BA

stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BC 5/73 NOVEMBER

P.J. WEEDA

VOORRAADTHEORIE 1

BA

Syllabus bij de Leergang Besliskunde

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

AMS(MOS) onderwerpen classificatie schema (1970): 90B05

1e druk: november 1972
2e druk: november 1973

1. Algemene inleiding.

De voorraadtheorie houdt zich bezig met het ontwikkelen van wiskundige modellen en methoden die kunnen worden gebruikt om een zo goedkoop mogeijk voorraadbeheer te voeren. Tot nu toe heeft de voorraadtheorie zich voornamelijk geconcentreerd op modellen voor een produkt en een voorraadpunt. Deze ontwikkeling is gebaseerd op de gedachte om eerst de eenvoudige modellen te beheersen voordat de moeilijke problemen (systemen met meer dan een produkt en/of meer dan een voorraadpunt) met vrucht kunnen worden aangepakt. Het overzicht dat hier wordt gegeven weerspiegelt deze ontwikkeling.

De wiskundige modellen voor voorraadsystemen worden in de eerste plaats onderscheiden naar de hoeveelheid informatie die de voorraadbeheerder ter beschikking staat. Men onderscheidt transactiemelding en periodieke melding. Transactiemelding betekent dat zowel tijdstip als omvang van een aanvulling of afname steeds worden gerapporteerd zodat de omvang van de voorraad op elk aangebroken tijdstip bekend is. In vele gevallen is het transactiemeldingssystemen te duur en volstaat men met een periodieke momentopname. De omvang van de voorraad is dan alleen bekend op van te voren gekozen equidistante tijdstippen.

Het gebruikte informatiesysteem heeft uiteraard invloed op de aard van de beslisregel welke men hanteert. Zo kan de voorraadbeheerder in een systeem met transactiemelding op elk gewenst moment in de situatie ingrijpen terwijl bij een systeem met periodieke melding dit ingrijpen beperkt zal zijn tot de tijdstippen waarop de situatie bekend is. We zullen in het vervolg spreken van continue en periodieke voorraadmodellen. In deze syllabus komen eerst de continue voorraadmodellen ter sprake.

Een andere indeling, welke van belang is, is naar de voorspelbaarheid van de vraag naar het produkt. De vraag kan een deterministisch of stochastisch karakter hebben. Bij een deterministische vraag is de toekomstige ontwikkeling van het systeem volledig voorspelbaar. Bij een stochastische vraag is de toestand van het systeem (hier: omvang van de voorraad) alleen bekend op reeds aangebroken tijdstippen en gehoorzaamt op een toekomstig tijdstip aan een kansverdeling. Een deterministische vraag komt in de praktijk natuurlijk maar zelden voor. De reden dat deterministische modellen toch aandacht verdienen is uit didactisch oogpunt en omdat ze vaak een goede benadering geven voor de wiskundig moeilijkere stochastische modellen.

Een derde indeling kan worden gemaakt naar de lengte van de periode waarover men het voorraadsysteem wenst te beheren. Dit is onder meer van belang voor het optimaliteitskriterium dat men hanteert. In gevallen met een eindige tijdshorizon minimaliseert men de totale kosten over een eindige periode bij een deterministisch model en de totaal te verwachten kosten bij een stochastisch model. Bij een oneindig ver in de toekomst gelegen tijdshorizon zijn deze grootheden meestal oneindig groot tenzij men toekomstige kosten verdisconteerd. In de modellen met een oneindige tijdshorizon en zonder verdiscontering is een zeer bruikbaar kriterium de verwachte gemiddelde kosten per tijdseenheid in het stochastische geval en de gemiddelde kosten per tijdseenheid in het deterministische geval. In vele stochastische voorraadmodellen met een oneindige tijdshorizon zijn de gemiddelde kosten per tijdseenheid niet stochastisch, zodat dan de verwachte gemiddelde kosten per tijdseenheid gelijk zijn aan de gemiddelde kosten per tijdseenheid.

Verder is het wel of niet eindig zijn van de tijdshorizon van belang in verband met de stationairiteit van de vraag per tijdseenheid en de kostenfuncties. Problemen met een oneindige tijdshorizon zijn alleen oplosbaar als de verwachte vraag per tijdseenheid en de kostenfunkties invariant zijn in de tijd. Bij problemen met een eindige tijdshorizon is deze stationairiteit echter geen vereiste.

Een vierde algemeen aspect van voorraadsystemen zijn de kostensoorten welke optreden. Er zijn er in het algemeen drie, te weten

1. Kosten van aanvulling

2. Kosten van het in voorraad houden

3. Kosten van buiten voorraad zijn

De kosten van aanvulling zijn een funktie van de omvang van de aanvulling. De kosten van het in voorraad houden worden meestal verondersteld per eenheid produkt en per tijdseenheid constant te zijn. De kosten van het buiten voorraad zijn kunnen diverse vormen aannemen. Deze kunnen het gevolg zijn van nalevering, een verloren verkoop of een noodinkoop naar gelang de service die de voorraadbeheerder wil geven. Naleveringskosten worden berekend naar de hoeveelheid die wordt nageleverd en naar de tijd die de klant moet wachten op de aflevering. Bij een verloren verkoop wordt de winstderving en b.v. extra kosten aan administratie en/of verlies aan "goodwill" in rekening gebracht. Tenslotte kan ook door een inkoop bij een ander bedrijf in het tekort worden voorzien (nood inkoop). De extra kosten worden dan per ingekochte eenheid ingevoerd. Daar noodinkoopkosten op dezelfde wijze behandeld worden als de kosten van een verloren verkoop zijn deze modellen vanuit wiskundig standpunt identiek.

De te voeren strategieën moeten specificeren wanneer en hoeveel er besteld moet worden op grond van de toestand van het systeem. Deze toestandsgrootheid is bijna altijd de omvang van de aanwezige voorraad of de economische voorraad (d.i. de aanwezige voorraad plus de totale hoeveelheid in bestelling). Er zijn in het algemeen twee voorraadniveau's van belang: het bestelniveau en het aanvullingsniveau. Dit leidt tot strategieën van het type: "Als het bestelniveau is onderschreden de voorraad aanvullen tot het aanvullingsniveau". In de continue modellen waarbij het bestelniveau precies wordt bereikt leidt dit tot aanvullingen met een constante hoeveelheid.

In de verdere behandeling zal de volgende notatie worden ingevoerd:

Q : omvang bestelserie
S : aanvullingsniveau
s : bestelniveau
k : vaste kosten per bestelling ongeacht de grootte
c : kosten per bestelde eenheid
h : voorraad per eenheid produkt en per tijdeenheid
p : naleverings- of noodinkoopkosten per eenheid produkt
$\bar{p}$: naleveringskosten per eenheid produkt en per tijdseenheid
λ : verwachte vraag per tijdseenheid
T : levertijd
$q_T(j)$: kans op een vraag j gedurende de levertijd
y : gemiddelde kosten per tijdseenheid

2. <u>Continue deterministische modellen</u>.

Beschouwd worden enige deterministische modellen met een constante vraag

λ per tijdseenheid en een oneindige tijdshorizon. De aanvullingskosten van een partij van Q stuks bedragen K + c.Q. De resultaten worden afgeleid voor een levertijd T = 0. Het invoeren van een positieve levertijd geeft bij deterministische modellen geen aanleiding tot extra moeilijkheden. We zullen de volgende drie modellen behandelen.

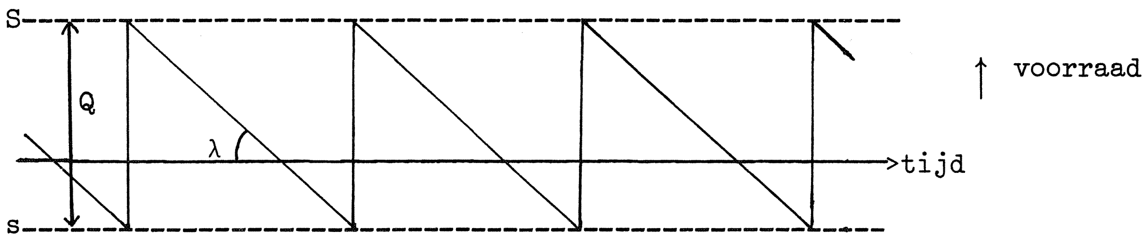
Model 2.1 : Nalevering ten koste van p per eenheid tekort vlak voor het moment van aanvulling.

Model 2.2 : Nalevering ten koste van $\bar{p}$ per eenheid per tijdseenheid.

Model 2.3 : Noodinkopen ten koste van p per eenheid.

Model 2.1

Om voor dit model een antwoord te geven op de vraag wanneer en hoeveel er moet worden besteld tegen minimale kosten in dit model stellen we eerst vast dat de omvang van de voorraad in dit model een periodiek "zaagtand" patroon volgt met een maximale voorraad S en een minimale voorraad s.



figuur 1.

De bestelgrootte bedraagt Q = S - s op het moment dat de voorraad tot het niveau s gedaald is. Deze bestelling wordt onmiddellijk afgeleverd. (T = 0). De negatieve voorraad is in absolute waarde gelijk aan de hoeveelheid die nageleverd wordt. Gezien de positieve voorraadkosten zal het nooit voordelig zijn bij een positieve voorraad te bestellen zodat $s \leq 0$ en dientengevolge $Q = S - s \geq S$.

Om de optimale Q^* en s^* te vinden stellen we een uitdrukking op voor de kosten gedurende het tijdsinterval vanaf het tijdstip van bestelling tot het volgende bestelmoment. Indien deze gedeeld worden door de lengte van het tijdsinterval verkrijgen we de gemiddelde kosten per tijdseenheid y. De kosten componenten bedragen

1. Aanvullingskosten : $K + cQ$,
2. Voorraadkosten : $\frac{1}{2}h \frac{S^2}{\lambda}$,
3. Naleveringskosten : $p(-s)$.

De lengte van de periode bedraagt $\frac{Q}{\lambda}$ en zo vinden we voor de gemiddelde kosten per tijdseenheid

$$y(Q,S) = \frac{K + cQ + \frac{1}{2}h\, S^2/\lambda - ps}{Q/\lambda}$$

Daar $s = Q - S$ en na deling volgt

$$(1) \qquad y(Q,S) = \frac{K\lambda}{Q} + \lambda c + \frac{1}{2}h \frac{S^2}{Q} + p\lambda(1 - \frac{S}{Q}).$$

Om Q^* en s^* te vinden stellen we $S = fQ$.
Daar $Q \geq S \geq 0$ geldt dat $0 \leq f \leq 1$. We differentieëren y naar Q hetgeen levert

$$(2) \qquad \frac{\partial y}{\partial Q} = -\frac{\lambda K}{Q^2} + \frac{1}{2}hf^2.$$

Nulstellen van (2) levert voor Q^*

$$(3) \qquad Q^* = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{2K\lambda}{h}}$$

Substitueren we dat resultaat in (1) dan verkrijgen we

$$y = f.(\sqrt{2K\lambda h} - p\lambda) + (p+c)\lambda$$

hetgeen dus het verloop van y als functie van f voorstelt op het kromme $\frac{\partial y}{\partial Q} = 0$
Dit is een lineaire functie van f. Indien $\sqrt{2K\lambda h} - p\lambda > 0$ dan wordt het minimum bereikt voor $f = 0$ en anders voor $f = 1$. In het eerste geval is $S^* = 0$ en in het tweede $s^* = 0$ of $Q^* = S$. $S^* = 0$ betekent dat er altijd nageleverd wordt en $s^* = 0$ dat er nooit nageleverd wordt. Indien $s^* = 0$ dan wordt Q^* gegeven door

$$(4) \qquad Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda K}{h}}$$

de bekende wortelformule van Camp die hetzij exact opgaat zoals in dit model of bij benadering in de meer gecompliceerde modellen.

Het introduceren van een positieve levertijd leidt hier tot het plaatsen van de bestelling bij een bestelniveau $s^{*'}$ zodanig dat

$$s^{*'} = s^* + \lambda T$$

onder de voorwaarde dat $Q^* > \lambda T$.

Model 2.2

In dit model zijn de naleveringskosten een bedrag $\bar{p}$ per tijdseenheid en per eenheid produkt. De term $p\lambda(1 - \frac{S}{Q})$ in (1) wordt nu vervangen door

$$\tfrac{1}{2}\,\bar{p}\,\frac{s^2}{Q} = \tfrac{1}{2}\,\bar{p}(1 - \frac{S}{Q})^2 . Q$$

De betrekking voor y luidt nu

$$(5) \qquad y(Q,S) = \frac{K\lambda}{Q} + c + \tfrac{1}{2}h\,\frac{S^2}{Q} + \tfrac{1}{2}\bar{p}\,\frac{(Q - S)^2}{Q} .$$

Stellen we $S = fQ$ dan vinden we respectievelijk voor $\frac{\partial y}{\partial Q}$ en $\frac{\partial y}{\partial f}$

$$\frac{\partial y}{\partial Q} = -\frac{K\lambda}{Q^2} + \tfrac{1}{2}hf^2 + \tfrac{1}{2}\bar{p}(1 - f)^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial f} = fhQ - \bar{p}Q(1 - f) .$$

Door $\frac{\partial y}{\partial f} = 0$ te stellen vinden we

$$(6) \qquad f^* = \frac{\bar{p}}{h+\bar{p}}$$

en door $\frac{\partial y}{\partial Q} = 0$ te stellen vinden we

(7) $$Q^* = \sqrt{\frac{2K\lambda}{\bar{p}(1 - f)^2 + hf^2}}$$

Substitutie van (6) en (7) levert

(8) $$Q^* = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h}}\left(1 + \frac{h}{\bar{p}}\right).$$

Voor het optimale bestelniveau s^* vinden we

$$s^* = - Q^*(1 - f^*) = - \sqrt{\frac{2K\lambda h}{\bar{p}(h+\bar{p})}}$$

Bij een positieve levertijd T moet het bestelniveau weer een hoeveelheid λT (= vraag gedurende de levertijd) worden opgetrokken vergeleken met het $T = 0$.

Model 2.3

In dit geval is het bedrag p op te vatten als kosten en/of winstderving per eenheid produkt bij een noodinkoop of een verloren verkoop. De uitkomsten zijn dezelfde als bij model 2.1.

3. Continue stochastische modellen

In deze paragraaf wordt de vraag beschreven door een stochastisch proces. Dit stochastisch proces brengt de tijdstippen waarop zich klanten melden voort en de hoeveelheid die per klant wordt gevraagd. De interbinnenkomsttijden $\underline{u}$ zijn stochastisch en hebben een gegeven continue verdelingsfunktie $F(u) = P\{\underline{u} \leq u\}$. Ook de hoeveelheid die per klant wordt gevraagd kan stochastisch zijn.

Wordt de vraag beschreven door een stationair Poisson-proces dan zijn de interbinnenkomsttijden van klanten negatief exponentieël verdeeld met verdelingsfunktie

$$F(u) = 1 - e^{-\lambda u}$$

en met verwachting $\frac{1}{\lambda}$. Iedere klant vraagt een eenheid aan. Het Poisson-proces heeft verder de eigenschap dat aantal binnenkomsten $\underline{n}(T)$ in een tijdsinterval ter lengte T (= aantal gevraagde eenheden in T) een Poisson-verdeling volgt, gegeven door

$$P\{\underline{n}(T) = n\} = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}$$

Een derde belangrijke eigenschap van het Poisson-proces is dat het een van de weinige stochastische processen is waarbij het aantal binnenkomsten in verschillende disjuncte tijdsintervallen onderling onafhankelijke stochastische variabelen zijn.

In de praktijk is de veronderstelling dat de vraag beschreven wordt door een Poisson-proces vaak te beperkend. In de gevallen beschreven in deze paragraaf blijven de resultaten afgeleid voor een Poisson-proces, exact óf bij benadering geldig voor een ander stochastisch proces.

Het optimaliteitskriterium is weer de gemiddelde kosten per tijdseenheid y. Deze worden nu verkregen door de verwachte kosten uit te rekenen over de periode tussen twee opeenvolgende aankomsten van bestellingen en deze te delen door de verwachte duur van deze tijdsperiode. Als $\underline{k}$ de kosten tijdens en $\underline{t}$ de duus van deze tijdsperiode voorstellen dan geldt de belangrijke relatie

$$y = \frac{E\,\underline{k}}{E\,\underline{t}} \tag{10}$$

Bij stochastische modellen is het verschil in behandeling tussen modellen met T = 0 en die met T > 0 veel essentiëler. Bij levertijd T = 0 kan men het buiten voorraad raken altijd vermijden terwijl men bij een positieve levertijd steeds een positieve kans heeft buiten voorraad te geraken.

In deze paragraaf komt eerst het model 3.1 ter sprake met levertijd T = 0 terwijl de vraag wordt gegeven door een stationair Poisson-proces. De afleiding die wordt gegeven is exact en gaat ook exact op voor modellen waarbij de interbinnenkomsttijden een willekeurige verdeling hebben.

Vervolgens komen de modellen 3.2 en 3.3 ter sprake waarbij de levertijd positief is. Deze modellen onderscheiden zich naar wat er gebeurt als men buiten voorraad is. We zullen bespreken

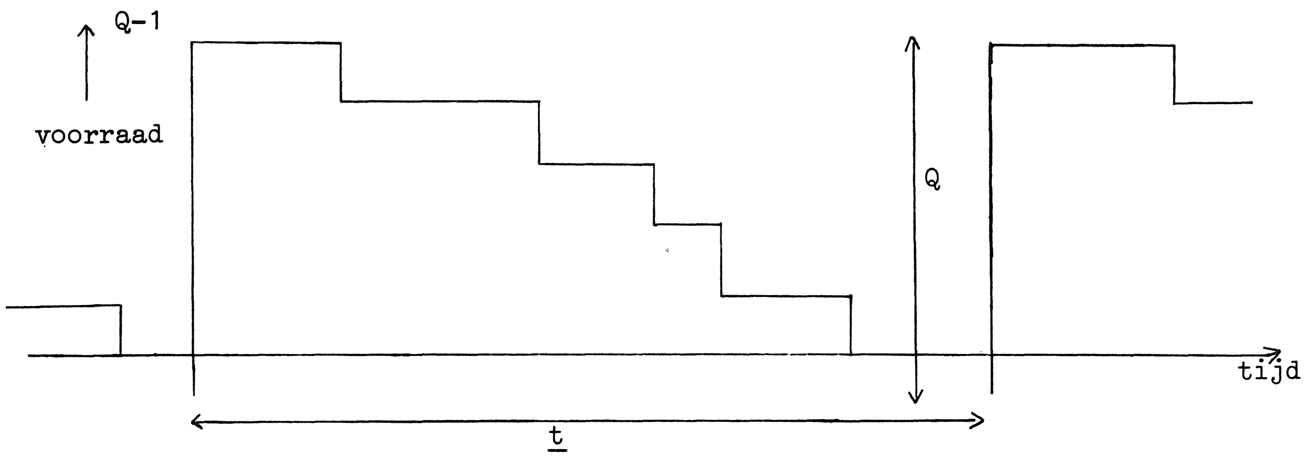
Model 3.2 : Na levering tegen een constant bedrag p per eenheid.

Model 3.3 : Noodinkopen tegen een constant bedrag van p per eenheid.

Hoewel voor de modellen 3.2 en 3.3 exacte afleidingen zijn te geven indien de vraag door een Poisson-proces wordt gegeven (zie deel 7c Leergang Besliskunde blz. 85 en 43 resp.) wordt hier een vereenvoudigde afleiding gegeven waarvan de resultaten bij benadering geldig zijn. In de voorraadliteratuur wordt deze benadering zeer goed genoemd. Bovendien zijn in de praktijk de kostenbedragen vaak te onnauwkeurig bekend om dan het gebruik van een gecompliceerde exacte methode te rechtvaardigen.

Model 3.1 *)

Het verloop van de voorraad is geschetst in figuur 2.



figuur 2.

Daar de levertijd nul is wordt gewacht tot de eerste klant binnenkomt nadat de voorraad nul geworden is. De onmiddellijk aankomende bestelling van Q stuks voorziet eerst deze klant waarna de aanwezige voorraad Q - 1 is.

De tijd $\underline{t}$ tussen twee opeenvolgende bestellingen bestaat uit Q negatief exponentiëel verdeelde tijdsintervallen met verwachte lengte $\frac{1}{\lambda}$. Voor E $\underline{t}$ vinden we dus

*) Bij dit model is aangenomen dat altijd naleveren niet optimaal is. Een voldoende voorwaarde hiervoor is:

$$\sqrt{2K\lambda h} - \frac{h}{2} < p\lambda$$

(11) $\qquad \underline{\mathrm{Et}} = \frac{Q}{\lambda}$.

Voor de twee kostencomponenten tussen twee opeenvolgende bestellingen vinden we

aanvullingskosten : $K + cQ$

voorraadkosten : $h \sum_{i=1}^{Q-1} \frac{i}{\lambda} = \frac{h}{2\lambda} Q(Q-1)$.

Voor $\underline{\mathrm{Ek}}$ vinden we

(12) $\qquad \underline{\mathrm{Ek}} = K + cQ + \frac{h}{2\lambda} Q(Q-1)$

en volgens (10), (11) en (12) voor de gemiddelde kosten per tijdseenheid.

(13) $\qquad y(Q) = \frac{K\lambda}{Q} + c\lambda + \frac{h}{2} (Q-1)$.

Op de gebruikelijke wijze vinden we voor de optimale seriegrootte Q^*

(14) $\qquad Q^* = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h}}$,

de wortelformule van Camp.

Model 3.2. ($T > 0$, nalevering tegen kosten p per eenheid).

Daar de levertijd $T > 0$ en de vraag stochastisch is, is er nu een positieve kans om buiten voorraad te geraken zodat nalevering niet geheel voorkomen kan worden zoals in het vorige model. Naast de bestelgrootte Q moet nu dus ook het bestelniveau s zo goed mogelijk gekozen worden. Dit zal geschieden door een uitdrukking af te leiden voor de gemiddelde kosten per tijdseenheid als funktie van Q en s welke alleen bij benadering juist is. De volgende (wiskundige) aannamen vergemakkelijken het afleiden van deze uitdrukking.

(1) De kansverdeling van de vraag gedurende de levertijd is onafhankelijk van het besteltijdstip.

(2) De omvang van de voorraad wordt beschouwd als een continue variabele.

(3) De gerealiseerde vraag gedurende de levertijd is altijd $\leq Q$.

Theoretisch impliceert aanname 1 dat de vraag gegeven wordt door een Poissonproces. Dit is echter een te beperkte aanname omtrent de werkelijkheid. Ondanks dat er theoretische bezwaren zijn aan te voeren tegen andere vraagverdelingen blijft de benadering goed als andere vraagverdelingen gebruikt worden.

Aanname 3 betekent dat na de aflevering van de bestelling de voorraad $\geq$ s moet zijn, hetgeen equivalent is met te stellen dat er slechts een bestelling tegelijk uit kan staan.

De vraagverdeling gedurende de levertijd wordt gegeven door de getallen $q_T(j)$ $j = 0,1,2,\ldots$ welke de kans voorstellen dat deze vraag j bedraagt. Indien de verwachte vraag per tijdseenheid λ is, dan bedraagt de verwachte vraag in de levertijd λT.

Aangezien de vraag volledig uit de bestellingen wordt voldaan volgt dat er gemiddeld over een lange periode evenveel besteld moet worden als de totale vraag bedraagt. Op basis van deze redenering nemen we voor $E\underline{t}$ daarom

$$(15) \qquad E\underline{t} = \frac{Q}{\lambda}$$

Om de verwachte kosten $E\underline{k}$ tussen twee opeenvolgende bestellingen te vinden beginnen we met de verwachte voorraadkosten. Direkt na de aanvulling bedraagt het verwachte voorraadniveau $Q + s - \lambda T$ en bij de volgende bestelling s. De verwachte gemiddelde voorraad bedraagt derhalve

$$\tfrac{1}{2}(2s + Q - \lambda T)$$

De verwachte lengte van deze periode bedraagt $\frac{Q}{\lambda} - T$ en zo vinden we voor de verwachte voorraadkosten tussen de aflevering en de volgende bestelling

$$\frac{h}{2}(2s + Q - \lambda T)\left(\frac{Q}{\lambda} - T\right)$$

Indien de vraag gedurende de levertijd $\underline{j}$ bedraagt is de aanwezige voorraad $s - \underline{j}$ als $\underline{j} \leq s$ en 0 als $\underline{j} > s$. De verwachte gemiddelde voorraad bedraagt dus

$$\tfrac{1}{2}(s + \sum_{j=0}^{s} (s-j)q_T(j))$$

en voor de verwachte voorraadkosten tijdens de levertijd vinden we

$$\frac{h}{2}(s + \sum_{j=0}^{s} (s-j)q_T(j))T.$$

Tesamen vinden we voor de verwachte voorraadkosten tussen twee opeenvolgende bestellingen

$$\frac{hQ}{2\lambda} (2s + Q - \lambda T) +$$

$$+ \frac{hT}{2} (- s - Q + \lambda T) + \sum_{j=0}^{s} (s-j)q_T(j))$$

Met behulp van de volgende relatie

$$(16) \qquad \sum_{j=0}^{s} (s-j)q_T(j) - \sum_{j=s+1}^{\infty} (j-s)q_T(j) = s - \lambda T$$

kunnen we hiervoor schrijven

$$\frac{hQ}{2\lambda}(2s + Q - \lambda T) + \frac{hT}{2}(- Q + \sum_{j=s+1}^{\infty} (j-s)q_T(j)) =$$

$$\frac{hQ}{2\lambda}(Q + 2(s-\lambda T)) + \frac{hT}{2} \sum_{j=s+1}^{\infty} (j-s)q_T(j).$$

Voor de verwachte naleveringskosten gedurende de periode tussen twee opeenvolgende bestellingen vinden we

$$p \sum_{j=s+1}^{\infty} (j-s)q_T(j)$$

terwijl de bestelkosten $K + cQ$ bedragen. Voor de gemiddelde kosten $y(Q,s)$ per tijdseenheid vinden we

$$y(Q,s) = \frac{K\lambda}{Q} + c\lambda + h(s+\tfrac{1}{2}Q-\lambda T) +$$

$$+ \frac{\lambda p + \tfrac{1}{2}\lambda Th}{Q} \sum_{j=s+1}^{\infty} (j-s)q_T(j).$$

Door de partiële afgeleide van y naar Q nul te stellen vinden we

$$(17) \qquad Q = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h} + (\lambda T + \frac{2\lambda p}{h}) \sum_{j=s+1}^{\infty} (j-s)q_T(j)}$$

Als de continue benadering voor de beste Q bij gegeven s. Merk op dat de eerste term onder het wortelteken dezelfde is als die uit de formule van Camp.

Aangezien de tweede term positief is zal de optimale Q^* dus groter zijn dan bij model 3.1.

Bij een gegeven vaste Q wordt het beste bestelniveau gevonden uit de ongelijkheden

$$(18) \qquad h(s+1) + \frac{\lambda p + \frac{1}{2}\lambda Th}{Q} \sum_{j=s+2}^{\infty} (j-s-1)q_T(j) \geq$$

$$hs + \frac{\lambda p + \frac{1}{2}\lambda Th}{Q} \sum_{j=s+1}^{\infty} (j-s)q_T(j)$$

en

$$(19) \qquad h(s-1) + \frac{\lambda p + \frac{1}{2}\lambda Th}{Q} \cdot \sum_{j=s}^{\infty} (j-s+1)q_T(j) >$$

$$hs + \frac{\lambda p + \frac{1}{2}\lambda Th}{Q} \cdot \sum_{j=s}^{\infty} (j-s)q_T(j) \ .$$

Na enige herleiding volgt uit (18) en (19)

$$\sum_{j=s+1}^{\infty} q_T(j) \leq \frac{hQ}{\frac{1}{2}\lambda Th + \lambda p} < \sum_{j=s}^{\infty} q_T(j)$$

of daar $\sum_{j=s+1}^{\infty} q_T(j) = 1 - \sum_{j=0}^{s} q_T(j)$

$$\sum_{j=0}^{s-1} q_T(j) < 1 - \frac{hQ}{\lambda p + \frac{1}{2}\lambda Th} \leq \sum_{j=0}^{s} q_T(j) \ .$$

Hieruit volgt dat de beste s bij een gegeven vaste Q wordt gevonden door de kleinste gehele waarde van s te vinden waarvoor

$$(20) \qquad 1 - \frac{hQ}{\lambda p + \frac{1}{2}\lambda Th} \leq \sum_{j=0}^{s} q_T(j).$$

De volgende rekenmethode gebaseerd op (17) en (20) levert nu de optimale Q^* en s^*.

Rekenmethode ter bepaling van Q^* en s^*.

1. Neem als beginwaarde voor Q de waarde d ie volgt uit de formule van Camp.
2. Bepaal het bestelniveau s bij de laatst verkregen waarde van Q met behulp van (20). Indien de aldus verkregen waarde van s gelijk is aan de laatstverkregen waarde van s dan is $s^* = s$ en Q^* gelijk aan de laatst verkregen waarde van Q. Indien dit niet het geval is ga door met stap 3.
3. Bepaal Q met de formele (17) en de laatst verkregen waarde van s. Ga door met stap 2.

De methode wordt geïllustreerd aan het volgende numerieke voorbeeld.

Numeriek voorbeeld

$$c = 1 \quad K = 31{,}25 \quad h = 5 \quad p = 20 \quad \lambda = 2 \quad T = 1$$

$$q_T(j) = \frac{1}{5} \quad j = 0,1,\ldots,4$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = 5$$

$$1 - \frac{hQ}{\frac{1}{2}\lambda Th + \lambda p} = 1 - \frac{25}{24} = \frac{4}{9} \Rightarrow s_1 = 2$$

$$Q_2 = \sqrt{25 + (2 + \frac{2.2.20}{5})\{(3-2)0{,}2 + (4-2)0{,}2\}} = \sqrt{35{,}8} = 5{,}98$$

$$1 - \frac{hQ}{\frac{1}{2}\lambda Th + \lambda p} = 1 - \frac{5.5{,}98}{45} = 0{,}336 \Rightarrow s_2 = 1$$

$$Q_3 = \sqrt{25 + 18.\{(2-1)0,2 + (3-1)0,2 + (4-1)0,2\}} = 6,83$$

$$1 - \frac{hQ}{\frac{1}{2}\lambda Th + \lambda p} = 1 - \frac{5.6,83}{45} = 0,24 \Rightarrow s_3 = 1$$

$$Q^* = 6,83$$
$$s^* = 1$$

Voor de bijbehorende optimale y^* vinden we

$$y^* = \frac{2.31,25}{6,83} + 2 + 5(1+3,42-2) + \frac{40+5}{6,83} \sum_{j=2}^{4} 0,2(j-1) =$$

$$= 9,15 + 2 + 12,08 + 7,90 = 31,13.$$

<u>Model 3.3</u> ($T > 0$, noodinkopen tegen p per eenheid).

Het verschil met het vorige model is dat nu de voorraad niet negatief kan worden. Voor de verwachte tijdsduur van de periode tussen twee opeenvolgende bestellingen kunnen we nu niet meer $\frac{Q}{\lambda}$ schrijven daar aan de vraag niet geheel uit de bestellingen wordt voldaan. We zullen echter het verschil verwaarlozen en nemen dus toch

(21) $\qquad E\underline{t} = \frac{Q}{\lambda}$

De berekening van de verwachte voorraadkosten tussen twee opeenvolgende bestellingen ondergaat nu een kleine wijziging omdat het verwachte voorraadniveau na de aflevering van de bestelling niet $Q + s - \lambda T$ bedraagt zoals in model 3.2. Indien $\underline{j}$ de vraag gedurende de levertijd is dan bedraagt het voorraadniveau vlak na de aflevering van de bestelling $s - \underline{j} + Q$ als $\underline{j} \leq s$ en Q als $\underline{j} > s$. Voor het verwachte voorraadniveau vinden we

$$\sum_{j=0}^{s} (s-j+Q)q_T(j) + Q \sum_{j=s+1}^{\infty} q_T(j) =$$

$$\sum_{j=0}^{s} (s-j)q_T(j) + Q.$$

Hieruit volgt dat de verwachte gemiddelde voorraad tussen de aflevering en de volgende bestelling gegeven wordt door

$$\tfrac{1}{2}(s + Q + \sum_{j=0}^{s} (s-j)q_T(j))$$

en vinden we voor de verwachte voorraadkosten in die periode

$$\frac{h}{2}(s + Q + \sum_{j=0}^{s} (s-j)q_T(j))(\frac{Q}{\lambda} - T) .$$

De verwachte voorraadkosten tijdens de levertijd zijn, zoals gemakkelijk is in te zien, hetzelfde als in model 3.2 en dus gelijk aan

$$\frac{h}{2}(s + \sum_{j=0}^{s} (s-j)q_T(j))T .$$

Tesamen vinden we voor de verwachte voorraadkosten tussen twee opeenvolgende bestellingen

$$\frac{hQ}{2\lambda} [s + Q - \lambda T + \sum_{j=0}^{s} (s-j)q_T(j)] .$$

Voor de verwachte noodinkoopkosten vinden we

$$p \sum_{j=s+1}^{\infty} (j-s)q_T(j)$$

terwijl de bestelkosten K + cQ bedragen. Voor de gemiddelde kosten per tijdseenheid vinden we met behulp van (10), (16) en (21):

$$y(Q,s) = \frac{\lambda K}{Q} + \lambda c + (\frac{\lambda p}{Q} + \frac{h}{2}) \sum_{j=s+1}^{\infty} (j-s)q_T(j) + \\ + h(s - \lambda T + \tfrac{1}{2}Q) . \tag{22}$$

Door de partiële afgeleide van y naar Q nul te stellen vinden we voor de beste Q bij gegeven s

$$Q = \sqrt{\frac{2\lambda K}{h} + \frac{2\lambda p}{h} \sum_{j=s+1}^{\infty} (j-s)q_T(j)} . \tag{23}$$

Bij een gegeven Q is de beste s het kleinste gehele getal waarvoor

$$(24) \qquad \sum_{j=0}^{s} q_T(j) \geq 1 - \frac{hQ}{\lambda p + \frac{1}{2}hQ}$$

s^* en Q^* worden op dezelfde wijze als bij model 3.2 iteratief bepaald maar nu met (23) en (24). Dit wordt toegelicht aan het numerieke voorbeeld dat bij model 3.2 reeds werd gebruikt en waarin p nu noodinkoopkosten voorstelt in plaats van naleveringskosten.

Numeriek voorbeeld

$$c = 1 \quad K = 31{,}25 \quad h = 5 \quad p = 20 \quad \lambda = 2 \quad T = 1$$

$$q_T(j) = \frac{1}{5} \qquad j = 0,1,2,3,4$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h}} = 5$$

$$1 - \frac{hQ_1}{\lambda p + \frac{1}{2}hQ} = 1 - \frac{5.5}{2.20 + \frac{1}{2}.5.5} = \frac{11}{21} \Rightarrow s_1 = 2$$

$$Q_2 = \sqrt{25 + \frac{2.2.20}{5}(0{,}2.1 + 0{,}2.2)} = \sqrt{34{,}6} = 5{,}88$$

$$1 - \frac{hQ_2}{\lambda p + \frac{1}{2}hQ_2} = 1 - \frac{5.5{,}88}{2.20 + \frac{1}{2}.5.5{,}88} = 0{,}47 \Rightarrow s_2 = 2$$

$$Q^* = 5{,}88$$
$$s^* = 2$$

Voor de bijbehorende optimale y^* vinden we (zie (22))

$$y^* = \frac{2.31{,}25}{5{,}88} + 2 + \left(\frac{2.20}{5{,}88} + \frac{5}{2}\right) \sum_{j=3}^{4} (j-2)0{,}2 + 5\left(2 - 2 + \frac{5{,}88}{2}\right) =$$

$$= 32{,}90.$$

4. Opgaven

1. Een groot warenhuis heeft uit de verkoopcijfers van bepaald type

koffieapparaat afgeleid dat de behoefte per week de volgende kansverdeling volgt

behoefte	0	1	2	3	4	5	6	7
kans	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{28}$

De inkoopprijs per exemplaar bedraagt *f* 24,-, terwijl de bestelkosten van een serie *f* 2,- bedragen, ongeacht de omvang van de serie. De kosten van een verloren verkoop, bestaande uit de winstderving en een verlies aan "goodwill", worden op *f* 14,- geraamd. De kosten van het in voorraad houden bedragen *f* 3,- per week en per stuk. De levertijd bedraagt een week.
Gevraagd: Bereken Q^* en s^*.

2. In een fabriek wordt één van de produkten gemaakt op een machine die alleen voor dit bepaalde produkt wordt gebruikt. Draait de machine, dan worden er r stuks van het produkt per dag gemaakt.
De vraag waaraan altijd zonder uitstel moet worden voldaan, bedraagt λ stuks per dag, $\lambda < r$. Men maakt het produkt in series van dezelfde lengte. Begint men een nieuwe serie, dan vergt de voorbereiding T dagen gedurende welke periode er niets geproduceerd wordt, terwijl de kosten k per dag bedragen. De voorraadkosten zijn evenredig met het aantal eenheden in voorraad en met het aantal dagen dat een eenheid ligt opgeslagen; de evenredigheidsconstante is h.
Gevraagd: Hoe lang moet men de produktseries maken, wanneer men de som van voorraadkosten en aanloopkosten wil minimaliseren? Teken ter verduidelijking een grafiek van het verloop van de voorraad.

3. Van een produkt is de vraag per jaar constant en bedraagt 32. Indien een serie ter grootte van $Q \geq 100$ wordt ingekocht bedragen de aanvullingskosten $37{,}5 + 6Q$ en indien $0 < Q < 100$: $37{,}5 + 12Q$. De voorraadkosten bedragen *f* 1,50 per stuk indien de seriegrootte $Q \geq 100$ is geweest en *f* 3,- per stuk indien de seriegrootte $0 < Q < 100$ is geweest.
Gevraagd: De optimale seriegrootte Q^* te berekenen.