BA

stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BC 4/72 NOVEMBER

P.J. WEEDA
VOORRAADTHEORIE 2

BA

SYLLABUS BIJ DE LEERGANG BESLISKUNDE

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

1. Inleiding

In dit hoofdstuk komen modellen voor één produkt ter sprake welke op te vatten zijn als meerstaps beslissingsproblemen. In 2. worden enige modellen behandeld, waarbij de behoefte in iedere periode precies bekend is. In 3. komen modellen ter sprake waarbij de behoefte per periode stochastisch is met een gegeven kansverdeling. Deze stochastische modellen leiden tot een optimale strategie van het veelvuldig toegepaste (s,S)-type.

2. Deterministische modellen

In het nu te bespreken tweetal modellen wordt een produktie op voorraad beschouwd gedurende een eindig aantal van N perioden. In ieder van deze perioden $i = 1, \ldots, N$ is de behoefte r_i een gegeven getal. De twee modellen verschillen op grond van de gedaante van de kostenfunkties. Bij model 2.1 zijn de instelkosten van de produktie gelijk aan nul, terwijl de produktiekosten per eenheid evenals de voorraadkosten per eenheid niet-dalende funkties zijn van het aantal eenheden. In model 2.2 zijn de instelkosten per serie positief en de produktiekosten per eenheid zowel als de voorraadkosten per eenheid niet-stijgende funkties van het aantal eenheden. Bovendien is het toegestaan dat de kostenfunkties afhangen van de periode i.

Model 2.1

De behoefte in de perioden $i = 1, \ldots, N$ bedragen r_i. Aan de behoeften moet zonder uitstel worden voldaan. De produktietijd is kleiner dan de duur van een periode. Aan de behoefte wordt aan het eind van de periode voldaan. Maximaal kan er in periode i slechts een hoeveelheid m_i, $i = 1, \ldots, N$ worden geproduceerd. De instelkosten van de produktie bedragen nul. De produktiekosten van de y^e eenheid in periode i bedragen $c_i(y)$. De voorraadkosten van de x^e eenheid aanwezig aan het einde van periode i bedragen $h_i(x)$. De funkties $c_i(y)$ en $h_i(x)$ zijn <u>niet-dalende</u> funkties van y respectievelijk x. Welk produktieschema geeft de minimale kosten?

Laat (j,y) de produktie voorstellen van de y^e eenheid in de j^e periode. In het volgende wordt dit produktiepositie (j,y) genoemd. De gevraagde eenheden in periode i worden nu ieder aan een produktiepositie (j,y) met $j \leq i$ toegewezen. De goedkoopste toewijzing wordt verkregen door in de i^e periode als volgt te werk te gaan:

1. Rangschik de beschikbare produktieposities, bestaande uit de nog niet bezette produktieposities uit de eerste $(i-1)$ perioden en alle van de i^e periode naar opklimmende marginale kosten. Voor produktiepositie (j,y) met $j < i$ bestaan deze kosten uit de som van de produktiekosten en de totale kosten van het in voorraad houden van een in deze positie geproduceerde eenheid over de perioden j t/m i-1. Voor een produktiepositie (j,y) met $j = i$ bestaan deze kosten uitsluitend uit de produktiekosten $c_i(y)$.
2. Wijs de in periode i gevraagde eenheden r_i toe aan de eerste r_i aldus gerangschikte posities.
3. Tel bij de overblijvende posities de kosten van het in voorraad houden gedurende de i^e periode op en begin met periode $i + 1$.

Numeriek voorbeeld

Veronderstel dat de in tabel 1 gegeven getallen beschikbaar zijn:

i	r_i	m_i	c_i	h_i
1	2	4	1,4	0,1
2	3	5	1,6	0,1
3	5	3	1,5	0,1
4	4	5	1,7	0,1

Tabel 1: Een numeriek voorbeeld bij model 2.1

Het verloop van de berekeningen in iedere periode wordt gegeven in tabel 2. Per periode zijn in de linkerkolom de nog beschikbare produktieposities gerangschikt naar opklimmende marginale kosten. In de rechterkolom zijn deze kosten gegeven. Een onderbroken streep geeft de scheiding tussen de in die periode toegewezen posities en die welke in die periode onbezet bleven.

periode 1		periode 2		periode 3		periode 4	
positie	kosten	positie	kosten	positie	kosten	positie	kosten
(1,1)	1,4	(1,3)	1,5	(3,1)	1,5	(4,1)	1,7
(1,2)	1,4	(1,4)	1,5	(3,2)	1,5	(4,2)	1,7
(1,3)	1,4	(2,1)	1,6	(3,3)	1,5	(4,3)	1,7
(1,4)	1,4	(2,2)	1,6	(2,2)	1,7	(4,4)	1,7
		(2,3)	1,6	(2,3)	1,7	(4,5)	1,7
		(2,4)	1,6	(2,4)	1,7	(2,4)	1,8
		(2,5)	1,6	(2,5)	1,7	(2,5)	1,8

Tabel 2: De oplossing

Model 2.2

De behoeften in de perioden $i = 1, \ldots, N$ worden gegeven door de getallen r_i, waaraan zonder uitstel moet worden voldaan. De instelkosten van de produktie bedragen $K_i > 0$ in periode i. De produktiekosten van de y^e eenheid in periode i bedragen $c_i(y)$. De voorraadkosten van de x^e eenheid aanwezig aan het einde van periode i bedragen $h_i(x)$. De funkties $c_i(y)$ en $h_i(x)$ zijn niet-stijgende funkties van y respectievelijk x. Gevraagd wordt het goedkoopste produktieschema op te stellen.

Een speciaal geval van dit model is voorbeeld 2 uit hoofdstuk IX A. De optimale strategie van dit probleem is weergegeven in tabel 3 op blz. 21. De optimale seriegroottes x_i^* $i = 1, \ldots, N$ bij beginvoorraad $v_1 = 0$ werden gegeven door (5,0,9,0,0). Aangetoond kan worden dat de optimale seriegroottes bij beginvoorraad $v_1 = 0$ voor het algemene model 2.2 eveneens de volgende eigenschap hebben: "Produceer slechts als de aanwezige voorraad v_i op tijdstip i nul is en produceer zoveel dat gedurende een geheel aantal perioden in de totale behoefte precies kan worden voorzien." Dit betekent dat in feite slechts de optimale produktietijdstippen behoeven te worden bepaald. Op grond van deze eigenschap bestaat er een snelle methode om de optimale tijdstippen te vinden. Deze methode is gebaseerd op dynamische programmering maar nu in voorwaartse tijd. Beschouw het deelprobleem dat slechts betrekking heeft op de eerste k perioden, waarbij $1 \leq k \leq N$ en waarbij de voorraad aan het eind van de

k^e periode nul is. De minimale kosten voor dit deelprobleem geven we aan met f_k^*. Veronderstel dat f_i^*, $i = 1, \ldots, k-1$ reeds bekend zijn. Om f_k^* te vinden behoeft nu slechts het tijdstip van de laatste produktie vastgesteld te worden. Dit tijdstip kan vallen op $i = 1, \ldots, k$. Het optimale tijdstip $i = i_k^*$ is nu het tijdstip waarvoor de som van de minimale kosten f_{i-1}^* over de eerste $(i-1)$ perioden en de kosten over de perioden i t/m k minimaal is. Deze laatste kosten bestaan uit de kosten van de produktie op tijdstip i en de totale voorraadkosten over de perioden i t/m k.

Stellen wij $R_{j,k} = \sum_{m=j}^{k} r_m$, de totale behoefte in de perioden j t/m k, dan volgt voor f_k^* de volgende recurrente betrekking:

$$(1) \qquad f_k^* = \min_{i=1,\ldots,k} \left[f_{i-1}^* + K_i + \sum_{x=1}^{R_{i,k}} c_i(x) + \sum_{j=i}^{j=k-1} \sum_{x=1}^{x=R_{j+1,k}} h_j(x)\right]$$

voor $k = 1, \ldots, N$ met $f_0^* = 0$.

Numeriek voorbeeld

In voorbeeld 2 van hoofdstuk IX A geldt dat $c_i = 0$, $K_i = 7$ en $h_i = 1$ voor $i = 1, \ldots, 5$. Betrekking (1) wordt dan:

$$f_k^* = \min_{i=1,\ldots,k} \left[f_{i-1}^* + 7 + \sum_{j=i}^{k-1} R_{j+1,k}\right].$$

Voor f_k^* en i_k^*, $k = 1, \ldots, 5$ vinden we achtereenvolgens:

$$f_1^* = \min_{i=1} [f_0^* + 7] = 7$$

$$i_1^* = 1$$

$$f_2^* = \min_{i=1,2} [f_0 + 7 + r_2,\ f_1 + 7] = \min [11,\ 14] = 11$$

$$i_2^* = 1$$

$$f_3^* = \min_{i=1,2,3} [f_0^* + 7 + r_2 + 2r_3,\ f_1^* + 7 + r_3,\ f_2^* + 7]$$

$$= \min [21,\ 19,\ 18] = 18$$

$$i_3^* = 3$$

$$f_4^* = \min_{i=1,2,3,4} [f_0^* + 7 + r_2 + 2r_3 + 3r_4,\ f_1^* + 7 + r_3 + 2r_4,$$
$$f_2^* + 7 + r_4,\ f_3^* + 7]$$

$$= \min [30, 25, 21, 25] = 21$$

$$i_4^* = 3$$

$$f_5^* = \min_{i=1,\ldots,5} [f_0^* + 7 + r_2 + 2r_3 + 3r_4 + 4r_5,$$
$$f_1^* + 7 + r_3 + 2r_4 + 3r_5,\ f_2^* + 7 + r_4 + 2r_5,$$
$$f_3^* + 7 + r_5,\ f_4^* + 7]$$

$$= \min [34, 28, 23, 26, 32] = 23$$

$$i_5^* = 3.$$

De optimale produktietijdstippen zijn $k = 1$ en $k = 3$ en de te produceren hoeveelheden op deze tijdstippen bedragen $r_1+r_2 = 5$ en $r_3+r_4+r_5 = 9$ respectievelijk. De minimale kosten bedragen 23.

Opmerkingen

1. Indien $c_i = c$ voor $i = 1, \ldots, N$ dan is de optimale oplossing onafhankelijk van de produktiekosten per eenheid c en kan deze uit de berekeningen weggelaten worden. Indien tevens de voorraadkosten per eenheid niet van x afhangen dan kan de rekenmethode nog verder vereenvoudigd worden. In dat geval kan worden bewezen dat bij de berekening van f_k^* volstaan kan worden met een keuze uit de tijdstippen $i = i_{k-1}^*, \ldots, k$. De recurrente betrekking voor f_k^* luidt dan:

$$f_k^* = \min_{i=i_{k-1}^*,\ldots,k} [f_{i-1}^* + K_i + \sum_{j=i}^{k-1} h_j\, R_{j+1,k}] \qquad (2)$$

voor $k = 1, \ldots, N$ en $f_0^* = 0$. Behalve een rekentechnisch voordeel heeft dit een belangrijke praktische konsekwentie. Om de optimale seriegrootte op een tijdstip te bepalen is het slechts vereist de behoefte in een beperkt aantal toekomstige perioden te kennen.

De methode geeft op ieder tijdstip k het optimale tijdstip i_k^* van de laatste produktie. De bijbehorende optimale seriegrootte is echter pas bekend, indien het eerstvolgende produktietijdstip bekend is. Indien de behoeften bekend zijn vanaf het laatste produktietijdstip tot en met de periode na het eerstvolgende produktietijdstip dan kan men optimaal produceren zonder de behoeften in verder afgelegen perioden te kennen. Zo beïnvloeden in het voorbeeld r_4 en r_5 niet de optimale seriegrootte op tijdstip $k = 1$.

2. Een levertijd $T > 0$ geeft geen aanleiding tot veranderingen indien de produktiekosten verrekend worden naar de kostenfunkties welke gelden bij de aflevering van de bestelling. Voor $T > 0$ behoeven dan slechts de afleveringstijdstippen samen te vallen met de optimale produktietijdstippen verkregen bij $T = 0$.
3. Voor de uitbreiding van dit model met de mogelijkheid tot nalevering is eveneens een oplosmethode bekend. Hiervoor wordt naar de literatuur verwezen.
4. Indien de behoeften r_i voor iedere periode i hetzelfde zijn dan verbijzondert het model zich tot de discrete versie van het optimale seriegrootte model waarvoor de formule van Camp geldt.

3. Stochastische modellen

Nu komen modellen en methoden ter sprake met een eindig aantal perioden N, waarbij de behoeften in de diverse perioden onderling onafhankelijke stochastische grootheden zijn. Tevens zal worden ingegaan op het oneindigstaps beslissingsprobleem dat ontstaat als $N \to \infty$. Dit laatste probleem wordt alleen beschouwd onder de veronderstelling dat de kostenfunkties en de kansverdeling van de vraag voor iedere periode dezelfde zijn. In het N-staps beslissingsprobleem is afhankelijkheid van de periode wel toegestaan hoewel deze niet in de formulering van de modellen is opgenomen.
In het eerste model dat ter sprake komt bedragen de instelkosten van de produktie nul. Aangetoond wordt dat het minimum van de verwachte kosten verkregen wordt door toepassing van een strategie die volledig vastgelegd is door een parameter y. Deze optimale strategie schrijft voor de

aanwezige voorraad aan te vullen tot y indien deze onder y is gedaald. Het volgende model kent positieve instelkosten en leidt tot een optimale strategie gekenmerkt door twee parameters s en S. Een dergelijke strategie schrijft voor de voorraad aan te vullen tot S indien deze lager is dan s en niet aan te vullen in de overige situaties. Tenslotte wordt aan deze modellen een positieve levertijd T van een geheel aantal perioden toegevoegd. Dit leidt tot hetzelfde type van optimale strategieën als bij T = 0 maar nu gebaseerd op de economische voorraad in plaats van de aanwezige voorraad.

Model 3.1

Het beheer over een produktie- en voorraadsysteem wordt gevoerd gedurende de perioden $i = 1, \ldots, N$. Aan het begin van iedere periode kan produktie plaats vinden. De produktietijd is te verwaarlozen. De kansverdeling van de behoefte per periode wordt gegeven door de getallen p_j, $j = 0, 1, \ldots$, waarbij p_j de kans voorstelt op een behoefte van j eenheden. Indien gedurende een periode niet aan de behoefte kan worden voldaan, dan wordt over het tekort een boete geheven van p per eenheid. Deze hoeveelheid wordt nageleverd op het volgende tijdstip, waarop de aanwezige voorraad wordt aangevuld. De produktiekosten per eenheid bedragen c en de voorraadkosten per eenheid aan het eind van de periode in voorraad bedragen h. Toekomstige kosten worden verdisconteerd met verdisconteringsfactor $\alpha \leq 1$. Gevraagd wordt een optimale strategie te ontwerpen.

Dit probleem wordt met dynamische programmering opgelost. De index n geeft het beslissingstijdstip aan in achterwaartse tijd. De beslissing x_n op tijdstip n stelt de voorraad voor na eventuele aanvulling. De toestandsvariabele u is de aanwezige voorraad voordat een eventuele aanvulling plaatsvindt.

Bij een tekort is u negatief. $f_n^*(u)$ stelt de minimaal te verwachten verdisconteerde kosten voor over de resterende n tijdstippen in toestand u. Allereerst bepalen we de direkte kostenfunktie $h(u,x)$. De kosten per periode bestaan uit de kosten van een aanvulling gelijk aan $c(x-u)$ en de verwachting van voorraad- en boetekosten bij een voorraad x na aanvulling op te lopen gedurende die periode. Deze laatste funktie geven we aan met L(x). Men kan gemakkelijk nagaan dat L(x) gegeven wordt door:

$$(3) \qquad L(x) = \begin{cases} h \sum_{j=0}^{x} p_j(x-j) + p \sum_{j=x+1}^{\infty} p_j(j-x) & \text{voor } x \geq 0 \\ p \sum_{j=0}^{\infty} p_j \cdot (j-x) & \text{voor } x < 0. \end{cases}$$

De direkte kosten funktie h(u,x) worden op ieder tijdstip $n = 1, \ldots, N$ gegeven door

$$(4) \qquad h(u,x) = c(x-u) + L(x).$$

De minimale kosten over de laatste periode worden verkregen uit de betrekking:

$$(5) \qquad f_1^*(u) = \min_{x_1 \geq u} [c(x_1-u) + L(x_1)].$$

Daar de term cu niet van x_1 afhangt draagt deze niet bij tot het vinden van de gunstigste x_1. Voor (5) kan nu geschreven worden

$$(6) \qquad f_1^*(u) = \min_{x_1 \geq u} [cx_1 + L(x_1)] - cu.$$

Tussen vierkante haken staat een funktie van één variabele x_1. We denken nu eerst de voorwaarde $x_1 \geq u$ even weg en bepalen het absolute minimum van de funktie $cx_1 + L(x_1)$. Stel dit wordt bereikt voor $x_1 = y_1$. Indien de funktie $cx_1 + L(x_1)$ convex *) is en aan deze voorwaarde is bij dit model voldaan, dan heeft het invoeren van de voorwaarde $x_1 \geq u$ tot gevolg dat het minimum in (6) bereikt wordt voor $x_1 = y_1$ indien $u < y_1$ en in $x_1 = u$ indien $u \geq y_1$. De optimale strategiecomponent $z_1^*(u)$ wordt dus gegeven door:

$$(7) \qquad z_1^*(u) = \begin{cases} y_1 & \text{als } u < y_1 \\ u & \text{als } u \geq y_1. \end{cases}$$

---

*) Voor de begrippen convex en concaaf zie hoofdstuk IX C.

In woorden betekent (7): "Aanvullen tot y_1 indien de voorraad $u < y_1$ en niet aanvullen indien $u \geq y_1$." Voor $f_1^*(u)$ volgt:

$$(8) \qquad f_1^*(u) = \begin{cases} L(u) & \text{als } u \geq y_1 \\ c(y_1-u) + L(y_1) & \text{als } u < y_1. \end{cases}$$

Indien op tijdstip $n = 2$ de voorraad na een eventuele aanvulling x_2 bedraagt en de behoefte in die periode bedraagt $\underline{j}$ dan volgt dat de voorraad op tijdstip $n = 1$ $\underline{u} = x_2 - \underline{j}$ bedraagt. De minimaal te verwachte verdisconteerde kosten in de laatste periode bij een voorraad x_2 op tijdstip $n = 2$ bedragen:

$$\alpha \sum_{j=0}^{\infty} p_j \; f_1^*(x_2-j)$$

en dus volgt met behulp van (4) dat $f_2^*(u)$ gegeven wordt door

$$(9) \qquad f_2^*(u) = \min_{x_2 \geq u} \; [c(x_2-u) + L(x_2) + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} p_j \; f_1^*(x_2-j)].$$

Een analoge betrekking geldt voor $f_n^*(u)$, $n > 2$. $f_2^*(u)$ en $z_2^*(u)$ kunnen nu op dezelfde wijze bepaald worden als $f_1^*(u)$ en $z_1^*(u)$. In plaats van de funktie $cx_1 + L(x_1)$ moet nu het absolute minimum gevonden worden van de funktie $cx_2 + L(x_2) + \sum_{j=0}^{\infty} p_j \; f_1^*(x_2-j)$. Stel dit wordt bereikt voor $x_2 = y_2$. Aangetoond kan worden dat als de funktie $cx_1 + L(x_1)$ convex is dit ook geldt voor de funktie $cx_2 + L(x_2) + \sum_{j=0}^{\infty} p_j \; f_1^*(x_2-j)$. Derhalve volgt dat

$$(10) \qquad z_2^*(u) = \begin{cases} y_2 & \text{als } u < y_2 \\ u & \text{als } u \geq y_2 \end{cases}$$

en

$$(11) \qquad f_2^*(u) = \begin{cases} L(u) + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} p_j \; f_1^*(u-j) & \text{als } u \geq y_2 \\ c(y_2-u) + L(y_2) + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} p_j \; f_1^*(y_2-j) & \text{als } u < y_2. \end{cases}$$

Dezelfde beschouwing gaat op voor de overige tijdstippen $n = 3, \ldots, N$. Een optimale strategie voor het N-stapsbeslissingsprobleem is dus volledig vastgelegd door de getallen $y_N, \ldots, y_1$ die op bovenbeschreven wijze worden berekend. De berekening zal worden toegelicht aan het volgende voorbeeld.

Numeriek voorbeeld

De volgende gegevens staan ter beschikking:

$c = 1{,}5$; $h = 0{,}5$; $p = 2$; $\alpha = 0{,}9$; $N = 10$.

$p_0 = 0{,}1$; $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}4$; $p_3 = 0{,}2$ en $p_4 = 0{,}1$.

De overige p_j zijn nul.
We beginnen met de berekening van de verwachte som van voorraad- en boetekosten $L(x)$ als funktie van de voorraad x na aanvulling.
Voor $L(x)$ volgt:

$$(12) \qquad L(x) = \begin{cases} 0{,}5 \sum_{j=0}^{4} p_j(x-j) & \text{voor } x \geq 4 \\ 0{,}5 \sum_{j=0}^{x} p_j(x-j) + 2 \sum_{j=x+1}^{4} p_j(j-x) & \text{voor } 0 < x < 4 \\ 2 \sum_{j=0}^{4} p_j(j-x) & \text{voor } x \leq 0 \end{cases}$$

of na uitvoering van de sommaties volgt $L(x) = 0{,}5x-1$ voor $x \geq 4$, $L(x) = 4-2x$ voor $x \leq 0$, $L(1) = 2{,}25$, $L(2) = 1{,}0$ en $L(3) = 0{,}75$. De funktiewaarden voor $x = -2(1)7$ zijn in de 2^e kolom van tabel 3 gegeven.

x	$L(x)$	$cx+L(x)$	$f_1^*(x)$	$cx+L(x)+\alpha\sum_{j=0}^{\infty} p_j f_1^*(x-j)$	$cx+\frac{L(x)}{1-\alpha}$
-2	8	5	6,75	13,775	77
-1	6	4,5	5,25	11,925	58,5
0	4	4	3,75	10,075	40
1	2,25	3,75*	2,25	8,475	24
2	1	4	1	7,3975*	13
3	0,75	5,25	0,75	7,4550	12*
4	1	7	1	8,3275	16
5	1,5	9	1,5	9,9675	22,5
6	2	11	2,0	12,0350	29
7	2,5	13	2,5	14,3725	35,5

Tabel 3: Enige belangrijke funkties bij het voorbeeld van model 3.1.

Uit de 3^e kolom van tabel 3, waarin de funktie $cx + L(x)$ is uitgerekend, volgt dat $y_1 = 1$. Voor $z_1^*(u)$ en $f_1^*(u)$ volgen nu respectievelijk:

$$(13) \qquad z_1^*(u) = \begin{cases} 1 & \text{voor } u < 1 \\ u & \text{vòor } u \geq 1 \end{cases}$$

$$(14) \qquad f_1^*(u) = \begin{cases} 1{,}5\ (1-u) + L(1) & \text{voor } u < 1 \\ L(u) & \text{voor } u \geq 1. \end{cases}$$

De funktie $f_1^*(x)$ is uitgerekend voor $x = -2(1)7$ en gegeven in de 4^e kolom van tabel 3.

Voor de berekening van $z_2^*(u)$ en $f_2^*(u)$ moet eerst de funktie $cx + L(x) + \alpha \sum_{j=0}^{4} p_j\, f_1^*(x-j)$ worden berekend. Het resultaat voor $x = -2(1)7$ is gegeven in de 5^e kolom van tabel 3. Uit dit resultaat volgt dat $y_2 = 2$. Voor $z_2^*(u)$ en $f_2^*(u)$ vinden we:

$$(15) \qquad z_2^*(u) = \begin{cases} 2 & \text{voor } u < 2 \\ u & \text{voor } u \geq 2 \end{cases}$$

$$(16) \qquad f_2^*(u) = \begin{cases} 1{,}5(2-u) + L(2) + 0{,}9 \sum_{j=0}^{4} p_j \, f_1^*(2-j) & \text{voor } u < 2 \\ L(u) + 0{,}9 \sum_{j=0}^{4} p_j \, f_1^*(u-j) & \text{voor } u \geq 2. \end{cases}$$

Op dezelfde wijze worden $z_n^*(u)$ en $f_n^*(u)$ bepaald voor $n = 3, 4, \ldots, 10$. De resultaten voor y_n, $n = 1, \ldots, 10$ zijn gegeven in tabel 4.

n	1	2	3	4,...,10
y_n	1	2	3	3

Tabel 4: De getallen y_n voor $n = 1, \ldots, 10$.

Het geval $N = \infty$, $\alpha < 1$

Onder de veronderstellingen van model 3.1 kan worden bewezen dat er een optimale strategie bestaat die volledig bepaald is door de waarde y^* van een parameter y. De optimale beslissing bij een voorraad u bedraagt dan op elk beslissingstijdstip: "Vul aan tot $x = y^*$ indien de aanwezige voorraad $u < y^*$ en vul niet aan indien $u \geq y^*$." Nu voor dit model er een optimale strategie is, die volledig is vastgelegd door de waarde y^* van de parameter y kan y^* nu ook gevonden worden door een uitdrukking voor de te verwachten verdisconteerde kosten op te stellen bij begin-voorraad $u \leq y$. De optimale waarde y^* is dan de waarde van y waarvoor deze funktie voor iedere $u \leq y$ minimaal is. Deze funktie, die we $f_\alpha(u;y)$ zullen noemen, wordt gegeven door *)

$$(17) \qquad f_\alpha(u;y) = c(y-u) + \frac{L(y)}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \, c \, E\underline{j},$$

*) voor een afleiding hiervan zie het leerboek blz. 386 en 387.

waarin Ej de verwachte vraag per periode voorstelt. y^* kan nu gevonden worden door de funktie $cy + \frac{L(y)}{1-\alpha}$ te minimaliseren naar y.
In het voorbeeld is deze funktie uitgerekend en gegeven in de laatste kolom van tabel 3. Er volgt dat $y^* = 3$. We merken op dat deze waarde in het N-staps probleem reeds voor n = 3 werd bereikt.

Het geval $N = \infty$, $\alpha = 1$

Het kriterium van de verwachte kosten kan in dit geval niet gebruikt worden daar deze onbegrensd groot zijn. Indien men de gemiddelde verwachte kosten per tijdseenheid als kriterium hanteert dan kan bewezen worden dat y^* de waarde van y is welke de funktie L(y) minimaliseert. In het numerieke voorbeeld geeft dit $y^* = 3$ zoals uit de 2[e] kolom van tabel 3 volgt.

Model 3.2

De instelkosten van de produktie bedragen $K > 0$. Overigens is dit model identiek met model 3.1.

Bij de behandeling van dit model wordt weer begonnen met het N-staps probleem. Stellen we de minimaal te verwachten verdisconteerde kosten over n perioden voor door $f_n^*(u)$ bij een aanwezige voorraad u dan is gezien het vorige model gemakkelijk in te zien dat $f_n^*(u)$ voldoet aan de recurrente betrekkingen:

$$(18) \qquad f_1^*(u) = \min_{x_1 \geq u} \left[c(x_1-u) + L(x_1) + \begin{cases} K & \text{als } x_1 > u \\ 0 & \text{als } x_1 = u \end{cases} \right]$$

en

$$(19) \qquad f_n^*(u) = \min_{x_n \geq u} \left[c(x_n-u) + L(x_n) + \begin{cases} K \text{ als } x_n > u \\ 0 \text{ als } x_n = u \end{cases} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} p_j f_{n-1}^*(x_n - j) \right]$$

voor n = 2, 3, ..., N.

Eerst wordt het eenstaps beslissingsprobleem gegeven door (18) beschouwd. In toestand u kan aangevuld worden tot $x_1 > u$ of niet aangevuld worden zodat dan $x_1 = u$. In het eerste geval bedragen de verwachte kosten $c(x_1-u) + K + L(x_1)$ en in het tweede geval $L(u)$. In iedere toestand u moet dus nagegaan worden of er een waarde $x_1 > u$ is waarvoor $c(x_1-u) + K + L(x_1)$ minimaal is en voldoet aan:

$$(20) \qquad c(x_1-u) + K + L(x_1) < L(u).$$

Indien dit het geval is dan is het in die toestand optimaal om aan te vullen tot x_1. Indien dit niet zo is dan wordt er niet aangevuld. Stel dat het absolute minimum van de funkties $cx_1 + L(x_1)$ zonder de voorwaarde $x_1 \geq u$ bereikt wordt in $x_1 = S_1$, en dat deze funktie convex is, een voorwaarde waaraan ook in dit model is voldaan, dan zijn er twee mogelijkheden:

1. $u \geq S_1$. Uit het convex zijn van de funktie $cx_1 + L(x_1)$ volgt dat voor $x_1 \geq u \geq S_1$

$$(21) \qquad cx_1 + L(x_1) \geq cu + L(u)$$

en dientengevolge, daar $K > 0$:

$$(22) \qquad c(x_1-u) + L(x_1) + K > L(u).$$

Hieruit volgt dat voor $u > S_1$ het optimaal is om niet aan te vullen.

2. $u \leq S_1$. Vanuit S_1 zoeken we nu de waarden van de funktie $cu + L(u)$ af voor $u = S_1-1, S_1-2, \ldots$ totdat we een waarde van u vinden, waarvoor

$$(23) \qquad cu + L(u) \leq cS_1 + L(S_1) + K,$$

terwijl voor $u - 1$ geldt:

$$(24) \qquad c(u-1) + L(u-1) > cS_1 + L(S_1) + K.$$

Noem deze waarde van u, s_1. Dan volgt dat voor $S_1 \geq u \geq s_1$ geldt:

(25) $c(S_1-u) + K + L(S_1) \geq L(u)$

en het dus optimaal is om niet aan te vullen, terwijl voor $u < s_1$ geldt:

(26) $c(S_1-u) + K + L(S_1) < L(u)$

en het in dat geval optimaal is aan te vullen tot S_1.

Er kan nu geconcludeerd worden dat de optimale strategiecomponent op het tijdstip n = 1 gegeven wordt door

(27) $$z_1^*(u) = \begin{cases} S_1 & \text{voor } u < s_1 \\ u & \text{voor } u \geq s_1. \end{cases}$$

Dit betekent dat op tijdstip n = 1 de volgende beslissingsregel optimaal is: "Vul aan tot $x = S_1$ indien de voorraad $u < s_1$ en vul niet aan indien $u \geq s_1$." S_1 valt samen met het minimum van $cx_1 + L(x_1)$ en s_1 wordt uit de ongelijkheden (23) en (24) verkregen.

Met betrekking tot (19) voor n > 1 kan men op dezelfde wijze te werk gaan. Indien de funktie $cx + L(x)$ convex is, is in model 3.2 de funktie $cx + L(x) + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} p_j f_{n-1}^*(x-j)$ dit echter niet. Toch leidt dit model tot optimale strategiecomponenten $z_n^*(s)$, n = 2, ..., N die van hetzelfde type zijn als $z_1^*(s)$ en volledig vastgelegd door twee getallen s_n en S_n. Een optimale strategie voor het N-staps beslissingsprobleem is dus volledig vastgelegd door de 2N getallen s_n en S_n, n = 1, ..., N.

<u>Numeriek voorbeeld</u>

Het reeds bij model 3.1 gebruikte numerieke voorbeeld wordt ook hier gebruikt maar nu met K = 3. Het minimum van $cx_1 + L(x_1)$ wordt bereikt zoals bekend in $x_1 = y_1 = 1$ en dus $S_1 = 1$. Vervolgens bepalen we de waarde van s_1 die voldoet aan

$$1,5(1-s_1) + 3 + L(1) \geq L(s_1)$$

en

$$1,5(2-s_1) + 3 + L(1) < L(s_1-1)$$

of equivalent hiermee:

$$L(s_1-1) + 1,5(s_1-1) > 6,75 \geq L(s_1) + 1,5\, s_1.$$

Om de waarde van s_1 te bepalen die hieraan voldoet moet de 3^e kolom van tabel 3 worden uitgebreid voor $x < -2$. Dan volgt dat $s_1 = -5$.
De resultaten voor de parameters s_n en S_n voor $n = 1, \ldots, 10$ worden gegeven in tabel 5.

n	1	2	3	4,...,10
(s_n,S_n)	(-5,1)	(1,3)	(1,4)	(1,4)

Tabel 5: s_n en S_n voor $n = 1, \ldots, 10$ en $\alpha = 0,9$.

Het geval $N = \infty$, $\alpha < 1$

In dit geval is er een optimale strategie te vinden die volledig bepaald is door de waarde van twee parameters s en S. Indien de optimale waarden van deze parameters s^* en S^* zijn, dan luidt de optimale beslissingsregel op ieder tijdstip: "Vul aan tot $x = S^*$ indien de voorraad $u < s^*$ en vul niet aan indien $u \geq s^*$." Er bestaat nu voor $\alpha < 1$ de mogelijkheid een uitdrukking op te stellen voor de verwachte verdisconteerde kosten als funktie van s en S bij een beginvoorraad $u \leq S$ en de waarden van s en S te bepalen waarvoor deze funktie voor iedere u minimaal is. Deze funktie is aanzienlijk gecompliceerder dan die in model 3.1 en hangt bovendien af van twee variabelen. Het bepalen van s^* en S^* uit deze funktie is daarom niet aan te bevelen. De benadering met een N-staps beslissingsprobleem zoals hierboven behandeld convergeert op den duur naar een optimale strategie voor $N = \infty$. Het herhalen van een strategie in twee opeenvolgende stappen is echter niet voldoende voor optimaliteit.

In het voorbeeld wordt bij de derde stap een strategie bereikt die zich in de 4^e en 5^e stap herhaalt (zie tabel 5). Voor praktische doeleinden kan dan wel geconcludeerd worden dat $s^* = 1$ en $S^* = 4$. Men is echter pas zeker van de optimaliteit van strategie (1,4) indien men vervolgens nog een stap doet met de iteratieve methode beschreven in hoofdstuk IX A. Herhaalt deze strategie zich bij toepassing van deze methode dan is ze zeker optimaal.
Indien men niet zo te werk wil gaan en dit zal het geval zijn indien men niet de beschikking heeft over een rekenmachine en een rekenprogramma, dan rest het gebruik van benaderingsformules voor s^* en S^*. In het geval $\alpha < 1$ zijn echter de uit de literatuur bekende benaderingsformules nogal gecompliceerde uitdrukkingen. In het geval dat $\alpha = 1$ zijn ze echter eenvoudiger.

Het geval $N = \infty$, $\alpha = 1$

Allereerst merken we op dat het N-staps beslissingsprobleem zonder bezwaar voor $\alpha = 1$ met dynamische programmering kan worden opgelost. In het numerieke voorbeeld worden de parameters s_n en S_n van de optimale strategie gegeven in tabel 6.

n	1	2	3	4	5,...,10
(s_n, S_n)	(-5,1)	(1,3)	(2,4)	(1,5)	(1,6)

Tabel 6: s_n en S_n voor $n = 1, \ldots, 10$, $\alpha = 1$.

Het kriterium van de verwachte totale kosten kan hier niet worden gebruikt daar deze oneindig groot zijn ongeacht de toegepaste strategie. Het meest geschikte optimaliteitskriterium is dan de gemiddelde verwachte kosten per tijdseenheid. De structuur van de optimale strategie is ook onder dit kriterium van het type (s,S). Dit opent de mogelijkheid een expliciete uitdrukking af te leiden voor de gemiddelde verwachte kosten per tijdseenheid als funktie van s en S, waaruit s^* en S^* kunnen worden bepaald. Deze uitdrukking heeft hetzelfde bezwaar als genoemd bij

$\alpha < 1$. De methode van de successieve approximaties hierboven toegepast leidt op den duur tot dezelfde s^* en S^* als verkregen wordt indien het kriterium van de gemiddelde verwachte kosten per tijdseenheid wordt gebruikt. We merken op dat in het numerieke voorbeeld vanaf $n = 5$ de parameters s_n en S_n niet meer veranderen (zie tabel 6). Men is pas zeker van de optimaliteit van de strategie (1,6) indien deze strategie zich herhaalt bij de iteratieve methode waarvan een speciale versie bestaat met de gemiddelde verwachte kosten per tijdseenheid als kriterium *). De uit de literatuur bekende benaderingsformules voor $\alpha = 1$ zijn goed hanteerbaar en van redelijke kwaliteit. De benaderingsformule voor $S^* - s^*$ luidt:

$$(28) \qquad S^* - s^* \approx \sqrt{\frac{2KEj}{h}} \; ,$$

terwijl s^* bij benadering volgt uit de ongelijkheden

$$(29) \qquad p \sum_{j=s^*+1}^{\infty} (j-s^*)\, p_j < \sqrt{2KhEj} \leq p \sum_{j=s^*}^{\infty} (j-s^*+1)\, p_j .$$

In het numerieke voorbeeld vinden we

$$S^* - s^* \approx \sqrt{\frac{2.3.2}{0.5}} = \sqrt{24}.$$

Indien $p \sum_{j=s}^{4} (j-s+1)\, p_j$ wordt berekend voor $s = 0, 1, \ldots, 4$ dan verkrijgen we respectievelijk 6; 4; 2,2; 0,8 en 0,2. Gemakkelijk volgt nu dat $s^* = 1$ daar $2{,}2 < \sqrt{6} \leq 4$. De op deze wijze verkregen strategie is dus (1,6) en is tevens optimaal. De resultaten met (28) en (29) zijn echter niet altijd zo goed. We komen hierop nog terug.

<u>Model 3.1 met positieve levertijd</u>

Bij een levertijd T van een geheel aantal perioden heeft de optimale strategie dezelfde structuur als bij T = 0 maar is nu gebaseerd op de economische voorraad in plaats van de aanwezige voorraad. Verder stelt

*) R.A. Howard, "Dynamic programming and Markov processes, Technology Press, Wiley 1960.

de funktie $f_n^*(v)$ nu voor de minimaal te verwachten verdisconteerde kosten over de laatste $n - T$ perioden bij een economische voorraad v op tijdstip n. In de recurrente betrekking voor $f_n^*(v)$ treedt de funktie $L_T(x)$ op in plaats van de funktie $L(x)$. Indien er bij economische voorraad v op tijdstip n een bestelling ter grootte $x - v$ wordt geplaatst dan bedraagt de economische voorraad vlak na het afgeven van de bestelking x. Indien de behoefte gedurende de levertijd $\underline{j}_T$ bedraagt met kansverdeling $p_j^{(T)}$ dan volgt dat de aanwezige voorraad op tijdstip $n - T$ na de aankomst van de levering $x - \underline{j}_T$ bedraagt. Voor de funktie $L_T(x)$, welke de som van de verwachte verdisconteerde boete- en voorraadkosten voorstelt in periode $n - T$ bij een economische voorraad x na het plaatsen van de bestelling op tijdstip n, volgt nu:

$$(30) \qquad L_T(x) = \alpha^T \sum_{j=0}^{\infty} p_j^{(T)} L(x-j).$$

De recurrente betrekking voor $f_n^*(v)$ bij $K = 0$ wordt gegeven door

$$(31) \qquad f_n^*(v) = \min_{x_n \geq v} [c(x_n - v) + L_T(x_n) + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} p_j f_{n-1}^*(x_n - j)]$$

voor $n = T+1, T+2, \ldots, N$ terwijl $f_n^*(v) = 0$ voor $n = 1, \ldots, T$.
Op dezelfde wijze als in model 3.1 kan worden aangetoond dat het optimaal is als volgt te handelen op de tijdstippen $n = T+1, \ldots, N$: "Bestel een hoeveelheid $y_n - v$ indien de economische voorraad $v < y_n$ en bestel niet indien $v \geq y_n$." De getallen y_n volgen op overigens dezelfde wijze als bij $T = 0$ met $L(x)$ vervangen door $L_T(x)$.

Numeriek voorbeeld

Dezelfde numerieke gegevens worden gebruikt als in de vorige gevallen met $T = 2$. Eerst berekenen we de kansverdeling $p_j^{(2)}$, $j = 0, 1, \ldots, 8$. Gemakkelijk volgt dat

$$p_j^{(2)} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{j} p_i\, p_{j-i} & \text{voor } j = 0, 1, 2, 3, 4 \\ \sum_{i=j-4}^{4} p_i\, p_{j-i} & \text{voor } j = 5, 6, 7, 8. \end{cases}$$

De resultaten zijn gegeven in tabel 7.

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p_j^{(2)}$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,26	0,2	0,12	0,04	0,01

Tabel 7: De kansverdeling $p_j^{(2)}$.

Vervolgens berekenen we de funktie $L_T(x)$ met behulp van (30). De resultaten voor x = 0(1)10 zijn gegeven in de tweede kolom van tabel 8.

x	$L_T(x)$	$L_T(x) + cx$	$\frac{L_T(x)}{1-\alpha} + cx$
0	9,720	9,720	97,20
1	8,102	9,602	82,52
2	6,496	9,496	67,96
3	4,939	9,439*	53,89
4	3,507	9,507	41,07
5	2,325	9,825	30,75
6	1,507	10,507	24,07
7	1,110	11,610	21,60*
8	1,077*	13,077	22,70
9	1,294	14,794	26,44
10	1,664	16,664	31,36

Tabel 8: Enige belangrijke funkties bij het voorbeeld met T = 2.

Het getal y_1 is de waarde van x_1 waarvoor $L_T(x_1) + cx_1$ minimaal is. Uit de derde kolom van tabel 8 volgt $y_1 = 3$. De resultaten voor $n = 3, 4, \ldots, 12$ worden gegeven in tabel 9.

n	3	4	5	6,...,12
y_n	3	6	7	7

Tabel 9: De getallen y_n, $n = 3, \ldots, 12$ bij $T = 2$ en $\alpha = 0.9$.

Het geval $N = \infty$, $\alpha < 1$

De optimale y^* valt nu samen met de waarde van x waarvoor de funktie $\frac{L_T(x)}{1-\alpha} + cx$ minimaal is

In het voorbeeld volgt uit de 4^e kolom van tabel 8 dat $y^* = 7$.

Het geval $N = \infty$, $\alpha = 1$.

De optimale y^* valt nu samen met de waarde van x waarvoor de funktie $L_T(x)$ minimaal is.

In het voorbeeld volgt uit de 2^e kolom van tabel 8 dat $y^* = 8$. Bij het N-staps beslissingsprobleem wordt bij $\alpha = 1$ het volgende resultaat verkregen:

n	3	4	5	6	7,...,12
y_n	4	7	7	8	8

Tabel 10: De getallen y_n, $n = 3, \ldots, 12$ bij $T = 2$ en $\alpha = 1$.

Model 3.2 met positieve levertijd

Bij $K > 0$ luidt de recurrente betrekking voor $f_n^*(v)$:

$$(32) \qquad f_n^*(v) = \min_{x_n \geq v} \Big[c(x_n - v) + L_T(x_n) + \begin{cases} K & \text{als } x_n > v \\ 0 & \text{als } x_n = v \end{cases} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} p_j \, f_{n-1}^*(x_n - j) \Big]$$

voor $n = T+1, \ldots, N$ met $f_n^*(v) = 0$, $n = 1, 2, \ldots, T$. Het is nu optimaal als volgt te handelen op de tijdstippen $n = T+1, \ldots, N$: "Bestel een hoeveelheid $S_n - v$ indien de economische voorraad $v < s_n$ en bestel niet indien $v \geq s_n$." De getallen s_n en S_n volgen overigens op dezelfde wijze als bij $T = 0$ met $L(x)$ vervangen door $L_T(x)$.
In het numerieke voorbeeld volstaan we met de getallen s_n en S_n te geven voor $n = 3, \ldots, 12$ bij $\alpha = 0{,}9$ en $\alpha = 1$ in tabel 11.

n	3	4	5	6	7	8,...,12
$(s_n,S_n)\alpha=0{,}9$	(-2,3)	(3,6)	(5,8)	(5,9)	(5,9)	(5,9)
$(s_n,S_n)\alpha=1$	(-2,4)	(5,7)	(6,9)	(6,10)	(5,10)	(6,10)

Tabel 11: De getallen s_n en S_n voor $\alpha = 0{,}9$ en $\alpha = 1$ bij $T = 2$.

In het oneindigstaps beslissingsprobleem kan aangetoond worden dat er een optimale strategie bestaat die is vastgelegd door slechts twee getallen s^* en S^*. De getallen s^* en S^* zijn ook hier veel moeilijker rechtstreeks te berekenen dan y^* in het geval $K = 0$. We besluiten daarom dit hoofdstuk met het geven van benaderingsmethoden voor s^* en $S^* - s^*$ bij $\alpha = 1$ die uit de literatuur bekend zijn.

Het geval $N = \infty$, $\alpha = 1$

De formule (28) voor $S^* - s^*$ blijft zijn geldigheid ook voor $T > 0$ bij benadering behouden. s^* volgt nu uit de ongelijkheden:

$$(33) \qquad p \sum_{j=s^*+1}^{\infty} (j-s^*)\, p_j^{(T+1)} < \sqrt{2KhEj} \leq p \sum_{j=s^*}^{\infty} (j-s^*+1)\, p_j^{(T+1)}.$$

In het numerieke voorbeeld moet dan eerst $p_j^{(3)}$ $j = 0, 1, \ldots, 12$ worden berekend en vervolgens $\sum_{j=s}^{12} (j-s+1)\, p_j^{(3)}$ voor $s = 0, 1, \ldots, 12$, De resultaten worden gegeven in tabel 12.

s	$p_s^{(3)}$	$p \sum_{j=s}^{12} (j-s+1)p_j^{(3)}$
0	0,001	14
1	0,006	12
2	0,024	10,002
3	0,062	8,016
4	0,123	6,078
5	0,180	4,264
6	0,208	2,696
7	0,180	1,488
8	0,123	0,696
9	0,062	0,264
10	0,024	0,078
11	0,006	0,016
12	0,001	0,002

Tabel 12: Bij de berekening van de benaderde waarde van s^*.

Uit de tabel volgt $1{,}488 < \sqrt{6} \leq 2{,}696$ dus $s^* = 6$. De op deze wijze verkregen strategie is (6,11) en stemt dus niet geheel overeen met de optimale strategie (6,10) waarnaar het N-staps beslissingsprobleem convergeert.
De betrouwbaarheid van de benaderingen (28) en (33) is in de literatuur onderzocht *) voor de Poissonverdeling, de negatief binomiale verdeling en de geometrische verdeling. Het resultaat van dit onderzoek waarbij van deze verdelingen respectievelijk 240, 240 en 216 voorbeelden zijn genomen is gegeven in tabel 13. Hierin is het percentage van de voorbeelden gegeven, dat een relatieve afwijking van de minimale gemiddelde verwachte kosten per periode gaf die minder dan respectievelijk 1, 5, 10 en 25% bedroeg.

*) H.M. Wagner, M. O'Hagan en B. Lundh, An empirical study of exactly and approximately optimal enventory policicies, Management Science, 11, (1965), p. 690-723.

verdeling / afwijking	Poisson	Negatief binomiaal	Geometrisch
< 1%	46% (75%)	33% (64%)	17%
< 5%	68% (95%)	69% (95%)	58%
< 10%	77% (98,3%)	84% (99,6%)	75%
< 25%	88% (100%)	95% (100%)	94%

Tabel 13: Het percentage afwijkingen.

Op grond van deze resultaten is langs empirische weg een benaderings methode gevonden die betere resultaten geeft indien $\sqrt{\frac{2KEj}{h}} \leq 1{,}5\mu$.

Stellen we de benaderingen met behulp van (28) en (33) verkregen $\bar{s}$ en $\bar{S}$ en is S_0 het getal dat voldoet aan:

$$(34) \qquad \sum_{j=0}^{S_0-1} p_j^{(T)} < \frac{p}{h+p} \leq \sum_{j=0}^{S_0} p_j^{(T)}$$

dan volgen de empirische benaderingen $\bar{\bar{s}}$ en $\bar{\bar{S}}$ uit:

$$(35) \qquad \bar{\bar{s}} = \min\,[\bar{s}, S_0]$$

$$(36) \qquad \bar{\bar{S}} = \min\,[\bar{S}, S_0].$$

De tussen haakjes vermelde percentages in tabel 13 zijn hierop gebaseerd. Deze geven een aanzienlijke verbetering.