_3(S_3; x_3)\} =$$

$$= \max_{x_3 \geq d_3 - S_{31}} \begin{cases} ad_3 - c_1x_3 - c_2S_{31} - c_3(x_3 - S_{32}) & \text{als } x_3 \geq S_{32} \\ ad_3 - c_1x_3 - c_2S_{31} - c_4(S_{32} - x_3) & \text{anders} \end{cases}$$

$$= \max_{x_3 \geq d_3 - S_{31}} \begin{cases} ad_3 - c_2S_{31} + c_3S_{32} - (c_1 + c_3)x_3 & \text{als } x_3 \geq S_{32} \\ ad_3 - c_2S_{31} - c_4S_{32} - (c_1 - c_4)x_3 & \text{anders.} \end{cases}$$

Stel dat $d_3 - S_{31} \geq S_{32}$. *) In dat geval is het triviaal dat $x_3 = d_3 - S_{31}$; immers x_3 moet, wegens de negatieve term ervoor, zo klein mogelijk gekozen worden. De opbrengst is dan

$$f_1(S_3) = (a - c_1 - c_3)d_3 - (c_1 - c_2 + c_3)S_{31} + c_3S_{32} \quad \text{als} \quad S_{31} + S_{32} \leq d_3.$$

Is daarentegen $d_3 - S_{31} < S_{32}$ dan moeten we duidelijk de volgende gevallen onderscheiden.

1 - $c_1 \leq c_4$; nu moet x_3 zo groot mogelijk, echter niet groter dan S_{32}, gekozen worden, dus

$$x_3 = S_{32} \quad \text{en} \quad f_1(S_3) = ad_3 - c_2S_{31} - c_1S_{32} .$$

---

*) ga na dat hier staat $x_1 + 2x_2 \leq d_1 + d_2 + d_3$, wat geinterpreteerd kan worden als "de totale behoefte kan niet gedekt worden door op hetzelfde produktieniveau door te gaan".

2 - $c_1 > c_4$ en $d_3 - S_{31} \geq 0$; dan is (ga na) de beste waarde voor x_3 zo klein mogelijk, dus

$$x_3 = d_3 - S_{31} \quad \text{en} \quad f_1(S_3) = (a-c_1+c_4)d_3 + (c_1-c_2-c_4)S_{31} - c_4S_{32}.$$

3 - $c_1 > c_4$ en $d_3 - S_{31} < 0$; dan is eveneens de beste waarde voor x_3 zo klein mogelijk, dus

$$x_3 = 0 \quad \text{en} \quad f_1(S_3) = ad_3 - c_2S_{31} - c_4S_{32}.$$

Om het aantal mogelijke situaties enigszins te beperken, wat de duidelijkheid van de uitwerking ten goede komt, specificeren we nu de kostencoëfficiënten en de gevraagde hoeveelheden.

$a = 15$		$d_1 = 280$
$c_1 = 7$	$c_3 = 12$	$d_2 = 340$
$c_2 = 3$	$c_4 = 9$	$d_3 = 260.$

In onderstaande tabel worden nu de toestanden aan het begin van de derde maand gegeven met daarbij de optimale beslissingen en de opbrengsten.

maand 3		
toestand S_3	beslissing $x_3=z_3(S_3)$	opbrengst $f_1(S_3)$
$S_{31}+S_{32}\leq d_3 = 260$	$d_3-S_{31} = 260-S_{31}$	$-4d_3+16S_{31}+12S_{32} = -1040+16S_{31}+12S_{32}$
$S_{31}+S_{32}>d_3 = 260$	S_{32}	$15d_3- 7S_{31}- 3S_{32} = 3900- 7S_{31}- 3S_{32}$

We doen nu één stap terug naar de vorige maand en voeren allereerst de transformatie van de toestand uit:

$$S_3 = (S_{31},S_{32}) = (S_{21}+x_2-d_2,x_2).$$

De tabel met de optimale beslissingen luidt dan alsvolgt:

maand 3		
toestand $S_3=T_2(S_2,x_2)$	beslissing $x_3=z_3(T_2(S_2,x_2))$	opbrengst $f_1(T_2(S_2,x_2))$
$2x_2 + S_{21} \leq 600$	$600 - S_{21} - x_2$	$- 1480 + 16S_{21} + 28x_2$
$2x_2 + S_{21} > 600$	x_2	$4920 - 3S_{21} + 10x_2$

Voor de opbrengst vanaf de tweede maand schrijven we nu

$$f_2(S_2) = \max_{x_2 \geq d_2 - S_{21}} \begin{cases} 15d_2 - 7x_2 - 3S_{21} - 12(x_2-S_{22}) + f_1(T_2(S_2,x_2)) \\ \qquad\qquad \text{als } x_2 \geq S_{22} \\ 15d_2 - 7x_2 - 3S_{21} - 9(S_{22}-x_2) + f_1(T_2(S_2,x_2)) \\ \qquad\qquad \text{anders.} \end{cases}$$

Wanneer we dit uitwerken krijgen we, in verband met de onderscheiden toestanden S_3, de volgende vier opbrengstfuncties.

$$f_2(S_2) = \max_{x_2 \geq 340 - S_{21}} \begin{cases} - 1380 + 9x_2 + 13S_{21} + 12S_{22} \\ \qquad\qquad \text{als } (300- \tfrac{1}{2}S_{21}) \geq x_2 \geq S_{22} \\ 10.020 - 29x_2 - 6S_{21} + 12S_{22} \\ \qquad\qquad \text{als } x_2 \geq S_{22} \text{ en } x_2 > 300 - \tfrac{1}{2}S_{21} \\ - 1380 + 30x_2 + 13S_{21} - 9S_{22} \\ \qquad\qquad \text{als } x_2 < S_{22} \text{ en } x_2 \leq 300 - \tfrac{1}{2}S_{22} \\ 10.020 - 8x_2 - 6S_{21} - 9S_{22} \\ \qquad\qquad \text{als } x_2 < S_{22} \text{ en } x_2 > 300 - \tfrac{1}{2}S_{21} \end{cases}$$

Stel allereerst dat $(340-S_{21}) \geq \max(S_{22},300-\tfrac{1}{2}S_{21})$, dan wordt

$$x_2 = 340 - S_{21}$$

en

$$f_2(S_2) = 10.020 - 29(340-S_{21}) - 6S_{21} + 12S_{22} = 160 + 23S_{21} + 12S_{22}.$$

Is daarentegen $S_{22} \leq 340 - S_{21} < 300 - \frac{1}{2}S_{21}$, dan is ook een waarde van x_2 tussen die grenzen mogelijk, waarbij als opbrengstfunctie voorgeschreven is

$$f_2(S_2) = \max_{\substack{x_2 \geq 340-S_{21} \\ S_{22} \leq x_2 < 300-\frac{1}{2}S_{21}}} \{ -1380 + 9x_2 + 13S_{21} + 12S_{22} \}.$$

De maximale opbrengst wordt echter bereikt voor $x_2 = 300 - \frac{1}{2}S_{21}$ met

$$f_2(S_2) = 1320 + 8\tfrac{1}{2}S_{21} + 12S_{22}.$$

Voor $340 - S_{21} < S_{22}$ zijn ook de laatste twee opbrengstfuncties mogelijk. Is daarbij $300 - \frac{1}{2}S_{21} < S_{22}$ dan kunnen we de beslissing $x_2 = 300 - \frac{1}{2}S_{21}$ nemen met als opbrengst

$$f_2(S_2) = 7620 - 2S_{21} - 9S_{22}$$

deze opbrengst is echter alleen groter dan enige andere zolang $x_1 < 880/3$. Uit de veronderstelling $(340-S_{21}) < S_{22}$ volgt echter $x_1 > 310$, zodat de tweede opbrengstfunctie gebruikt moet worden, met als resultaat

$$x_2 = S_{22}$$

$$f_2(S_2) = 10.020 - 6S_{21} - 17S_{22}.$$

Voor $S_{22} \leq 300 - \frac{1}{2}S_{21}$ volgt eveneens $x_2 = S_{22}$ als optimale beslissing met opbrengst

$$f_2(S_2) = -1380 + 13S_{21} + 21S_{22}.$$

In verband met de volgende stap van de oplossingsmethode voeren we vast de transformatie $S_2 = T_1(S_1,x_1)$ uit:

$$S_{21} = x_1 - d_1 = x_1 - 280$$

$$S_{22} = x_1 \ .$$

Voor de tweede stap luiden dan de zojuist onderscheiden toestanden, beslissingen en opbrengsten alsvolgt:

1 - toestand S_2: $340 - x_1 + 280 \geq x_1 \Rightarrow x_1 \leq 310$

en

$340 - x_1 + 280 \geq 300 - \frac{1}{2}x_1 + 140 \Rightarrow x_1 \leq 360$

beslissing: $x_2 = 620 - x_1$

opbrengst: $f_2(T_1(S_1,x_1)) = -6280 + 35x_1$.

2 - toestand S_2: $x_1 \leq 310$

$340 - x_1 + 280 < 300 - \frac{1}{2}x_1 + 140 \Rightarrow x_1 > 360$

en toestanden, die hieraan voldoen zijn onmogelijk.

3 - toestand S_2: $340 - x_1 + 280 < x_1 \Rightarrow x_1 > 310$

en

$300 - \frac{1}{2}x_1 + 140 < x_1 \Rightarrow x_1 > 880/3$

beslissing: $x_2 = x_1$

opbrengst: $f_2(T_1(S_1,x_1)) = 11.700 - 23x_1$.

4 - toestand S_2: $x_1 > 310$

$x_1 < 880/3$

en ook deze toestanden zijn dus m.b.t. de gegeven getallen niet mogelijk.

Resumerend vinden we in onderstaande tabel de gegevens van de tweede maand

maand 2		
toestand $S_2=T_1(S_1,x_1)$	beslissing $x_2=z_2(T_1(S_1,x_1))$	opbrengst $f_2(T_1(S_1,x_1))$
$x_1 \leq 310$	$620 - x_1$	$- 6280 + 35x_1$
$x_1 > 310$	x_1	$11.700 - 23x_1$

Voor de derde en laatste stap verkrijgen we nu

$$f_3(S_1) = \max_{x_1 \geq d_1} \{15d_1 - 7x_1 - 12x_1 + f_2(T_1(S_1,x_1))\} =$$

$$= \max_{x_1 \geq 280} \begin{cases} 4200 - 19x_1 - \quad 6280 + 35x_1 & \text{als } x_1 \leq 310 \\ 4200 - 19x_1 + 11.700 - 23x_1 & \text{anders.} \end{cases}$$

Als uitkomst vinden wij:

$$x_1 = 310$$

$$f_3(S_1) = - 2080 + 16x_1 = 2880.$$

Nu werken we vanaf deze eerste maand terug naar de laatste maand om alle optimale beslissingen vast te stellen.

Voor de toestand van het systeem aan het begin van de tweede maand vinden we m.b.v. de opossing voor de eerste maand

$$x_1 \leq 310$$

$$(S_{21} = 310 - 280 = 30,\ S_{22} = 310)$$

en daarbij behoort de beslissing (tabel "maand 2")

$$x_2 = 620 - x_1 = 310.$$

Vervolgens gaan we naar de derde maand. De toestand aan het begin van die derde maand wordt nu gekarakteriseerd door

$$2x_1 + S_{21} = 620 + 30 = 650 > 600,$$

dus

$$x_3 = x_2 = 310.$$

De totale maximale opbrengst gedurende de drie maanden bedraagt, zoals hiervoor vermeld

$$y(S_1;z) = y((0,0);(310,310,310)) = f_3(S_1) = 2880.$$

Stochastische N-stapsbeslissingsproblemen.

Ook bij de oplossing van een stochastisch N-stapsbeslissingsprobleem begint men met de laatste stap. Men bepaalt ook dan weer de verzameling toegelaten beslissingen $\chi_N(S_N)$ en de opbrengst $h_N(S_N;x_N)$. Daar we nu niet altijd met zekerheid kunnen voorspellen wat de opbrengst van een stap zal zijn (we weten immers niet zeker in welke toestand het systeem zich na de stap zal bevinden), berekenen we de verwachte opbrengst van zo'n stap, die we evenwel ook met $h_N(S_N;x_N)$ aanduiden. Zoals in paragraaf 6.2 al is opgemerkt wordt de transformatieformule $T_j(S_j,x_j)$ nu vervangen door de overgangskans, d.w.z. de kans op een gegeven overgang,

$$P_j(\underline{S}_{j+1} = i \mid S_j;x_j).$$

We berekenen derhalve voor de functie $f_{j+1}(S_{N-j})$ de verwachtingswaarde

$$f_{j+1}(S_{N-j}) = \max_{x_{N-j}\in\chi(S_{N-j})} \{h_{N-j}(S_{N-j};x_{N-j}) + E(f_j(\underline{S}_{N-j+1})|S_{N-j};x_{N-j})\} \tag{6.12}$$

of, bij minimalisatieproblemen, hetzelfde met min i.p.v. max.

Voor een discrete kansverdeling, met m mogelijke toestanden, schrijven we voor (6.12)

$$f_{j+1}(S_{N-j}) = \max_{x_{N-j} \in \chi(S_{N-j})} \{h_{N-j}(S_{N-j};x_{N-j}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} P_{N-j}(\underline{S}_{N-j+1}=i \mid S_{N-j};x_{N-j})\ f_j(i)\}$$

en voor een continue kansverdeling g(i)

$$f_{j+1}(S_{N-j}) = \max_{x_{N-j} \in \chi(S_{N-j})} \{h_{N-j}(S_{N-j};x_{N-j}) +$$

$$+ \int_0^\infty f_j(y)\ g(y)\ dy\}.$$

Wij illustreren nu de dynamische programmeringsaanpak voor stochastische N-stapsbeslissingsproblemen met een tweetal voorbeelden.

voorbeeld 6.5

Een reisbureau heeft voor een periode van 6 jaar een hotel gepacht in een wintersportcentrum. Met een plaatselijke kolenhandelaar is een contract afgesloten, waarin is vastgelegd dat de kolenhandelaar elk jaar een vaste hoeveelheid brandstof zal leveren tegen betaling van een vast bedrag per jaar. Bovendien is overeengekomen dat het reisbureau, in geval van ontevredenheid over de leveranties, aan het eind van elk jaar het contract éénzijdig mag opzeggen.

De kolenhandelaar verkoopt drie soorten kolen, t.w. (1) superkolen, (2) kwaliteitskolen en (3) huishoodkolen. Levert de kolenhandelaar gedurende een jaar kolen van het soort (i) (i=1,2,3), dan bedraagt zijn winst resp. ƒ 435,--, ƒ 790,-- of ƒ 1050,--. De kans op opzegging van het contract na levering van kolensoort (i) duiden we aan met p_i en deze kans is onafhankelijk van het jaar van levering. $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}4$ en $p_3 = 0{,}6$.

De kolenhandelaar, een harde zakenman, vraagt zich nu af welke kolensoorten hij in de opeenvolgende jaren bij het hotel zal afleveren.

We houden ons bij de oplossing zoveel mogelijk aan de regels, die zojuist zijn gegeven.

We beschouwen als systeem "de kolenleverantie". De toestanden, die dit systeem kan aannemen, zijn voor alle tijdstippen j dezelfde, en wel:

1. geen leverantie; het contract is opgezegd: $S_j = 0$,
2. wel leverantie; het contract is niet opgezegd: $S_j = 1$.

De toegelaten beslissingen in deze twee toestanden zijn de volgende:

1. $S_j = 0$, dus geen leveranties meer: $x_j = 0$
2. $S_j = 1$, leverantie van superkolen: $x_j = 1$
   leverantie van kwaliteitskolen: $x_j = 2$
   leverantie van huishoudkolen: $x_j = 3$.

Dus

$$\chi(0) = \{0\}$$

$$\chi(1) = \{1, 2, 3\}.$$

De opbrengstfunctie $h_6(S_6;x_6)$ luidt:

$$h_6(0;0) = 0$$

$$h_6(1;1) = 435$$

$$h_6(1;2) = 790$$

$$h_6(1;3) = 1050.$$

Het zal iedereen duidelijk zijn dat $f_1(S_6) = \max\{h_6(S_6;x_6)\}$ bereikt wordt voor $x_6 = 3$ in $S_6 = 1$. In $S_6 = 0$ kan alleen de beslissing $x_6 = 0$ genomen worden.

De overgang van de toestand op tijdstip 5 naar die op tijdstip 6 wordt gegeven door de volgende kansen:

$$P_5(\underline{S}_6=0\,|\,S_5;x_5) = \begin{cases} 0{,}2 & S_5 = 1;\ x_5 = 1 \\ 0{,}4 & S_5 = 1;\ x_5 = 2 \\ 0{,}6 & S_5 = 1;\ x_5 = 3 \\ 1 & S_5 = 0;\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$P_5(\underline{S}_6=1\,|\,S_5;x_5) = \begin{cases} 0{,}8 & S_5 = 1;\ x_5 = 1 \\ 0{,}6 & S_5 = 1;\ x_5 = 2 \\ 0{,}4 & S_5 = 1;\ x_5 = 3 \\ 0{,}0 & S_5 = 0;\ x_5 = 0. \end{cases}$$

We gaan nu één stap terug. De maximaal verwachte opbrengst vanaf tijdstip 5 wordt

$$f_2(S_5) = \max_{x_5 \in X(S_5)} \{h_5(S_5;x_5) + \sum_{i=0}^{1} P_5(\underline{S}_5=i\,|\,S_5;x_5)\ f_1(i)\}. \qquad (6.13)$$

In onderstaande tabel geven wij de waarden, die de termen van het rechterlid van (6.13) kunnen aannemen.

S_5	x_5	$h_5(S_5;x_5)$	+	$\sum_{i=0}^{1} P_5(\underline{S}_6=i\,|\,S_5;x_5)f_1(i)$		
0	0	0	+	0	=	0
1	1	435	+	0,8 * 1050	=	1275
	2	790	+	0,6 * 1050	=	1420
	3	1050	+	0,4 * 1050	=	1470

Uit deze tabel blijkt, dat in $S_5 = 1$ de beslissing $x_5 = 3$ genomen moet worden, met als maximale verwachte opbrengst $f_2(S_5) = 1470$. In $S_5 = 0$ wordt uiteraard de beslissing $x_5 = 0$ genomen.

Voor de overgang van S_4 naar S_5 - en evenzo voor alle andere overgangen - vinden we kansen $P_4(\underline{S}_5=i\,|\,S_4;x_4)$ met dezelfde waarden als bij de overgang van S_5 naar S_6. Voor de vierde stap kunnen we dus de volgende tabel opstellen:

S_4	x_4	$h_4(S_4;x_4)$	+	$\sum_{i=0}^{1} P_4(\underline{S}_5=i\|S_4;x_4)f_2(i)$		
0	0	0	+	0	=	0
1	1	435	+	0,8 * 1470	=	1621
	2	790	+	0,6 * 1470	=	1672
	3	1050	+	0,4 * 1470	=	1638

In $S_4 = 1$ is derhalve de beslissing $x_4 = 2$ voorgeschreven met een maximale verwachte opbrengst $f_3(S_4) = 1672$.

De derde stap levert ons nu de waarden in de volgende tabel.

S_3	x_3	$h_3(S\ ;x\ )$	+	$\sum_{i=0}^{1} P_3(\underline{S}_4=i\|S_3;x_3)f_3(i)$		
0	0	0	+	0	=	0
1	1	435	+	0,8 * 1672	=	1772,6
	2	790	+	0,6 * 1672	=	1793,2
	3	1050	+	0,4 * 1672	=	1718,8

In $S_3 = 1$ wordt dus de beslissing $x_3 = 2$ genomen (en in $S_3 = 0$ de beslissing $x_3 = 0$).

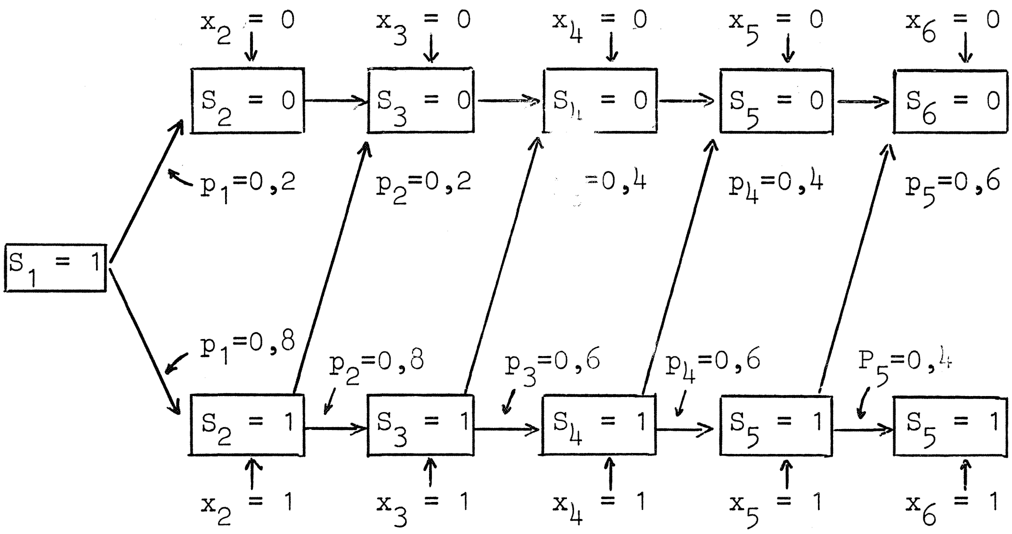
Op dezelfde manier voortgaande vinden we voor de tweede en de eerste stap de volgende tabellen:

S_2	x_2	$h_2(S_2;x_2)$	+	$\sum_{i=0}^{1} P_2(\underline{S}_3=i\|S_2;x_2)f_4(i)$		
0	0	0	+	0	=	0
1	1	435	+	0,8 * 1793,2	=	1869,56
	2	790	+	0,6 * 1793,2	=	1865,92
	3	1050	+	0,4 * 1793,2	=	1767,38

S_1	x_1	$h_1(S_1;x_1)$	+	$\sum_{i=0}^{1} P_1(\underline{S}_2=i\|S_1;x_1)f_5(i)$		
1	1	435	+	0,8 * 1869,56	=	1930,65
	2	790	+	0,6 * 1869,56	=	1911,74
	3	1050	+	0,4 * 1869,56	=	1797,82

Op tijdstip 1 is nog geen levering gedaan; de toestandsgrootheid S_1 heeft dan ook altijd de waarde 1.

We geven de strategie, die uit de voorgaande berekeningen gevonden kan worden, schematisch weer. $P_j(\underline{S}_{j+1}=i|S_j;x_j)$ wordt in dit schema afgekort als p_j.



De optimale winstverwachting $f_1(S_1) = f_1(1)$ bedraagt f 1930,65.

<u>voorbeeld 6.6</u>

Een aannemer van grondwerken heeft, voor een project, dat drie jaar duurt, een bulldozer in gebruik, die een levensduur van drie jaar heeft. Ieder jaar op 1 april beslist de aannemer of hij de bulldozer het komende jaar weer zal gebruiken dan wel zal vervangen. Als hij tot vervanging overgaat heeft de aannemer de keuze tussen een nieuwe en een tweedehands aankoop. De prijzen voor bulldozers zijn in onderstaande tabel vermeld. Bij iedere vervanging ruilt de aannemer zijn oude exemplaar in. In de tabel zijn daarom tevens inruilwaarden voor bulldozers gegeven. Ieder jaar is er door diverse omstandigheden kans op onherstelbare schade, zodat in dat jaar tot tussentijdse vervanging moet worden overgegaan. De kansen daarop zijn in de laatste kolom van de tabel gegeven. De tussentijds te vervangen bulldozer wordt geacht een schrootwaarde van f 100,-- te hebben. Doordat dan op korte termijn voor een vervanger gezorgd moet worden, is de aannemer bij zulk een katastrofe genoodzaakt een nieuwe

(0 jaar oude) bulldozer te kopen; de leeftijd van deze vervangende bulldozer wordt aan het einde van het desbetreffende jaar op 1 gesteld. Na afloop van de drie jaren wordt de in gebruik zijnde bulldozer tegen inruilwaarde verkocht. De aannemer begint met een 1 jaar oude bulldozer.

De aannemer vraagt zich nu af of hij gedurende de drie jaar zal vervangen, en zo ja wanneer en hoe.

leeftijd l in jaren	prijs	inruilwaarde	overlevingskans $P(\underline{l} > l)$
0	10.000,--	-,--	1,0
1	8.000,--	5.000,--	0,8
2	6.000,--	2.000,--	0,4
3	1.500,--	1.000,--	0,0

De toestand van het systeem "bulldozer" wordt weergegeven door de leeftijd $S_j = k$ $(k=1,2,3)$ van de bulldozer. De toestand op tijdstip 1 (1 april van het eerste jaar), vlak voor de beslissing valt,is dus $S_1 = 1$. De toegelaten beslissingen $x_j = k$ $(k=0,1,2$; voor alle tijdstippen $j)$ geven de leeftijd aan van de aan te schaffen bulldozer. Wordt op tijdstip j in toestand $S_j = k$ de beslissing $x_j = k = S_j$ genomen, dan betekent dat, dat het project met de oude bulldozer wordt voortgezet.

We beschouwen bij de oplossing van dit probleem kosten i.p.v. opbrengsten.

Over het derde jaar luidt de kostenfunctie $h_3(S_3;x_3)$, inclusief de verkoop aan het einde van het project:

S_3	x_3	$h_3(S_3;x_3)$	$f_1(S_3)$
1	0	10.000 - 5000 - 5000 = 0	
	1	0,2*9900 - 0,2*5000 - 0,8*2000 = -620	- 620
	2	6000 - 5000 + 0,6*9900 - 0,6*5000 + - 0,4*1000 = 3540	
2	0	10.000 - 2000 - 5000 = 3000	
	1	8000 - 2000 + 0,2*9900 - 0,2*5000 + - 0,8*2000 = 5380	
	2	0,6*9900 - 0,6*5000 - 0,4*1000 = 2540	2540
3	0	10.000 - 1000 - 5000 = 4000	4000
	1	8000 - 1000 + 0,2*9900 - 0,2*5000 + - 0,8*2000 = 6380	
	2	6000 - 1000 + 0,6*9900 - 0,6*5000 + - 0,4*1000 = 7540	

Voor de tweede stap krijgen we de volgende tabel:

S_2	x_2	$h_2(S_2;x_2)$	+	$\sum_i P_2(\underline{S}_3;i\|S_2;x_2)f_1(i)$		
1	0	10.000 - 5000	+	$f_1(1)$	=	4380
	1	0,2*9900	+	0,2 $f_1(1)$ + 0,8 $f_1(2)$	=	3880
	2	1000 + 0,6*9900	+	0,6 $f_1(1)$ + 0,4 $f_1(3)$	=	8168
2	0	10.000 - 2000	+	$f_1(1)$	=	7380
	1	8000 - 2000 + 0,2*9900	+	0,2 $f_1(1)$ + 0,8 $f_1(2)$	=	9888
	2	0,6*9900	+	0,6 $f_1(1)$ + 0,4 $f_1(3)$	=	7168
3	0	10.000 - 1000	+	$f_1(1)$	=	8380
	1	8000 - 1000 + 0,2*9900	+	0,2 $f_1(1)$ + 0,8 $f_1(2)$	=	10888
	2	6000 - 1000 + 0,6*9900	+	0,6 $f_1(1)$ + 0,4 $f_1(3)$	=	12168

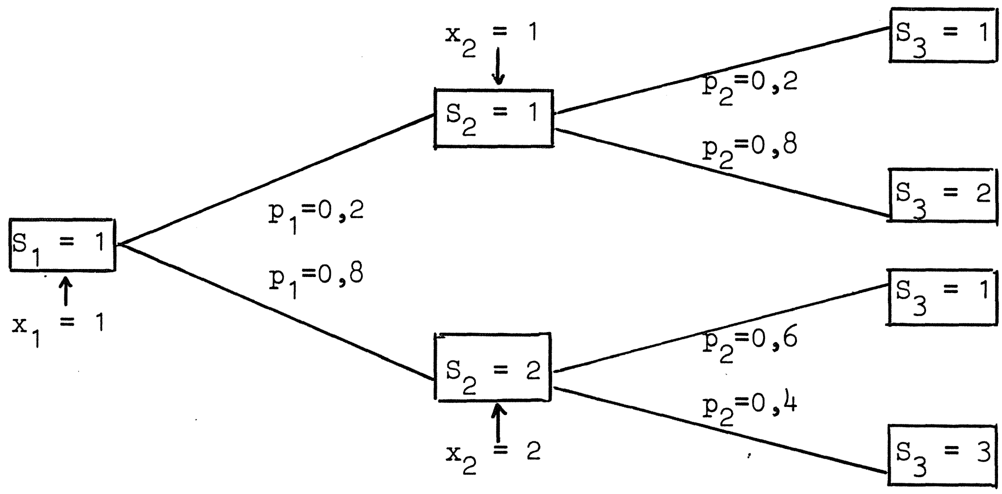
We vinden nu voor de minimale kosten $f_2(S_2)$ vanaf het tweede jaar:

S_2	x_2	$f_2(S_2)$
1	1	3880
2	2	7168
3	0	8380

Voor de eerste periode beginnen we met de toestand S_1 = 1 en we vinden derhalve voor de kosten van de volgende waarden:

S_1	x_1	$h_1(S_1;x_1)$		$\sum_i P_1(\underline{S}_2=i\mid S_1;x_1)f_2(i)$		
1	0	10.000 - 5000	+	$f_2(1)$	=	8880
	1	0,2*9900	+	$0{,}2\ f_2(1) + 0{,}8\ f_2(2)$	=	8490,40
	2	6000 - 5000 + 0,6*9900	+	$0{,}6\ f\,(1) + 0{,}4\ f\,(3)$	=	12620

De beste beslissing is in de eerste stap dus x_1 = 1, d.w.z. doorgaan met de aanwezige bulldozer. In schemavorm ziet de strategie er alsvolgt uit.



De totale verwachte kosten bedragen voor de gevonden strategie *f* 8490,40.

Tot besluit laten we nog eenmaal de hoofdzaken van de dynamische programmeringsaanpak voor N-stapsbeslissingsproblemen de revue passeren.

Zoals inmiddels wel duidelijk zal zijn geworden, houden we ons hier bezog met problemen, waar de verandering in de toestand van het systeem een essentiele rol speelt. We nemen aan dat we de tijdstippen, waarop de toestandsveranderingen plaatsvinden, kunnen nummeren ("discrete tijdstippen"). Bij iedere stap van tijdstip j naar tijdstip j+1 verandert de toestand S_j naar S_{j+1}. We hebben aan zo'n stap een (verwachte) directe opbrengst (c.q. een verlies) $h_j(S_j;x_j)$ toegevoegd. Door in toestand S_j een beslissing x_j te nemen kan de (verwachte) directe opbrengst beïnvloed worden. Bij de oplossing van een N-stapsbeslissingsprobleem willen we functies $z_j(S_j) = x_j$, de strategie, vinden, die aan iedere toestand S_j beslissingen toevoegen, en wel zo dat de (verwachte) totale opbrengst (verlies) wordt gemaximaliseerd (geminimaliseerd). Een strategie z, die hieraan voldoet heet <u>optimaal</u>.

Het is onderwijl duidelijk, dat men de beslissingen niet onafhankelijk van elkaar kan nemen, want de beslissing x_j op tijdstip j (j=1,2,...,N-1) heeft merkbaar invloed op de toestand S_{j+1}, die vanuit S_j bereikt wordt, en dus ook op de beslissingen, die in de toestand S_{j+1} toegelaten zijn.

We beperken ons voor de eenvoud tot maximalisatieproblemen, en schrijven

$$f_N(S_1) = \max_z y_N(S_1;z) = \text{maximale (verwachte) opbrengst vanuit } S_1,$$
in N stappen te bereiken.

Laten we de eerste stap weg, dan definieren we evenzo

$$f_{N-1}(S_2) = \text{maximale (verwachte) opbrengst vanuit } S_2, \text{ in de laatste}$$
N-1 stappen te bereiken.

Aldus voortgaande vinden we voor tijdstip N-k+1 (d.w.z. de eerste N-k stappen zijn weggelaten):

$$f_k(S_{N-k+1}) = \text{maximale (verwachte) opbrengst vanuit } S_{N-k+1} \text{ in de}$$
laatste k stappen te bereiken.

Het verschil tussen $f_N(S_1)$ en $f_{N-1}(S_2)$ wordt gevormd door de (verwachte) directe opbrengst $h_1(S_1;x_1)$. We schrijven dus voor het deterministische probleem:

$$f_N(S_1) = \max_{x_1 \in \chi(S_1)} \{h_1(S_1;x_1) + f_{N-1}(S_2)\} \tag{6.14}$$

en voor het stochastische probleem:

$$f_N(S_1) = \max_{x_1 \in \chi(S_1)} \{h_1(S_1;x_1) + E(f_{N-1}(\underline{S}_2)|S_1;x_1)\}. \tag{6.15}$$

In het algemeen vinden we derhalve de recurrente betrekking (6.12) die op blz. 224 vermeld is.

We lichten de formules (6.14) en (6.15) toe, door ze met woorden weer te geven: "Zoek de beste beslissing x_1^* in de toestand S_1, aangenomen dat in alle volgende stappen optimaal beslist wordt". Kapt men steeds de eerste stap van een gegeven beslissingsproces af, dan vindt men geheel analoog een verklaring voor (6.12).

Op deze wijze is een motivering verkregen voor de werkwijze, die bij de dynamische programmering toegepast wordt: "Bepaal, uitgaande van een optimale strategie voor de laatste k (k=0,1,...,N-2) stappen, een optimale beslissing $x^*_{N-k+1} = z^*(S_{N-k+1})$."

∞-stapsbeslissingsproblemen.

Zoals aan het eind van paragraaf 6.1 is opgemerkt blijkt bij ∞-stapsbeslissingsproblemen dikwijls dat er voor alle tijdstippen j één en dezelfde beslissingsregel $z(S_j)$ is. Bij de behandeling van het model van het derde probleem in paragraaf 6.2 (blz. 207) zijn bovendien enige vereenvoudigingen ingevoerd m.b.t. de verzameling toegelaten beslissingen, de (verwachte) opbrengst en de overgangskansverdeling:

$$1 - \chi_i(S_i) = \chi_j(S_j) = \chi(S) \quad \text{voor alle } i \text{ en } j, \text{ als } S_i = S_j = S$$

2 - $h_i(S_i;x_i) = h_j(S_j;x_j) = h(S;x)$ voor alle i en j, als $S_i = S_j = S$ en $x_i = x_j = x$.

3 - $P_i(\underline{S}_{i+1}=1|S_i,x_i) = P_j(\underline{S}_{j+1}=1|S_j;x_j) = P(\underline{S}_{j+1}=1|S_j;x_j)$ voor alle i en j, als $S_i = S_j$ en $x_i = x_j$

en voor deterministische ∞-stapsbeslissingsproblemen:

3a - $T_i(S_i,x_i) = T_j(S_j,x_j) = T(S,x)$ voor alle i en j, als $S_i = S_j = S$ en $x_i = x_j = x$.

Bij de behandeling van de oplossingsmethoden voor ∞-stapsbeslissingsproblemen zullen we alleen beslissingsproblemen beschouwen, waarvoor deze vereenvoudigingen opgaan.

We beschouwen het ∞-stapsbeslissingsprobleem als een limietgeval van het N-stapsbeslissingsprobleem, en we schrijven

$$\lim_{N\to\infty} f_N(S_1) = f(S_1)$$

voorzover deze limiet bestaat. Onder zeer algemene voorwaarden gaat dan (6.11) over in

$$f(S_1) = \max_{x_1 \in \chi(S_1)} \{h(S_1;x_1) + f(T_1(S_1,x_1))\}.^{*)} \qquad (6.16)$$

Vergelijkingen van de vorm (6.16) noemt men <u>functionaalvergelijkingen</u>; men moet hier n.l. onbekende functies bepalen i.p.v. onbekende variabelen. Zodra de functie $f(S_1)$ bekend is voor iedere waarde van $S_1 \in \mathcal{S}$ kunnen we door middel van (6.16) een optimale beslissing x_1^* vinden bij iedere toestand S_1. Dit wil zeggen dat een optimale beslissingsregel $z_0(S_1) = x_1^*$ is gevonden. Uit de structuur van het gestelde ∞-stapsbeslissingsprobleem volgt nu dat de strategie, bestaande uit deze ene beslissingsregel, ook optimaal is voor de overige beslissingstijdstippen. Bijgevolg:

$$z_0(S_j) = x_j^*, \quad \text{of } z_0(S) = x^*.$$

---

*) Voor minimalisatieproblemen wordt weer max door min vervangen; de behandeling is overigens geheel gelijk.

Voor stochastische ∞-stapsbeslissingsproblemen wordt de functionaalvergelijking alsvolgt geschreven:

$$f(S_1) = \max_{x_1 \in \chi(S_1)} \{h(S_1;x_1) + E(f(\underline{S}_2)|S_1;x_1)\} \tag{6.17}$$

$$= \max_{x_1 \in \chi(S_1)} \{h(S_1;x_1) + \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} P(\underline{S}_2=i|S_1;x_1)\ f(i) \\ \qquad \text{voor discrete kansverdelingen} \\ \int_I g(y|S_1;x_1)\ f(y)\ dy \\ \qquad \text{voor continue kansverdelingen.} \end{cases}$$

Men vindt voor deze problemen geheel analoog een optimale strategie $z(S)$ voor alle beslissingstijdstippen j.

Wanneer uit de formulering van een ∞-stapsbeslissingsprobleem blijkt dat verdiscontering moet worden toegepast, dan herschrijven wij de functionaalvergelijkingen alsvolgt:

voor het deterministische ∞-stapsbeslissingsprobleem

$$f(S_1) = \max_{x_1 \in \chi(S_1)} \{h(S_1;x_1) + \alpha f(T_1(S_1;x_1))\}$$

en voor het stochastische ∞-stapsbeslissingsprobleem

$$f(S_1) = \max_{x_1 \in \chi(S_1)} \{h(S_1;x_1) + \alpha E(f(\underline{S}_2)|S_1;x_1)\}, 0 < \alpha \leq 1.$$

Men merke op dat voor $\alpha = 1$ de vergelijkingen (6.16) en (6.17) weer ontstaan.

We behandelen nu drie oplossingsmethoden voor zowel deterministische als stochastische ∞-stapsbeslissingsproblemen, waarvan de eerste een zeer voor de hand liggende methode is. Hierbij wordt de optimale strategie iteratief bepaald. *) We gaan er van uit dat we een rij N-stapsbeslissingsproblemen (N=1,2,3,...) kunnen construeren, waarvan de opti-

*) Iteratief will zeggen: stapsgewijs wordt de oplossing verbeterd, waarbij veelal de oude oplossing als startoplossing voor de volgende fungeert (vgl. de simplex-methode).

male opbrengsten $f_N(S)$ convergeren naar de optimale opbrengst $f(S)$ van het ∞-stapsbeslissingsprobleem. We nemen, ter illustratie, nogmaals het voorbeeld 6.5 uit deze paragraaf (blz. 225) en onderstellen dat het contract niet is afgesloten voor een zestal jaren, maar voor een onbegrensde periode. Neem aan dat $\alpha = 1$.
Gemakkelijk is af te leiden dat

$$f_j(0) = 0 \qquad (j=1,2,\dots)$$

en voorzover de begintoestand 1 is vindt men, na min of meer uitgebreid rekenwerk, de volgende uitkomsten:

aantal stappen n van het probleem	$f_n(1)$
1	1050
2	1470
3	1672
4	1793,20
5	1869,56
6	1930,65
10	2074,91
15	2142,20
25	2171,80
35	2174,64
50	2174,99

Een nader onderzoek van de rij $\{f_n(1)\}_{n=1}^{\infty}$ leidt tot de conclusie

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 2175.$$

Kies nu $f(1) = 2175$, dan volgt $x_j^* = z_0(S_j)$ uit

$$2175 = \max_{x_j \in \{1,2,3\}} \{a_{x_j} + (1-p_{x_j}) \,.\, 2175\}$$

en hieruit volgt $x_j = 1$; d.w.z. altijd superkolen leveren.

Bij de tweede iteratiemethode, die we hier behandelen, gaan we uit van de functionaalvergelijking

$$y(S_1;z) = h(S_1;z(S_1)) + \alpha y(T(S_1;z(S_1));z) \qquad (6.18)$$

voor het deterministische geval, of

$$y(S_1;z) = h(S_1;z(S_1)) + \alpha E\{y(\underline{S}_2;z)|S_1;z(S_1)\} \qquad (6.19)$$

$$(0 \leq \alpha \leq 1)$$

voor het stochastische geval.
Men zal opmerken dat dit de opbrengstfuncties zijn, die we willen maximaliseren.

We kiezen nu een (willekeurige) strategie $z^{(0)} = z^{(0)}(S)$ en bepalen daarmee de functiewaarde $y(S_1;z^{(0)})$. Om nu een verbetering van dit resultaat te vinden gaan we een beslissingsproces invoeren met een zogenaamde <u>gemengde strategie</u>. Hierbij wordt in toestand S_1 op het eerste tijdstip de beslissing x_1 genomen, terwijl alle volgende beslissingen volgens de strategie $z^{(0)}$ worden genomen. Dat levert ons een opbrengstfunctie

$$y(S_1;(x_1)z^{(0)}) = h(S_1;x_1) + \alpha y(T(S_1;x_1);z^{(0)}) \qquad (6.20)$$

voor het deterministische geval, en

$$y(S_1;(x_1)z^{(0)}) = h(S_1;x_1) + \alpha E\{y(\underline{S}_2;z^{(0)})|S_1;x_1\} \qquad (6.21)$$

$$(0 \leq \alpha \leq 1)$$

voor het stochastische geval.

Voor <u>iedere</u> toestand S_1 kunnen we door (6.20) of (6.21) te maximaliseren als functie van x een beslissing x_1 vinden en dus een tweede strategie $z^{(1)}$. Levert dit nu voor tenminste één toestand S_1 een verbetering op van de opbrengstwaarde, dan kan men bewijzen dat voor $z^{(1)}$ geldt:

$$y(S_1;z^{(1)}) \geq y(S_1;(x_1)z^{(0)}) \geq y(S_1;z^{(0)}).$$

We gaan dan m.b.v. de strategie $z^{(1)}$ opnieuw de opbrengst $y(S_1;z^{(1)})$ berekenen. Deze laatste strategie kunnen we op zijn beurt weer trachten te verbeteren door de gemengde strategie $(x_1^*)z^{(1)}$ toe te passen. Op deze wijze wordt een rij opbrengstfuncties $y(S_1;z^{(n)})$ $(n=0,1,2,...)$ verkregen, die veelal convergeert naar de optimale opbrengstfunctie $f(S) = \max_z y(S;z)$.

Het zal duidelijk zijn, dat voor een optimale strategie z_0 moet gelden

$$f(S) = \max_{x\epsilon\chi(S)} y(S;(x)z_0).$$

We passen het voorgaande weer toe op het meermalen gebruikte voorbeeld 6.5. We beginnen in de toestand $S_1 = 1$, daar $f(0) = 0$, en we nemen aan dat $\alpha = 1$. Er zijn drie beslissingen, waaruit we kunnen kiezen:

$$z(1) = i \qquad\qquad (i=1,2,3)$$

en voor de toestand $S_1 = 0$ luidt de optimale strategie altijd

$$z(0) = 0.$$

Stel we kiezen $z^{(0)}(1) = 3$, d.w.z. "huishoudkolen leveren". We berekenen nu de opbrengst $y(S_1;z^{(0)})$:

$$y(0;z^{(0)}) = 0$$

$$y(1;z^{(0)}) = a_3 + (1-p_3)\, y(1;z^{(0)}) =$$

$$= 1050 + 0{,}4\, y(1;z^{(0)})$$

dus $\qquad y(1;z^{(0)}) = 1750.$

Vervolgens zoeken we een beslissing x_1 (= 1,2 of 3), die dit resultaat verbetert.

$$y(0;(x_1)z^{(0)}) = 0$$

$$y(1;(x_1)z^{(0)}) = a_{x_1} + (1-p_{x_1})\ y(1;z^{(0)}) =$$

$$= \begin{cases} 435 + 0{,}8.1750 = 1835 & \text{voor } x_1 = 1 \\ 790 + 0{,}6.1750 = 1840 & \text{voor } x_1 = 2 \\ 1750 & \text{voor } x_1 = 3. \end{cases}$$

Hieruit concluderen we dat een verbeterde strategie $z^{(1)}$ luidt:

$$z^{(1)}(0) = 0$$

$$z^{(1)}(1) = 2.$$

De functie $y(S_1;z^{(1)})$ luidt nu:

$$y(0;z^{(1)}) = 0$$

$$y(1;z^{(1)}) = 790 + (1-0{,}4)\ .\ y(1;z^{(1)}) \Rightarrow y(1;z^{(1)}) = 1975.$$

We herhalen de verbeteringsprocedure m.b.v. de gemengde strategie $(x_1)z^{(1)}$:

$$y(0;(x_1)z^{(1)}) = 0$$

$$y(1;(x_1)z^{(1)}) = a_{x_1} + (1-p_{x_1})\ y(1;z^{(1)}) =$$

$$= \begin{cases} 435 + 0{,}8.1975 = 2015 & \text{voor } x_1 = 1 \\ 1975 & \text{voor } x_1 = 2 \\ 1050 + 0{,}4.1975 = 1840 & \text{voor } x_1 = 3 \end{cases}$$

Een verbeterde strategie luidt derhalve

$$z^{(2)}(0) = 0$$

$$z^{(2)}(1) = 1$$

en de functie $y(S_1;z^{(2)})$:

$$y(0;z^{(2)}) = 0$$
$$y(1;z^{(2)}) = 435 + (1-0{,}2)\ y(1;z^{(2)}) \qquad y(1;z^{(2)}) = 2175.$$

Wederom gaan we proberen dit resultaat te verbeteren m.b.v. een gemengde strategie $(x_1)z^{(2)}$, en we krijgen dus:

$$y(0;(x_1)z^{(2)}) = 0$$
$$y(1;(x_1)z^{(2)}) = z_{x_1} + (1-p_{x_1})\ y(1;z^{(2)}) =$$
$$= \begin{cases} 2175 & \text{voor } x_1 = 1 \\ 790 + 0{,}6.2175 = 2095 & \text{voor } x_1 = 2 \\ 1050 + 0{,}4.2175 = 1920 & \text{voor } x_1 = 3. \end{cases}$$

De optimale beslissing x_1 luidt nu $x_1 = 1$ en we hebben geen verbetering kunnen verkrijgen. Onze conclusie is dus, dat $z_0(1) = 1$ de optimale strategie is, en er geldt

$$f(S_1) = f(1) = \max_{x \in \chi(1)} y(1;(x)z_0(1)).$$

Bij de derde en laatste oplossingsmethode, die in deze paragraaf ter sprake komt, probeert men regelrecht uit de functionaalvergelijkingen

$$f(S_1) = \max_{x_1 \in \chi(S_1)} \{h(S_1;x_1) + \alpha f(S_2)\} \tag{6.16}$$

of

$$f(S_1) = \max_{x_1 \in \chi(S_1)} \{h(S_1;x_1) + \alpha E(f(S_2)|S_1;x_1)\} \tag{6.17}$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$f(S)$ op te lossen. De wijze waarop dit geschiedt is veelal sterk afhankelijk van het probleem waar het in concreto om gaat.

We demonstreren deze methode weer aan het voorbeeld 6.5 (met $\alpha=1$). Daar $f(0) = 0$ kunnen we de functiewaarde in de toestand 0 even goed weglaten (daar past immers alleen de strategie $z_0(0) = 0$ bij). Voor $f(1)$ moet nu volgens (6.17) gelden

$$f(1) = \max_{x \in \chi(1)} \{a_x + (1-p_x)\, f(1)\} =$$

$$= \max_{x \in \chi(1)} \{a_x + f(1) - p_x\, f(1)\}.$$

Hieruit volgt

$$\max_{x \in \chi(1)} \{a_x - p_x\, f(1)\} = 0$$

en we kunnen nu gemakkelijk aantonen dat

$$f(1) \geq \frac{a_x}{p_x} .$$

Als x^* de optimale beslissing in S = 1 is, dan moet gelden

$$f(1) = \frac{a_{x^*}}{p_{x^*}} .$$

Dus:

$$f(1) = \max_{x \in \chi(1)} \frac{a_x}{p_x} = 2175 \qquad \text{voor } x = 1.$$

De optimale strategie luidt derhalve

$$z_0(0) = 0$$

$$z_0(1) = 1.$$

Opgaven

Opm. zorg er in het bijzonder voor dat het model van de onderstaande problemen correct is.

6.1. Los voorbeeld 3.3 (blz. 77) op m.b.v. dynamische programmering en laat daarbij gegeven zijn $a_1 = 2$ en $a_2 = 4$.

6.2. Ga voor opgave 2.3 (blz. 66) m.b.v. dynamische programmering na welke strategie het voordeligst is voor de E.A.A.M., wanneer gegeven is, dat het aantal proefboringen slechts drie bedraagt (beschouw niet alleen de strategieën, die op blz. 67 vermeld zijn).

(tentamen 1968)

6.3. De eigenaar van een viertal zeer exclusieve delicatessenwinkels heeft de hand kunnen leggen op een zestal struisvogeleieren, die hij zaterdag a.s. wil verkopen. Hij weet dat in de vier (verschillende) wijken waar zijn winkels gelegen zijn de vraag naar struisvogeleieren geheel verschillend is, en hij wil daarom de eieren zo gunstig mogelijk over de winkels verdelen. In onderstaande tabel is per winkel de door de eigenaar geschatte totale winst gegeven, als hij daar het aangegeven aantal eieren ten verkoop aanbiedt.

winkel / aantal eieren	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	4	2	6	2
2	6	4	8	3
3	7	6	8	4
4	7	8	8	4
5	7	9	8	4
6	7	10	8	4

Bereken m.b.v. dynamische programmering een optimaal verzendschema.

6.4. Vervolg op opgave 6.3.:

Stel dat de handelaar niet de (totale) winst per winkel schat, maar in plaats daarvan de kansen $P(\underline{x}_j=i)$ $(i=0,1,\ldots,6)$ op het verkopen van i eieren in winkel j. Die kansen zijn in onderstaande tabel gegeven.

winkel j:	1	2	3	4
$P(x_j=0)$	0,2	0,1	0,2	0,1
$P(x_j=1)$	0,4	0,3	0,2	0,1
$P(x_j=2)$	0,3	0,3	0,3	0,4
$P(x_j=3)$	0,1	0,3	0,3	0,4
$P(x_j>3)$	0	0	0	0

Wordt een ei niet verkocht, dan brengt dat een verlies van ƒ1 met zich mee.

Bereken m.b.v. dynamische programmering die verdeling van de eieren over de winkels, waarbij het verwachte verlies minimaal is.

6.5. Bingels' metaalbedrijf produceert op order o.a. een speciaal type ploegscharen. In drie achtereenvolgende weken moeter er resp. 2, 1 en 3 stuks worden geleverd. Er is, voordat men aan deze order begint, geen voorraad ploegscharen meer, terwijl de directie na beeindiging van de orders er ook geen in voorraad meer wil houden. De produktiekosten zijn afhankelijk van de te produceren hoeveelheden, en zijn vermeld in onderstaande tabel.

aantal ploegscharen	0	1	2	3	4
totale produktiekosten in ƒ100	0	5	8	10	11

De voorraadkosten bedragen ƒ100 per week per stuk over het aan het eind van die week aanwezige aantal.

Gevraagd: Hoeveel ploegscharen zal men resp. in week 1, 2 en 3 moeten maken opdat de totale kosten minimaal zijn?

Opm.: de afleveringen vinden aan het einde van iedere week plaats.

6.6. De frekwente cafébezoeker Kobus Gokker speelt met zijn maat Jan de Kraker graag het volgende dobbelspel. Om de beurt maakt een speler een serie van hoogstens zes worpen met één dobbelsteen, maar hij mag ook eerder ophouden. De laatste worp van de serie is bepalend voor de uitkomst van het spel. Wordt bij die laatste worp een zes gegooid, dan behoeft de werper niet te betalen en hij ontvangt ook niets, tenzij die laatste worp juist de zesde is: hij ontvangt dan ƒ 3,60. Gooit hij bij de <u>laatste</u> worp echter een lager aantal ogen x, dan moet hij betalen, en wel een zeker bedrag y per punt verschil met 6 (dus (6-x)y). Die bedragen y verschillen voor iedere worp en luiden:

eerste worp	$y = 1$ ct.	vierde worp	$y = 8$ ct.
tweede worp	$y = 2$ ct.	vijfde worp	$y = 16$ ct.
derde worp	$y = 4$ ct.	zesde worp	$y = 32$ ct.

Bepaal m.b.v. dynamische programmering wanneer Kobus moet ophouden, als hij zich aan kostenminimalisatie houdt.

6.7. Los opgave 2.3 (blz. 66) op als ∞-stapsbeslissingsprobleem. Beschouw daarbij de volgende strategieën:

1 - iedere boor met leeftijd 1 vervangen

2 - " " " " 2 "

3 - " " " " 3 " .

6.4. Bijzondere onderwerpen: de gemiddelde opbrengst.

In deze paragraaf wordt een ander criterium voor ∞-stapsbeslissingsproblemen, dan tot dusver is aangenomen, behandeld. In de vorige paragrafen is als criterium voor de optimaliteit van strategieën de - al of niet verdisconteerde - totale opbrengst (of kosten) gehanteerd. Bovendien is de dynamische programmeringsaanpak, die bij de bepaling van die totale opbrengst wordt toegepast, alleen van toepassing op problemen, waar slechts op equidistante tijdstippen beslissingen kunnen worden genomen. Bij de methoden, die we nu zullen bespreken is dat niet vereist; we zullen aannemen dat de beslisser zelf het tijdstip kan bepalen, waarop hij wil beslissen.

Laten we eens een willekeurig probleem beschouwen en onse aandacht daarbij richten op de wandeling die het systeem maakt door de toestandsruimte S. We maken de volgende veronderstellingen: de beslisser houdt zich niet afzijdig en past een gegeven strategie z toe. Voorts bestaat er een toestand S(z), waarin het systeem na korter of langer tijd steeds weer terug keert. De tijd $\underline{t}(i)$, die verstrijkt tussen het tijdstip waarop S(z) (i-1)-keer is opgetreden en het tijdstip waarop S(z) voor de i^{de} keer optreedt is stochastisch, evenals de opbrengst $\underline{h}(i)$ over die periode. De kansverdelingen van $\underline{t}(i)$ en $\underline{h}(i)$ zijn gedefinieerd, groepsgewijs onafhankelijk en identiek, en bezitten zeker een eerste en tweede moment, die beiden eindig zijn; het eerste moment is bovendien ongelijk aan nul.

$$E(\underline{t}(i)) = E(\underline{t}(j)) = E(\underline{t})$$

$$E(\underline{h}(i)) = E(\underline{h}(j)) = E(\underline{h})$$

$$0 < E\underline{t},\ E\underline{h} < \infty$$

$$E\underline{t}^2,\ E\underline{h}^2 < \infty.$$

De kansverdelingen g en f zijn overigens afhankelijk van het natuurlijke proces en de toegepaste strategie z.

Laten we, zoals gezegd, het systeem volgen bij zijn gang door de toestandsruimte. Zodra het systeem de toestand S(z) heeft aangedaan gaan we gedurende een tijdsperiode T precies bijhouden hoeveel keer daarna het systeem weer in S(z) verkeert en hoe groot de opbrengst is gedurende die tijd. We hebben daarmee een realisering van het beslissingsproces, die we aanduiden met ω, en een opbrengst $H_T(\omega)$.

De gemiddelde opbrengst, d.w.z. de opbrengst per tijdseenheid luidt nu

$$H_T(\omega)/T.$$

Daar we geïnteresseerd zijn in ∞-stapsbeslissingsproblemen, vragen we ons af wat er zal geschieden indien T toeneemt. Men kan nu bewijzen, dat, behoudens een kans 0, voor iedere toekomstige ontwikkeling ω zal gelden:

$$\lim_{T\to\infty} H_T(\omega)/T = \mathcal{E}\underline{h}/\mathcal{E}\underline{t}.$$

Men zal stellig concluderen dat we, afgezien van eventualiteiten die met kans 0 optreden, een criterium

$$y(S;z) = \mathcal{E}\underline{h}/\mathcal{E}\underline{t}$$

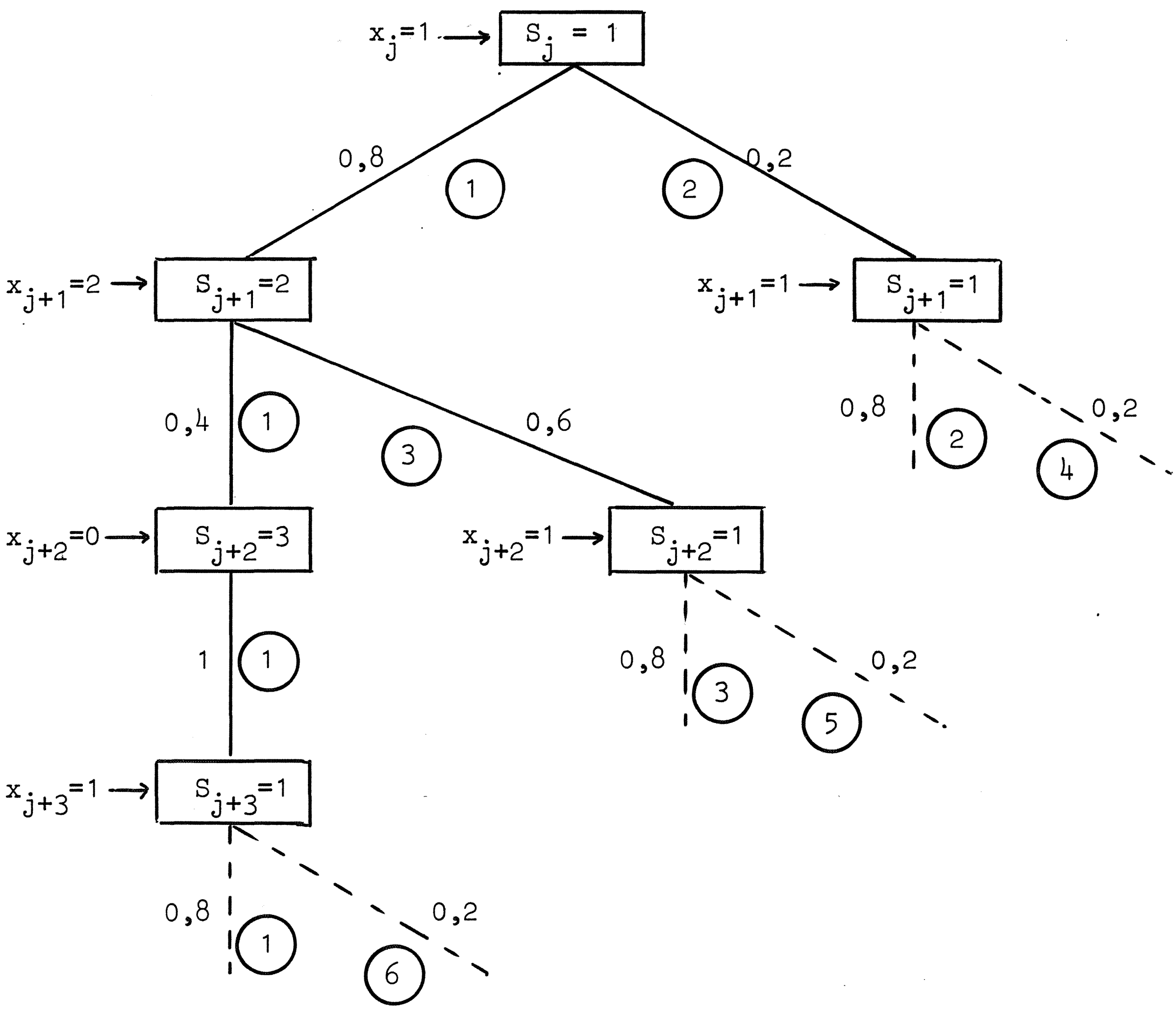
gevonden hebben, dat bruikbaar is voor die ∞-stapsbeslissingsprocessen, welke op grond van hun onbegrensd grote totale opbrengsten niet vergelijkbaar zijn. We kunnen bovendien zonder bezwaar problemen behandelen, waar de beslissingen op willekeurige (niet equidistante) tijdstippen moeten worden genomen.

Als voorbeeld van deze methode, die, naar de herhaling van de toestand S(z), herhalingsprogrammering wordt genoemd, lossen we een variant op van voorbeeld 6.6 (blz. 229). Neem aan dat het niet om een projectduur van 3 jaar gaat, maar dat de aannemer altijd een bulldozer nodig heeft. We beschouwen de strategie "alleen door een nieuwe bulldozer vervangen als de in gebruik zijnde 3 jaar oud is", die we aanduiden met

$z = (3,0)$.

De twee getallen (3,0) die tussen haakjes zijn vermeld heten de parameters van de strategie. Voor de goede orde zij opgemerkt dat we alleen strategieën beschouwen, die op grond van een eindig aantal parameters van elkaar kunnen worden onderscheiden.

We kiezen als S(z) de toestand S = 1, d.w.z. een 1 jaar oude bulldozer. In een schetsje ziet het beginstuk van alle mogelijke wandelingen, die beginnen in de toestand S = 1, er uit als een boom (ga na):



De mogelijke wandelingen zijn genummerd m.b.v. omcirkelde getallen. De andere getallen die naast de pijlen staan zijn de gegeven kansen op een stap, die door de pijl wordt weergegeven. We zien nu dat in iedere wandeling de toestand S = 1 na korter of langer tijd herhaald wordt. Op grond van de kansen die gegeven zijn kan men de verwachte tijdsduur tot de eerste herhaling uitrekenen.

De kans om de eerste herhaling via wandeling 1 te bereiken is

$$0{,}8 \times 0{,}4 \times 1 = 0{,}32$$

via wandeling 2 is dat 0,2 en via wandeling 3

$$0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48.$$

De verwachte tijdsduur $E\underline{t}$ luidt derhalve

$$E\underline{t} = 0{,}32\times 3 + 0{,}2\times 1 + 0{,}48\times 2 = 2{,}12.$$

De verwachte opbrengst $E\underline{h}$ vinden we analoog

$$E\underline{h} = 0{,}32(10.000-1000) + 0{,}2(10.000-100) + $$
$$+ 0{,}48(10.000-100) = f\ 9612,--.$$

De criteriumwaarde is dan

$$y(S;z) = y(S;(3,0)) = E\underline{h}/E\underline{t} = f\ 9612/2{,}12 \cong f\ 4534,--$$

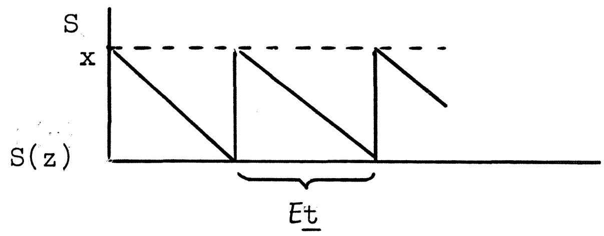
en dat zijn de gemiddelde verwachte kosten van een stap van het systeem "bulldozer" onder de strategie z = (3,0).

Een tweede voorbeeld dat we m.b.v. herhalingsprogrammering oplossen is het volgende.

voorbeeld 6.7

De pomphouder van de plaatselijke witte (super-)benzinepomp in Zeedorp kan, wanneer hij dat wenst, op elk moment de tank van de pomp laten bijvullen, zonder levertijd. De inkoopkosten van een hoeveelheid van x liter benzine bedragen $f(x) = c_1 + c_2x$. De voorraadkosten bedragen k per liter per dag over de gemiddelde voorraad op die dag. De pomphouder neemt aan dat hij een constante omzetsnelheid heeft van α liter per dag. Hoeveel liter moet hij nu per levering bij laten tanken? De capaciteit van de tank speelt geen rol.

De toestand S van het systeem "benzinepomp" wordt gegeven door de nog aanwezige hoeveelheid benzine. Als S(z) kiezen we S = 0.



De "herhalingstijd" $E\underline{t}$ is eenvoudig te berekenen. Als de aanvullings-order x liter bedraagt, dan is

$$E\underline{t} = x/\alpha.$$

Voor de verwachte totale kosten gedurende zo'n periode vinden we:

1 - inkoopkosten $f(x) = c_1 + c_2x$

2 - voorraadkosten $\frac{1}{2}kx.(x/\alpha)$,

zodat

$$E\underline{h} = c_1 + c_2x + \tfrac{1}{2}kx^2/\alpha.$$

Hieruit volgt

$$y(S;z) = \frac{c_1+c_2x+\frac{1}{2}kx^2/\alpha}{x/\alpha} =$$

$$= \alpha c_1/x + \alpha c_2 + \tfrac{1}{2}kx.$$

Deze kosten willen we minimaliseren, dus

$$\frac{dy(S;z)}{dx} = - \alpha c_1/x^2 + \tfrac{1}{2}k = 0$$

$$\Longrightarrow x = \sqrt{2\alpha c_1/k}.$$

De pomphouder verkoopt eveneens bromfietsen, waarvoor geldt dat de inkoopkosten van een partij ter grootte van x bromfietsen $f'(x) = c_1' + c_2'x$ bedragen. De voorraadkosten bedragen k' per stuk per dag, zoals bij de benzine ook het geval was. Een aanvulling van de voorraad kan weer direct geschieden, zodat geen neen-verkoop behoeft voor te komen. De kans dat op een dag k bromfietsen worden verkocht wordt gegeven door:

$$P(\underline{k}=k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k! \qquad \text{(poissonverdeling).}$$

De pomphouder vraagt zich af of er een even eenvoudige formule bestaat voor de te bestellen hoeveelheid bromfietsen (x) als hem hierboven gegeven is voor de benzine.

De toestand S van het systeem "bromfietsen" karakteriseren we weer door de voorraadstand en voor S(z) kiezen we S = 0.

We willen nu weten wat de kansverdeling is van de tijd $\underline{t}_k$ waarop klant k binnenkomt. Daaruit kunnen we dan $\mathcal{E}\underline{t}$ berekenen:

$$\mathcal{E}\underline{t} = \mathcal{E}\underline{t}_x.$$

Men kan aantonen dat de kansdichtheid van $\underline{t}_k$ alsvolgt luidt

$$g(t|k) = \lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}/(k-1)! \qquad \text{(gamma verdeling).}$$

De verwachting $\mathcal{E}\underline{t}_k$ wordt gegeven door

$$\mathcal{E}\underline{t}_k = k/\lambda$$

en dus

$$\mathcal{E}\underline{t} = \mathcal{E}\underline{t}_x = x/\lambda$$

(vgl. de herhalingstijd voor benzine).

De voorraadkosten voor de bromfiets, die als nummer j in volgorde verkocht wordt, zijn

$$k'\mathcal{E}\underline{t}_j = k'j/\lambda$$

en voor alle x bromfietsen van een order belopen dus de totale verwachte voorraadkosten

$$\sum_{j=1}^{x} k'j/\lambda = \tfrac{1}{2}x(x+1)k'/\lambda.$$

De inkoopkosten waren $f'(x) = c_1' + c_2'x$, zodat

$$\mathcal{E}\underline{h} = \tfrac{1}{2}x(x+1)k'/\lambda + c_1' + c_2'x$$

en

$$y(S;z) = \mathcal{E}\underline{h}/\mathcal{E}\underline{t} = \tfrac{1}{2}(x+1)k' + c_1'\lambda/x + c_2'\lambda.$$

Als eerste benadering (het gaat immers om gehele aantallen bromfietsen) stellen we nu

$$\frac{dy(S;z)}{dx} = 0 = \tfrac{1}{2}k' - c_1'\lambda/x^2$$

en hieruit volgt dan weer

$$x = \sqrt{2\lambda c_1'/k'}\ .$$

Opgaven

6.8. Bereken voor de hier behandelde variant op voorbeeld 6.6 van een tweetal andere strategieën de gemiddelde verwachte kosten.

6.9. Bereken m.b.v. de gemiddelde verwachte kosten de gunstigste strategie voor opgave 2.3.

6.10. Een handelaar in landbouwwerktuigen heeft in zijn opslagruimte plaats voor 3 landbouwtraktoren. De wekelijkse vraag naar landbouwtraktoren is onafhankelijk verdeeld en overschrijdt het aantal 4 niet. De verdeling is alsvolgt:

wekelijkse vraag i	0	1	2	3	4
$P(\underline{x}=i)$	1/4	1/2	1/8	1/16	1/16

De handelaar heeft als voorraadpolitiek: "aanvullen tot 3 als er minder dan 2 in vooraad zijn". De kosten die hij maakt en die van invloed zijn op de keuze van zijn strategie zijn de volgende:

1-voorraadkosten ƒ 100,-- per stuk per week over de aan het einde van die week aanwezige voorraad;

2-boetekosten ƒ 500,-- per traktor die gevraagd, maar niet uit voorraad geleverd kan worden.

De aanvulling van de voorraad geschiedt aan het einde van de week, zonder levertijd, en brengt geen bestelkosten met zich mee. De aanvulling omvat eveneens de reeds bestelde, maar door ontoereikende voorraad nog niet afgeleverde exemplaren.

Bereken de gemiddelde verwachte kosten voor de strategie van de handelaar.

6.11. Bereken voor opgave 3.2 de gunstigste van de onderstaande drie alternatieven door de gemiddelde verwachte opbrengsten te vergelijken.

1-alleen defecte units vervangen;
2-periodiek om de 200 bedrijfsuren vervangen (èn alle defecte units);
3-periodiek om de 400 bedrijfsuren vervangen (èn alle defecte units).

7. NETWERKEN.

7.1. Inleiding.

In de praktijk komt het vaak voor dat een project bestaat uit een groot aantal activiteiten, die soms gelijktijdig, soms na elkaar uitgevoerd worden. Het gelijktijdig dan wel na elkaar uitvoeren vindt zijn oorzaak in een volgorderelatie, die tussen de verschillende activiteiten bestaat. Dit houdt in dat bij planning van een project voor iedere activiteit bekend behoort te zijn:

- welke activiteiten er aan vooraf moeten gaan, en
- welke activiteiten pas kunnen beginnen nadat de gegeven activiteit is beeindigd.

Voorbeelden van dergelijke projecten zijn o.a. de bouw van een schip, de bouw van een kantoor en de aanleg van een autoweg.

Men kan bij dergelijke projecten de relaties, die tussen de activiteiten bestaan, grafisch uitbeelden d.m.v. een zogenaamd netwerk (d.i. een model ervan). Zoals wij later zullen zien kan ook bij het oplossen van andere planningsproblemen dankbaar gebruik gemaakt worden van netwerken. Voor een bepaald project wordt b.v. het netwerk gegeven als in onderstaande figuur.

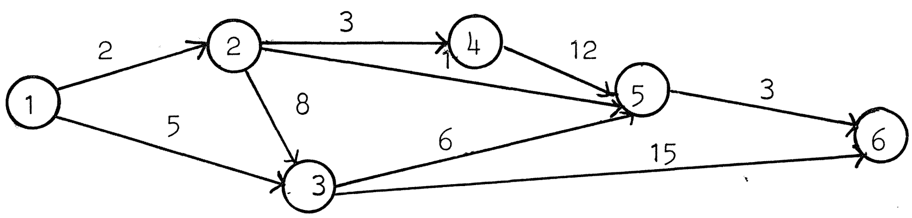


fig. 7.1

Zoals uit de figuur blijkt bestaat een netwerk uit een aantal v.l.n.r. genummerde cirkeltjes, knooppunten geheten, die verbonden worden door pijlen*). Iedere activiteit wordt nu voorgesteld door één pijl, waarvan de punt gericht is naar het eindpunt van de activiteit.

*) Dit is, zoals men zich wellicht zal herinneren, een graaf.

Om de pijlen te kunnen onderscheiden aan de hand van hun begin- en eindpunten, eisen we dat een activiteit éénduidig bepaald is door z'n begin- en eindpunt. We geven dan ook iedere activiteit aan met a(i,j), waarin i het nummer is van het beginknooppunt, en j dat van het eindknooppunt van de pijl (activiteit). Het is gebruikelijk een netwerk zo te tekenen dat het één beginpunt, de oorsprong, en één eindpunt, de voltooing, heeft. Aan iedere activiteit a(i,j) is een getal t(i,j) toegevoegd (zie figuur 7.1), dat de bewerkingstijdsduur van die activiteit aangeeft. We kunnen nu voor zo'n project, aan de hand van het netwerk, de tijd berekenen, die minimaal nodig is om het geheel uit te voeren.

Een ander probleem, dat in aanmerking komt om m.b.v. netwerken opgelost te worden is het volgende. Wanneer wij van een aantal plaatsen weten wat hun onderlinge afstanden zijn, dan willen wij van twee willekeurige plaatsen uit dan gegeven aantal weten wat de kortste weg is die hen verbindt. We kunnen dan van de gegeven plaatsen en de wegen die hen verbinden een netwerk tekenen:

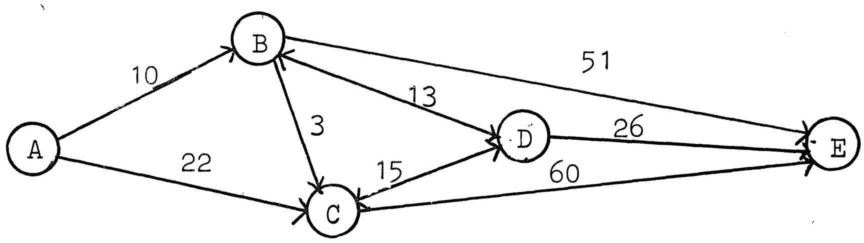


fig. 7.2

Zoals men ziet kan men van A naar E komen over B of over C of over B en D of C en D, etc. Van deze routes moet dan de kortste weg bepaald worden. Aan iedere pijl (die nu niet altijd naar één punt gericht behoeft te zijn; eenrichtings- vs. tweerichtingsverkeer!) is ondubbelzinnig een getal toegevoegd, dat b.v. de afstand tussen de plaatsen aangeeft, of de tijd nodig om langs die weg van de ene plaats in de andere te komen. De weg tussen twee __naburige__ plaatsen, d.w.z. plaatsen, die in het netwerk door één pijl worden verbonden (een zogenaamd traject), noteren we als volgt: laten A en B naast elkaar liggen (vgl. figuur 7.2) en laat hun onderlinge afstand 10 km. zijn, dan schrijven we AB-10.

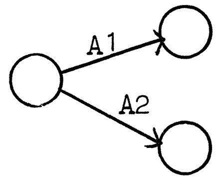
Het derde probleem, dat hier behandeld wordt, betreft capaciteitsvraagstukken. Stel men heeft tussen twee plaatsen een leidingenstelsel, waardoor vloeistof gepompt moet worden. Van iedere leiding is de capaciteit bekend. Men kan nu m.b.v. netwerken de maximale (doorlaat-) capaciteit van het stelsel als geheel berekenen. Een zelfde probleem doet zich o.a. voor bij grote transporten en stroomvoorzieningen.

7.2. De langste weg ("het kritieke pad").

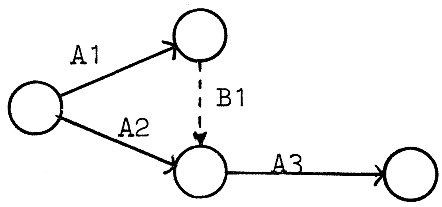
Beschouw het volgende project, waarvan in onderstaande tabel de volgorderelaties van de activiteiten a(i,j) onderling zijn gegeven. Daarbij is voor iedere activiteit a(i,j) zijn bewerkingstijdsduur t(i,j) gegeven. Omdat we voorshands nog niet de nummering van de knooppunten in het te tekenen netwerk kennen, worden de activiteiten achter elkaar doorgenummerd, evenals hun bewerkingstijden. Wat de notatie betreft: met A3 ← A2, A1 wordt aangegeven dat A1 en A2 aan A3 vooraf moeten gaan.

activiteit	tijdsduur in weken	volgordebeperkingen
A1	6	
A2	4	
A3	3	A3 ← A2,A1
A4	4	A4 ← A1
A5	2	A5 ← A1
A6	5	A6 ← A4,A3
A7	3	A7 ← A5,A4,A3
A8	10	A8 ← A5,A4,A3
A9	12	A9 ← A6
A10	3	A10 ← A9,A8
A11	14	A11 ← A7

We gaan nu van dit project een netwerk tekenen. Voor de eerste twee activiteiten zijn geen volgordebeperkingen opgegeven, waaruit we concluderen dat ze beide gelijktijdig vanuit de oorsprong kunnen starten.

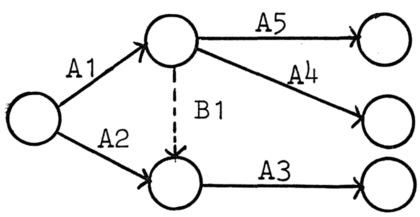


De volgende activiteit A3 kan pas beginnen, nadat A1 en A2 zijn beeindigd. Verder is gegeven dat A1 ook aan A4 en A5 vooraf moet gaan. Daar A1 en A2 ieder in een ander knooppunt eindigen (vanwege de éénduidigheid bij de onderscheiding van de pijlen) voeren we een zogenaamde dummy-activiteit (B1) in, om toch de volgorderelatie A3 ← A2,A1 te kunnen uitbeelden:



De dummy-activiteiten, die in dit soort situaties worden gebruikt, worden met stippellijnen aangegeven. Aan iedere dummy-activiteit wordt een bewerkingstijdsduur van nul tijdseenheden toegekend, zodat ze niet van invloed is op de totale tijdsduur van het project.

A4 en A5 worden alleen door A1 vooraf gegaan, en kunnen dus zonder meer achter A1 getekend worden:



Men ondervindt in deze situatie geen hinder van de combinatie A3 ← A2,A1 en A4 ← A1, daar de pijlpunt van B1 naar het eindpunt van A2 gericht is. Wij hebben hiermee de twee meest voorkomende gevallen gegeven, waarin dummy-activiteiten worden toegepast.

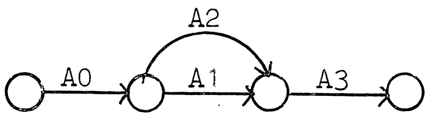
Schematisch weergegeven zijn dat:

omschrijving:

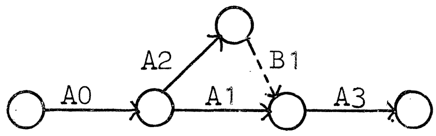
A1 ← A0

A2 ← A0

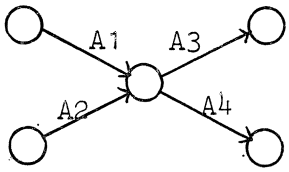
A3 ← A2,A1



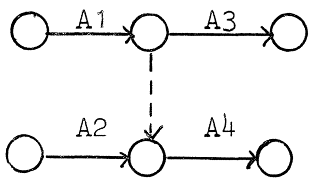
fout, omdat A1 en A2 niet eenduidig door hun begin- en eindknooppunten zijn bepaald.



goed

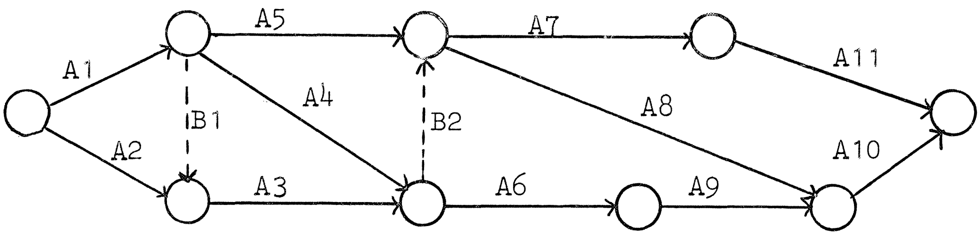


fout, omdat A3 ← A2 niet wordt geeist.

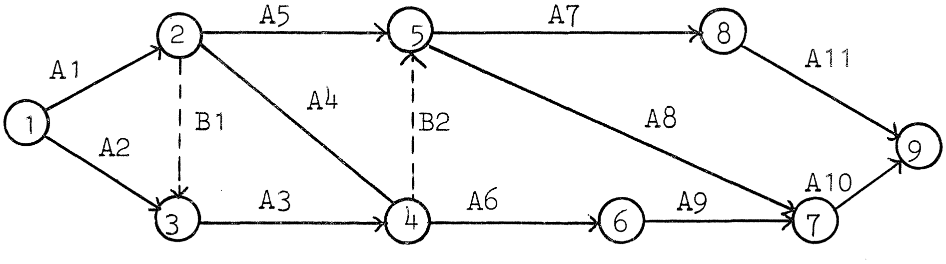


goed

Door achtereenvolgens de volgorderelaties uit te beelden, rekening houdend met de hierboven staande regels voor de toepassing van dummy-activiteiten, krijgen we het volgende netwerk.



De knooppunten in het netwerk worden nu opvolgend genummerd en wel zo dat de eindpunten j van de pijlen a(i,j) een hoger nummer krijgen dan de beginpunten i (deze eigenschap is transitief: i < j en j < k ⟹ i < k). In het gegeven netwerk zijn er 9 knooppunten, die als volgt worden genummerd:



Om nu de totale minimale tijdsduur van het gehele project te berekenen, gaan we het vroegste tijdstip bepalen, waarop de activiteiten A10 en A11 beeindigd kunnen zijn. Dat geschiedt m.b.v. dynamische programmering. We gaan n.l. aan de hand van de in dit netwerk getekende volgorderelaties en de gegeven bewerkingstijdsduren, de vroegste tijdstippen v(i) berekenen, waarop de knooppunten i worden bereikt en waarop dan met de activiteiten a(i,j), die vanuit die knooppunten starten, kan worden begonnen. Voor het laatste knooppunt N (hier N=9) is het vroegste tijdstip v(N) dat, waarop het project "op z'n vroegst" kan zijn beeindigd. Aan de oorsprong wordt een vroegste tijdstip v(1) = 0 toegevoegd. Voor de bepaling van de overige vroegste tijdstippen maken we gebruik van de dynamische programmeringsaanpak voor de oplossing van deterministische N-stapsbeslissingsproblemen. We herinneren daartoe aan de formule (6.11)

$$f_N(S_1) = \max_{x_1 \in \chi(S_1)} \{h_1(S_1;x_1) + f_{N-1}(S_2)\}$$

Bij de dynamische programmeringsaanpak begonnen we in hoofdstuk 6 met de toestand op het laatste tijdstip (N) en werkten dan terug tot het eerste tijdstip; dit wordt de achterwaartse oplossingsmethode genoemd. Bij de bepaling van de vroegste tijdstippen keren we deze werkwijze om: we beginnen bij de toestand op het eerste tijdstip en gaan dan naar het laatste; we spreken dan ook van de voorwaartse oplossingsmethode. We schrijven in plaats van (6.11)

$$f_N(S_1) = g_N(S_N) = \max_{x_N \in \chi(S_N)} \{h_N(S_N;x_N) + g_{N-1}(S_{N-1})\} \qquad (7.1)$$

en voor een willkeurig beslissingstijdstip j:

$$g_j(S_j) = \max_{x_j \in \chi(S_j)} \{h_j(S_j;x_j) + g_{j-1}(S_{j-1})\} \qquad (7.2)$$

Zoals men zeker zal inzien moet in de laatste stap van beide benaderingswijzen (voorwaarts en achterwaarts) dezelfde opbrengst gevonden worden; in (7.1) is dan ook geschreven $f_N(S_1) = g_N(S_N)$.

We moeten nu toestanden, beslissingen en opbrengstfuncties specificeren. Zowel de toestanden van het systeem als de tijdstippen waarop ze worden waargenomen worden vastgelegd door de nummers van de knooppunten, evenals de beslissingen, met dien verstande, dat de toestand S_j het nummer van het "laatste" knooppunt, en de beslissing x_j het nummer van het "voorlaatste" knooppunt geeft. m.a.w.

$$1 \leq x_j < S_j$$

en

$$S_j = j$$

x_j bepaalt dus het knooppunt van waaruit men "vertrekt" naar het knooppunt S_j, zonder dat daarbij een ander knooppunt S_k $(k < j)$ gepasseerd wordt. De directe opbrengstfunctie $h_j(S_j;x_j)$ is gelijk aan de tijdsduur $t(x_j,S_j)$ van de activiteit $a(x_j,S_j)$ en voor $g_j(S_j)$ krijgen we dan

$$v(S_j) = \max_{1 \leq x_j < S_j} \{v(x_j) + t(x_j,S_j)\}$$

of, gewoon in nummers van de knooppunten weergegeven

$$v(i) = \max_{1 \leq j < i} \{v(j) + t(j,i)\} \tag{7.3}$$

en voor het eerste knooppunt

$$v(1) = 0.$$

Overigens zij, wellicht ten overvloede, opgemerkt, dat (7.3) alleen juist is voorzover $a(j,i)$ bestaat!

We voeren dit uit voor het gegeven project:

$$v(1) = 0$$

$$v(2) = \max_{1\leq j<2} \{v(j) + t(j,2)\} = 0 + 6 = 6 \text{ voor } j = 1 \text{ en } a(1,2) = A1$$

$$v(3) = \max_{1\leq j<3} \{v(j) + t(j,3)\} = 6 + 0 = 6 \text{ voor } j = 2 \text{ en } a(2,3) = B1$$

$$v(4) = \max_{1\leq j<4} \{v(j) + t(j,4)\} = 6 + 4 = 10 \text{ voor } j = 2 \text{ en } a(2,4) = A4$$

$$v(5) = \max_{1\leq j<5} \{v(j) + t(j,5)\} = 10 + 0 = 10 \text{ voor } j = 4 \text{ en } a(4,5) = B2$$

$$v(6) = \max_{1\leq j<6} \{v(j) + t(j,6)\} = 10 + 5 = 15 \text{ voor } j = 4 \text{ en } a(4,6) = A6$$

$$v(7) = \max_{1\leq j<7} \{v(j) + t(j,7)\} = 15 + 12 = 27 \text{ voor } j = 6 \text{ en } a(6,7) = A9$$

$$v(8) = \max_{1\leq j<8} \{v(j) + t(j,8)\} = 10 + 3 = 13 \text{ voor } j = 5 \text{ en } a(5,8) = A7$$

$$v(9) = \max_{1\leq j<9} \{v(j) + t(j,9)\} = 27 + 3 = 30 \text{ voor } j = 7 \text{ en } a(7,9) = A10$$

We hebben hiermee de minimale totale tijdsduur, die nodig is om het project uit te voeren, gevonden, zijnde 30 weken. Wat ons nu nog verder interesseert is de rij opeenvolgende activiteiten

$$a(1,i_1),\ a(i_1,i_2),\ \ldots,\ a(i_n,N)$$

die bepalend zijn voor deze tijdsduur; het zogenaamde <u>kritieke pad</u>. Dit kritieke pad heeft o.a. als eigenschap, dat het langer is dan ieder ander pad van aaneengesloten activiteiten. Bovendien willen we ook graag weten wat het effect is van bepaalde (organisatorische) maatregelen, waardoor de tijdsduur van één of meer activiteiten verandert.

Een antwoord op de eerste wens, het kritieke pad, is eenvoudig te geven: we gaan na welke beslissingen achtereenvolgens tot het gevonden resultaat hebben geleid. Bij de in hoofdstuk 6 gegeven achterwaartse oplossingsmethode werd bij het vaststellen van de optimale beslissingen begonnen met de beslissing op het eerste tijdstip en daarna werd de toestand op het tweede tijdstip vastgesteld, die mede een gevolg is van de eerste beslissing. Vervolgens werd de tweede optimale beslissing vastgesteld en zo voort tot en met de laatste beslissing.
Bij de hier gebruikte voorwaartse oplossingsmethode

gaan we juist andersom te werk: begin bij de laatste beslissing en zoek de voorlaatste toestand (= knooppunt) en zet dit voort tot de eerste beslissing. We vinden dan als kritiek pad (ga na):

$$a(1,2),\ a(2,4),\ a(4,6),\ a(6,7),\ a(7,9)$$

of

A1, A4, A6, A9, A10.

Ten behoeve van het antwoord op de tweede wens, het effect van (organisatorische) maatregelen op de tijdsduur, voeren we de zogenaamde laatste tijdstippen $l(j)$ in, waarop activiteit $a(i,j)$ moet zijn beëindigd, aangenomen dat de totale tijdsduur van het project niet langer mag zijn dan $v(N)$. Voor de laatste twee activiteiten A9 en A10 stellen we derhalve het laatste tijdstip $l(N) = l(9)$ op 30 weken $(=v(N))$. Wederom m.b.v. dynamische programmering bepalen we, uitgaande van $l(9)$, de laatste tijdstippen $l(i)$ voor de voorafgaande knooppunten $1 \leq i < N$. In dit geval wordt de (normale) achterwaartse oplossingsmethode gehanteerd. De toestanden, tijdstippen en beslissingen worden weer gedefinieerd door de knooppunten, met dien verstande dat x_j het eerste na S_j volgende knooppunt voorstelt:

$$S_j < x_j \leq N.$$

De formule

$$f_{N-j+1}(S_j) = \min_{x_{j+1} \in X(S_{j+1})} \{h_j(S_j;\ x_j) + f_{N-j}(S_{j+1})\}$$

wordt nu (ga na)

$$l(j) = \min_{j+1 \leq i \leq N} \{-t(j,i) + l(i)\} \qquad (7.4)$$

Ook hier merken we weer op, dat de bovenstaande formule (7.4) alleen dan zin heeft wanneer $a(j,i)$ bestaat.

Uit het voorafgaande kan men afleiden, dat voor de activiteiten a(i,j) en a(j,k) in het knooppunt j geldt

$$v(j) \geq v(i) + t(i,j) \qquad 1 \leq i < j$$

en

$$l(j) \geq v(j)$$

Derhalve kunnen we stellen

$$l(j) \geq v(i) + t(i,j)$$

of

$$l(j) - v(i) \geq t(i,j),$$

d.w.z. de tijdsduur tussen het laatste tijdstip, waarop a(i,j) mag eindigen en het vroegste tijdstip, waarop het kan beginnen, is groter dan of gelijk aan de bewerkingstijdsduur van a(i,j). We voeren nu een verschilvariabele $s(i,j) \geq 0$ in, die we de totale speelruimte van de activiteit a(i,j) noemen

$$l(j) - v(i) = t(i,j) + s(i,j)$$

of

$$s(i,j) = l(j) - v(i) - t(i,j)$$

Voor het gegeven project zullen we de laatste tijdstippen berekenen.

activiteit	beginknooppunt i	v(i)	l(i)
A1 of a(1,2)	1	0	0
A2 of a(1,3)	1	0	0
B1 of a(2,3)	2	6	6
A3 of a(3,4)	3	6	7
A4 of a(2,4)	2	6	6
A5 of a(2,5)	2	6	6
B2 of a(4,5)	4	10	10

activiteit	beginknooppunt i	v(i)	l(i)
A6 of a(4,6)	4	10	10
A7 of a(5,8)	5	10	13
A8 of a(5,7)	5	10	13
A9 of a(6,7)	6	15	15
A10 of a(7,9)	7	27	27
A11 of a(8,9)	8	13	16
voltooiing	9	30	30

Voorbeeld van de berekening van de laatste tijdstippen:

$l(9) = 30$

$l(8) = \min\limits_{8<i\leq 9} \{-t(8,i) + l(i)\} = -14 + 30 = 16 \qquad$ voor $i = 9$

$l(7) = \min\limits_{7<i\leq 9} \{-t(7,i) + l(i)\} = -3 + 30 = 27 \qquad$ voor $i = 9$

$l(6) = \min\limits_{6<i\leq 9} \{-t(6,i) + l(i)\} = -12 + 27 = 15 \qquad$ voor $i = 7$

$l(5) = \min\limits_{5<i\leq 9} \{-t(5,i) + l(i)\} = -3 + 16 = 13 \qquad$ voor $i = 8$

en zo voort.

Zoals men in de bovenstaande tabel ziet geldt voor de knooppunten die in het kritieke pad liggen

$$l(i) = v(i)$$

en

$$l(j) - v(i) = t(i,j)$$

Dit is geen toeval, want, zoals men eenvoudig zal inzien, vormt een rij activiteiten alleen dan een kritiek pad, d.w.z. is alleen dan bepalend voor de minimale totale tijdsduur van het project, wanneer het niet in te korten is en dus geen speelruimtes bevat. We zullen deze eigenschap gebruiken bij de volgende twee definities:

1. een <u>kritieke activiteit</u> $a(i,j)$ is een activiteit, waarvoor geldt

$$s(i,j) = 0$$

2. een <u>kritiek pad</u> is een aaneengesloten rij kritieke activiteiten beginnend in de oorsprong en eindigend in de voltooiing.

We kunnen een kritiek pad op twee manieren aangeven: m.b.v. de kritieke activiteiten of m.b.v. de begin- en eindknooppunten van die kritieke activiteiten. In het gegeven project:

kritiek pad = (A1, A4, A6, A9, A10)
of (1, 2, 4, 6, 7, 9)

Het belang van het kritieke pad schuilt in het feit dat uitstel of vertraging van activiteiten in dit pad even grote verschuivingen van het voltooiingstijdstip veroorzaken. Bovendien leidt bekorting van activiteiten in het kritieke pad (b.v. door overwerk of uitbesteding) binnen zekere grenzen tot een even grote bekorting van de totale projectduur.

Bij het inkorten van activiteiten krijgt men te maken met het kostenaspect van de planning en met het feit dat een nieuw kritiek pad kan ontstaan. Wat betreft het kostenaspect zal men tegen elkaar de kosten van inkorting en de opbrengst ervan moeten afwegen. Men denke hier b.v. aan een project dat tot doel heeft een nieuw produkt op de markt te brengen. Naarmate dat produkt eerder op de markt komt kan de opbrengst groter zijn. Bij het inkorten van activiteiten kan men als regel niet ongelimiteerd doorgaan. Voor vele activiteiten kan men dan ook stellen dat ze door technische of natuurlijke grenzen qua tijdsduur beperkt zijn.

De speelruimtes zijn bij het gegeven project eenvoudig te berekenen en zijn hieronder voor iedere activiteit vermeld.

activiteit	speelruimte s(i,j)
a(1,2)	0
a(1,3)	1
a(3,4)	0
a(2,4)	0
a(2,5)	3
a(4,6)	0
a(5,8)	3
a(5,7)	7
a(6,7)	0
a(7,9)	0
a(8,9)	3

Stel dat nu nog gegeven is dat de activiteiten A8 en A9 ingekort kunnen worden, waarvoor de kosten resp. f. 3000,- en f. 2500,- per week bedragen, terwijl voor inkortingen een budgetbedrag van f. 10.000,- beschikbaar is, dan kan men het tijdstip bepalen, waarop het project op z'n vroegst klaar kan zijn (en wat de kosten daarvan zijn). Daar A8 buiten het kritieke pad ligt is het zinloos deze activiteit in te korten, dat zou immers geen bekorting van de totale projectduur opleveren. Blijft over een inkorting van A9 met maximaal 4 weken. Korten we A9 3 weken in dan ontstaat echter al een nieuw kritiek pad (1, 2, 4, 5, 8, 9) (ga na), zodat voortzetting van het inkorten daarna geen zin meer heeft. Immers het nieuwe kritieke pad bevat A9 niet, en zal daardoor dan bepalend zijn voor de totale projectduur, die nu 27 weken bedraagt. De extra uitgaven voor deze inkorting bedragen f. 7.500,-.

Tot besluit van deze paragraaf laten we zien dat het ook mogelijk is dit probleem als een l.p.-probleem te formuleren (een één-stapsbeslissingsprobleem dus).

$$\max \sum_{i,j} t(i,j)\, x(i,j)$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{i<j} x(i,j) \leq 1 \qquad j = 2, 3, \ldots, N$$

$$\sum_{k>j} x(j,k) \leq 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1$$

$$\sum_{i<j} x(i,j) - \sum_{k>j} x(j,k) = 0$$

$$j = 2, 3, \ldots, N-1$$

$$x(i,j) = 0 \text{ of } 1$$
$$x(i,i) = 0$$

Voor niet toegelaten combinaties (i,j), d.w.z. combinaties van i en j, waarvoor a(i,j) niet bestaat, verbieden we x(i,j) = 1 door t(i,j) zeer klein te maken:

$$t(i,j) = -M \quad \text{als } a(i,j) \text{ niet bestaat.}$$

7.3. <u>De kortste weg</u>.

We beschouwen een netwerk met N knooppunten. Het gaat er nu om de kortste weg door dat netwerk te vinden van oorsprong naar voltooiing. De verbindende pijlen zijn voorzien van niet-negatieve getallen d(i,j), die b.v. de afstand tussen de knooppunten aan het begin en het einde van die pijlen voorstellen, of de tijdsduur, nodig om langs die pijlen van het ene knooppunt in het andere te komen. We kunnen dit probleem als een l.p.-probleem formuleren:

$$\min \quad z = \sum_i \sum_j d(i,j)\, x(i,j)$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=2}^{N} x(1,j) = 1$$

$$\sum_{i<j} x(i,j) \leq 1 \qquad j = 2, 3, \ldots, N-1$$

$$\sum_{k>j} x(j,k) \leq 1 \qquad j = 2, 3, \ldots, N-1$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} x(j,N) = 1$$

$$\sum_{i<j} x(i,j) - \sum_{k>j} x(j,k) = 0 \qquad j = 2, 3, \ldots, N-1$$

$$x(i,j) = 0 \text{ of } 1 \qquad i \neq j$$

$$x(i,i) = 0$$

De combinaties (i,j), waarbij geen wegen behoren, verbieden we door hoge waarden (M) aan $d(i,j)$ toe te kennen.

Alhoewel het probleem aldus als l.p.-probleem is op te lossen, zullen we hier een andere, directere, methode toepassen. Eenvoudigheidshalve geven we de knooppunten daartoe letters i.p.v. nummers, v.l.n.r. volgens het alfabet.

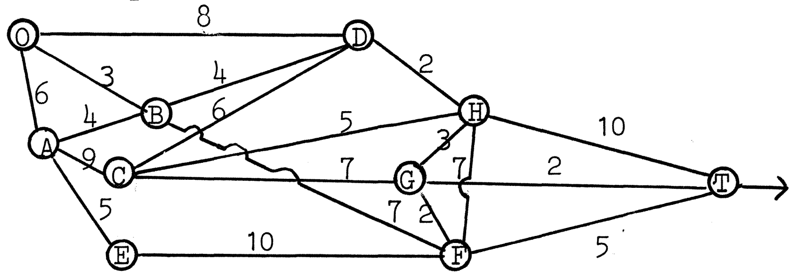
Stel dat voor een zeker getal n $(1 \leq n < N)$ bekend is welke $n-1$ knooppunten uit het netwerk (de oorsprong niet meegeteld) het dichtst bij de oorsprong liggen, gemeten langs de kortste verbindingsketen (= weg). Deze $n-1$ knooppunten noemen we de verbonden, de overige de vrije knooppunten. Van de vrije knooppunten gaan we nu die bepalen, welke de kleinste afstand tot de oorsprong heeft; noemt dit gezochte knooppunt i^*. Laat uitgaande van i^*, het eerste verbonden knooppunt op de weg naar de oorsprong aangeduid zijn met j^*. Het is dan duidelijk dat i^* van alle vrije knooppunten het dichtst bij j^* moet liggen (anders zou er een ander vrij knooppunt bestaan dichter bij de oorsprong). Wij zullen van deze eigenschap gebruik maken. Berekenen we nl. voor <u>ieder</u> <u>verbonden</u> knooppunt j de som s_j van:

1. de bekende (kortste) afstand van de oorsprong tot dat knooppunt, en
2. de afstand (via één pijl) van dat knooppunt tot het dichtstbijzijnde vrije knooppunt i,

dan wordt de kortste afstand van i^* tot de oorsprong gegeven door de kleinste waarde van s_j. Hieruit volgt j^* en dus het gezochte punt i^*.

Om nu de kortste weg door het netwerk te vinden moeten we bovenstaande procedure uitvoeren voor n = 1,2,3,... totdat het eindknooppunt bereikt is.

Voorbeeld: bepaal in het onderstaande netwerk de kortste weg van 0 naar T.



Voor de afstanden in het netwerk maken we een tabel als volgt (voor ieder knooppunt één kolom):

O	A	B	C	D	E	F	G	H	T
OA-6	AB-4	BA-4	CA-9	DB-4	EA-5	FB-7	GC-7	HC-5	
OB-3	AC-9	BD-4	CD-6	DC-6	EF-10	FE-10	GF-2	HD-2	
OD-8	AE-5	BF-7	CG-7	DH-2		FG-2	GH-3	HF-7	
			CH-5			FH-7	GT-2	HG-3	
						FT-5		HT-10	

We beginnen nu met de oplossingsmethode.

n = 1: de oorsprong is het enige verbonden knooppunt. We nemen nu alleen de eerste kolom 0 en zien dat B het vrije knooppunt is met de kleinste afstand tot de oorsprong. Om dit aan te geven omcirkelen we in de kolom 0 OB-3. T.b.v. volgende stappen zetten we nu deze kortste afstand boven de B kolom en kruisen we alle wegen die naar B leiden, uitgezonderd OB-3 door. Dat geeft in de tabel het volgende beeld.

		3							
O	A	B	C	D	E	F	G	H	T
OA-6	~~AB-4~~	BA-4	CA-9	~~DB-4~~	EA-5	~~FB-7~~	GC-7	HC-5	
OB-3	AC-9	BD-4	CD-6	DC-6	EF-10	FE-10	GF-2	HD-2	
OD-8	AE-5	BF-7	CG-7	DH-2		FG-2	GH-3	HF-7	
			CH-5			FH-7	GT-2	HG-3	
						FT-5		HT-10	

n = 2: in aanmerking komen nu de knooppunten het dichtst bij 0 en bij B. Hiervan kiezen we A met de kleinste afstand OA-6. Alle wegen naar A, uitgezonderd OA-6 worden doorgekruist. Gaan we nu weer verder als bij n = 1, dan krijgen we de volgende tabel.

	6	3							
O	A	B	C	D	E	F	G	H	T
OA-6	~~AB-4~~	~~BA-4~~	~~CA-9~~	~~DB-4~~	~~EA-5~~	~~FB-7~~	GC-7	HC-5	
OB-3	AC-9	BD-4	CD-6	DC-6	EF-10	FE-10	GF-7	HD-2	
OD-8	AE-5	BF-7	CG-7	DH-2		FG-2	GH-3	HF-7	
			CH-5			FH-7	GT-2	HG-3	
						FT-5		HT-10	

n = 3: vergelijk de afstand van de oorsprong tot E en D (dat zijn de kleinste uit de A resp. de B kolom met afstanden resp. 11 en 7). Kies D en bewerk de tabel als bij n = 1.

	6	3		7					
O	A	B	C	D	E	F	G	H	T
OA-6	~~AB-4~~	~~BA-4~~	~~CA-9~~	~~DB-4~~	~~EA-5~~	~~FB-7~~	GC-7	HC-5	
OA-3	AC-9	BD-4	~~CD-6~~	DC-6	EF-10	FE-10	GF-7	~~HD-2~~	
~~OD-8~~	AE-5	BF-7	CG-7	DH-2		FG-2	GH-3	HF-7	
			CH-5			FH-7	GT-2	HG-3	
						FT-5		HT-10	

Als we op deze wijze verder gaan vinden we de kortste weg met een weglengte van 14 na 9 stappen (Ga na door de overige tabellen uit te werken). De kortste weg vindt men door teruggaande vanuit T een rij aaneensluitende omcirkelde trajecten te zoeken. De laatste tabel, waaruit de oplossing kan worden afgelezen, is hieronder vermeld. Men ziet hierin duidelijk hoe b.v. de eerste oplossing gevonden wordt: van T terug naar G via GT-2, vervolgens van G naar F via FG-2, van F naar B via BF-7 en van B naar O via OB-3.

	6	3	13	7	11	10	12	9	14
O	A	B	C	D	E	F	G	H	T
OA-6	~~AB-4~~	~~BA-4~~	~~CA-6~~	~~DB-4~~	~~EA-5~~	~~FB-7~~	~~GC-7~~	~~HC-5~~	
OB-3	~~AC-9~~	BD-4	~~CD-6~~	DC-6	~~EF-10~~	~~FE-10~~	~~GF-2~~	~~HD-2~~	
~~OD-8~~	AE-5	BF-7	~~CG-7~~	DH-2		FG-2	~~GH-3~~	~~HF-7~~	
			~~CH-5~~			~~FH-7~~	GT-2	HG-3	
						~~FT-5~~		~~HT-10~~	

kortste weg: (O,B,F,G,T) of (O,B,D,H,G,T).

7.4. De maximale capaciteit.

Beschouwen we weer een netwerk met N genummerde knooppunten. Aan iedere verbinding in het netwerk zijn twee, niet-negatieve, getallen toegevoegd, die de capaciteit in beide richtingen van die verbinding voorstellen; we noteren dat voor de verbinding tussen de knooppunten i en j als c(i,j) en c(j,i). Dat er twee en niet één getal aan een verbinding wordt toegevoegd vloeit voort uit het feit, dat we transport in beide richtingen toestaan. De interpretatie van c(i,j) en c(j,i) is derhalve:

c(i,j): de capaciteit van de verbinding van i naar j,
c(j,i): de capaciteit van de verbinding van j naar i.

In de volgende figuur is zo'n netwerk gegeven.

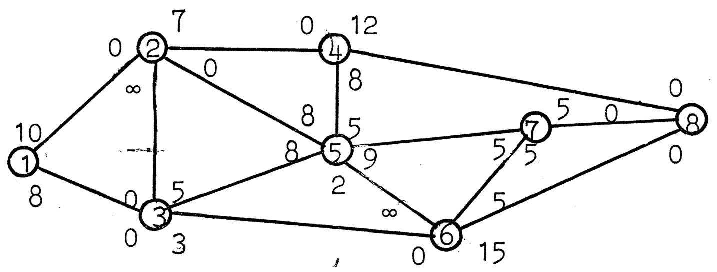


fig. 7.3

De capaciteit kan voor de richting die men langs de verbinding gaat verschillen. We zien dat in figuur 7.3 b.v. $c(1,2) = 10$ en $c(2,1) = 0$; het laatste betekent dat er geen transport mogelijk is van 2 naar 1. $c(2,3) = \infty$ betekent dat de capaciteit van 2 naar 3 onbegrensd is.

Voor een weg, d.i. een aaneengesloten keten van verbindingen van oorsprong naar voltoiing, geldt dat de kleinste capaciteit, die in die weg voorkomt, bepalend is voor de capaciteit van de gehele weg (vgl. het gezegde "een ketting is zo sterk als de zwakste schakel"). Bij een eerste overzicht van figuur 7.3 ziet men b.v. dat de capaciteit langs de weg (1,3,6,8) 3 is.

Ook het maximale capaciteitsprobleem kan als een l.p.-probleem geformuleerd worden. Laat $x(i,j)$ de hoeveelheid zijn, die van i naar j wordt gezonden. Triviaal is dan dat geldt (voorzover de pijl van i naar j bestaat):

$$0 \leq x(i,j) \leq c(i,j).$$

Het l.p.-probleem luidt nu:

$$\max \quad z = \sum_{k=2}^{N} x(1,k)$$

onder de bijvoorwaarden

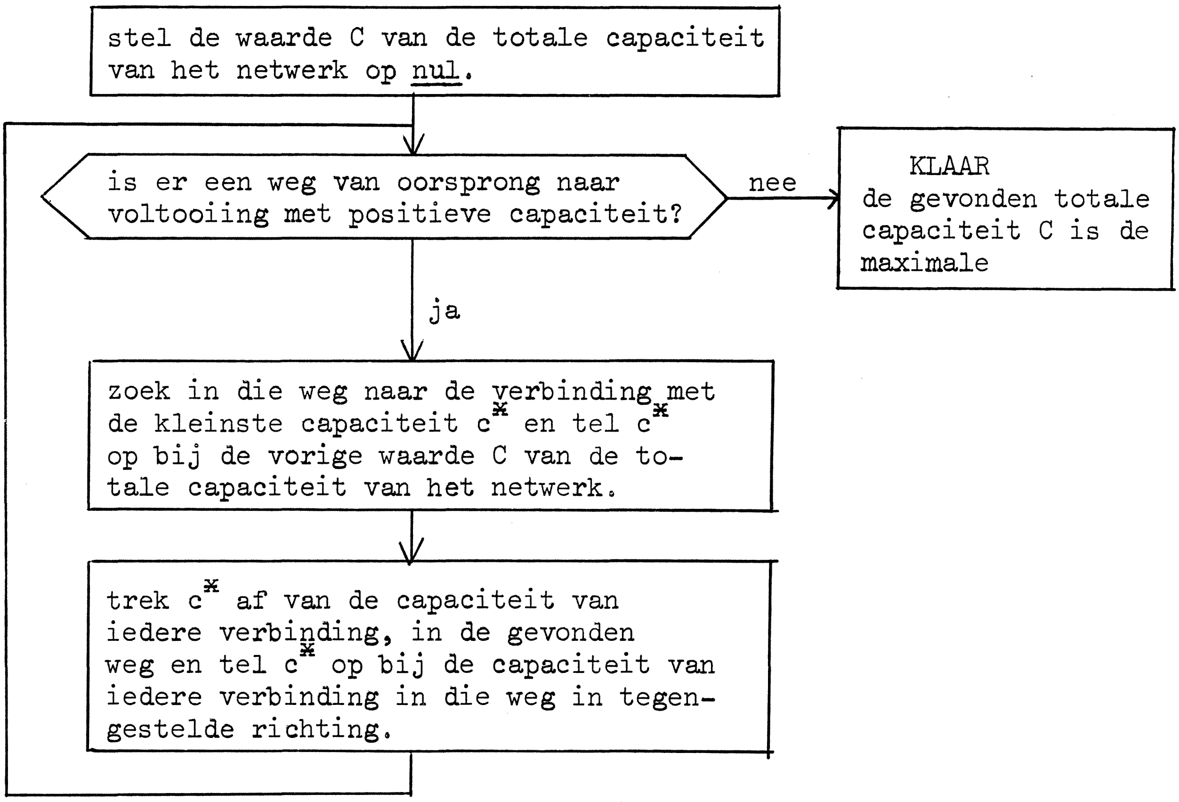
$$0 \leq x(i,j) \leq c(i,j)$$

$$\sum_i x(i,k) - \sum_j x(k,j) = 0 \text{ voor } k = 2, 3, \ldots, N-1.$$

De tweede bijvoorwaarde brengt tot uitdrukking, dat geen opslag in de knooppunten plaatsvindt.

We zullen ook bij deze categorie netwerken een andere oplossingsmethode geven dan de simplex-methode. We hebben al opgemerkt, dat langs de weg (1,3,6,8) de capaciteit 3 is. Van de capaciteiten van de verbindingen (1,3), (3,6) en (6,8) trekken we nu 3 af. Het is echter zeer goed mogelijk, dat een oplossing met dit transport, langs deze weg, geen optimale oplossing is. Daarom kan het voorkomen, dat we in een latere stap van de oplossingsmethoden dit transport geheel of gedeeltelijk ongedaan willen maken wat mogelijk wordt door in tegengestelde richting van de verbindingen (1.3), (3.6) en (6.8) de wegcapaciteit 3 op te tellen. Een transport van voltooiing naar oorsprong langs deze weg terug ter grootte van 3 levert, met deze werkwijze, dan weer de oude situatie op. We kunnen aldus in een latere stap reeds doorgezonden hoeveelheden langs een alternatieve weg transporteren. Vervolgens zoeken we een nieuwe weg door het netwerk met een positieve capaciteit. Is die nieuwe weg gevonden, dan trekken we van de capaciteiten van de verbindingen in die weg de capaciteit van de weg zelf af en tellen hem op in de tegenovergestelde richting. Daarna zoeken we weer een weg met positieve capaciteit en herhalen de hierboven beschreven procedure tot geen weg met positieve capaciteit meer kan worden gevonden. De som van de capaciteiten, die we in de opeenvolgende stappen hebben gevonden is de totale capaciteit van het netwerk.

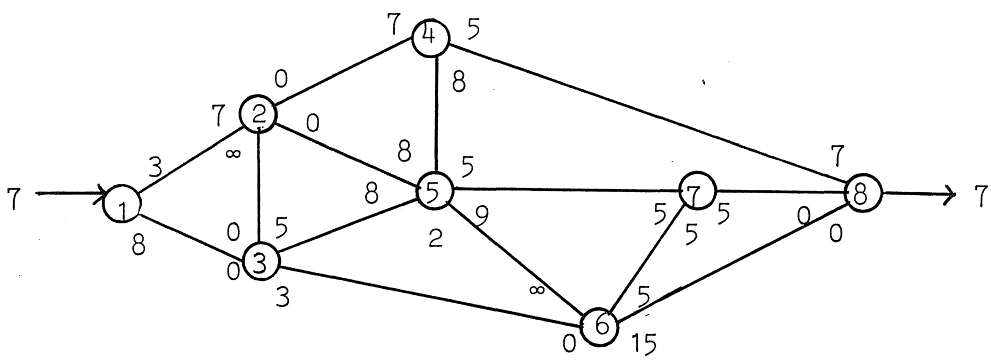
Resumeren we de oplossingstechniek, zoals we die nu gevonden hebben, dan krijgen we het beeld, dat schematisch op de volgende pagina is aangegeven.



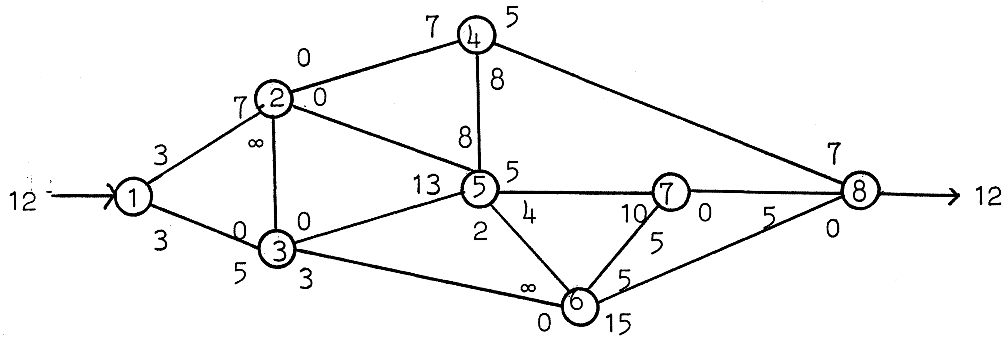
We passen nu deze oplossingstechniek toe op het voorbeeld, dat in figuur 7.3 gegeven is.

1. In het originele netwerk nemen we de weg (1, 2, 4, 8) met capaciteit 7 (= c^*).

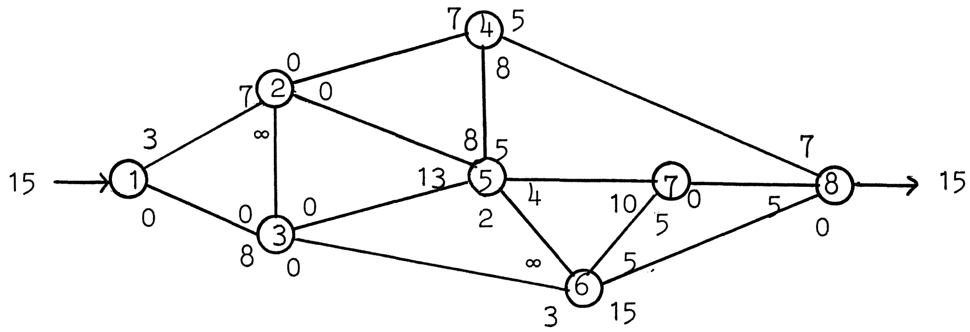
   Het netwerk wordt nu:



2. Vervolgens nemen we de weg (1, 3, 5, 7, 8) met capaciteit 5.
   De waarde van de capaciteit van het netwerk wordt nu 12.
   Het netwerk wordt:



3. Tot slot de weg (1, 3, 6, 8) met capaciteit 3. De waarde van de capaciteit van het netwerk is 15 geworden. Er zijn nu geen wegen van oorsprong naar voltooiing met een positieve capaciteit meer mogelijk.
   Het netwerk wordt:



Er kunnen nu geen wegen meer gevonden worden met een positieve capaciteit. De totale capaciteit van het netwerk is derhalve 7 + 5 + 3 = 15.

Het vinden van een weg van oorsprong naar voltooiing met positieve capaciteit kan soms problemen opleveren. Een simpele methode, die zeker een weg oplevert, werkt als volgt: begin bij de oorsprong en zoek die verbindingen, die uitgaan van de oorsprong en een positieve capaciteit hebben.

Zoek dan vanuit de eindpunten van de gevonden verbindingen nieuwe verbindingen met een positieve capaciteit en zet dit voort totdat de voltooiing bereikt is. Dan is tenminste één weg met positieve capaciteit gevonden (voorzover zo'n weg tenminste mogelijk is). Hoewel hiermee een methode gevonden is, die altijd uitsluitsel geeft omtrent het wel of niet bestaan van een weg met positieve capaciteit, kan het nog altijd een bezwaar zijn dat na iedere stap van alle mogelijke wegen moet worden nagegaan of ze toegelaten zijn, d.w.z. een positieve capaciteit hebben. Er is nu een snedemethode, waarmee men, indien aan enige voorwaarden is voldaan, sneller kan bepalen of de optimale oplossing is bereikt. Een snede wordt gegeven door een lijn die het netwerk in twee stukken splitst en wel zo dat de oorsprong in het ene deel ligt en de voltooiing in het andere, terwijl bovendien zonder kruising van de snede geen verbinding mogelijk is tussen oorsprong en voltooiing. Aan zo'n snede wordt een getal toegevoegd, de waarde van de snede, d.i. de som van de capaciteiten van de verbindingen welke de snede kruisen gemeten in een richting van de oorsprong af. In de theorie van de netwerken is over deze sneden bekend, dat (max-flow min-cut theorem) voor ieder netwerk met één oorsprong en één voltooiing de maximale capaciteit van dat netwerk gelijk is aan de minimale waarde van de sneden in dat netwerk.

Nemen we een snede in het netwerk van figuur 7,3, zoals in onderstaande figuur 7.4 (het netwerk is getekend tot de snede) dan zien we dat de waarde van de snede 7 + 5 + 3 = 15 is. Wanneer derhalve de capaciteit van 15 bereikt is weten we dat we ook het optimum bereikt hebben.

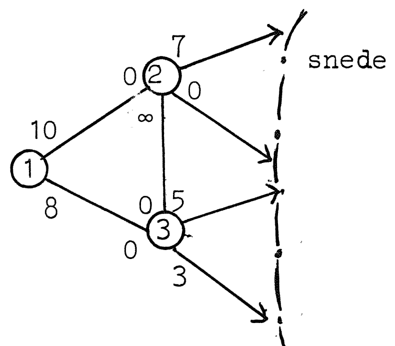


fig. 7.4

Opgaven.

7.1. De N.V. Experimentele Autobouw heeft opdracht gekregen een hoogwaardige minicar te ontwerpen. Van te voren dient de directie van de N.V. aan de opdrachtgever een prognose te geven van de verwachte tijd die dit project in beslag zal nemen. De ontwerpwerkzaamheden zijn in onderstaande tabel vermeld.

nr.	omschrijving	tijdsduur in weken	volgorde beperkingen
1	basisplan opstellen	3	
2	voorontwerpen carrosserie	5	2 ← 1
3	voorontwerpen technisch gedeelte	7	3 ← 1
4	beproeving carrosserie (evt. correcties)	8	4 ← 2
5	ontwerp motor en overbrenging	8	5 ← 3
6	ontwerp overige technische onderdelen	10	6 ← 3
7	ontwerp inwendige uitvoering	7	7 ← 4
8	definitief ontwerp carrosserie	5	8 ← 4
9	beproeving overige technische onderdelen (evt. correcties)	7	9 ← 5,6
10	beproeving motor en overbrenging (evt. correcties)	12	10 ← 5
11	afwerking inwendige uitvoering	3	11 ← 5,6,7
12	afwerking carrosserie	3	12 ← 8
13	samenbouwen en testen	36	13 ← 9,10,11,12
14	handleiding en instructieboek schrijven	8	14 ← 9,10,11

Gevraagd wordt nu: a) teken een netwerk,
b) bepaal het kritieke pad.

7.2. Vervolg op opgave 7.1.
Daar bekorting van de voor het project benodigde tijd aanmerkelijk voordeel voor de N.V. oplevert, wordt overwogen door overwerk enige werkzaamheden sneller te laten verlopen. Bij de werkzaamheden 6, 10 en 12 is bekorting door overwerk mogelijk. Om diverse redenen is

bekorting slechts in gehele weken mogelijk. De kosten voor één week bekorting zijn voor 6 f. 5.000,-, voor 10 f. 10.000,- en voor 12 f. 15.000,- toegestaan. Maximaal is f. 50.000,- beschikbaar.

Gevraagd: bepaal hoeveel weken de werkzaamheden 6, 10 en 12 moeten worden ingekort, opdat een maximale bekorting van de tijdsduur van dit project wordt bereikt.

7.3. De Algemene Vergadering voor Netwerkplanning (A.V.N.) organiseert volgend jaar in de eerste week van september een internationaal congres over netwerkplanning dat ook bezocht zal worden door leden van buitenlandse zusterorganisaties. Ten behoeve van de organisatie van dat congres gebruikt de congrescommissie een netwerkplanning van de voorbereidende activiteiten. Deze activiteiten en hun volgorderelaties zijn in onderstaande tabel gegeven.

activiteit a(i,j)	omschrijving	tijdsduur (in weken) x(i,j)	volgorde-relaties
1	voorlopige schets v.h. congres	8	
2	gegevens t.b.v. voorlopig programma verzamelen en samenstellen	7	
3	regelingen treffen met VVV & hotels	26	
4	voorlopig programma drukken en verzenden	7	4 ← 1,2
5	suggesties m.b.t. thema en titel v.h. congres	2	5 ← 1
6	goedkeuring titel en thema	4	6 ← 5
7	suggesties sprekers & onderwerpen	3	7 ← 1
8	opgaven sprekers & onderwerpen	8	8 ← 7
9	opzet v.d. organisatie v.h. voorlopig programma	13	9 ← 1
10	opstellen sprekerslijst	8	10 ← 8,9
11	uitnodigen sprekers	12	11 ← 10
12	uitwerken definitief programma	16	12 ← 4,6,8
13	aanmelding deelnemers	20	13 ← 4
14	vaststelling definitief programma	5	14 ← 3,11
15	organisatorische uitwerking def.progr.	25	15 ← 13,14
16	redactie def. programmaboek	4	16 ← 14
17	drukken & verzende programmaboek	15	17 ← 13,16

Gevraagd wordt nu: teken een netwerk van deze activiteiten, bepaal het kritieke pad en bepaal de tijdsduur van dit project.

7.4. Vervolg op opgave 7.3.

De activiteiten 4, 9 en 11 kunnen resp. met max. 2, 3 en 10 weken ingekort worden. Dat kost per activiteit per week voor 4: f. 5000,- voor 9 f. 7000,- en voor 11 f. 3000,-. De bekortingen worden alleen in gehele weken gerealiseerd. Maximaal is voor bekortingen een bedrag van f. 44.000,- beschikbaar.

Gevraagd: welke activiteiten moet de congrescommissie inkorten en met hoeveel weken om een zo groot mogelijke inkorting van het gehele project te verkrijgen? Wijzigt het kritieke pad zich, en zoja hoe loopt het dan na de inkorting?

7.5. Een middelbare scholier te Zeedorp wil na zijn eindexamen behaald te hebben bedrijfseconomie gaan studeren aan de universiteit van Vestburg, waar de colleges gegeven worden in blokken van eventueel verschillende tijdsduur. Na afloop van zo'n blok wordt direct een tentamen gehouden, zodat geen extra studieduur nodig is. Het is heel goed mogelijk meer dan één blok tegelijk te lopen, er zijn echter wel blokken die per sé aan andere blokken vooraf moeten gaan! De aspirant-student wil nu weten hoe lang zijn studie zal gaan duren, en voorts welke keuzevakken hij zal moeten kiezen om zo snel mogelijk klaar te zijn (aangenomen dat hij in één keer voor al zijn tentamens slaagt). De vakken zijn in onderstaande tabel gegeven.

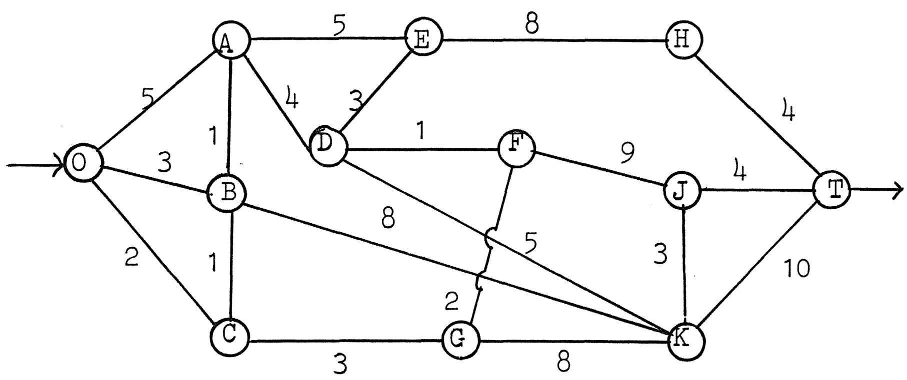
nr.	vak	tijdsduur in weken	volgorde
1	propedeuse	21	
2	wiskunde	8	2 ← 1
3	bedrijfseconomie en organisatie	13	3 ← 1
4	boekhouden en verslaggeving	14	4 ← 2
5	statistiek	15	5 ← 2
6	statistische analyse	18	6 ← 5,4
7	financiële rekenkunde	9	7 ← 2

	nr.	vak	tijdsduur in weken	volgorde
	8	administratieve techniek	7	8 ← 7,4
	9	financiering	7	9 ← 7
	10	administratieve organisatie	12	10 ← 7,4
	11	voortgezet boekhouden	6	11 ← 4
	12	kosten en waarde	11	12 ← 9
	13	industriële planning	1	13 ← 12,10,8,3
	keuzevakken:			
	14	logica en systeemleer	10	14 ← 5,3,2
samen met	15	computer science	17	15 ← 14
	of:			
	16	voortgezette wiskunde	11	16 ← 5,3,2
samen met	17	besliskunde	18	17 ← 16

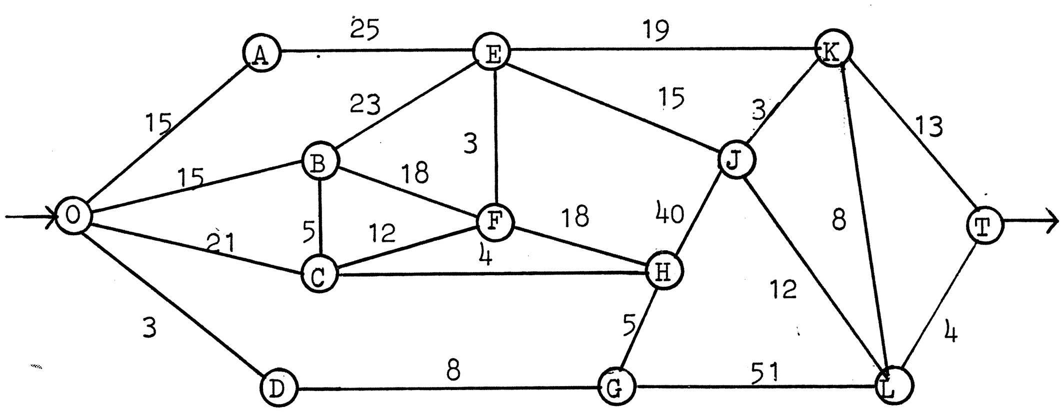
Gevraagd wordt het netwerk van deze studie te tekenen en de totale studieduur te bepalen. Welke keuzevakken leveren de kortste studieduur op?

Bepaal de kortste weg door onderstaande netwerken.

7.6.

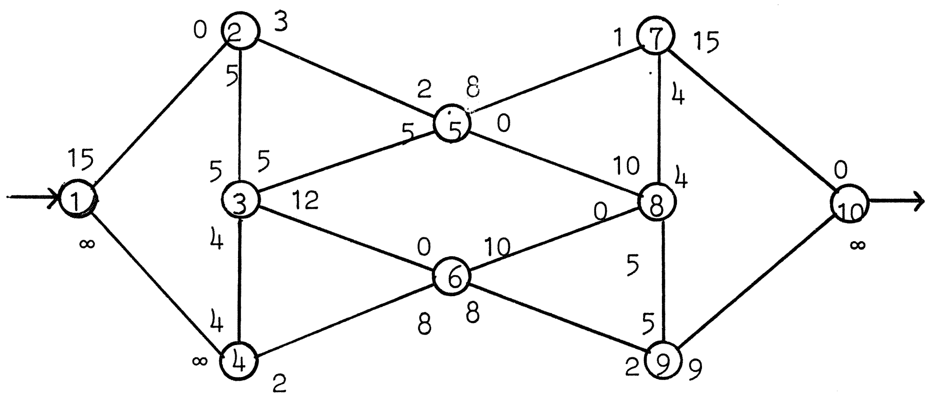


7.7.

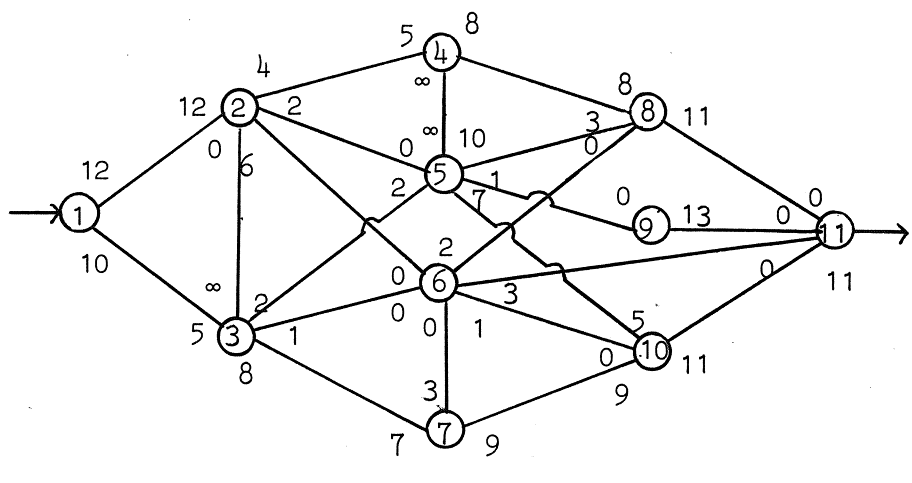


Bepaal de maximale (doorlaat-) capaciteit van onderstaande netwerken en controleer m.b.v. snedes of de eindoplossing bereikt is.

7.8.



7.9.



8. ∞-STAPSBESLISSINGSPROBLEMEN: MARKOV PROGRAMMERING.

8.1. Een systeem zonder geheugen.

Een handelaar in tweedehands goederen heeft een voorraadje regenjassen opgekocht en biedt die in zijn zaak te koop aan. Iedere avond, na het sluiten van de zaak, telt hij de nog aanwezige jassen na en schrijft het aantal op in zijn voorraadboek. Hiermee beschrijft de handelaar de toestand van het systeem "regenjassenverkoop". Uit ervaring weet hij dat de kansverdeling van de vraag naar tweedehands regenjassen voor iedere werkdag gelijk is. Op een zekere avond heeft hij nog 10 (= S_t) jassen hangen, en hij vraagt zich af hoeveel hij er de volgende avond zal tellen. Met behulp van de vraagverdeling kan hij berekenen wat de kansen zijn op een nieuwe voorraad, de volgende avond, van 10, 9, ..., of 0 jassen. Laat b.v. de vraagverdeling als volgt gegeven zijn:

$$p(\underline{v} = i) = (8-i)/36 \qquad i = 0, 1, \ldots, 7.$$

dan krijgt hij voor de voorwaardelijke kansen $P(\underline{S}_{t+1} = j | S_t = 10)$ d.w.z. de kansen dat $\underline{S}_{t+1}$ de waarde j aanneemt onder de voorwaarde dat $S_t = 10$, de volgende waarden:

$$P(\underline{S}_{t+1} = 10 | S_t = 10) = P(\underline{v} = 0) = {}^{2}/9$$

$$P(\underline{S}_{t+1} = 9 | S = 10) = P(\underline{v} = 1) = {}^{7}/36$$

$$P(\underline{S}_{t+1} = 8 | S_t = 10) = P(\underline{v} = 2) = {}^{1}/6$$

$$P(\underline{S}_{t+1} = 7 | S_t = 10) = P(\underline{v} = 3) = {}^{5}/36$$

$$P(\underline{S}_{t+1} = 6 | S_t = 10) = P(\underline{v} = 4) = {}^{1}/9$$

$$P(\underline{S}_{t+1} = 5 | S_t = 10) = P(\underline{v} = 5) = {}^{1}/12$$

$$P(\underline{S}_{t+1} = 4 | S_t = 10) = P(\underline{v} = 6) = {}^{1}/18$$

$$P(\underline{S}_{t+1} = 3 | S_t = 10) = P(\underline{v} = 7) = {}^{1}/36.$$

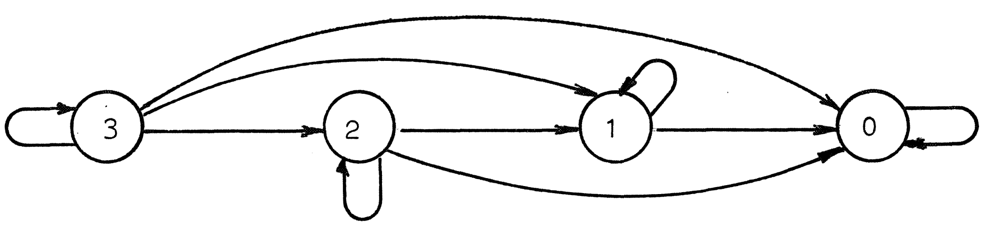
Bij deze berekening zien we dat het er niet toe doet hoeveel regenjassen de man in het verleden verkocht heeft: hij gaat uit van de laatste toestand en de gegeven verdeling, en dat is voldoende. In het algemeen kunnen we voor dit soort processen schrijven:

$$P(\underline{S}_{t+1} = j \mid S_0 = k_0, S_1 = k_1, \ldots, S_{t-1} = k_{t-1}, S_t = i) =$$
$$= P(\underline{S}_{t+1} = j \mid S_t = i).$$

We noemen dit de Markov eigenschap van het proces. Deze eigenschap houdt in, dat de geschiedenis van het systeem (S_0, S_1, ..., S_{t-1}) vergeten mag worden en dat voor de bepaling van een toestand in de toekomst alleen de huidige toestand van belang is. M.a.w. het systeem heeft geen geheugen.

Een ander voorbeeld is het volgende. Stellen we ons voor dat we in een bergachtig landschap een steenbok ontdekken, die van rotspunt naar rotspunt springt. Hij doet dat naar ons idee geheel willekeurig, d.w.z. de kans dat hij op een bepaalde naburige rotspunt springt is voor iedere naburige rotspunt gelijk. We krijgen dan een soort Brownse beweging te zien die een duidelijke illustratie is van het begrip Markov keten. Het maakt de steenbok immers niet uit van welke rotspunt hij 10 sprongen of eerder terug gestart is. Het enige essentiele is de punt waar hij zich nu bevindt en die waar hij naar toe zal gaan, oftewel de toestand van het systeem en de verandering daarin (hierna overgang genoemd).

Keren we nog even terug naar onze tweedehandsgoederenhandelaar. We kunnen m.b.v. een netwerkachtig schetsje de gang van zaken verduidelijken. Laten we veronderstellen, om de zaak eenvoudig te houden, dat hij met 3 regenjassen begint. In het netwerk staan de mogelijke toestanden als knooppunten afgebeeld, met daarin de waarden van S_t, en de pijlen stellen de overgangen van de ene toestand naar de andere voor.



Zoals men in dit schetsje ziet kan de handelaar, wanneer hij op een zekere avond de toestand "2 regenjassen" constateert, de volgende avond 2, 1 of 0 regenjassen aantreffen, en wel met kansen:

$$P(\underline{S}_{t+1} = 2 |\ S_t = 2) = P(\underline{v} = 0) = {}^2/9$$
$$P(\underline{S}_{t+1} = 1 |\ S_t = 2) = P(\underline{v} = 1) = {}^7/36$$
$$P(\underline{S}_{t+1} = 0 |\ S_t = 2) = P(\underline{v} \geq 2) = {}^1/6 + {}^5/36 + {}^1/9 + {}^1/12 + \\ + {}^1/18 + {}^1/36 = {}^7/12.$$

We schrijven nu voor de overgangskansen

$$P(\underline{S}_{t+1} = j |\ S_t = i)$$

kortweg

$$p_{ij}$$

dat is dus de kans om vanuit toestand i op een gegeven tijdstip naar toestand j te gaan op het volgende tijdstip.
Tussen de twee genoemde voorbeelden is een groot verschil, dat veroorzaakt wordt door het aantal mogelijke toestanden. De regenjassenhandelaar kan slechts een eindig aantal jassen inkopen en kan derhalve ook maar een eindig aantal toestanden onderscheiden.
Bij de steenbok is daarentegen het aantal toestanden (rotspunten) in een modelvorming niet eindig. Het beest zal er weliswaar immense afstanden voor moeten afleggen, maar de mogelijke toestanden zijn naar onze begrippen onbeperkt. Wij zullen ons in dit hoofdstuk beperken tot problemen, waarin het aantal toestanden eindig is.

Processen, zoals hierboven aangeduid, beschrijven we m.b.v. zogenaamde Markov ketens. Wij zullen dit begrip hier nader toelichten. Laat gegeven zijn een systeem, dat een eindig aantal toestanden kan aannemen. We nummeren die toestanden 1, 2,...,N. Voorts is er een rij equidistante tijdstippen t = 1, 2, ... gegeven, waarop het systeem wordt beschouwd. Wanneer nu voldaan is aan de Markov eigenschap, dan spreken we van een (enkelvoudige) Markov keten. We beschikken bij een Markov keten derhalve over een collectie overgangskansen p_{ij} van iedere toestand i naar iedere toestand j gedurende één tijdsinterval. Die kansen p_{ij} schrijven we in matrixvorm:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}$$

We lezen zo'n matrix als volgt: de kans dat men van toestand i (i = 1, 2, ..., N), op het, willekeurige, tijdstip t, in toestand j (j = 1, 2, ..., N) terecht komt één tijdstip later, (t+1), is p_{ij}. Dus:

$$\begin{array}{cc|c} & & \text{tijdstip } t+1 \\ & {}_{\text{van}}\diagdown^{\text{naar } j\,=} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & N \end{array} \\ \hline & i & \\ & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ . \\ . \\ . \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix} \\ \text{tijdstip } t & & \end{array}$$

Van de kansen p_{ij} weten we (het zijn immers kansen):

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \qquad\qquad (i, j = 1, 2, \ldots, N)$$

Voorts is het zo dat men vanuit een toestand i (i = 1, 2, ..., N) altijd in een toestand j (j = 1, 2, ..., N) terecht moet komen (het systeem moet immers binnen de toestandsruimte blijven!). Bovendien kan er op één bepaald tijdstip hoogstens één toestand worden aangenomen. Derhalve geldt:

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$$

Wanneer hij zijn voorraad niet aanvult krijgen we voor onze handelaar, met een beginvoorraad van 3 jassen, de volgende matrix:

$$\begin{array}{c|c}
\text{van} \backslash \text{naar} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7/9 & 2/9 & 0 & 0 \\ 7/12 & 7/36 & 2/9 & 0 \\ 5/12 & 1/6 & 7/36 & 2/9 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Tot dusverre hebben we alleen toestandveranderingen, overgangen, beschouwd, die zich in één tijdseenheid voltrokken. We kunnen echter ook kijken naar toestandveranderingen over langere perioden. We schrijven

$$p_{ij}^{(m)} = P(\underline{S}_{t+m} = j \mid S_t = i)$$

voor de kans dat de toestand j wordt bereikt vanuit i na m stappen. Voor deze kansen $p_{ij}^{(m)}$ geldt nu, zoals intuitief zeker duidelijk zal zijn:

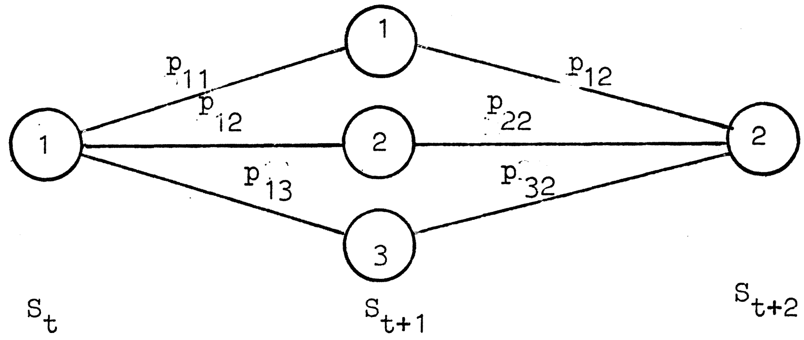
$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}^{(m-1)} \; p_{kj} \qquad\qquad m \geq 1$$

d.w.z. de kans om vanuit toestand i na m stappen in j te komen is gelijk aan de kans om in m-1 stappen vanuit i in een toestand k te komen <u>en</u> vanuit k in één stap in j. Dit geldt voor alle k. Bovendien zijn de laatstgenoemde twee overgangen onafhankelijk van elkaar, zodat we de kansen mogen vermenigvuldigen.

Voor m = 0 krijgen we de kans

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j \end{cases}$$

Laten we, ter illustratie, eens veronderstellen dat we een toestandsruimte met 3 toestanden (i = 1, 2, 3) hebben, en dat we daar twee stappen in doen, beginnend in $S_t = 1$ en eindigend in $S_{t+2} = 2$. We krijgen dan het volgende beeld:



$$p_{12}^{(2)} = p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} + p_{13}p_{32}$$

We kunnen ons nu afvragen wat er gebeurt als (m) zeer groot wordt. Zoals straks zal blijken zijn we in het bijzonder geinteresseerd in de eigenschappen van de limiet

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} p_{ij}^{(k)}$$

Het kan nu bewezen worden, dat, onder zekere voorwaarden *) deze limiet bestaat, en onafhankelijk is van de begintoestand i

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} p_{ij}^{(k)} = q_j$$

Dit getal q_j kan men interpreteren als de kans dat het systeem op een willekeurig, maar "oneindig" ver weg gelegen tijdstip de toestand j aanneemt.

We kunnen verder voor q_j de volgende regel afleiden

$$q_j = \sum_{k=1}^{N} q_k \, p_{kj} \ ,$$

want:

---

*) In praktijkgevallen is in de regel aan deze voorwaarden voldaan.

$$q_j = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{m} p_{ij}^{(n)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} p_{ik}^{(n-1)} \; p_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_{kj} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{m} p_{ik}^{(h-1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_{kj} \, q_k = \sum_{k=1}^{N} q_k \, p_{kj} \, .$$

Op grond hiervan noemt men de kansen q_j invariante kansen.

Voor de jassenhandelaar kunnen we nu de kansen q_0, q_1, q_2 en q_3 berekenen:

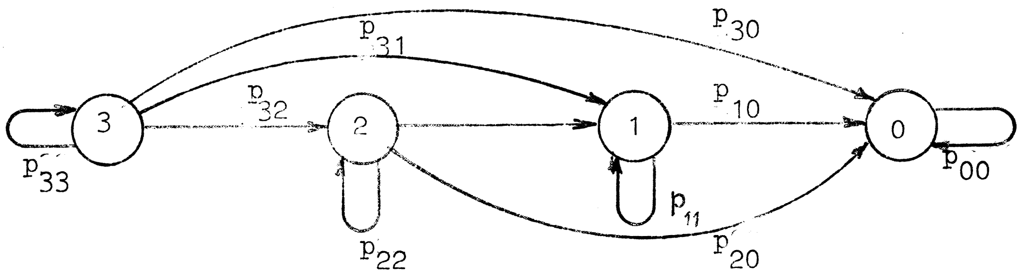
$$\begin{aligned} q_0 &= q_0 + {}^7/9 \; q_1 + {}^7/12 \; q_2 + {}^5/12 \; q_3 \\ q_1 &= {}^2/9 \; q_1 + {}^7/36 \; q_2 + {}^1/6 \; q_3 \\ q_2 &= {}^2/9 \; q_2 + {}^7/36 \; q_3 \\ q_3 &= {}^2/9 \; q_3 \end{aligned}$$

Bovendien geldt

$$\sum_{j=1}^{N} q_j = 1$$

want er moet toch zeker één toestand bereikt worden. (Dit kan overigens ook eenvoudig afgeleid worden m.b.v. de limietovergang waarmee q_j gedefinieerd is).

Berekening van q_j voor de jassenhandelaar levert op $q_0 = 1$ en $q_1 = q_2 = q_3 = 0$. Men zal stellig geen moeite hebben dit resultaat te interpreteren, het is immers zeker dat de man ooit uitverkocht zal raken. We hebben in dit geval te maken met één toestand waarin het systeem altijd zal blijven verkeren,zodra het die toestand eenmaal heeft aangenomen. Bovendien is het zo dat het systeem, eenmaal aangekomen in een willekeurige toestand, nooit meer kan terug keren naar een andere toestand, die het daarvoor heeft aangenomen. We noemen een verzameling toestanden, die deze eigenschap heeft een fuik; d.w.z. heeft het systeem een toestand binnen een fuik aangenomen, dan kan het nooit meer een toestand aannemen, die buiten die fuik ligt. We herhalen ter illustratie nogmaals het schetsje met de toestanden en de overgangen

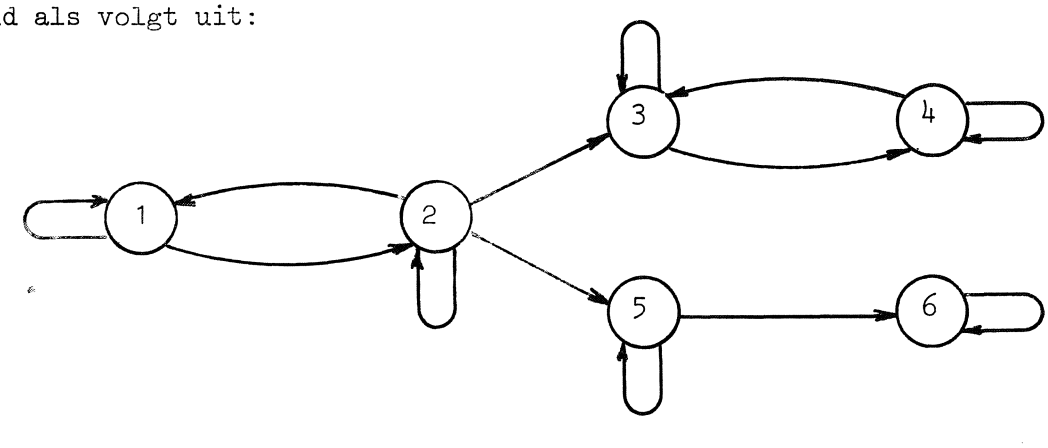


Zoals men ziet vormen de toestanden 3, 2, 1 en 0 een fuik, maar ook de toestanden 2, 1 en 0, terwijl 0 alleen de kleinst mogelijke fuik is. Zo'n kleinste fuik heet een kernfuik.

Wanneer de toestand 3 eenmaal verlaten is keert het systeem daarin nooit weer terug. Dit geldt ook voor de toestanden 2 en 1. We noemen zulke toestanden doorgangstoestanden, waaronder in het algemeen alle toestanden j begrepen worden, die vanuit minstens een andere toestand i niet kunnen worden bereikt, terwijl i wel vanuit j kan worden bereikt.

Naar aanleiding van het voorgaande heeft men kunnen opmerken dat de gehele toestandsruimte een fuik is, hetgeen voor alle Markovketens opgaat. In het voorbeeld bevatte bovendien geen enkele fuik twee of meer disjuncte (deel)fuiken. Dat wil zeggen, dat iedere fuik één of meer toestanden met de andere fuiken gemeenschappelijk heeft. Fuiken die geen disjuncte (deel)fuiken bevatten heten priemfuiken. In het vorige voorbeeld waren alle fuiken dus priemfuiken.

We zullen nu een toestandsruimte beschouwen, waarbij er wel disjuncte fuiken optreden. In een schetsje ziet zo'n toestandsruimte er bijvoorbeeld als volgt uit:



Bepalen we hier de fuiken dan vinden we behalve de fuik van de gehele toestandsruimte

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

ook nog

$$(3, 4, 5, 6), \quad (3, 4, 6), \quad (3, 4), \quad (5, 6) \quad \text{en } (6)$$

De fuik (1, 2, 3, 4, 5, 6) bevat de disjuncte fuiken (3, 4) en (5, 6) en is derhalve geen priemfuik. Zo zijn ook de fuiken (3, 4, 5, 6)en (3, 4, 6) geen priemfuiken. De laatste drie zijn dat wel: men kan er geen disjuncte deelfuiken in vinden.

Bij de limiet

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} p_{ij}^{(k)} = q_j$$

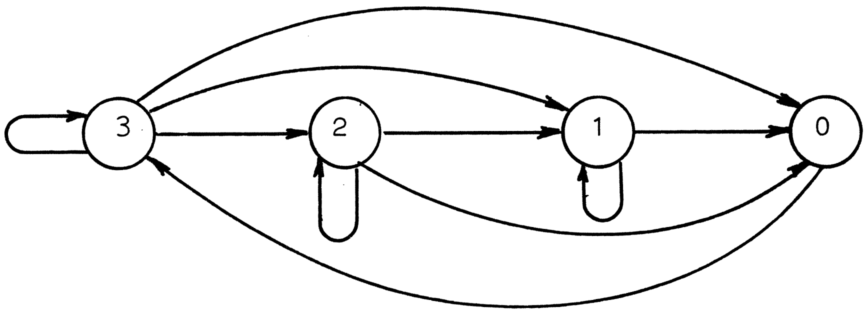
hebben we gesteld dat aan zekere voorwaarden moet zijn voldaan wil deze limiet bestaan. Het gaat hier voornamelijk om het feit dat q onafhankelijk is van de begintoestand i. Zou q_j niet onafhankelijk zijn van die begintoestand, dan moet geschreven worden

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} p_{ij}^{(k)} = q_{ij}$$

Als de toestandsruimte een priemfuik is, dan is deze onafhankelijkheid, zoals men wellicht zal inzien, volledig gewaarborgd.

In het eerste voorbeeld was sprake van één toestandruimte, die priemfuik is, en daar waren de kansen q_j onafhankelijk van de begintoestand i; immers van alle doorgangstoestanden was $q_j = 0$ en voor de laatste toestand 0 was $q_0 = 1$. Dit resultaat was, zoals we al geconstateerd hebben, geheel te verwachten, daar de handelaar eens zijn partijtje regenjassen uitverkocht zal hebben, ongeacht met welke hoeveelheid hij begint (begintoestand i). Zou de handelaar, wanneer hij uitverkocht is , zijn voorraad aanvullen met een even grote partij als hij de eerste keer gekocht had, dan treden er geen doorgangstoestanden meer op. De

De toestandsruimte blijft dan echter een priemfuik,die er b.v. als volgt uitziet



Ook nu zijn de kansen q_j onafhankelijk van de beginstoestand i, want na korter of langer tijd kan j vanuit iedere i bereikt worden.

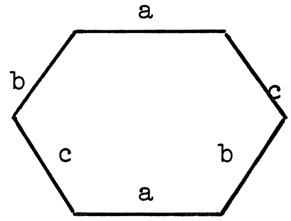
Hebben we echter te maken met een fuik die geen priemfuik is, dan zijn niet alle toestanden meer onderling bereikbaar, terwijl ook geen sprake is van op elkaar volgende doorgangstoestanden. (vgl. fuik (3.4)).
Nu is de onafhankelijkheid van q_j van de begintoestand niet langer meer aanwezig en daarmee hebben we de voorwaarde waarover we eerder spraken vastgesteld:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k+1}^{m} p_{ij}^{(k)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} p_{sj}^{(k)} = q_j$$

voor toestanden i, s en j uit dezelfde priefuik.

8.2. Strategiën en kosten.

In de werkplaats van de firma J.Bakker & Zn. staat een oude stansmachine, die men nog gebruikt voor het fabriceren van zeshoekige plaatjes van het volgende model.



In de machine bevinden zich daartoe drie paren instelbare messen, in de tekening aangegeven met a, b en c, die inmiddels, wegens verregaande zorgeloosheid van vorige machinebedienden, de eigenschap hebben om tijdens het doorvoeren van de metalen strip waaruit gestansd wordt met een redelijke kans uit hun instelstand te geraken. De huidige machinebediende heeft conscentieus geturfd hoe het "uit de instelling lopen" geschiedt en op grond van zijn waarnemingen zijn nu de kansen geschat op een wijziging in de instelling tijdens één keer stansen. De volgende toestanden kunnen zich voordoen:

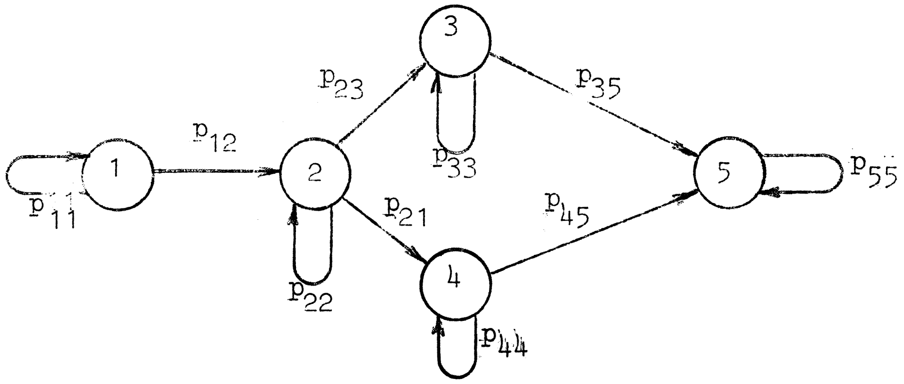
- alle messen staan in de instelstand,
- alleen de paren b en c staan in de stelstand,
- alleen het paar b staat in de instelstand,
- alleen het paar c staat in de instelstand,
- geen enkel paar staat in de instelstand.

Met betrekking tot deze toestanden spreken we af dat we het systeem "stansmachine" steeds vlak nadat een plaatje gestansd is zullen beschouwen. In verband met later in te voeren strategieën noemen we dit de beslissingstijdstippen.

Om nu verder efficient met deze toestanden te kunnen werken nummeren we ze in bovenstaande volgorde van 1 tot en met 5. In onderstaande matrix P staan de geschatte kansen op overgangen van de ene toestand naar de andere tijdens één keer stansen.

$$\begin{array}{c|c} \text{van} \diagdown \text{naar} & \begin{array}{ccccc} \quad 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 & \quad 5 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Een netwerktekeningetje van de toestanden geeft het volgende beeld:

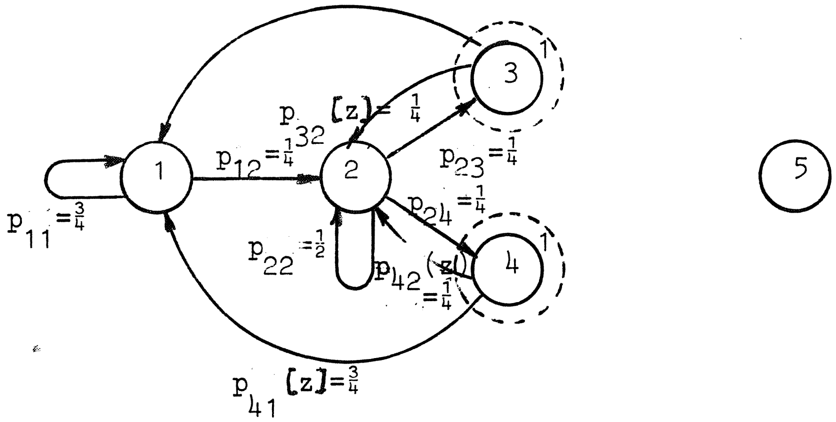


Zoals men ziet kunnen wij hier weer een aantal fuiken onderscheiden:

(1, 2, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5), (3, 5), (4, 5) en (5)

waarvan de laatste een kenfuik is. De toestanden 1, 2, 3 en 4 zijn allen doorgangstoestanden; toestand 5 is dat niet. Zo'n toestand, die geen doorgangstoestand is, heet overigens een terugkeertoestand.

Laten we de natuur haar gang gaan, dan bevindt het systeem zich na enige tijd zeker in toestand 5 (dus $q_5 = 1$). We behoeven ons echter niet zonder meer aan de willekeur van de natuur over te leveren. Er kunnen beslissingen genomen worden, waardoor de loop van het proces beinvloed wordt. Daar de laatste toestand alleen bepalend is, kunnen we, onafhankelijk van het beslissingstijdstip, aan een bepaalde toestand één en dezelfde beslissing toevoegen. Een strategie z bestaat derhalve uit één beslissingsregel x = z(S) voor alle beslissingstijdstippen. Zo'n beslissingsregel is b.v. "verkeert het systeem in toestand 3 of 4, dan moet de machine opnieuw bijgesteld worden", of anders gezegd "staat nog precies één messenpaar goed ingesteld, dan bijstellen". In het schema zien we de realisatie daarvan als volgt



Zoals men m.b.v. dit schema zal opmerken wordt toestand 5 niet meer bereikt en voor de verdere behandeling van het probeem kan toestand 5 zonder bezwaar worden weggelaten. Wordt de toestand 3 of de toestand 4 waargenomen, vlak nadat er gestansd is, dan worden de werkzaamheden onderbroken voor een bijstelling d.w.z. toestand 1 komt in plaats van de waargenomen toestand, en pas daarna wordt weer verder gestansd. In de matrix P(z) van de overgangskansen $p_{ij}[z]$ komt dat duidelijk uit:

$$
\begin{array}{rcccccl}
 & \text{naar} & 1 & 2 & 3 & 4 & \text{van} \\
P(z) = & & \multicolumn{4}{c}{\left(\begin{array}{cccc} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \end{array}\right)} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\end{array}
$$

Het argument z bij de kansen $p_{ij}[z]$ geeft aan dat de gekozen strategie van invloed is op de overgangskansen (zie b.v. $p_{31}[z] \neq p_{31}$). Hieruit kunnen wij de invariante kansen q_1, q_2, q_3 en q_4 berekenen. Alhoewel uiteraard ook de kansen q_j afhankelijk zijn van de strategie z, en dus eigenlijk $q_j[z]$ behoort te worden geschreven, is het gebruikelijk het argument z hier weg te laten.

$$q_1 = \tfrac{3}{4}xq_1 + \tfrac{3}{4}xq_3 + \tfrac{3}{4}xq_4$$

$$q_2 = \tfrac{1}{4}xq_1 + \tfrac{1}{2}xq_2 + \tfrac{1}{4}x_3 + \tfrac{1}{4}xq_4$$

$$q_3 = \tfrac{1}{4}xq_2$$

$$q_4 = \tfrac{1}{4}xq_2$$

$$1 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$$

en hieruit volgt $q_1 = \tfrac{1}{2}, q_2 = {}^1/3; q_3 = q_4 = {}^1/12$.

Aan het bijstellen van de stansmachine zijn kosten verbonden, en wel f 10,- per keer. Bovendien brengen de plaatjes die niet op maat zijn afgesneden extra kosten met zich mee bij de montage. Die extra kosten zijn afhankelijk van het aantal afwijkende zijden van zo'n plaatje. Zijn alle mesparen goed ingesteld, dan geeft dat uiteraard geen extra kosten. Zijn er twee paren goed ingesteld dan bedragen die kosten f 4,--, bij één goed ingesteld paar f 8,- en zijn alle messen in een onjuiste instelling, dan belopen de extra montagekosten f 12,-. Wij kunnen ons nu afvragen wat de verwachte kosten zijn, wanneer er m keer gestansd zal worden en daarbij de gegeven strategie wordt gehanteerd. De verwachte kosten per stansing (per "stap") geven we aan met

$$h(S;\ z(s)) = h(S;z)$$

waarin S de toestand is waarvan men uitgaat bij die stap en z(S) de beslissingsregel die gevolgd wordt. Geheel analoog aan de notatie p_{ij} voor de overgangskans van toestand S = i naar toestand S = j schrijft men voor S veelal i of j.

Laten de kosten voor een stap, waarin het systeem van i naar j gaat $r_{ij}(z)$ zijn, dan vinden we voor de verwachte kosten voor een stap vanuit toestand i:

$$h(i;\ z) \quad = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[z]\ r_{ij}(z).$$

Stel dat de stansmachine op een willekeurig beslissingstijdstip in toestand 2 verkeert, dan vinden we voor de kosten

$$h(2;\ z) \quad = p_{22}r_{22} + p_{23}r_{23} + p_{24}r_{24} =$$

$$= \tfrac{1}{2}x4 + \tfrac{1}{4}x8 + \tfrac{1}{4}x8 = 6.$$

Na m keer stansen vinden we als totale verwachte kosten, uitgaande van toestand i;

$$v^{(m)}(i;z) = h(i;z) \quad + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[z]\ h(j;\ z) \quad +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(2)}[z]\ h(j;\ z) \quad +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(3)} [z]\ h(j;\ z) \quad +$$

$$+ \ldots + \sum_{j+1}^{N} p_{ij}^{(m-1)} [z]\ h(j;\ z\ ) \quad =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(k)} [z]\ h(j;\ z) \tag{8.1}$$

We willen uiteraard een strategie z vinden waarvoor deze kosten minimaal zijn. Het minimaliseren van de totale kosten (8.1) is gelijkwaardig met het minimaliseren van de gemiddelde kosten

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(k)} [z]\ h(j;\ z\ ) \quad =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(k)} [z]\ h(j;\ z)$$

en voor $m \to \infty$ (het gaat immers om een ∞-stapsbeslissingsprobleem) gaat dit over in

$$\sum_{j=1}^{N} q_j\ h(j;\ z)$$

Het zal nu niemand verwonderen dat we als criteriumfunctie kiezen

$$y(S;\ z) = \sum_{j=1}^{N} q_j\ h(j;\ z)$$

welke onafhankelijk is van de beginstoestand i! Deze kosten $y(S;\ z)$ kunnen geinterpreteerd worden als de gemiddelde verwachte kosten voor een in de zeer verre toekomst gelegen stap (in het voorbeeld: een plaatje aan het eind van een "hele lange serie"). Voor het stansprobleem vinden we bij de gekozen strategie de volgende kosten:

$$h(1;\ z) = \tfrac{3}{4}\text{x}0 + \tfrac{1}{4}\text{x}4 = 1$$

$$h(2;\ z) = \tfrac{1}{2}\text{x}4 + \tfrac{1}{2}\text{x}8 + \tfrac{1}{2}\text{x}8 = 6$$

$$h(3;\ z) = 10 + \tfrac{3}{4}\text{x}0 + \tfrac{1}{4}\text{x}4 = 11$$

$$h(4;\ z) = 10 + \tfrac{3}{4}\text{x}0 + \tfrac{1}{4}\text{x}4 = 11$$

en

$$y(S;\ z) = q_1\text{x}h(1;\ z) + q_2\text{x}h(2;\ z) + q_3\text{x}h(3;\ z) + q_4\text{x}h(4;\ z) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\text{x}1 + \frac{1}{3}\text{x}6 + \frac{1}{12}\text{x}11 + \frac{1}{12}\text{x}11 = 4\frac{1}{3}$$

Andere strategieën, die we kunnen toepassen zijn:

- z_2 = bijstellen zodra toestand 2 zich voordoet
- z_3 = bijstellen zodra toestand 5 zich voordoet
- z_4 = bijstellen zodra toestand 3 of 5 zich voordoet
- z_5 = bijstellen zodra toestand 4 of 5 zich voordoet.

Wij zullen naast de strategie, die we zojuist berekend hebben, de twee eerstgenoemde van het bovenstaande rijtje beschouwen. De reeds berekende strategie duiden we in het vervolg aan met z_1. Voor de strategieën luiden de overgangskansen en de kosten als volgt (ga dat na):

strategie z_2:

$$\begin{array}{ccc} & \text{naar: } 1 \quad 2 & \text{van:} \\ p(z_2) = & \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

$$h(1;\ z_2) = \tfrac{3}{4}\text{x}0 + \tfrac{1}{4}\text{x}4 = 1$$

$$h(2;\ z_2) = 10 + \tfrac{3}{4}\text{x}0 + \tfrac{1}{4}\text{x}4 = 11$$

$$q_1 = \tfrac{3}{4}xq_1 + \tfrac{3}{4}xq_2$$

$$q_2 = \tfrac{1}{4}xq_1 + \tfrac{1}{4}xq_2 \qquad q_1 = \tfrac{3}{4}\ ,\ q_2 = \tfrac{1}{4}$$

$$y(S;\ z_2) = \tfrac{3}{4}x1 + \tfrac{1}{4}x11 = 3\tfrac{1}{2}$$

strategie z_3:

$$\begin{array}{cc|c} & \begin{array}{ccccc} \text{naar: } 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \text{van:} \\ \hline P(z_3) = & \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

$$h(1;\ z_3) = \tfrac{3}{4}x0 + \tfrac{1}{4}x4 = 1$$

$$h(2;\ z_3) = \tfrac{1}{2}x4 + \tfrac{1}{4}x8 + \tfrac{1}{4}x8 = 6$$

$$h(3;\ z_3) = \tfrac{3}{4}x8 + \tfrac{1}{4}x12 = 9$$

$$h(4;\ z_3) = \tfrac{1}{2}x8 + \tfrac{1}{2}x12 = 10$$

$$h(5;\ z_3) = 10 + \tfrac{3}{4}x0 + \tfrac{1}{4}x4 = 11$$

$$q_1 = \tfrac{3}{4}xq_1 + \tfrac{3}{4}xq_5$$

$$q_2 = \tfrac{1}{4}xq_1 + \tfrac{1}{2}xq_2 + \tfrac{1}{4}xq_5$$

$$q_3 = \tfrac{1}{4}xq_2 + \tfrac{3}{4}xq_3$$

$$q_4 = \tfrac{1}{4}xq_2 + \tfrac{1}{2}xq_4$$

$$q_5 = \tfrac{1}{4}xq_3 + \tfrac{1}{2}xq_4$$

$$1 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5$$

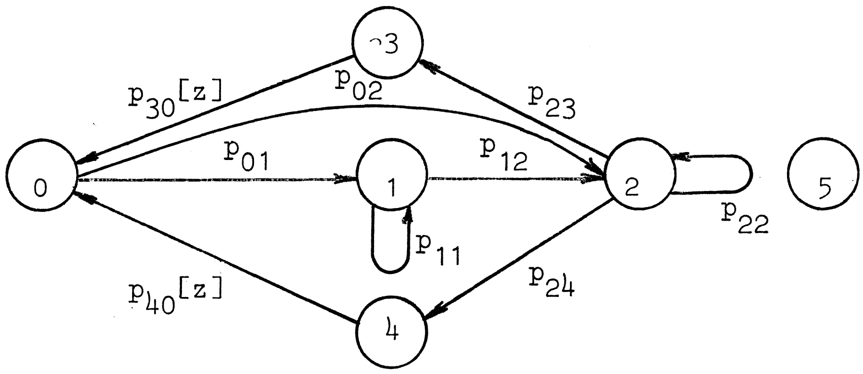
$$q_1 = {}^3/9,\ q_2 = q_3 = {}^2/9,\ q_4 = q_5 = {}^1/9$$

$$y(S;\ z_3) = \frac{1}{3}x1 + \frac{2}{9}x6 + \frac{2}{9}x9 + \frac{1}{9}x10 + \frac{1}{9}x11 = 6$$

Uit deze berekeningen blijkt dat de kosten voor strategie z_2 het kleinst zijn en dat we daarmee dus m.b.t. de eerste drie als goedkoopste strategie "bijstellen zodra er nog maar twee messenparen juist zijn ingesteld" gevonden hebben.

Het zal iedereen opgevallen zijn dat we bij deze aanpak eerst alle toegelaten strategieën moeten berekenen alvorens tot optimaliteit van één ervan te kunnen concluderen. Dit brengt, vooral voor omvangrijke problemen met veel toegelaten strategieën veel rekenwerk met zich mee en het zal derhalve wel niemand verwonderen dat er gezocht is naar een meer efficiente methode om de optimale strategie te bepalen. Zo'n methode is de iteratieprocedure van R.HOWARD, die in de volgende paragraaf zal worden besproken.

Beschouwen we nogmaals de stansmachine van de firma J.Bakker & Zn., dan moeten wij tot de conclusie komen, dat in het geheel geen rekening is gehouden met de tijdsduur van de stansbewerking en het bijstellen. Ons de uitspraak "tijd is geld" herinnerend willen we daar nu wel rekening mee houden. Stel dat het stansen van een plaatje uit een metalen strip gemiddeld twee minuten duurt (inclusief bijkomende handelingen) en het bijstellen van de messenparen, ongeacht het aantal, ook twee minuten. We breiden nu de toestandsruimte uit met een toestand 0 = "het bijstellen" en we doen alsof het een bewerking is van de machine, net als het stansen zelf. D.w.z. we beschouwen het systeem vlak nadat er een plaatje gestansd is of aan het eind van het bijstellen. De slagzin "tijd is geld" wordt vertaald door de eis dat minstens 24 plaatjes per uur moeten worden afgeleverd. Voor strategie z_1 kunnen we weer een schetsje maken:



De matrix $P(z_1)$ ziet er als volgt uit

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccccc} \text{naar: } 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \text{van:} \\
P(z_1) = & \begin{pmatrix} 0 & ^3/4 & ^1/4 & 0 & 0 \\ 0 & ^3/4 & ^1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ^1/2 & ^1/4 & ^1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\end{array}
$$

De kansen q_j worden nu:

$$
\left.\begin{aligned}
q_0 &= q_3 + q_4 \\
q_1 &= \tfrac{3}{4} x q_0 + \tfrac{3}{4} x q_1 \\
q_2 &= \tfrac{1}{4} x q_0 + \tfrac{1}{4} x q_1 + \tfrac{1}{2} x q_2 \\
q_3 &= \tfrac{1}{4} x q_2 \\
q_4 &= \tfrac{1}{4} x q_2 \\
1 &= q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4
\end{aligned}\right\}
\qquad
\begin{aligned}
q_0 &= {}^1/6 \\
q_1 &= {}^1/2 \\
q_2 &= {}^1/3 \\
q_3 &= q_4 = {}^1/12
\end{aligned}
$$

Daar $q_0 = {}^1/6$ kunnen we bepalen dat de verwachting van het aantal minuten dat per uur besteed wordt aan bijstellen

$$\frac{1}{6} \times 60 = 10$$

bedraagt. Toegelaten is $60 - 24 \times 2 = 12$ minuten, zodat we deze strategie mogen accepteren m.b.t. de tijdseis.

8.3. De iteratiemethode van HOWARD.

In de vorige paragraaf is als criterium voor de optimaliteit van een strategie de functie y(S;z) afgeleid, en deze functie is in de praktijk onafhankelijk van de begintoestand van het Markov-beslissingsproces. We kunnen ons nu echter afvragen of het verschil uitmaakt wanneer we het systeem vanuit één bepaalde toestand laten starten in plaats vanuit een andere. Stel b.v. dat de firma J. Bakker & Zn., die in de vorige paragraaf ten tonele is gevoerd, zojuist op de stansmachine een serie plaatjes heeft gefabriceerd en dat men bij het begin van de volgende serie constateert dat de machine in toestand 2 ("alleen messenparen b en c in de instelstand") verkeert. Onze vraag kan nu luiden: "wat zal het bedrijf er voor over hebben om eerst bij te stellen i.p.v. direct te beginnen?"

Voordat we een antwoord op deze vraag geven beschouwen we het stelsel lineaire vergelijkingen

$$y + v_i - \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[z]v_j = h(i;z) \qquad i = 1,2,\dots,N. \qquad (8.2)$$

waarin $p_{ij}[z]$ en h(i;z) bekende getallen zijn, en wel resp. de overgangskansen behorende bij de strategie z en de directe kosten van een stap vanuit toestand i onder de strategie z. Het kan bewezen worden dat dit stelsel altijd een oplossing heeft. Bovendien kan men bewijzen dat voor iedere oplossing geldt

$$y = \sum_{j=1}^{N} q_j h(j;z) = y(S;z).$$

We herschrijven dan (8.2) als volgt:

$$v_i = h(i;z) - y(S;z) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[z]v_j, \quad i = 1,2,\dots,N. \quad (8.3)$$

Daar v_i ook afhankelijk is van de toegepaste strategie z schrijven we in het vervolg v(i;z) voor v_i.

Wanneer wij nu reeds trachten (8.3) te interpreteren, dan zien wij dat m.b.v. de eerste twee termen van het rechterlid een verschil wordt weergegeven van de opbrengst van één stap, die start vanuit toestand i, t.o.v. de gemiddelde opbrengst in de long run. Hiermee is een grove indicatie gegeven van de betekenis van v(i;z), die we nu verder zullen onderzoeken. Zoals geconstateerd is heeft (8.3) betrekking op één stap in het beslissingsproces, en wel de eerstvolgende vanuit i. Door nu herhaalde substitutie toe te passen kunnen we (8.3) generaliseren voor meer stappen. k-maal herhaald substitueren levert op

$$v(i;z) = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(r)}[z]\,\{h(j;z) - y(S;z)\} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(k)}[z]v(j;z)$$

$$= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(r)}[z]\,h(j;z) - k.y(S;z) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(k)}[z]v(j;z) \tag{8.4}$$

Nemen we nu een andere toestand, bijv. N, en schrijven we daarvoor ook (8.4) op, dan krijgen we voor het verschil v(i;z) - v(N;z) het volgende

$$v(i;z) - v(N;z) = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(r)}[z]h(j;z) - \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{N} p_{Nj}^{(r)}[z]h(j;z) + $$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \{p_{ij}^{(k)}[z] - p_{Nj}^{(k)}[z]\}v(j;z) \tag{8.5}$$

Onder bepaalde - ruime - voorwaarden geldt

$$\lim_{k\to\infty} p_{ij}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} p_{Nj}^{(k)} = q_j \qquad j = 1,2,\ldots,N.$$

en voor (8.5) volgt dan

$$v(i;z) - v(N;z) = \lim_{k\to\infty} \{ \sum_{r}^{k-1} \sum_{j}^{N} p_{ij}^{(r)}[z]h(j;z) - \sum_{r}^{k-1} \sum_{j}^{N} p_{Nj}^{(r)}[z]h(j;z)\} \tag{8.6}$$

De uitdrukking tussen de accolades geeft voor de begintoestanden i en N het verschil in totale verwachte opbrengst weer over de eerste k beslissingstijdstippen. Voor toestand i en N wordt met (8.6) derhalve het voor- of nadeel in totale verwachte opbrengst bepaald tussen een beslissingsproces dat start in i in plaats van N.

We zijn nu in staat een antwoord te geven op de vraag, die we ons m.b.t. de stansmachine van de firma J. Bakker & Zn. gesteld hebben. Nemen we aan dat de werkplaatschef gekozen heeft voor de strategie "bijstellen als geen van de messenparen meer in de instelstand staat", dan vinden wij voor die z de volgende vergelijkingen (vgl. (8.3)).

$$
\begin{aligned}
v(1;z) &= 1 - 6 + \tfrac{3}{4}\, v(1;z) + \tfrac{1}{4}\, v(2;z) \\
v(2;z) &= 6 - 6 + \tfrac{1}{2}\, v(2;z) + \tfrac{1}{4}\, v(3;z) + \tfrac{1}{4}\, v(4;z) \\
v(3;z) &= 9 - 6 + \tfrac{3}{4}\, v(3;z) + \tfrac{1}{4}\, v(5;z) \\
v(4;z) &= 10 - 6 + \tfrac{1}{2}\, v(4;z) + \tfrac{1}{2}\, v(5;z) \\
v(5;z) &= 11 - 6 + \tfrac{3}{4}\, v(1;z) + \tfrac{1}{4}\, v(2;z)
\end{aligned}
$$

Bij de oplossing van dit stelsel zal men tot de ontdekking komen dat de waarden van v(i;z) niet eenduidig bepaald zijn. Want als v(i;z) voldoet, dan voldoet ook v(i;z) + k, waarin k een willekeurige constante is. Men gaat dit eenvoudig na door in (8.3) v(i;z) + k voor iedere v(i;z) te substitueren.

$$
\begin{aligned}
v(i;z) + k &= h(i;z) - y(S;z) + \sum_{j=1}^{N} (p_{ij}[z] + k) = \\
&= h(i;z) - y(S;z) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[z] + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[z]k = \\
&= h(i;z) - y(S;z) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[z]v(j;z) + k.
\end{aligned}
$$

Daar voor ons slechts de verschillen tussen de v(i;z) onderling van belang zijn, mogen we zonder bezwaar v(N;z) van iedere v(i;z) (i = 1,2,...,N) aftrekken, hetgeen in de praktijk neerkomt op het nulstellen van v(N;z).

In het onderhavige geval krijgen we dan als resultaat:

$$\frac{1}{4}\, v(1;z) = -\, 5 + \frac{1}{4}\, v(2;z)$$
$$\frac{1}{2}\, v(2;z) = \frac{1}{4}\, v(3;z) + \frac{1}{4}\, v(4;z)$$
$$\frac{1}{4}\, v(3;z) = 3 + 0$$
$$\frac{1}{2}\, v(4;z) = 5 + 0$$
$$v(5;z) = 0 = 5 + \frac{3}{4}\, v(1;z) + \frac{1}{4}\, v(2;z)\ .$$

Hieruit volgt: $v(1;z) = -\, 10 \qquad v(4;z) = 8$

$v(2;z) = 10 \qquad v(5;z) = 0$

$v(3;z) = 12$

Het verschil $\{v(1;z) - v(2;z)\}$ geeft nu het verschil in totale verwachte kosten weer voor het starten met of zonder bijstellen. Daar

$$v(1;z) - v(2;z) = -\ f\ 20,-$$

mogen we concluderen dat het voordelig is voor de firma om eerst bij te stellen, voorzover de bijstelkosten het bedrag van ƒ 20,- niet overschrijden. Daar de bijstelkosten slechts ƒ 10,- bedragen is het derhalve beter in toestand 2 de beslissing "bijstellen" te nemen in plaats van de , door strategie z voorgeschreven, beslissing "doorgaan". Het is nu gerechtvaardigd te stellen dat de gekozen strategie z in toestand 2 niet de beste beslissing dicteert. We kunnen ook voor andere toestanden een dergelijke vergelijking maken om te onderzoeken of er gunstiger beslissingen mogelijk zijn. Het ligt nu voor de hand dat we de volgende twee situaties vergelijken:

1 - in toestand i $(i = 1,2,\ldots,N)$ eerst de beslissing $x \neq z(i)$ nemen en daarna strategie z toepassen (notatie $(x)z$);

2 - in toestand N altijd de beslissing $z(N)$ nemen (in het voorbeeld $z(5)$).

We vergelijken dan in wezen, zoals hierboven voor de toestand 2 is geschied, de "relatieve kosten" voor het starten uit een andere toestand dan die, welke door strategie z wordt voorgeschreven. Wat betreft de term "relatieve kosten" merken we op dat deze term terecht gebruikt mag worden voor v(i;z) daar we, door het nulstellen van v(N;z), altijd vergelijken met een start vanuit toestand N.

Analoog aan (8.3) kan men afleiden dat voor het hierboven genoemde "geval 1" de relatieve kosten als volgt luiden

$$v(i;(x)z) = h(i;x) - y(S;z) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(x)\ v(i;z) \tag{8.7}$$

waarbij we nogmaals opmerken dat v(N;z) = 0. Een verklaring van de formule (8.7) vindt men eenvoudig wanneer men zich realiseert dat tengevolge van die ene afwijkende beslissing $x \neq z(i)$ wel de directe opbrengst van de eerstvolgende stap, maar niet de gemiddelde opbrengst in de long run zal veranderen.

Levert v(i;(x)z) een lagere waarde op dan v(i;z) voor een beslissing x, dan hebben we daarmee aangetoond dat het beter is de eerste keer in toestand i die beslissing $x \neq z(i)$ te nemen. Er is dan echter geen enkele reden om aan te nemen dat bij een latere terugkeer in toestand i deze beslissing niet weer beter zal zijn dan z(i). We kunnen voor iedere toestand i op deze wijze een beslissing x bepalen waarvoor v(i;(x)z) minimaal is. We besluiten nu die nieuwe strategie z'(i) toe te passen, welke in toestand i juist de beslissing z'(i) = x voorschrijft. Het kan bewezen worden dat wij op deze wijze inderdaad een betere strategie verkrijgen, d.w.z.

$$y(S;z') \leq y(S;z)$$

We passen het voorgaande toe op het gegeven voorbeeld. Om een overzichtelijke werkwijze te bevorderen, maken we allereerst een schema van de mogelijke toestanden S_t, de toegelaten beslissingen x_t en de toestandsveranderingen $S_t \rightarrow S_{t+1}$, met de bijbehorende kansen en kosten.

toestand $S_t = i$ op tijdstip t	beslissing x_t	overgangskansen bij toestandsverandering					kosten bij toestandsverandering					$h(i;x_t)$
		$i \to 1$	$i \to 2$	$i \to 3$	$i \to 4$	$i \to 5$	$i \to 1$	$i \to 2$	$i \to 3$	$i \to 4$	$i \to 5$	
1	doorgaan	3/4	1/4	0	0	0	0	4	-	-	-	1
	bijstellen	3/4	1/4	0	0	0	10	14	-	-	-	11
2	doorgaan	0	1/2	1/4	1/4	0	-	4	8	8	-	6
	bijstellen	3/4	1/4	0	0	0	10	14	-	-	-	11
3	doorgaan	0	0	3/4	0	1/4	-	-	8	-	12	9
	bijstellen	3/4	1/4	0	0	0	10	14	-	-	-	11
4	doorgaan	0	0	0	1/2	1/2	-	-	-	8	12	10
	bijstellen	3/4	1/4	0	0	0	10	14	-	-	-	11
5	doorgaan	0	0	0	0	1	-	-	-	-	12	12
	bijstellen	3/4	1/4	0	0	0	10	14	-	-	-	11

Vervolgens berekenen we voor alle mogelijke combinaties van de toestand S en de beslissingen x, die in bovenstaand schema zijn vermeld, de waarden van v(i;(x)z). De beslissingen noteren wij als volgt:

$$x = \begin{cases} 0 & \text{"doorgaan"} \\ 1 & \text{"bijstellen"} \end{cases}$$

Voor v(i;(x)z) vinden wij m.b.v. (8.7):

$$v(1;(0)z) = 1 - 6 + \tfrac{3}{4}(-10) + \tfrac{1}{4}(10) = -10$$

$$v(1;(1)z) = 11 - 6 + \tfrac{3}{4}(-10) + \tfrac{1}{4}(10) = 0$$

$$v(2;(0)z) = 6 - 6 + \tfrac{1}{2}(10) + \tfrac{1}{4}(12) + \tfrac{1}{4}(8) = 10$$

$$v(2;(1)z) = 11 - 6 + \tfrac{3}{4}(-10) + \tfrac{1}{4}(10) = 0$$

$$v(3;(0)z) = 9 - 6 + \tfrac{3}{4}(12) + \tfrac{1}{4}(0) = 12$$

$$v(3;(1)z) = 11 - 6 + \tfrac{3}{4}(-10) + \tfrac{1}{4}(10) = 0$$

$$v(4;(0)z) = 10 - 6 + \tfrac{1}{2}(8) + \tfrac{1}{2}(0) = 8$$

$$v(4;(1)z) = 11 - 6 + \tfrac{3}{4}(-10) + \tfrac{1}{4}(10) = 0$$

$$v(5;(0)z) = 12 - 6 + 1\,(0) = 6$$

$$v(5;(1)z) = 11 - 6 + \tfrac{3}{4}(-10) + \tfrac{1}{4}(10) = 0$$

Uit deze berekeningen blijkt dat voor de toestand S = 1 de beslissing x = 0 de beste beslissing is en voor alle andere toestanden de beslissing x = 1, d.w.z. bijstellen. Een betere strategie z' luidt dus

$$z'(i) = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ 1 & i = 2, 3, 4, 5 \end{cases} .$$

In paragraaf 8.2 is voor deze strategie z' (daar z_2) reeds de verwachte gemiddelde opbrengst $y(S;z_2)$ berekend:

$$y(S;z_2) = 3\tfrac{1}{2} \quad .$$

Op grond van de hierboven gegeven berekeningen weten we van de nieuwe strategie z_2 echter nog niet of het de optimale strategie is. Daarom gaan we de hierboven beschreven procedure nogmaals uitvoeren voor z_2. Wordt dan dezelfde strategie $z' = z_2$ gevonden, waarvoor geldt

$$y(S;z') \leq y(S;z_2)$$

dan is z_2 de optimale strategie. Het kan bewezen worden dat op deze wijze in een eindig aantal stappen een optimale strategie gevonden wordt.

De waarden $v(i;z_2)$ voor de nieuwe strategie moeten nu berekend worden. In de voorgaande paragraaf is al getoond dat we het probleem kunnen reduceren tot een probleem met twee toestanden (de toestanden 3, 4 en 5 worden immers onder de strategie z_2 al niet meer bereikt). De vergelijkingen luiden

$$\begin{aligned} v(1;z_2) &= 1 - 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\, v(1;z_2) + \tfrac{1}{4}\, v(2;z_2) \\ v(2;z_2) &= 11 - 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\, v(1;z_2) + \tfrac{1}{4}\, v(2;z_2) \ . \end{aligned}$$

Stellen we $v(2;z_2) = 0$, dan volgt $v(1;z_2) = -10$. Terzijde zij opgemerkt dat het bedrag dat de firma voor een bijstelling vanuit toestand 2 bereid zal zijn uit te geven

$$-\{v(1;z_2) - v(2;z_2)\} = f\ 10,-$$

bedraagt. Dit bedrag is, zoals men wellicht al zou vermoeden, gelijk aan de bijstelkosten. Immers strategie z_2 schrijft een bijstelling in toestand 2 voor.

We gaan nu voor het kleinere probleem weer een betere strategie zoeken, die lagere relatieve kosten oplevert.

$$\begin{aligned}
v(1;(0)z_2) &= 1 - 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\,(-10) = -10\\
v(1;(1)z_2) &= 11 - 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\,(-10) = 0\\
v(2;(0)z_2) &= 6 - 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,(0) \quad = 2\tfrac{1}{2}\\
v(2;(1)z_2) &= 11 - 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\,(-10) = 0
\end{aligned}$$

De enig mogelijke conclusie is dat we inderdaad dezelfde strategie als de vorige keer gevonden hebben en dat er kennelijk geen verbetering meer mogelijk is. Dit is, naar bewezen kan worden, een volledig juiste conclusie. De methode die gebruikt is om de optimale strategie te vinden heet de iteratiemethode van HOWARD. In een kort schema geven wij de gang van zaken bij deze methode hieronder weer. De iteratiemethode is in twee delen te splitsen, die over het algemeen als volgt worden aangeduid:

1 - "value-determination procedure": de waarden $v(i;z)$ worden voor de gevonden strategie z berekend;
2 - "policy-improvement operation": de waarden $v(i;(x)z)$ worden berekend en de minimale $v(i;(x)z)$ voor iedere toestand i bepaald. Daaruit volgt voor iedere toestand i een beslissing x.

Het schema luidt nu:

(value-determination procedure)

bereken de oplossing van het stelsel

$$v(i;z) = h(i;z) - y(S;z) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[z]v(j;z)$$

$$v(N;z) = 0$$

(policy-improvement operation)

bepaal bij iedere toestand i de beslissing x, waarvoor

$$v(i;(x)z) = h(i;x) - y(S;z) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(x)v(j;z)$$

minimaal is, met dien verstande dat, wanneer een beslissing x in de vorige iteratiestap aan i is toegewezen en ook nu een minimale waarde van v(i;(x)z) oplevert, dan die beslissing x weer gekozen <u>moet</u> worden *)

Wordt tweemaal achtereen dezelfde strategie z gevonden, dan is die strategie z de optimale.

Wij illustreren deze iteratiemethode nog aan een tweetal voorbeelden. Het eerste voorbeeld is afgeleid van opgave 3.2; dat is de opgave waarin een optimale vervangingspolitiek voor de boor van de E.A.A.M. gevraagd wordt. De toestanden die wij onderscheiden zijn de leeftijden van de boor. (1, 2 of 3). De beslissingstijdstippen vallen iedere keer vlak na een boring en de mogelijke beslissingen zijn x = 1 (vervangen) en x = 0 (doorgaan). We noteren een strategie z als

$$z = (z(1),\ z(2),\ z(3)),$$

d.w.z. achtereenvolgens de beslissing in toestand 1, in toestand 2 en in toestand 3.

---

*) Dit is van belang voor het geval er meer beslissingen x zijn die een minimale waarde opleveren.

Eerst wordt een tabel met overgangskansen en kosten opgesteld:

toestand S = i	beslissing x	overganskansen i→1	i→2	i→3	kosten in ƒ 1000,- i→1	i→2	i→3	h(i;x) in ƒ 1000,-
1	0	1/8	7/8	0	80	0	-	10
	1	1	0	0	$20+\frac{1}{16}80$	-	-	25
2	0	1/2	0	1/2	80	-	0	40
	1	1	0	0	$20+\frac{1}{16}80$	-	-	25
3	0	1	0	0	80	-	-	80
	1	1	0	0	$20+\frac{1}{16}80$	-	-	25

We beginnen met de strategie $z_1 = (0,0,1)$, d.w.z. alleen vervangen bij een boor met leeftijd 3.

We berekenen de waarden van $v(i;z_1)$ en $y(S;z_1)$:

$$v(1;z_1) = 10 - y(S;z_1) + \frac{1}{8}\,v(1;z_1) + \frac{7}{8}\,v(2;z_1)$$

$$v(2;z_1) = 40 - y(S;z_1) + \frac{1}{2}\,v(1;z_1) + \frac{1}{2}\,v(3;z_1)$$

$$v(3;z_1) = 25 - y(S;z_1) + v(1;z_1)$$

$$v(3;z_1) = 0$$

hieruit volgt

$$v(1;z_1) = -\,0{,}75$$

$$v(2;z_1) \cong 15{,}38 \qquad\qquad y(S;z_1) \cong 24.25$$

$$v(3;z_1) = 0$$

en hiermee is de value-determination procedure ten einde.
Wordt de waarde van $y(S;z_1)$ op de wijze, die in paragraaf 8.2 is geïntroduceerd, berekend dan vindt men dezelfde waarde. De matrix van overgangskansen luidt:

$$P(z_1) = \begin{pmatrix} 1/8 & 7/8 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(ga na)}$$

en dus

$$q_1 = \frac{1}{8} q_1 + \frac{7}{8} q_2 + q_3$$

$$q_2 = \frac{7}{8} q_1$$

$$q_3 = \frac{1}{2} q_2$$

$$1 = q_1 + q_2 + q_3$$

waaruit volgt

$$q_1 \cong 0{,}43$$

$$q_2 \cong 0{,}38$$

$$q_3 \cong 0{,}19$$

en

$$y(S;z) \cong 0{,}43 x 10 + 0{,}38 x 40 + 0{,}19 x 25 = 24{,}25 \ .$$

We vervolgen met de policy-improvement operation.

$$v(1;(0)z_1) = 10 - 24{,}25 + \frac{1}{8}(-0{,}75) + \frac{7}{8}(15{,}54) \cong -0{,}75$$

$$v(1;(1)z_1) = 25 - 24{,}25 + (-0{,}75) = 0$$

$$v(2;(0)z_1) = 40 - 24{,}25 + \frac{1}{2}(-0{,}75) + \frac{1}{2}(0) \cong 15{,}38$$

$$v(2;(1)z_1) = 25 - 24{,}25 + (-0{,}75) = 0$$

$$v(3;(0)z_1) = 80 - 24{,}25 + (-0{,}75) = 55$$

$$v(3;(1)z_1) = 25 - 24{,}25 + (-0{,}75) = 0$$

Aan de hand van de hierboven berekende waarden voor $v(i;(x)z_1)$ stellen we vast dat een betere strategie, bestaande uit de beslissingen x, die minimale waarden voor $v(i;(x)z_1)$ opleveren, als volgt luidt:

$$z_2 = (0,1,1).$$

De lezer ga nu na dat het probleem tot een probleem van kleinere omvang herleid kan worden (slechts twee relevante toestanden) en dat z_2 de optimale strategie is.

Het tweede voorbeeld, dat we behandelen is een onderhoudsprobleem.

<u>voorbeeld 8.1</u>.

Een handelaar in machines heeft van één type machine drie exemplaren verkocht. Het onderhoud van deze machines geschiedt onder toezicht van de handelaar. Hij heeft derhalve een voorraadje reserveonderdelen aangelegd, dat éénmaal per week op maandagmorgen, zonder levertijd, kan worden aangevuld tot drie exemplaren. De kansverdeling van de vraag $\underline{d}$ per week naar een bepaald reserveonderdeel wordt gegeven door

$$P[\underline{d}=0] = \frac{1}{6} \quad P[\underline{d}=1] = \frac{1}{4} \quad P[\underline{d}=2] = \frac{1}{3} \quad P[\underline{d}=3] = \frac{1}{4}.$$

Verder wordt verondersteld dat de voorraadkosten per week evenredig zijn met de omvang van de voorraad aan het eind van die week. Zodra de voorraad niet toereikend is, worden noodinkopen verricht, waarvan de extra kosten per eenheid 10 maal de voorraadkosten per eenheid bedragen. Tenslotte wordt voor iedere aanvulling van de voorraad een vast bedrag van 5 maal de voorraadkosten per eenheid in rekening gebracht.
De vraag die de handelaar zich nu stelt is:
"Moet ik de voorraad aanvullen als ik nog één of misschien zelfs twee onderdelen in voorraad heb? Of moet ik pas bijbestellen als alle onderdelen gebruikt zijn?"

Als toestand van het systeem "voorraad" nemen we uiteraard de voorraadgrootte, waarbij we noodinkopen als negatieve voorraad rekenen. De toestandsgrootheid S kan dus waarden aannemen uit de verzameling

$$\{3, 2, 1, 0, -1, -2\}$$

Ter verduidelijking merken we op dat een voorraad van b.v. -1 aangeeft dat er eenmaal een noodinkoop is verricht.

De strategie z duiden we aan met

$$z = (z(0),\ z(1),\ z(2),\ z(3)),$$

waarvan de interpretatie is:

$x = z(i)$ is de beslissing die de strategie z in toestand i voorschrijft, dus

$$x = \begin{cases} 1 & \text{"aanvullen"} \\ 0 & \text{"niets doen"} \end{cases}$$

We maken weer een overzichtstabel van de kansen en de kosten die de diverse beslissingen in de onderscheiden toestanden met zich meebrengen. Op grond van het feit dat een weldenkende handelaar zijn (maximale) voorraad van 3 stuks zeker niet zal aanvullen en evenzo een aanvulling van een geheel uitgeputte voorraad niet zal nalaten worden de desbetreffende beslissingen buiten beschouwing gelaten. Op deze wijze kan men, door de reële mogelijkheden na te gaan, de omvang van het probleem kleiner maken.

toestand	beslissing	overgangskansen						kosten						h(i;x)
S = i	x	i→3	i→2	i→1	i→0	i→-1	i→-2	i→3	i→2	i→1	i→0	i→-1	i→-2	
3	1	buiten beschouwing laten!												
	0	1/6	1/4	1/3	1/4	0	0	3	2	1	0	-	-	4/3
2	1	1/6	1/4	1/3	1/4	0	0	8	7	6	5	-	-	19/3
	0	0	1/6	1/4	1/3	1/4	0	-	2	1	0	10	-	37/12
1	1	1/6	1/4	1/3	1/4	0	0	8	7	6	5	-	-	19/3
	0	0	0	1/6	1/4	1/3	1/4	-	-	1	0	10	20	51/6
0	1	1/6	1/4	1/3	1/4	0	0	8	7	6	5	-	-	19/3
	0	buiten beschouwing laten!												
-1	1	1/6	1/4	1/3	1/4	0	0	8	7	6	5	-	-	19/3
	0	buiten beschouwing laten!												
-2	1	1/6	1/4	1/3	1/4	0	0	8	7	6	5	-	-	19/3
		buiten beschouwing laten!												

Ga na dat men evengoed alleen de toestanden S = 3, S = 2, S = 1 en S = 0 kan onderscheiden, en dan de volgende tabel verkrijgt. We onderscheiden in dat geval alleen de fysisch waarneembare toestanden. De kansen en de kosten voor een stap van $i \rightarrow 0$ moeten opnieuw berekend worden.

toestand	beslissing	overgangskansen				kosten				h(i;x)
S = i	x	i→3	i→2	i→1	i→0	i→3	i→2	i→1	i→0	
3	1	buiten beschouwing laten!								
	0	1/6	1/4	1/3	1/4	3	2	1	0	4/3
2	1	1/6	1/4	1/3	1/4	8	7	6	5	19/3
	0	0	1/6	1/4	7/12	-	2	1	30/7	37/12
1	1	1/6	1/4	1/3	1/4	8	7	6	5	19/3
	0	0	0	1/6	5/6	-	-	1	10	51/6
0	1	1/6	1/4	1/3	1/4	8	7	6	5	19/3
	0	buiten beschouwing laten!								

Daar bij het onderscheiden van minder toestanden minder rekenwerk wordt gevergd, zullen we bij de oplossing van dit probleem van de laatste tabel gebruik maken. We beginnen met de strategie

$$z_1 = (1, 1, 1, 0),$$

d.w.z. aanvullen als de voorraad kleiner dan of gelijk is aan 2.

We berekenen eerst de waarden van $v(i;2_1)$ en $y(S;z_1)$:

$$v(3;z_1) = \frac{4}{3} - y(S;z_1) + \frac{1}{6}\, v(3;z_1) + \frac{1}{4}\, v(2;z_1) + \frac{1}{3}\, v(1;z_1) + \frac{1}{4}\, v(0;z_1)$$

$$v(2;z_1) = \frac{19}{3} - y(S;z_1) + \frac{1}{6}\, v(3;z_1) + \frac{1}{4}\, v(2;z_1) + \frac{1}{3}\, v(1;z_1) + \frac{1}{4}\, v(0;z_1)$$

$$v(1;z_1) = \frac{19}{3} - y(S;z_1) + \frac{1}{6}\, v(3;z_1) + \frac{1}{4}\, v(2;z_1) + \frac{1}{3}\, v(1;z_1) + \frac{1}{4}\, v(0;z_1)$$

$$v(0;z_1) = \frac{19}{3} - y(S;z_1) + \frac{1}{6}\, v(3;z_1) + \frac{1}{4}\, v(2;z_1) + \frac{1}{3}\, v(1;z_1) + \frac{1}{4}\, v(0;z_1)$$

$$v(0;z_1) = 0.$$

Dus: $v(0;z_1) = v(1;z_1) = v(2;z_1) = 0$

$v(3;z_1) = -5$

$y(S;z_1) = 5{,}5.$

Vervolgens wordt een verbeterde strategie z_2 gezocht door de waarden van $v(i;(x)z_1)$ te berekenen (bedenk dat $x = z_1(3) = 0$ gelijk blijft!).

$$v(3;(0)z_1) = \qquad = -5$$

$$v(2;(1)z_1) = \qquad = 0$$

$$v(2;(0)z_1) = \frac{37}{12} - 5\tfrac{1}{2} + \frac{1}{6}\, v(2;z_1) + \frac{1}{4}\, v(1;z_1) + \frac{7}{12}\, v(0;z_1) = -\frac{29}{12}$$

$$v(1;(1)z_1) = \qquad = 0$$

$$v(1;(0)z_1) = \frac{51}{6} - 5\tfrac{1}{2} + \frac{1}{6}\, v(1;z_1) + \frac{5}{6}\, v(0;z_1) = 3$$

$$v(0;(1)z_1) = \qquad = 0$$

Hieruit concluderen we dat de strategie

$$z_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$$

een betere strategie is.

De tweede keer toepassen van de value-determination procedure levert ons de waarden van $v(i;z_2)$ en $y(S;z_2)$:

$$v(3;z_2) = \frac{4}{3} - y(S;z_2) + \frac{1}{6}\, v(3;z_2) + \frac{1}{4}\, v(2;z_2) + \frac{1}{3}\, v(1;z_2) + \frac{1}{4}\, v(0;z_2)$$

$$v(2;z_2) = \frac{37}{12} - y(S;z_2) + \frac{1}{6}\, v(2;z_2) + \frac{1}{4}\, v(1;z_2) + \frac{7}{12}\, v(0;z_2)$$

$$v(1;z_2) = \frac{19}{3} - y(S;z_2) + \frac{1}{6}\, v(3;z_2) + \frac{1}{4}\, v(2;z_2) + \frac{1}{3}\, v(1;z_2) + \frac{1}{4}\, v(0;z_2)$$

$$v(0;z_2) = \frac{19}{3} - y(S;z_2) + \frac{1}{6}\, v(3;z_2) + \frac{1}{4}\, v(2;z_2) + \frac{1}{3}\, v(1;z_2) + \frac{1}{4}\, v(0;z_2)$$

$$v(0;z_2) = 0.$$

Hieruit volgt: $v(0;z_2) = v(1;z_2) = 0$

$$v(2;z_2) \cong -2{,}23$$

$$v(3;z_2) = -5$$

$$y(S;z_2) \cong 4{,}9 \quad .$$

We vervolgen met de policy-improvement operation om een betere strategie te vinden.

$$\begin{aligned}
v(3;(0)z_2) &= && = -5 \\
v(2;(1)z_2) &= \frac{19}{3} - 4{,}9 + \frac{1}{6}\,v(3;z_2) + \frac{1}{4}\,v(2;z_2) + \frac{1}{3}\,v(1;z_2) + \frac{1}{4}\,v(0;z_2) && \cong 0 \\
v(2;(0)z_2) &= && \cong -2{,}23 \\
v(1;(1)z_2) &= && = 0 \\
v(1;(0)z_2) &= \frac{51}{6} - 4{,}9 + \frac{1}{6}\,v(1;z_2) + \frac{5}{6}\,v(0;z_2) && \cong 3{,}56 \\
v(0;(1)z_2) &= && = 0
\end{aligned}$$

en hieruit concluderen we dat z_2 de optimale strategie is, d.w.z. "aanvullen als de voorraad 1 is of minder".

8.4. Een ziekenhuisprobleem.

Tot slot van dit hoofdstuk laten we zien hoe men Markov-ketens en Markov-programmering kan gebruiken voor een praktijkprobleem. We beschouwen daartoe de derde klasse afdeling interne ziekten van een provinciaal ziekenhuis. Voor de eenvoud van het probleem delen wij de patienten, die in deze afdeling worden opgenomen, in twee groepen in. De eerste groep bevat de patienten die min of meer als spoedgeval moeten worden opgenomen en waarmee geen opname afspraken gemaakt kunnen worden. In het vervolg zullen wij die patienten aanduiden als spoedgevallen. Tot de tweede groep behoren de patienten waarmee wel een opname afspraak gemaakt kan worden; in het vervolg aangeduid als afspraak-patienten. Men merke op dat wij nu voor terwille van de modelvorming deze afdeling in twee disjuncte verzamelingen hebben gesplitst.

Het doel van ons onderzoek is het volgende. Stel dat wij, op grond van oude waarnemingen, de kansverdeling kennen van het aantal per dag aankomende spoedgevallen. Uiteraard is ons ook het aantal bedden in de afdeling bekend, en wij willen nu m.b.v. deze gegevens een beslissingsregel vaststellen, die de opname afdeling in staat stelt zodanig opname afspraken te maken met de afspraak-patienten dat de bedden maximaal benut worden. Hiertoe moet o.a. de veronderstelling gemaakt worden dat er altijd voldoende aanbod is van opname-patienten.

Bij de analyse van het systeem "ziekenhuis" bepalen we allereerst de toestandsgrootheid. Het ligt voor de hand, dat wij de toestand van het systeem zullen beschrijven m.b.v. het aantal bezette bedden:

S_t = aantal bezette bedden op dag t (b.v. bij het ontbijt).

Het is van belang af te spreken op welk tijdstip men het aantal bezette bedden telt in verband met het opname- en ontslagtijdstip. Hier is het ontbijt als beslissingstijdstip gekozen, omdat opname en ontslag vlak na het ontbijt plaatsvinden. De beslissing x_t is eenvoudig vast te stellen:

x_t = aantal afspraak-patienten, dat op de dag t wordt opgenomen.

Om nu de toestandsveranderingen te kunnen beschrijven zullen we de factoren moeten bepalen, die een toestandsverandering teweeg brengen. Dat zijn het aantal opname's van spoedgevallen, het aantal ontslagen en het aantal opname's van afspraak-patienten per dag.

Laten we het aantal aankomsten van spoedgevallen per dag aanduiden met $\underline{a}_t$. We nemen aan dat $\underline{a}_t$ een kansverdeling heeft, die voor elke dag t gelijk is. Daar het aantal patienten een discrete grootheid is stellen we

$$P(\underline{a}_t = h) = p_h \qquad h, t = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

De kansen p_h zullen uit waarnemingen geschat moeten worden. Men moet er goed rekening mee houden dat $\underline{a}_t$ het aantal aankomsten van spoedgevallen is en dat dit aantal niet noodzakelijk gelijk behoeft te zijn aan het aantal opname's.

Het aantal ontslagen per dag duiden we aan met $\underline{o}_t$. We veronderstellen dat met $\underline{o}_t$ alle patienten worden aangeduid die de afdeling verlaten en daarmee een bed vrijmaken (dus ook patienten die b.v. naar een ander ziekenhuis overgaan). Laat voor $\underline{o}_t$ een voorwaardelijke kansverdeling gegeven zijn.

$$P(\underline{o}_t = h \mid S_t = i) = r_{ih} \qquad \begin{array}{l} i,h = 0, 1, 2, \ldots, M. \\ t = 0, 1, 2, \ldots \end{array}$$

Met M wordt het totale aantal bedden van de afdeling aangeduid. De kansen r_{ih} zullen eveneens uit waarnemingen geschat moeten worden.

Tenslotte zijn er de beslissingen x_t, waarmee we het systeem beinvloeden. Wij zullen nu trachten dit probleem te beschrijven m.b.v. een Markov-keten $\underline{S}_t$ en daartoe zullen wij de relatie tussen de Markov-keten $\underline{S}_t$ en de beslissingen x_t moeten onderzoeken.

Wij stellen vast dat

$$\underline{S}_{t+1} = \min\{M, \underline{S}_t - \underline{o}_t + \underline{a}_t + x_t\} \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

en we willen de overgangskans

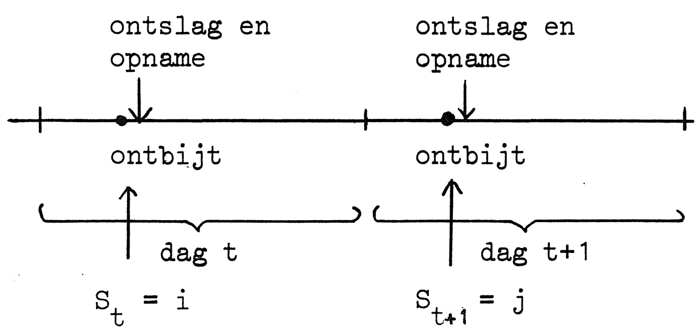
$$p_{ij}(k) = P(\underline{S}_{t+1} = j \mid S_t = i, x_t = k) \quad \begin{array}{l} i,j = 0,1,2,\ldots,M \\ k = 0,1,2,\ldots,M-i \end{array}$$

bepalen. Dat kan m.b.v. de kansen p_h en r_{ih}.

Laat het aantal op de dag t+1 te bezetten bedden $j < M$, dan is

$$\begin{aligned} p_{ij}(k) &= P(S_t - \underline{o}_t + \underline{a}_t + x_t = j \mid S_t = i, x_t = k) = \\ &= P(\underline{a}_t - \underline{o}_t = j - i - k \mid S_t = i) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{(\underline{a}_t = n) \,\&\, (\underline{o}_t = n-j+i+k) \mid S_t = i\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(\underline{a}_t = n)\, P(\underline{o}_t = n-j+i+k \mid S_t = i). \end{aligned}$$

Daar ontslag en opname van afspraak-patienten na het ontbijt plaatsvinden kunnen wij nu een betere bovengrens voor n vinden. Teneinde de gang van zaken te verduidelijken volgt hieronder een schetsje van de situatie



Op het ontslagtijdstip op dag t kunnen derhalve nooit meer dan i patienten ontslagen worden. De overgangskans luidt dan:

$$p_{ij}(k) = \sum_{n=0}^{j-k} p_n \, r_{i\ n-j+i+k} \quad .$$

Als het aantal op dag t+1 te bezetten bedden j=M dan definieren wij analoog

$$\begin{aligned} p_{iM}(k) &= P(S_t - \underline{o}_t + \underline{a}_t + x_t = M \mid S_t = i,\ x_t = k) = \\ &= P(\underline{a}_t - \underline{o}_t = M - i - k \mid S_t = i) = \\ &= \sum_{n=0}^{M-k} P\{(\underline{a}_t = n)\ \&\ (\underline{o}_t = n\text{-}M\text{+}i\text{+}k) \mid S_t = i\} = \\ &= \sum_{n=0}^{M-k} p_n \, r_{i\ n-M+i+k} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} p_{iM+1}(k) &= P(S_r - \underline{o}_t + \underline{a}_t + x_t \geq M+1 \mid S_t = i,\ x_t = k) = \\ &= P(\underline{a}_t - \underline{o}_t \geq M+1-i-k \mid S_t = i) = \\ &= \sum_{n=0}^{M-k+1} P\{(\underline{a}_t = n)\ \&\ (\underline{o}_t \leq n\text{-}M\text{-}1\text{+}i\text{+}k) \mid S_t = i\} = \\ &= \sum_{h=M+1-i-k}^{\infty} \ \sum_{n=h}^{M-k+1} p_n \, r_{i\ n-h} \quad . \end{aligned}$$

Voorts stellen we

$$p_{Mj}(k) = p_{M+1j}(k)$$

Voor de matrix van overgangskansen $p_{ij}[z]$ vinden we derhalve voor een strategie $z=(z(0),\ z(1),\ z(2),\dots,z(M)) = (k_0,k_1,k_2,\dots,k_M)$, de volgende matrix. De kansen voor overgangen van en naar de toestanden M en M+1 zijn hierbij samen genomen (met accenten aangegeven).

$$P(z) = \begin{pmatrix} p_{00}[z] & p_{01}[z] & p_{02}[z] & \dots & p'_{0M}[z] \\ p_{10}[z] & p_{11}[z] & \dots & & \\ p_{10}[z] & \dots & . & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ p'_{M0}[z] & p'_{M1}[z] & & & p'_{MM}[z] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_0 r_{00} & \sum_{n=0}^{1-k_1} p_n r_{0n-1+k} & \sum_{n=0}^{2-k_1} p_n r_{0n-2+k} & \dots & \sum_{n=M-k}^{\infty} \sum_{n=h}^{M-k_1} p_n r_{0n-h} \\ p_0 r_{11} & \sum_{n=0}^{1-k_2} p_n r_{1n+k} & \dots & & \\ p_0 r_{22} & \dots & . & & \\ \vdots & & & . & \\ p_0 r_{MM} & \sum_{n=0}^{1-k_M} p_n r_{M\ n-1+M+k} & & . & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=h}^{M-k_M} p_n r_{M\ n-h} \end{pmatrix}.$$

Tenslotte rest ons nog de formulering van het optimaliseringsprobleem. Daartoe staan meer mogelijkheden open. Als voorbeeld noemen wij de volgende: "maximaliseer het verwachte gemiddelde aantal bezette bedden, onder de voorwaarde dat de kans op een tekort aan bedden hoogstens gelijk is aan α".

$$\max \sum_{j=0}^{M} j\, q_j$$

onder de bijvoorwaarde

$$q_{M+1} \leq \alpha$$

waarin de q_j de gebruikelijke invariante kansen voorstellen. De bijvoorwaarde $q_{M+1} \leq \alpha$ zal men als toets voor iedere oplossing moeten gebruiken (vgl. de tijdseis aan het eind van paragraaf 8.2).

Opgaven.

8.1. Bepaal de beste strategie voor opgave 6.8 m.b.v. de iteratiemethode van HOWARD.

8.2. Een handelaar in landbouwwerktuigen heeft in zijn opslagruimte plaats voor 3 landbouwtraktoren. De wekelijkse vraag naar landbouwtraktoren is onafhankelijk verdeeld en overschrijdt het aantal 4 niet. De verdeling is als volgt:

wekelijkse vraag i	$P(\underline{x}=i)$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	1/8
3	1/16
4	1/16

De handelaar heeft als voorraadpolitiek: "aanvullen tot 3 als er minder dan 2 in voorraad zijn". De kosten die hij maakt en die van invloed zijn op de keuze van zijn strategie zijn de volgende:

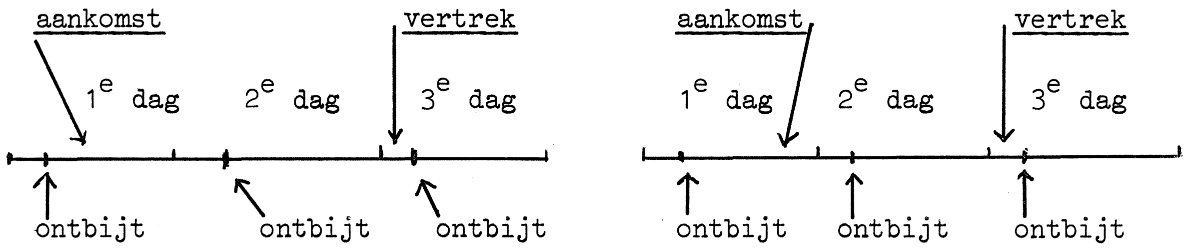
1) voorraadkosten ƒ 100,- per stuk per week over de aan het einde van een week aanwezige voorraad;
2) boetekosten ƒ 500,- per traktor die gevraagd, maar niet geleverd kan worden uit voorraad.

De aanvulling geschiedt aan het einde van de week, zonder levertijd, en brengt geen bestelkosten met zich mee. Uiteraard omvat de aanvulling ook de reeds bestelde maar door ontoereikende voorraad nòg niet afgeleverde exemplaren.

Gevraagd: Bereken de kosten die de handelaar maakt in een - in de tijd - zeer ver verwijderde week.

Op zekere dag ontmoet de handelaar een vriend die hem vertelt dat hij een veel betere voorraadpolitiek weet en wel: "aanvullen tot 3 als de voorraad 0 is".
Wie heeft gelijk?

8.3. Het Zeemanshospitaal te Zeedorp telt 4 bedden, die oorspronkelijk bestemd waren voor <u>één-dags</u>observaties van lijders aan zeeziekte. Om een verbouwing te kunnen financiëren is het zeemanshospitaal met het provinciaal ziekenhuis te Stad aan het Water overeen gekomen, dat zij, voorzover er bedden vrij zijn, verkeersslachtoffers zal opnemen, welke op de derde dag van hun verblijf in het zeemanshospitaal <u>voor</u> het ontbijt kunnen en derhalve ook zullen worden ontslagen.



Het één en ander houdt in dat voor deze categorie verkeersslachtoffers geldt dat de verpleegtijd langer is dan 24 uur en korter dan 48 uur (in die periode wordt hen dus slechts één ontbijt geserveerd).

Het zeemanshospitaal ontvangt voor ieder verkeersslachtoffer een bedrag van ƒ 100,-, terwijl iedere observatiepatiënt ƒ 40,- opbrengt. Het opnemen van dit type verkeersslachtoffers kan derhalve een voordelige zaak zijn.
De voor observatie op te roepen zeezieken zijn op tijd verzocht zich gereed te houden en kunnen derhalve na oproep <u>onmiddellijk</u> verschijnen. Het aantal zeezieken dat voor observatie in aanmerking wil komen is onbeperkt groot. Na het ontbijt wordt elke morgen door de administratie vastgesteld hoeveel zeezieken die dag geobserveerd zullen worden. Gegeven is voor één dag de kansverdeling van het aantal verkeersslachtoffers van de hierboven beschreven categorie.

aantal verkeersslachtoffers	kans
0	1/8
1	1/4
2	1/2
3	1/8
4	0

Gevraagd:

a) Kies een tweetal strategieën en vergelijk deze strategieën m.b.t. gemiddelde opbrengst per dag in de longrun.

b) Bepaal met behulp van de iteratiemethode van HOWARD de optimale strategie.

c) Wat is het Zeemanshospitaal waard om geen twee maar drie verkeersslachtoffers aan het ontbijt aan te treffen?

8.4. In het familiebedrijf Bingel & Zn. worden ploegscharen van een bijzonder type gefabriceerd. De capaciteit van het bedrijf is zodanig dat hoogstens 4 ploegscharen per week kunnen worden vervaardigd. Wegens technische eisen, die in dit bedrijf gelden, moeten er, indien in een week geproduceerd wordt, altijd meer dan twee ploegscharen gemaakt worden. De produktiekosten van de ploegscharen bedragen:

aantal te fabriceren ploegscharen	3	4
fabricagekosten per ploegschaar	ƒ 350,-	ƒ 300,-

De weekproduktie wordt op maandagmorgen vastgesteld.

De verdeling van de vraag per week is bekend, en is afhankelijk van de verkoopprijs van de ploegscharen. De oude heer Bingel wil die prijs op p_1 = ƒ 800,- per stuk stellen, waarbij de volgende vraagverdeling hoort:

vraag v	0	1	2	3	4
$P(\underline{v} = v)$	1/2	1/4	1/8	1/8	0

.

Voorts wil hij 3 exemplaren maken als de voorraad aan het begin van de week kleiner of gelijk is aan 2. Is de voorraad groter dan 2, dan wenst hij niet te produceren.

Piet Bingel jr. stelt daarentegen, dat een prijs p_2 = ƒ 600,- per stuk, met de bijbehorende vraagverdeling:

vraag v	0	1	2	3	4
$P(\underline{v} = v)$	1/8	1/8	1/4	1/4	1/4

een beter bedrijfsresultaat geeft. Bovendien wil Piet pas gaan produceren als de voorraad aan het begin van de week kleiner of gelijk is aan 1, en hij wil dan 4 exemplaren maken.

De klanten van de fa. Bingel & Zn. eisen dat de afleveringen binnen dezelfde kalenderweek, waarin zij de orders geplaatst hebben, plaatsvinden.

Het bedrijf beschikt over een voorraadruimte voor maximaal 3 ploegscharen, waarvoor aan voorraadkosten ƒ 100,- per stuk per week over de voorraad van het begin van de week berekend wordt. De ploegscharen die niet kunnen worden opgeslagen moeten helaas bij het schroot gevoegd worden, hetgeen overigens geen extra kosten met zich meebrengt. Voor het niet (kunnen) leveren van een ploegschaar wordt een goodwill-verlies ad. ƒ 100,- in rekening gebracht. Buiten de hier genoemde kosten zijn er geen andere, die in dit probleem een rol spelen.

Gevraagd:

Wie heeft de beste strategie? vader of zoon?

Klaas Bingel, de jongste zoon van de familie Bingel, steunt zijn broer voorzover het de prijspolitiek betreft, maar hij twijfelt aan de juistheid van de bepaling van de produktie omvang.

<u>Gevraagd</u>:

a) hoe bepaalt Klaas m.b.v. de iteratiemethode van HOWARD de gunstigste strategie?

b) welke prijs zal Klaas een concurrent minstens willen laten betalen voor twee ploegscharen, als deze aan het begin van de week te koop worden gevraagd?

8.5. De plaatselijke dealer van de statusauto "goldstar" kan per week hoogstens twee auto's van dat type verkopen. Teneinde zijn omzet te beinvloeden kan hij drie dingen doen:

- veel reclame maken (strategie 1)
- weinig reclame maken (strategie 2)
- geen reclame maken (strategie 3)

De dealer weet wat de overgangskansen zijn voor de afzet van week tot week, voor iedere strategie. Deze kansen zijn hieronder gegeven. De winst zonder reclamekosten op een "goldstar" bedraagt *f* 500,-. De reclamekosten voor veel reclame bedragen *f* 500,- en voor weinig reclame *f* 200,-. Welke strategie zal de dealer nu het beste kunnen voeren indien hij een maximale netto winst nastreeft?

Overgangskansen:

afzet in week i + 1

		veel reclame			weinig reclame			geen reclame		
		2	1	0	2	1	0	2	1	0
afzet in week i	2	0,7	0,3	0	0,5	0,4	0,1	0,3	0,4	0,3
	1	0,3	0,6	0,1	0,2	0,6	0,2	0,1	0,6	0,3
	0	0,1	0,7	0,2	0,1	0,5	0,4	0	0,3	0,7

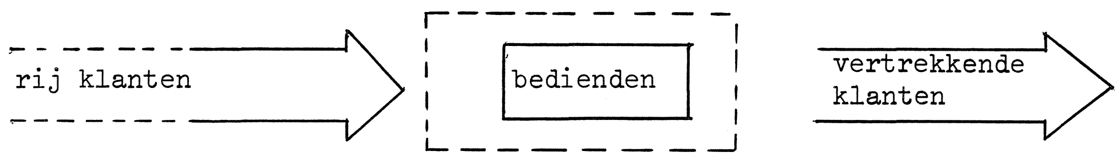
.

9. Wachttijdproblemen.

9.1. Inleiding.

Algemeen bekend zijn situaties, zoals men ze b.v. vindt in postkantoren, waarbij klanten bij een loket aankomen en door een bediende daar geholpen worden. Eveneens kent men situaties waarbij een aantal gelijksoortige machines in bedrijf zijn en waar één man aanwezig is om bij optredende storingen herstelwerkzaamheden te verrichten. Een weverij waar men met draadbreuk te maken heeft is een voorbeeld hiervan. Het gemeenschappelijke bij dit soort van problemen is dat er gewacht en bediend wordt. Zoals intuïtief al duidelijk zal zijn kan men de wachttijd beïnvloeden door o.a. het inzetten van meer of minder bedienden. Hier hebben we dan te maken met een optimaliseringsprobleem, waarbij tegen elkaar worden afgewogen de kosten verbonden aan het wachten en de kosten om dat wachten te bekorten.

Bij de mathematische benadering van wachttijdproblemen moeten we, zoals gebruikelijk, allereerst een model opstellen. Daarbij maken we enige modelveronderstellingen, die nu nader zullen worden besproken. We hebben bij wachttijdproblemen te maken met een rij klanten (of machines), die volgens een bepaalde regel geholpen worden door één of meer bedienden.



De eerste veronderstelling, die we bij zo'n probleem maken, heeft betrekking op het <u>aankomstpatroon</u> van de klanten. Een ieder, die wel eens met aandacht gekeken heeft naar het binnen komen van klanten, zal zeker geconstateerd hebben dat het aankomstpatroon van klanten in b.v. een postkantoor doorgaans geheel anders is dan het aankomstpatroon in een restaurant. In een postkantoor komen als regel individuele klanten binnen en in een restaurant pleegt men vaak in groepjes te verschijnen. Voorts laat het zich denken dat de klanten op van te voren vaststaande, dan wel op aselecte tijdstippen hun entree maken. Vaak doet zich het geval voor dat de tijdsintervallen tussen twee aankomsten onderling onafhankelijk zijn en gedurende een lange tijd gelijk verdeeld.

Het is gebruikelijk de totale populatie van klanten die bediend willen worden als oneindig groot te beschouwen. Wanneer men zich naar het Centraal Station in een grote stad begeeft en daar de aankomende passagiers beschouwt, zal men stellig tot de conclusie komen dat dit een reële veronderstelling is. Er kunnen echter ook situaties optreden, waar het beter is als modelveronderstelling is in te voeren dat het aantal klanten eindig is. Onder de aankomende klanten kunnen er zijn, die, bij het zien van een lange rij, besluiten niet achter aan te sluiten, maar later eens terug te komen (of een andere zaak te zoeken). Anderzijds kan het een aankomende klant soms onmogelijk gemaakt worden zich bij de rij aan te sluiten (numerus fixus).

De tweede veronderstelling heeft betrekking op de <u>rijdiscipline</u>, ofwel de volgorde waarin de klanten bediend worden. De eenvoudigste en meest gehanteerde rijdiscipline is, zoals het gezegde luidt: "die eerst komt, eerst maalt". In de theorie van de voorraden spreekt men dan van FIFO (first in, first out). Een andere discipline die men kent is b.v. LIFO (last in, first out), wat o.a. bij sommige veerponten voorkomt. Ook met regels als "dames eerst" kan men een rijdiscipline (gedeeltelijk) voorschrijven. Soms is de volgorde waarin men de klanten bedient geheel aselect, hoewel dat op het eerste gezicht misschien vreemd zal voorkomen. Leraren, die hun leerlingen mondeling willen overhoren trachten vaak een dergelijke rijdiscipline te hanteren.
Evenals, bij het aankomstpatroon het geval kan zijn, kunnen er ook nu klanten zijn die, b.v. omdat het wachten hen te lang duurt, nog voor zij geholpen zijn vertrekken.

De derde en laatste veronderstelling brengt ons bij het laatste stadium van het wachttijd proces: <u>de bediening</u>. Van belang is uiteraard het aantal bedienden, maar ook zal men moeten weten hoeveel tijd een bediende nodig heeft. Men kan aannemen dat hij een vaste tijd voor iedere klant heeft (automaten), of dat de bedieningstijd stochastisch is en een verdelingsfunctie bezit. Ook is het nodig te weten of de bediende slechts één klant (postkantoor) of meer klanten tegelijk (restaurant) kan helpen.

Indien er meer bedienden zijn kan het voorkomen dat de klanten in één lange rij staan te wachten, zoals bij wachtlijnen van grote telefooncentrales, om pas op het laatste moment aan een vrije bediende te worden toegewezen. Een andere mogelijkheid is dat voor verschillende loketten aparte rijen staan waar men naar keuze achter kan aansluiten (kaartjesverkoop bij de spoorwegen). Een derde mogelijkheid is dat de klant niet al zijn zaken kan afhandelen bij één bediende, maar achtereenvolgens langs een aantal bedienden moet. Studenten aan de Universiteit van Amsterdam zullen hierin de gang van zaken bij de jaarlijkse inschrijving herkennen.

Uit de hierboven gegeven ruwe schets van de mogelijkheden die bij wachttijdproblemen kunnen optreden zal men terecht concluderen dat het aantal verschillende problemen, die zich kunnen voordoen, zeer groot is. Men kan nu bij de oplossing van eenwachttijdprobleem twee wegen bewandelen. De eerste methode, die hierna besproken zal worden, is die waarbij men analytisch te werk gaat. Hierbij moet, wil het probleem op een redelijke wijze te behandelen zijn, een aantal mathematische vereenvoudigingen ingevoerd worden. De tweede methode is al besproken: simulatie. Bij deze methode kan men zich stricter aan de realiteit houden; men zal zich echter goed voor ogen dienen te houden dat een nauwkeurig resultaat veel rekenwerk vergt. Hierover is reeds een en ander in hoofdstuk 2 gezegd.

9.2 Notatie van een wachttijdprobleem.

Voordat we in de volgende paragraaf overgaan tot de mathematische beschrijving van wachttijdproblemen zullen wij eerst de gebruikelijke nomenclatuur voor wachttijdproblemen bespreken. Met behulp van een eenvoudige schrijfwijze van drie symbolen geeft men een karakterisering van de eerste en de laatste van de drie veronderstellingen, die aan het onderhavige wachttijdprobleem ten grondslag liggen. De drie symbolen geven achtereenvolgens, gescheiden door schuine strepen, de verdeling van de tijd tussen twee aankomsten, de verdeling van de bedieningstijd en het aantal bedienden als volgt weer:

aankomstproces/bedieningstijd/aantal bedienden.

Voor de eerste twee aanduidingen zijn vaste afkortingen in gebruik o.a.:

M - exponentiele verdeling van de tijd tussen twee aankomsten of van de bedieningstijd;

D - vaste tijd tussen twee aankomsten of vaste bedieningstijd;

GI - onafhankelijk verdeelde tijd tussen twee aankomsten met een of andere (niet nader gespecificeerde) verdelingsfunctie;

G - geen aannames omtrent de verdeling van de bedieningstijd.

Met het wachttijdproces M/M/1 wordt dus een proces aangeduid, waarbij:

1 - de tijdsintervallen $\underline{t}$ tussen twee opeenvolgende binnenkomsten van een klant onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld zijn:

$$P(\underline{t} \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad ;$$

2 - de bedieningstijd $\underline{s}$ eveneens exponentieel verdeeld is;

3 - er één bediende is.

Overigens moet men altijd nog enige veronderstellingen, die niet door deze notatie worden vastgelegd, nader specificeren, zoals de omvang van de totale populatie van klanten en de volgorde waarin de klanten bediend worden.

In de volgende paragraaf zullen wij ons voornamelijk bezig houden met de processen M/D/1 en M/G/1, terwijl ook enige resultaten voor het proces M/M/1 zullen worden afgeleid.

9.3. De wiskundige formulering.

Als systeem beschouwen we de rij wachtende klanten voor het loket, incl. degene die geholpen wordt. De toestand van het systeem wordt beschreven door de lengte $\underline{n}$ van de rij. Als die lengte k+1 is houdt dat in dat k klanten staan te wachten en één bediend wordt. De veranderingen in de toestand van het systeem zijn als regel niet deterministisch maar stochastisch. Men kan het stochastische proces op discrete tijdstippen waarnemen en het trachten te beschrijven d.m.v. een enkelvoudige Markov-keten. Het is echter niet zeker dat de overgangswaarschijnlijkheden alleen afhangen van de laatst aangenomen toestand (bij piekuren is dat b.v. zeker niet het geval).

Zoals reeds bleek kent men in de wachttijdtheorie loket- en machine-problemen. Het wiskundig onderscheid is gebaseerd op de omstandigheid dat bij de eerste soort problemen het aantal klanten onbegrensd is en bij de tweede soort begrensd. In dit hoofdstuk zullen wij ons alleen met loketproblemen bezighouden.

Wij hebben als eerste modelveronderstelling ingevoerd dat het aankomst-patroon door bepaalde regels beschreven wordt. Hierover geven we de volgende stelling, die we niet zullen bewijzen.

Laat $\underline{x}(t)$ het aantal klanten zijn dat in het interval $[0,t)$ aankomt, dan heeft $\underline{x}(t)$ een Poisson-verdeling

$$P(\underline{x}(t) = m) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^m/m!$$

als de volgende veronderstellingen gelden:

1 - in ieder tijdsinterval komt een eindig aantal klanten aan;

2 - op ieder tijdstip komt hoogstens één klant aan;

3 - als $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ dan zijn de aantallen klanten die resp. in de perioden $t_1 \leq t < t_2, \ldots, t_{n-1} \leq t < t_n$ aankomen, en welke aangegeven worden door $(\underline{x}(t_2) - \underline{x}(t_1)), \ldots, (\underline{x}(t_n) - \underline{x}(t_{n-1}))$ onderling onafhankelijk verdeeld;

4 - de verdelingsfunctie van het aantal klanten $(\underline{x}(t) - \underline{x}(s))$, dat in $[s,t)$ aankomt, hangt alleen af van $(t-s)$.

Men noemt nu de verzameling stochastische grootheden $\underline{x}(t)$ $(0 < t < \infty)$ een Poissonproces. De verwachting van het aantal aankomsten gedurende de tijd t is λt.

Verder kan de volgende stelling worden afgeleid:
Als het aantal aankomsten in elk tijdsinterval van lengte t een Poisson-verdeling heeft met verwachting λt, dan zijn de lengten van de tijdsintervallen tussen twee aankomsten onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met verwachting $1/\lambda$.
Bijgevolg wordt de kans dat het tijdsinterval $\underline{t}$ tussen twee opéénvolgende aankomsten kleiner of gelijk is dan t gegeven door

$$P\{\underline{t} \leq t\} = \int_0^t e^{-\lambda u} du = 1 - e^{-\lambda t}$$

Het proces M/D/1.

Laten we nu een loket beschouwen, waar klanten uit een onbegrensd grote populatie aankomen zodat aan de voorwaarden 1 t/m 4 van bovengenoemde eerste stelling voldaan kan worden. Verder wordt aangenomen dat bediening geschiedt in volgorde van aankomst. Stel dat we het systeem van wachtende klanten (inclusief degene die bediend wordt) beschouwen op de tijdstippen waarop een klant na bediening vertrekt. De toestand van het systeem wordt nu beschreven door het aantal achterblijvende klanten. Nemen we voor de eenvoud een constante bedieningstijd $s > 0$ aan, dan kunnen de volgende ontwikkelingen worden onderscheiden:

1 - op een discreet tijdstip bezit de toestandsvariabele (het aantal wachtenden) op waarde $i \geq 1$.
Op het volgende tijdstip neemt de toestandsvariabele de waarde $i-1$ aan als in de nu aanbrekende bedieningstijd s geen nieuwe klanten aankomen, en derhalve geldt

$$P_{i,i-1} = P \text{ (geen klanten gedurende s)} = P(\underline{x}(s) = 0) = e^{-\lambda s}. \tag{9.1}$$

2 - op een discreet tijdstip bezit de toestandsvariabele de waarde $i \geq 1$. Op het volgende tijdstip neemt de toestandsvariabele de waarde $i+k$ aan als in de nu aanbrekende bedieningstijd s k+1 nieuwe klanten aankomen.

Dus

$$p_{i,i+k} = P(k+1 \text{ klanten gedurende } s) = e^{-\lambda s}(\lambda s)^{k+1}/(k+1)! \qquad k \geq 0 \qquad (9.2)$$

3 - op een discreet tijdstip bezit de toestandsvariabele de waarde 0. Op het volgende tijdstip neemt hij k aan als er k+1 klanten zijn gearriveerd in de tussenliggende periode. In de bedieningstijd s van de eerste komen er dus k binnen, derhalve geldt:

$$p_{0k} = P(k \text{ klanten gedurende } s) = e^{-\lambda s}(\lambda s)^{k}/k! \qquad (9.3)$$

$$k \geq 0$$

Men kan eenvoudig nagaan dat de kansverdeling van de eerstvolgende toestand alleen afhangt van de uitgangstoestand en dat elke informatie over vroegere toestanden van geen invloed is. We hebben dus te maken met een Markov-keten. In hoofdstuk 8 is bewezen dat de invariante kansen q_i van een eindige Markov-keten moeten voldoen aan

$$q_i = \sum_{j=0}^{N} q_j p_{ji} \qquad (i = 0,1,\ldots,N)$$

Voor het geval dat het aantal toestanden onbegrensd groot wordt ($N \to \infty$) gaat dit over in

$$q_i = \sum_{j=0}^{\infty} q_j p_{ji} \qquad (i = 0,1,\ldots)$$

In onze wachttijdsituatie worden deze relaties gegeven door

$$q_0 = q_0 p_{00} + q_1 p_{10} = (q_0 + q_1)e^{-\lambda s} \qquad (9.4)$$

$$q_k = q_0 p_{0k} + \sum_{i=1}^{k+1} q_i p_{ik} = \qquad (k = 1,2,\ldots)$$

$$= q_0 e^{-\lambda s}(\lambda s)^k/k! + \sum_{i=1}^{k+1} q_i e^{-\lambda s}(\lambda s)^{k-i+1}/(k-i+1)! \qquad (9.5)$$

Het proces M/G/1.

Tot nu toe zijn we uitgegaan van een constante bedieningstijd s. Indien wij echter aannemen dat opéénvolgende bedieningstijden $\underline{s}_i$ onafhankelijk en identiek verdeeld zijn met een kansdichtheid g(s) dan moeten de kansen p_{ij} en q_j vervangen worden door:

$$p_{i,i-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda s} g(s)\, ds \qquad i \geq 1$$

$$p_{i,i+k} = \int_0^\infty (e^{-\lambda s}(\lambda s)^{k+1}/(k+1)!) g(s)\, ds \qquad k \geq 0 \quad i \geq 0$$

$$p_{0,k} = \int_0^\infty (e^{-\lambda s}(\lambda s)^k/k!) g(s)\, ds \qquad k \geq 0$$

$$q_0 = (q_0 + q_1) \int_0^\infty e^{-\lambda s} g(s)\, ds \qquad (9.6)$$

$$q_k = q_0 \int_0^\infty (e^{-\lambda s}(\lambda s)^k/k!) g(s) ds + \sum_{i=1}^{k+1} q_i \int_0^\infty e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{k-i+1}}{(k-i+1)!} g(s) ds \qquad (9.7)$$

Met behulp van (9.6) en (9.7) kunnen de kansen q_k worden bepaald. Voor q_0 wordt gevonden:

$$q_0 = 1 - \lambda\, \mathcal{E}\, \underline{s}. \qquad (9.8)$$

In de wachttijdtheorie definieert men de bezettingsgraad ρ:

$$\rho = \frac{\text{verwachte bedieningstijd}}{\text{verwacht aankomstinterval}} = \lambda \mathcal{E}\underline{s} \tag{9.9}$$

Daar q_0 een kans voorstelt, volgt uit (9.8) en (9.9):

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad .$$

Het is duidelijk dat ρ niet negatief mag zijn. Ook de eis $\rho \leq 1$ is intuitief duidelijk. Immers als de bedieningstijd gemiddeld langer duurt dan het aankomstinterval hopen zich steeds meer klanten op en er ontstaat geen stabiele stationaire verdeling. In het geval $\rho = 1$ geldt $q_0 = 0$, en, zoals uit (9.4) en (9.5) blijkt, ook $q_k = 0$ voor $k = 1,2,3,\ldots$. Bijgevolg is er ook bij een bezettingsgraad $\rho = 1$ geen invariante kansverdeling. Voor het geval $0 < \rho < 1$ kan men aantonen dat de invariante kansen wel bestaan.

In het resterende deel van dit hoofdstuk wordt de verwachting van de rijlengte, de wachttijd van een klant, de vrije- en werktijd van de bediende berekend voor een tijdstip waarop reeds een groot aantal klanten zijn geholpen (de zogenaamde "stationaire toestand"). De kans dat het systeem zich dan in de toestand j bevindt, wordt uiteraard gegeven door q_j. Deze kansen kan men berekenen m.b.v. (9.4) en (9.5).

Voor de verwachting van de rijlengte $\underline{n}$ in de stationaire toestand vinden wij na enig rekenen voor het proces M/G/1:

$$\mathcal{E}\underline{n} = \sum_{i=1}^{\infty} i q_i = 1 - q_0 + \frac{\lambda^2 \mathcal{E}\underline{s}^2}{2(1-\lambda\mathcal{E}\underline{s})} = \rho + \frac{\lambda^2 \mathcal{E}\underline{s}^2}{2(1-\rho)} \tag{9.10}$$

De aldus berekende verwachting geldt voor het moment dat een klant zojuist bediend is. Voor een exponentieel verdeelde bedieningstijd (d.w.z. het proces M/M/1) met verwachting m geldt:

$$\mathcal{E}\,\underline{s}^2 = \int_0^{\infty} s^2 m\, c^{-ms} ds = 2m^2$$

Bijgevolg:

$$\mathcal{E}\underline{n} = \rho + \frac{2\rho^2}{2-2\rho} = \rho/(1-\rho)$$

Voor een constante bedieningstijd (M/D/1) geldt daarentegen:

$$\mathcal{E}\underline{n} = \rho + \frac{\rho^2}{2-2\rho} = (2\rho-\rho^2)/(2-2\rho)$$

Is de bedieningstijd vast, en treden er dus geen variaties op in de afzonderlijke bedieningstijden, dan blijkt uit het voorgaande dat de verwachte rijlengte korter is dan voor stochastische bedieningstijden.

De wachttijd definiëren we als het tijdsinterval dat begint op het moment van binnenkomst van een klant en eindigt op het moment waarop zijn bediening begint.
Omdat de bediening geschiedt in volgorde van aankomst, zijn de personen die de zojuist bediende klant achter zich laat, aangekomen tijdens de wacht- en bedieningstijd van deze klant. Bij een gegeven, vaste, wacht- en bedieningstijd is het aantal aankomsten verdeeld volgens een Poisson-verdeling met verwachting $\lambda(w+s)$ als w de wachttijd voorstelt. Indien de beide tijden niet constant zijn maar kansverdelingen hebben, dan wordt de verwachting van het aantal aankomsten ($\mathcal{E}\underline{n}$) gegeven door $\mathcal{E}\lambda(\underline{w}+\underline{s})$. Uit de formule voor $\mathcal{E}\underline{n}$ kunnen we $\mathcal{E}\underline{w}$ berekenen:

$$\rho + \frac{\lambda^2\mathcal{E}\underline{s}^2}{2(1-\lambda\mathcal{E}\underline{s})} = \lambda\mathcal{E}\underline{w} + \mathcal{E}\underline{s}$$

en dus:

$$\mathcal{E}\underline{w} = \lambda\,\mathcal{E}\underline{s}^2/(2-2\rho). \qquad (9.11)$$

Indien de bediende vrij is en er komt een klant binnen, dan begint een werktijd, die eindigt op het eerstvolgende tijdstip waarop een klant vertrekt en geen rij achter laat. Het aantal klanten dat in een werktijd bediend wordt noemen wij de <u>treinlengte</u>. De eerste klant van een "trein" heeft dus een wachttijd nul. Nu kan geconstateerd worden, dat de lengte van de werktijd en de treinlengte niet veranderen indien de volgorde waarin de klanten worden bediend, gewijzigd wordt.

De werktijd begint met het binnenkomen van een klant op een tijdstip, zeg t = 0, waarop de bediende vrij is. Komen er tijdens de bedieningstijd $\underline{s}$ van deze klant geen klanten aan, dan is de lengte van de werktijd $\underline{s}$ en de treinlengte 1. Komen er m klanten aan in de bedieningstijd $\underline{s}(m \geq 1)$, dan doen wij alsof deze klanten op de volgende wijze worden bediend. De m klanten worden allen afgezonderd. Aan het eind van de tijd $\underline{s}$ is, afgezien van de m klanten, het loket leeg. Eén van de m klanten wordt dan toegelaten om bediend te worden. Als er in zijn bedieningstijd klanten binnenkomen, dan worden die meteen na hem bediend; komen in die bedieningstijden weer klanten binnen, dan worden ook die meteen daarna bediend, etc. Eens komt echter het moment dat het loket vrijkomt en nog steeds m-1 klanten in afzondering wachten. De tijd die verlopen is sinds het einde van de bedieningstijd $\underline{s}$ van de allereerste klant is een tijd $\underline{d}_1$. Deze tijd $\underline{d}_1$ verschilt alleen daarin van een werktijd, dat de bediende niet vrij was vóór het begin ervan. De verdelingsfunctie van de tijdsduur $\underline{d}_1$ is evenwel identiek met die van een werktijd. Aan het einde van die tijd $\underline{d}_1$ begint een tijdsduur $\underline{d}_2$ door weer één van de m-1 afgezonderde klanten toe te laten voor bediening, terwijl alle klanten die in zijn bedieningstijd binnenkomen weer direkt na hem geholpen worden, etc. Weer heeft $\underline{d}_2$ de verdelingsfunctie van een werktijd. Deze werkwijze wordt voortgezet tot de laatste van de afgezonderde klanten bediend is en ook alle klanten die in zijn bedieningstijd binnenkwamen, etc. Zo komt tenslotte het loket vrij, en dit betekent het einde van de werktijd $\underline{d}$, die op het tijdstip 0 begon. Hieruit volgt dus:

$$\underline{d} = \underline{s} \qquad \text{als } \underline{m} = 0$$

$$\underline{d} = \underline{s} + d_1 + \ldots + \underline{d}_{\underline{m}} \qquad \text{als } \underline{m} = m > 0,$$

waarbij $\underline{m}$ het aantal klanten is dat in de bedieningstijd van de eerste klant binnenkomt. Bepaalt men de verwachting van $\underline{d}$ onder de voorwaarde $\underline{m} = m$, dan vindt men

$$\mathcal{E}(\underline{d} \mid \underline{m} = m) = \mathcal{E}\underline{s} + m\,\mathcal{E}\underline{d},$$

daar $\underline{d}$, $\underline{d}_1$, $\underline{d}_2$, ... alle dezelfde verdelingsfunctie bezitten. Wij vinden nu voor de onvoorwaardelijke verwachting:

$$\mathcal{E}\underline{d} = \mathcal{E}\underline{s} + \mathcal{E}\underline{m}\,\mathcal{E}\underline{d}$$

$$\mathcal{E}\underline{d} = \mathcal{E}\underline{s} \;/\; (1-\mathcal{E}\underline{m}) = \mathcal{E}\underline{s} \;/\; (1-\rho). \qquad (9.12)$$

Voor de treinlengte $\underline{h}$ vindt men analoog

$$\underline{h} = 1 \qquad \text{als } \underline{m} = 0$$

$$\underline{h} = 1 + \underline{h}_1 + \ldots + \underline{h}_{\underline{m}} \qquad \text{als } \underline{m} > 0$$

waaruit men op dezelfde wijze als hiervoor voor $\underline{d}$ is geschied, kan afleiden

$$\mathcal{E}\underline{h} = 1 \;/\; (1-\rho). \qquad (9.13)$$

Na elke werktijd komt een tijdsinterval $\underline{v}$ waarin de bediende vrij is. De kans dat de lengte van dit tijdsinterval kleiner is dan v is gelijk aan de kans dat er in v één of meer klanten binnenkomen. Deze kans bedraagt $1-e^{-\lambda v}$. Immers de kans op <u>geen</u> klanten is $e^{-\lambda v}$. Derhalve geldt

$$P(\underline{v} \leq v) = 1 - e^{-\lambda v} \qquad (\text{als } v > 0) \quad .$$

Hieruit volgt dat $\underline{v}$ exponentieel verdeeld is. Bijgevolg:

$$\mathcal{E}\underline{v} = 1 \;/\; \lambda \qquad (9.14)$$

De fractie van de tijd gedurende welke de bediende gemiddeld bezig is met het bedienen van klanten wordt gegeven door:

$$\frac{\mathcal{E}\underline{d}}{\mathcal{E}\underline{d} + \mathcal{E}\underline{v}} = \frac{\dfrac{\mathcal{E}\underline{s}}{1-\rho}}{\dfrac{\mathcal{E}\underline{s}}{1-\rho} + \dfrac{1}{\lambda}} = \lambda\,\mathcal{E}\underline{s} = \rho.$$

9.4. Het postkantoor: enige voorbeelden.

In deze paragraaf maken wij een kleine excursie naar het plaatsje Zeedorp en wij zullen ons verdiepen in de problemen van de directeur van het plaatselijke postkantoor.

Sins lange tijden is er alleen in de havenwijk van Zeedorp één postkantoor met één loket. De lokettist aldaar behandelt uiteraard alle postzaken, die hem door de klanten worden voorgelegd. Alle klanten worden in volgorde van binnenkomst geholpen. Het wachttijdproces dat zich hier voordoet, wordt beschreven door M/G/1. De totale populatie van klanten wordt geacht onbegrensd groot te zijn en men heeft geen bijzondere voorrangsregels.

Het aantal per tijdseenheid binnenkomende klanten $\underline{x}(t)$ is Poisson verdeeld met verwachting $\lambda = 1/3$.

$$P(\underline{x}(t) = m) = (\frac{1}{3}\, t)^m \, e^{-\frac{1}{3}t} \, / \, m! \quad .$$

De tijdsintervallen $\underline{t}$ tussen twee opeenvolgende aankomsten zijn derhalve exponentieel (λ) verdeeld:

$$P(\underline{t} \leq t) = 1 - e^{-\frac{1}{3}t}$$

en

$$\mathcal{E}\underline{t} = \frac{1}{\lambda} = 3 \text{ (min.)}.$$

We stellen als nadere specificatie vast, dat de bedieningstijd $\underline{s}$ homogeen verdeeld is, als volgt

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{als } \frac{1}{2} < s < 3\frac{1}{2} \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \quad .$$

Hieruit berekenen we $\mathcal{E}\,\underline{s}$ en $\mathcal{E}\underline{s}^2$ (vgl. appendix B)

$$\mathcal{E}\underline{s} = \int_{\frac{1}{2}}^{3\frac{1}{2}} s \,.\, \frac{1}{3}\, ds = 2$$

$$\mathcal{E}\underline{s}^2 = \int_{\frac{1}{2}}^{3\frac{1}{2}} s^2 .\, \frac{1}{3}\, ds = 4\tfrac{3}{4}\ .$$

De bezettingsgraad ρ luidt nu

$$\rho = \lambda\, \mathcal{E}\underline{s} = \frac{1}{3}.2 = \frac{2}{3}\ .$$

Daar $0 < \rho < 1$ bestaat er een stationaire verdeling en we kunnen nu de verwachting van de rijlengte, de wachttijd en de werktijd berekenen:

$$\mathcal{E}\underline{n} = \rho + \lambda^2\, \mathcal{E}\underline{s}^2/(2-2\rho) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}.\frac{19}{4}/(2-\frac{4}{3}) = \frac{35}{24}$$

$$\mathcal{E}\,\underline{w} = \lambda\, \mathcal{E}\underline{s}^2/(2-2\rho) = \frac{1}{3}.\frac{19}{4}\ /\ \frac{2}{3} = \frac{19}{8}$$

$$\mathcal{E}\,\underline{d} = \mathcal{E}\underline{s}/(1-\rho) = 2/\frac{1}{3} = 6.$$

Voor de verwachting van de treinlengte vinden we

$$\mathcal{E}\underline{h} = 1/(1-\rho) = 1/\frac{1}{3} = 3.$$

De verwachting van het aantal klanten dat achter elkaar geholpen wordt, is dus 3.

De directeur vraagt zich nu af of hij door het treffen van een voorrangsregeling of door het instellen van meer loketten de wachttijd kan beperken. Een van de eerste ideeën die hij hierover oppert is het instellen van een tweede postkantoor, ook met één loket in Kerkbuurt; dat is de andere wijk van Zeedorp. Men mag aannemen dat het bij beide postkantoren even druk zal zijn.

Het aanbod van klanten wordt nu gehalveerd; we vinden dus per postkantoor:

$$P(\underline{x}(t) = m) = (\frac{1}{6}\, t)^m\, e^{-\frac{1}{6}t}/m!$$

en

$$P(\underline{t} \leq t) = 1 - e^{-\frac{1}{6}t}.$$

$$\mathcal{E}\,\underline{t} = \frac{1}{\lambda} = 6.$$

Wat betreft de bedieningstijd $\underline{s}$ nemen we aan dat deze voor beide kantoren gelijk verdeeld is volgens de eerder gegeven homogene verdeling.

Voor één kantoor krijgen we derhalve het volgende

$$\rho = \lambda\,\mathcal{E}\,\underline{s} = \frac{1}{6}.2 = \frac{1}{3} \quad (<1)$$

$$\mathcal{E}\,\underline{n} = \rho + \lambda^2 \mathcal{E}\,\underline{s}^2/(2-2\rho) = \frac{83}{192}$$

$$\mathcal{E}\,\underline{w} = \lambda\,\mathcal{E}\,\underline{s}^2/(2-2\rho) = \frac{19}{32}$$

$$\mathcal{E}\,\underline{d} = \mathcal{E}\,\underline{s}/(1-\rho) = 3.$$

De verwachte wachttijd is nu dus teruggelopen van bijna $2\frac{1}{2}$ minuut tot ruim $\frac{1}{2}$ minuut.
Alhoewel dit een fraaie winst aan wachttijd oplevert is het misschien uit oogpunt van kosten geen voorkeursoplossing. De tweede suggestie van de directeur betreft een voorrangsregeling. In het bestaande postkantoor kan men telegrammen opgeven aan de lokettist. Tot nu toe moest ieder op zijn beurt wachten, ook de telegramaanbieders. De directeur stelt voor telegramaanbieders nu voorrang te geven boven andere klanten. Voor de eenvoud van de berekeningen veronderstellen we dat er vaste bedieningstijden zijn: voor telegrammen $s_t = 3$ en voor overige klanten $s_o = 2$.
Het aantal aankomende klanten $\underline{x}(t)$ is, zoals tevoren, Poisson verdeeld

$$P(\underline{x}(t) = m) = (\frac{1}{3}t)^m e^{-\frac{1}{3}t}/m!$$

$$\mathcal{E}\,\underline{x}(t) = \frac{1}{3}t.$$

We nemen aan dat één op de 20 klanten met een telegram komt en splitsen nu het Poissonproces als volgt. Laat het aantal telegramklanten $\underline{y}(t)$ dat in het interval $[0,t)$ binnenkomt eveneens Poisson verdeeld zijn, dan geldt

$$P(\underline{y}(t) = n) = (\frac{1}{60}\, t)^n\, e^{-\frac{1}{60}t}/n!$$

$$\mathcal{E}\underline{y}(t) = \frac{1}{60}\, t.$$

Voor de verdeling van het aantal overige klanten $\underline{z}(t)$ vinden we analoog

$$P(\underline{z}(t) = k) = (\frac{19}{60}\, t)^k\, e^{-\frac{19}{60}t}/k!$$

$$\mathcal{E}\,\underline{z}(t) = \frac{19}{60}\, t$$

De kans dat er gedurende de bedieningstijdsduur s_o van een "overige klant" k telegramklanten binnenkomen is

$$P(\underline{y}(t) = k \mid t = s_o) = (\frac{1}{60}\, s_o)^k\, e^{-\frac{1}{60}s_o}/k!$$

De totale bedieningstijd $\underline{s}$ van zo'n "overige" klant wordt dan verlengd:

$$\underline{s} = s_o + s_t\, \underline{y}(s_o)$$

en de verwachte totale bedieningstijd $\mathcal{E}\,\underline{s}$:

$$\mathcal{E}\,\underline{s} = s_o + s_t\, \mathcal{E}\,\underline{y}(s_o) =$$

$$= s_o + s_t \sum_{k=0}^{\infty} k.(\frac{1}{60}\, s_o)^k\, e^{-\frac{1}{60}s_o}/k!$$

$$= s_o(1 + \frac{1}{60}\, s_t) = 21/10 \quad .$$

Evenzo vinden we voor $\mathcal{E}\underline{s}^2$:

$$\mathcal{E}\underline{s}^2 = \mathcal{E}(s_o + s_t\underline{y}(s_o))^2$$

$$= s_o^2 + s_t^2\,\mathcal{E}\underline{y}^2(s_o) + 2s_o s_t\,\mathcal{E}\underline{y}(s_o) =$$

$$= s_o^2(1 + \frac{1}{60}\,s_t)^2 + \frac{1}{60}\,s_o s_t^2 = 1413/300$$

Voor de verwachting van de rijlengte en de wachttijd van de overige klanten en de werktijd vinden we tenslotte

$$\mathcal{E}\,\underline{n} = \rho + \lambda^2\,\mathcal{E}\,\underline{s}^2/(2-2\rho) = 283/180 = 1{,}57$$

$$\mathcal{E}\underline{w} = \lambda\,\mathcal{E}\underline{s}^2/(2-2\rho) = 157/60 = 2{,}62$$

$$\mathcal{E}\,\underline{d} = \mathcal{E}\underline{s}/(1-\rho) = 21/3 = 7 \quad .$$

Opgaven

9.1 Bereken voor de telegramklanten uit paragraaf 9.4 de verwachting van de rijlengte en de wachttijd.

9.2 Stel dat men in het oude postkantoor van Zeedorp 2 loketten maakt, één voor geldzaken en één voor overige postzaken. Stel voorts dat gemiddeld 4 van de 10 klanten voor geldzaken komen. Laten de bedieningstijden s_g en s_o voor geldzaken en overige zaken vast zijn met resp. de waarden $s_g = 1$ en $s_o = 2$. De aankomsten zijn Poisson verdeeld met verwachting $\mathcal{E}\underline{x}(t) = \frac{1}{3}t$. Wat is voor beide loketten de verwachting van de rijlengte, de wachttijd en de werktijd?

9.3 In het havenstadje Zeebroek had men één elevator, die voor overslag van graan uit zeeschepen gebruikt werd. De verwachting van de tijd, nodig om een schip te lossen ($\mathcal{E}\underline{s}$) was 1 uur. $\mathcal{E}\underline{s}^2 = 7$ en $\lambda = 0.3$.
Wat was de verwachting van:
- de rijlengte (schepen)
- de wachttijd (schepen) en
- de werktijd (elevator).

Men wilde nu in Zeebroek meer schepen aantrekken door de wachttijd te bekorten. Daartoe werd een elevator met grotere capaciteit aangeschaft die <u>in plaats</u> van de bovenstaande (a) kwam. De nieuwe elevator werkt driemaal zo snel als de oude.
Er komen nu in dezelfde tijdseenheid zevenmaal zoveel schepen aan.
Bereken voor de nieuwe situatie de verwachting van:
- de rijlengte (schepen)
- de wachttijd (schepen) en
- de werktijd (nieuwe elevator).

9.4 De plaatselijke V.V.V. te Zeedorp krijgt in het toeristenseizoen gemiddeld 15 klanten per uur te bedienen. Daartoe worden elk jaar weer een aantal informatiekiosken in het dorp geopend. De tijd s, die een V.V.V.-hostess nodig heeft om een toerist in te lichten over de mogelijkheden in en om Zeedorp varieert al naar gelang de vragen van de toerist en heeft een verwachting $\mathcal{E}\,\underline{s} = 6$ min. en een variantie $\sigma^2(\underline{s}) = 2$.

Uitgaande van deze gegevens vraagt de directeur van het Zeedorpse V.V.V. zich af hoeveel kiosken (ieder met 1 hostess) hij minimaal in het dorp zal openen, opdat er een stationaire toestand optreedt ($0 < \rho < 1$). Wat zijn daarbij de verwachtingen van

- de wachttijd
- de rijlengte, en
- de werktijd?

(neem aan dat het bij alle kiosken even druk is).

In verband met een verwachte toename van het aantal informatievragende toeristen (er wordt een verdubbeling van dat aantal verwacht!) overweegt men het volgende jaar slechts één kiosk te openen en verder een aantal automaten te plaatsen, die na inworp van een gulden een uitgebreide hoeveelheid toeristische tips produceren. De, vaste, "bedieningstijd" van zo'n automaat is 1,5 min. en men verwacht dat 90% van de toeristen zich met deze vorm van dienstbetoon tevreden zal stellen.

Hoeveel automaten zijn er dan minstens nodig voor een stationaire toestand, en wat is de verwachting van

- de wachttijd,
- de rijlengte, en
- de werktijd

voor het restant (10%) van de toeristen, die toch naar de V.V.V.-kiosk gaan voor hun inlichtingen? Er bevindt zich in deze, toekomstige, situatie eveneens slechts één hostess in de kiosk.

9.5 De Vestburgse Courant heeft op de Brink in Meerwoude iedere middag van 4 tot 7 uur een krantejongen staan, die aldaar het regionale dagblad aan de man brengt. De tijd $\underline{s}$, die de jongen nodig heeft om een krant te verkopen ligt tussen de 15 en 90 seconden (incl. geld wisselen, etc.) en $\mathcal{E}\underline{s} = 5/6$ min., $\mathcal{E}\underline{s}^2 = 26/36$. De verwachting van het aantal aankomende klanten (λ) is één per minuut.
Wat is de verwachting van:
- de rijlengte,
- de werktijd,
- de wachttijd.

Nadat op de Brink een geldwisselautomaat is geplaatst, zijn de verwachting en de variantie van de bedieningstijd veranderd. De verwachting $\mathcal{E}\underline{s}'$ wordt nu 2/3 min. en de variantie $\sigma^2(\underline{s}')$ is een kwart van de oude variantie geworden. Bereken nu de verwachting van:
- de rijlengte,
- de werktijd,
- de wachttijd.