stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BC 6/72 DECEMBER

B. DORHOUT

NIET-LINEAIRE PROGRAMMERING

Syllabus bij de Leergang Mathematische Besliskunde

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

INHOUD

1. INLEIDING

Niet-lineaire programmeringsproblemen zijn al die problemen, die in de volgende gedaante kunnen worden gebracht.
Gegeven zijn $m + 1$ continue functies $f, g_1, \ldots, g_m$ in de variabelen $x_1, \ldots, x_n$. Zij zijn niet alle lineair.
Gevraagd wordt zodanige waarden van $x_1, \ldots, x_n$ te bepalen, dat

$$f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.1}$$

maximaal wordt en voldaan is aan de bijvoorwaarden

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \leqq b_i \ , \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{1.2}$$

$$x_j \geqq 0 \ , \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Er bestaat nog geen enkele methode om de optimale oplossing van het algemene niet-lineaire programmeringsprobleem te bepalen. Wel zijn er zeer veel methoden uitgewerkt, die, uitgaande van een oplossing, doorgaans een betere oplossing opleveren en methoden, die slechts voor speciale klassen van problemen het optimum kunnen benaderen. Zij delen helaas de eigenschap, dat zij zeer inefficiënt zijn in vergelijking met de simplexmethode. Dit heeft er toe geleid, dat men bij de opstelling van mathematische modellen voor beslissingsproblemen dikwijls noodgedwongen niet-lineaire functies door lineaire functies benadert.

In de volgende paragraaf geven wij voorbeelden van beslissingsproblemen, die als eenvoudige niet-lineaire programmeringsproblemen kunnen worden geformuleerd.

2. VOORBEELDEN

Voorbeeld 1. Een beleggingsprobleem

(B.Dorhout en J.Kriens, Leergang Besliskunde, deel 6a, Wiskundige programmering 1, blz.8, Mathematisch Centrum)

Een belegger wil een bedrag van *f*.1.000.000,- beleggen in een viertal ondernemingen, die we zullen aangeven met A, B, C en D. Om dit op een verantwoorde wijze te kunnen doen, heeft hij een studie gemaakt van de opbrengsten, die jaarlijks worden verkregen op een bedrag van *f*.100,-, in elk van de genoemde fondsen belegd. Deze opbrengsten kunnen worden beschouwd als stochastische variabelen. Wij zullen aannemen, dat hun verdelingen niet variëren in de tijd en dat zij onderling onafhankelijk zijn. De verwachtingen en spreidingen van deze stochasten, die we zullen aangeven met $\underline{a}_A$, $\underline{a}_B$, $\underline{a}_C$ en $\underline{a}_D$, zijn respectievelijk 4, 5, 6, 3 en 1, 2, 2, 1 gulden.

De belegger wil gemiddeld minstens 4,5% rente van zijn kapitaal maken. Verder wenst hij in de bedrijven B en C niet meer dan 60% van zijn kapitaal te investeren en zal hij trachten onder deze omstandigheden zijn risico te minimaliseren. Dit laatste zullen we interpreteren als het zo klein mogelijk maken van de variantie van de totale jaarlijkse opbrengst.

De belegger vraagt zich nu af, hoeveel geld hij in elk bedrijf moet steken om dit doel te bereiken. Stel, dat hij respectievelijk x_A, x_B, x_C en x_D maal ƒ.100,- belegt in de bedrijven A, B, C en D.

De jaarlijkse opbrengst is een stochastische variabele $\underline{y}$ met

(2.1) $$\underline{y} = x_A\underline{a}_A + x_B\underline{a}_B + x_C\underline{a}_C + x_D\underline{a}_D.$$

De verwachting van $\underline{y}$ wordt gegeven door

(2.2) $$E\underline{y} = x_AE\underline{a}_A + x_BE\underline{a}_B + x_CE\underline{a}_C + x_DE\underline{a}_D = 4x_A + 5x_B + 6x_C + 3x_D.$$

De eis, dat minstens 4,5% rente gemaakt moet worden, houdt in:

(2.3) $$4x_A + 5x_B + 6x_C + 3x_D \geqq 45.000.$$

De variantie van $\underline{y}$ wordt gegeven door

(2.4) $$\sigma^2(\underline{y}) = x_A^2\sigma^2(\underline{a}_A) + x_B^2\sigma^2(\underline{a}_B) + x^2\sigma^2(\underline{a}_C) + x_D^2\sigma^2(\underline{a}_D) =$$
$$= x_A^2 + 4x_B^2 + 4x_C^2 + x_D^2.$$

Verder geldt

(2.5) $$x_A + x_B + x_C + x_D = 10.000.$$

In de bedrijven B en C mag niet meer dan 60% van het kapitaal belegd worden, dus

(2.6) $$x_B + x_C \leqq 6.000.$$

Het antwoord op het beleggingsprobleem wordt nu gevonden uit de minimalisering van de functie

$$(2.7) \qquad z = \sigma^2(\underline{y}) = x_A^2 + 4x_B^2 + 4x_C^2 + x_D^2$$

onder de bijvoorwaarden

$$(2.8) \qquad \begin{aligned} x_A + x_B + x_C + x_D &= 10.000 \\ x_B + x_C &\leqq 6.000 \\ 4x_A + 5x_B + 6x_C + 3x_D &\geqq 45.000 \\ x_A,\ x_B,\ x_C,\ x_D &\geqq 0. \end{aligned}$$

Oplossing (afgerond in gehele aantallen):

$$x_A = 4270$$
$$x_B = 1741$$
$$x_C = 2416$$
$$x_D = 1573$$
$$(\sigma^2(\underline{y}) = 56.179.775).$$

Voorbeeld 2

(J.C.G.Boot, Quadratic programming, North Holland Publishing Company, blz. 151, (1964), Amsterdam)

Het landbouwegalisatiefonds koopt in Nederland alle melk op die de boeren niet voor eigen gebruik nodig hebben. Een deel van deze melk is bestemd voor direkte consumptie binnen Nederland. Het overige deel van de melk wordt gebruikt voor de produktie van boter en kaas. De afnemers van deze produkten worden zowel in Nederland als in het buitenland aangetroffen.

Het bedrag dat de boeren normaliter per liter melk van het fonds ontvangen is gelijk aan het quotiënt van de totale jaaropbrengst, verminderd met verwerkingskosten, transportkosten, enz., en de totale hoeveelheid afgeleverde melk.

Wij spreken van een "ontvangst normaliter", omdat de regering een garantieprijs heeft ingesteld die de boeren, telkens wanneer het zojuist genoemde quotiënt daalt beneden de garantieprijs per liter, zal worden uitbetaald.

Door de garantie hoopt de regering de boeren de nodige steun te verschaffen.

Het landbouwegalisatiefonds heeft de bevoegdheid om op de Nederlandse markt de prijzen van melk, boter, 40^+kaas en volvette kaas vast te stellen. Het kan dus trachten de opbrengst van de melk en de melkprodukten zo groot mogelijk te maken. Om de kosten van levensonderhoud in de hand te houden heeft de regering deze vrijheid van prijsvaststelling aan een beperking onderworpen. Bovendien kan een verhoging van de prijzen een daling van het verbruik van melk en melkprodukten bewerkstelligen.

Laten q_1, q_2, q_3 en q_4 de, in 1000 ton uitgedrukte, af te zetten hoeveelheden melk, boter, vette en 40^+kaas voor het komende jaar voorstellen. De symbolen p_1, p_2, p_3 en p_4 zullen de te kiezen prijzen van deze laatste produkten aangeven.
Op grond van kwantitatieve onderzoekingen naar het consumentengedrag kan worden uitgegaan van de veronderstelling dat, als de prijzen p_1, p_2, p_3 en p_4 niet teveel afwijken van de prijzen in het afgelopen jaar, de afhankelijkheid van omzet en prijs wordt gegeven door

$$
\begin{aligned}
q_1 &= -1{,}2338p_1 + 2139 \\
q_2 &= -0{,}0203p_2 + 135 \\
q_3 &= -0{,}0136p_3 + 0{,}0015p_4 + 103 \\
q_4 &= 0{,}0016p_3 - 0{,}0027p_4 + 19 \quad .
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Indien de regering niet wenst dat de kosten van levensonderhoud stijgen, zullen de te kiezen prijzen moeten voldoen aan de voorwaarde

$$0{,}0163p_1 + 0{,}003p_2 + 0{,}0006p_3 + 0{,}0002p_4 = 10. \tag{2.10}$$

Voor de motivering van deze relaties wordt de lezer verwezen naar het boek van J.C.G.Boot.

De belangrijkste bestanddelen van de melk zijn vet en de zogenaamde droge stof. De totale hoeveelheden vet en droge stof, waarover men het komende jaar kan beschikken, kunnen met grote zekerheid worden voorspeld. Vet en droge stof worden verwerkt in boter en kaas en blijven bovendien achter in de consumptiemelk. De produktie van boter, melk en kaas wordt dus beperkt door deze hoeveelheden.

Dit geeft aanleiding tot de volgende ongelijkheden

$$(2.11)\qquad \begin{aligned} 0{,}026q_1 + 0{,}800q_2 + 0{,}306q_3 + 0{,}245q_4 &\leqq 119 \\ 0{,}086q_1 + 0{,}020q_2 + 0{,}297q_3 + 0{,}371q_4 &\leqq 251 \end{aligned}$$

Met behulp van (2.9) gaat (2.11) over in

$$(2.12)\qquad \begin{aligned} -0{,}0321p_1 - 0{,}0162p_2 - 0{,}0038p_3 - 0{,}0002p_4 &\leqq -80{,}5 \\ -0{,}1061p_1 - 0{,}0004p_2 - 0{,}0034p_3 - 0{,}0006p_4 &\leqq 26{,}6 \end{aligned}$$

Uit $q_j \geqq 0$ en (2.9) volgen de ongelijkheden

$$(2.13)\qquad \begin{aligned} 1{,}2338p_1 &\leqq 2139 \\ 0{,}0203p_2 &\leqq 135 \\ 0{,}0136p_3 - 0{,}0015p_4 &\leqq 103 \\ -0{,}0016p_3 + 0{,}0027p_4 &\leqq 19 \quad . \end{aligned}$$

De opbrengst van de melk en de beschouwde melkprodukten in het komende jaar wordt uiteraard gegeven door

$$z = \sum_{j=1}^{4} p_j q_j$$

Uit (2.9) volgt dat deze opbrengst ook kan worden weergegeven door

$$(2.14)\qquad \begin{aligned} z = &- 1{,}2338p_1^2 - 0{,}0203p_2^2 - 0{,}0136p_3^2 - 0{,}0027p_4^2 + \\ &+ 0{,}0031p_3p_4 + 2139p_1 + 135p_2 + 103p_3 + 19p_4 \quad . \end{aligned}$$

Het beslissingsprobleem van het landbouwegalisatiefonds kan dus worden vertaald in het wiskundige probleem:
maximaliseer (2.14) onder de bijvoorwaarden (2.10), (2.12), (2.13) en

$$(2.15)\qquad p_j \geqq 0 \quad , \qquad\qquad j = 1,\ldots,4.$$

De oplossing van dit probleem levert de volgende prijzen en hoeveelheden op:

$p_1 = 423$	$q_1 = 1606,0$
$p_2 = 3454$	$q_2 = 65,0$
$p_3 = 2760$	$q_3 = 70,4$
$p_4 = 2988$	$q_4 = 14,9$

Voorbeeld 3. Een voorbewerkingsprobleem

(E.M.L. Beale, P.J. Coen en A.D.J. Flowerdew, Separable programming applied to an ore purchasing problem, in Applied Statistics, Vol.XIV (1965))

Een hoogovenbedrijf fabriceert ruwijzer in hoogovens van drie verschillende typen, te noemen 1, 2 en 3. De voornaamste grondstof is ijzererts, dat in allerlei prijzen en samenstellingen verkrijgbaar is. Het kan gedeeltelijk direct in de hoogovens worden gestort, maar moet voor een ander gedeelte eerst worden omgezet in sinter. Dit geschiedt in een sinterfabriek, waaraan gedurende de beschouwde planningsperiode steeds hetzelfde grondstoffenmengsel moet worden toegevoegd. Er vindt geen opslag van sinter plaats.

Gevraagd wordt de in te kopen hoeveelheden grondstoffen zo te bepalen, dat de produktiekosten minimaal zijn onder de voorwaarde, dat de hoeveelheden van verschillende chemische stoffen, die in het eindprodukt voorkomen, binnen daarvoor vastgestelde grenzen liggen.

Bij de beschrijving van het door Beale c.s. voor dit probleem opgestelde mathematische model zullen wij gebruik maken van de volgende notatie:

x_{0k} = hoeveelheid van materiaal k, toegevoerd aan de sinterfabriek (ton/dag)

x_{jk} = hoeveelheid van materiaal k, toegevoerd aan de hoogovens van type j (ton/dag) $(j = 1,\dots,3)$

s_{0j} = hoeveelheid sinter, gebruikt in de hoogovens van type j (ton/dag) $(j = 1,\dots,3)$

s_{ij} = hoeveelheid chemische component i in de sinter, die naar de hoogovens van type j gaat (ton/dag) $(i = 1,\dots,8;\ j = 1,\dots,3)$

c_0 = sinterkosten per ton sinter

c_k = kosten van een ton van grondstof k

a_{ik} = hoeveelheid van chemische component i, aanwezig in 1 ton van grondstof k (ton) $(i = 1,\dots,8)$ (ijzer: $i = 1$)

r_{ik} = hoeveelheid van chemische component i, aanwezig in de sinter na het sinteren van 1 ton van grondstof k (ton) $(i = 0,\dots,8)$ (totale hoeveelheid : $i = 0$)

d_j = hoeveelheid ruw ijzer, die per dag gemaakt moet worden in de hoogovens van type j (ton) $(j = 1,\ldots,3)$

$\left.\begin{matrix} l_{ij} \\ u_{ij} \end{matrix}\right\}$ = ondergrens, resp. bovengrens voor de hoeveelheid van component i in het ruwijzer, gefabriceerd in de hoogovens van type j.

Voor de oplossing van het beschreven probleem zal men het minimum willen bepalen van

$$(2.16) \qquad z = \sum_k c_k(x_{0k} + x_{1k} + x_{2k} + x_{3k}) + c_0(s_{01} + s_{02} + s_{03})$$

De hoeveelheid ruwijzer, die gemaakt moet worden in de hoogovens van type j, is de som van de hoeveelheid ijzer, afkomstig uit de verschillende ertsen en van de hoeveelheid ruwijzer, afkomstig uit de sinter, dus

$$(2.17) \qquad \sum_k a_{1k}\, x_{jk} + s_{ij} = d_j, \quad j = 1,\ldots,3 .$$

De hoeveelheden van de andere chemische componenten (P,S,Mn,...) moeten tussen hun onder- en bovengrens liggen, zodat

$$(2.18) \qquad l_{ij} \leqq \sum_k a_{ik}\, x_{jk} + s_{ij} \leqq u_{ij}, \quad i=1,\ldots,8; \; j=1,\ldots,3.$$

Andere eisen, die verband houden met de capaciteit van de sinterfabriek en de hoogovens, met de onder- en bovengrenzen gesteld aan het gebruik van de ertsen e.d., kunnen op soortgelijke wijze als lineaire restricties worden geformuleerd.

De opbrengst van de sinterfabriek komt terecht in de verschillende typen hoogovens, zodat

$$(2.19) \qquad \sum_k r_{ik}\, x_{0k} - s_{i1} - s_{i2} - s_{i3} = 0 , \quad i = 0,\ldots,8.$$

De niet-lineaire bijvoorwaarden ontstaan als gevolg van de omstandigheid, dat de sinter voor alle hoogovens dezelfde samenstelling heeft:

$$(2.20) \qquad \frac{s_{i1}}{s_{01}} = \frac{s_{i2}}{s_{02}} = \frac{s_{i3}}{s_{03}} , \quad i = 1,\ldots,8.$$

Tenslotte moet gelden

$$(2.21)\qquad \begin{array}{l} x_{ik} \geqq 0 \\ s_{ik} \geqq 0 \end{array} \qquad i = 0,\ldots,8.$$

Voorbeeld 4. Een constructieprobleem

Een chemische fabriek wil een van haar produkten gaan vervoeren in containers, die gratis ter beschikking van de afnemers worden gesteld. Ze worden in de fabriek zelf uit verschillende materialen vervaardigd. Het materiaal voor de voorkant en de achterkant kost *f*.40,- per m^2, voor de bodem *f*.60,- per m^2. Voor de zijkanten en de bovenkant kan afvalmateriaal gebruikt worden, dat niets kost. Omdat de afmetingen niet te groot mogen worden eist men, dat de lichaamsdiagonaal ten hoogste 2 m lang wordt. Verder brengt het gebruik van laad- en losinstallaties met zich mee, dat de maximale breedte 1 m is. Naast de materiaalkosten treden nog constructiekosten en vervoerskosten op. Deze zijn samengesteld uit een vast bedrag van *f*.12,- per container en kosten, die evenredig zijn met de inhoud.

Men vraagt zich af, welke afmetingen de containers moeten krijgen, opdat de totale kosten minimaal worden.

Stelt men lengte, breedte en hoogte van een container op x_1, x_2 resp. x_3 m, dan bedraagt het aantal benodigde containers per m^3 $\frac{1}{x_1x_2x_3}$. De wiskundige formulering van het probleem wordt dus:

minimaliseer

$$(2.22)\qquad \begin{aligned} z &= \frac{1}{x_1x_2x_3}\,(12 + 2.40.x_2x_3 + 60\,x_1x_2) \\ &= \frac{12}{x_1x_2x_3} + \frac{80}{x_1} + \frac{60}{x_3} \end{aligned}$$

onder de bijvoorwaarden

$$(2.23)\qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqq 2^2$$

$$(2.24)\qquad x_2 \leqq 1$$

$$(2.25)\qquad x_j > 0\ , \qquad j = 1,2,3\ .$$

Voorbeeld 5. Chance-constrained programming

De waarden van de coëfficiënten, die in een lineair programmeringsprobleem moeten worden ingevuld, zijn dikwijls niet exact bekend. Men vult dan meestal geschatte waarden in, met het gevolg, dat de verkregen oplossing in het algemeen aan verschillende bijvoorwaarden juist niet voldoet. In het geval, dat de coëfficiënten kunnen worden opgevat als stochastische variabelen, kan men de risico's, die men loopt, beperken door te eisen, dat met een zekere voorgeschreven kans aan bijvoorwaarden of aan groepen bijvoorwaarden wordt voldaan. Met dergelijke problemen houdt men zich bezig in de chance-constrained programming. Dikwijls kunnen optredende kansvoorwaarden in niet-lineaire deterministische bijvoorwaarden worden omgezet.

Laten wij als voorbeeld het geval beschouwen, dat de coëfficiënten in het linker lid van een bijvoorwaarde onderling onafhankelijke normaal verdeelde stochastische grootheden $\underline{a}_j$ zijn met verwachtingen μ_j en varianties σ_j^2, $j = 1,\ldots,n$. Eist men nu, dat de kans, dat niet aan de bijvoorwaarde

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_j \, x_j \leq b \tag{2.26}$$

wordt voldaan, ten hoogste gelijk is aan een klein positief getal ε, dan kan men schrijven

$$P\left[\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_j \, x_j \geq b\right] \leq \varepsilon \, . \tag{2.27}$$

Hiermee equivalent is

$$P\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_j \, x_j - \sum_{j=1}^{n} \mu_j \, x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \, x_j^2}} \geq \frac{b - \sum_{j=1}^{n} \mu_j \, x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \, x_j^2}}\right] \leq \varepsilon . \tag{2.28}$$

Het linker lid van de ongelijkheid tussen haakjes in (2.28) is een standaardnormaal verdeelde grootheid $\underline{u}$. Hierbij kan men eenvoudig de waarde u_o vinden, waarvoor geldt:

(2.29) $$P\,[\underline{u} \geqq u_o] = \varepsilon$$

zodat

(2.30) $$P\,[\underline{u} \geqq u\,] \leqq \varepsilon$$

voor $u \geqq u_o$. Aan (2.28) en dus aan (2.27) wordt bijgevolg voldaan, wanneer geldt

(2.31) $$\frac{b - \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j\, x_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_j^2\, x_j^2}} \geqq u_o.$$

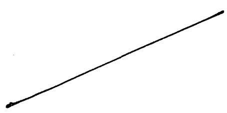
3. ENIGE DEFINITIES EN STELLINGEN

In deze paragraaf zullen enkele definities en stellingen ter sprake komen, die in de niet-lineaire programmering een grote rol spelen.

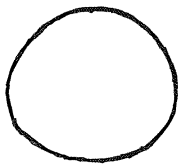
Definitie 3.1: Een verzameling van punten is convex als behalve elk tweetal punten A en B die verzameling ook alle punten $C = tA + (1-t)B = (ta_1 + (1-t)b_1, \dots, ta_n + (1-t)b_n)$, $0 < t < 1$, tot de verzameling behoren.

Een aanschouwelijke voorstelling van het begrip convexe verzameling is gemakkelijk te verkrijgen, als men bedenkt, dat de punten C precies die punten zijn, die op de rechte lijn door A en B tussen A en B in liggen. Ter illustratie zijn in de figuren 3.1 t/m 3.3 enige convexe verzamelingen en in de figuren 3.4 t/m 3.6 enige niet convexe verzamelingen in de tweedimensionale ruimte weergegeven.

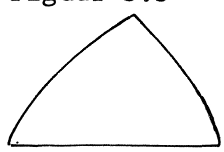
Figuur 3.1



Figuur 3.2

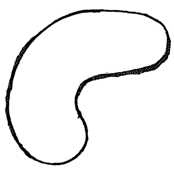


Figuur 3.3

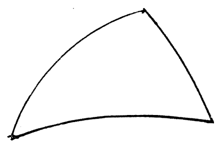


Figuur 3.4

Figuur 3.5



Figuur 3.6

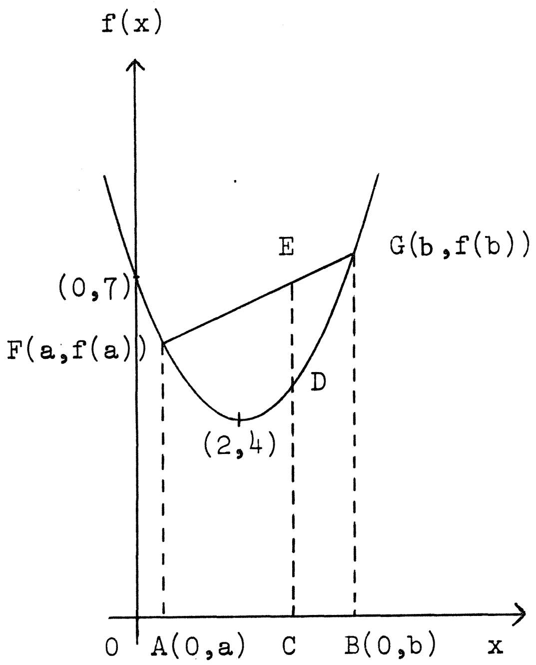


Uit definitie 3.1 volgt direkt:

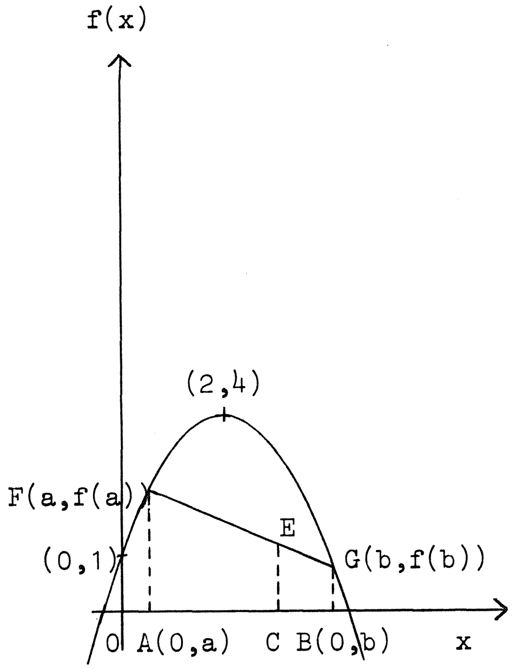
Stelling 3.1: Bezitten m convexe verzamelingen gemeenschappelijke punten, dan is de verzameling van deze punten ook convex.

Na het begrip convexe verzameling zullen we nu de begrippen convexe en concave functie leren kennen. Een functie van één variabele noemt men convex (concaaf), als iedere koorde van de grafiek $y = f(x)$ boven (onder) de grafiek ligt ten opzichte van de x-as (het samenvallen van de koorde met de grafiek is ook toegestaan). Als voorbeeld kunnen de bekende parabolen uit de schoolwiskunde dienen.

Figuur 3.7 $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 7$
f(x) is convex



Figuur 3.8 $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$
f(x) is concaaf



Ieder punt E van de koorde FG (E $\neq$ F of G) heeft tot coördinaten $(ta + (1-t)b,\ tf(a) + (1-t)f(b))$, met $0 < t < 1$. Aangezien in figuur 3.7 voor E geldt EC > DC is dus $tf(a) + (1-t)f(b) > f(ta + (1-t)b)$.

Dit is in overeenstemming met de algebraïsche definitie van convexiteit, te weten: een functie f(x) is convex, wanneer voor alle a en b en alle t, $0 < t < 1$, geldt

$$tf(a) + (1-t)f(b) \geq f(ta + (1-t)b). \tag{3.1}$$

Een functie f(x) is concaaf, wanneer voor alle a en b en alle t, $0 < t < 1$, geldt

$$tf(a) + (1-t)f(b) \leq f(ta + (1-t)b). \tag{3.2}$$

Voor functies van meer variabelen kan men convexiteit en concaviteit definiëren met behulp van formules analoog aan (3.1) en (3.2). De algemene definitie luidt dan:

Definitie 3.2: Een functie f(X), gedefinieerd voor alle reële waarden van $X = (x_1, x_2,\ldots,x_n)$ is

convex als $f(tA + (1-t)B) \leq tf(A) + (1-t)f(B)$, (3.3)

concaaf als $f(tA + (1-t)B) \geq tf(A) + (1-t)f(B)$ (3.4)

geldt voor iedere $A = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $B = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$, $A \neq B$ en iedere t, $0 < t < 1$. De functie f(X) is strikt convex (strikt concaaf) als onder bovenstaande voorwaarden alleen het ongelijkteken geldt.

Uit bovenstaande definitie kunnen de volgende eigenschappen direkt door substitutie worden afgeleid:

a) een lineaire functie is convex en concaaf, maar noch strikt convex, noch strikt concaaf,

b) de som van een aantal convexe (concave) functies is weer convex (concaaf),

c) de som van een aantal convexe (concave) functies is strikt convex (concaaf), wanneer tenminste één van de functies strikt convex (concaaf) is,

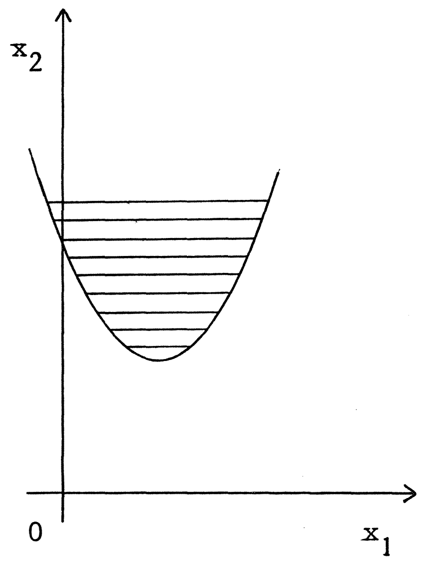
d) als f(X) (strikt) convex is, dan is -f(X) (strikt) concaaf en andersom.

Een verband tussen de begrippen convexe verzameling en convexe functie wordt gelegd door de volgende stelling:

Stelling 3.2: Is de functie g(X) convex, dan vormen de punten X, die voldoen aan $g(X) \leq b$, een convexe verzameling.

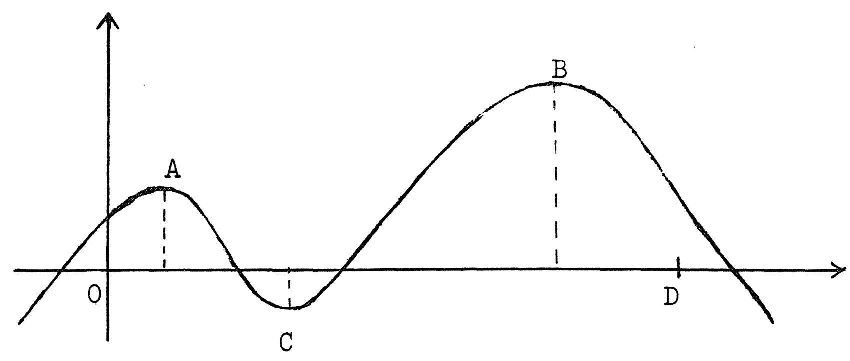
Een voorbeeld van een convexe functie in x_1 en x_2 is $\frac{3}{4}x_1^2 - 3x_1 + 7 - x_2$. De punten (x_1,x_2), die voldoen aan $\frac{3}{4}x_1^2 - 3x_1 + 7 - x_2 \leq 0$, vormen in overeenstemming met stelling 3.2 een convexe verzameling en wel de verzameling, gevormd door alle punten boven de kromme $x_2 = \frac{3}{4}x_1^2 - 3x_1 + 7$ (zie figuur 3.9).

Figuur 3.9



Bij de meeste algoritmen voor het oplossen van niet-lineaire programmeringsproblemen wordt geëist, dat de functies $g_i(x_1,\ldots,x_n)$ convex zijn. De stellingen 3.1 en 3.2 tonen aan, dat dit betekent, dat het toegelaten gebied convex moet zijn, waarbij het toegelaten gebied, in overeenstemming met de definitie bij het lineaire programmeringsprobleem, gedefinieerd is als de verzameling van de punten X, die aan alle voorwaarden $g_i(X) \leqq b_i$ $(i = 1,\ldots,m)$ en $X \geqq 0$ voldoen. Programmeringsproblemen, waarin hetzij de te maximaliseren functie concaaf is, hetzij de te minimaliseren functie convex, terwijl het toegelaten gebied convex is, worden convexe programmeringsproblemen genoemd.

Figuur 3.10 f(X) is soms convex, soms concaaf

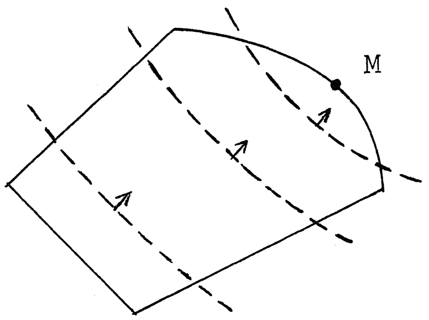


Waarom beperken de algoritmen zich nu meestal tot deze problemen? Om dit na te gaan bekijken wij eerst de functie f(X), geschetst in figuur 3.10 en zien dat een lokaal maximum niet steeds een globaal maximum behoeft te zijn. Zo is A een lokaal maximum, maar geen globaal maximum, want het andere lokale maximum B ligt hoger en is in dit geval wel het globale maximum op het interval OD. Evenals de simplexmethode voor lineaire programmering tasten de meeste algoritmen voor kwadratische en convexe programmering steeds de omgeving af van het punt X, dat men in een bepaalde stap heeft bereikt, terwijl de berekeningen gestopt worden, wanneer blijkt, dat men in deze omgeving geen betere waarden meer kan vinden. Men vindt in principe dus hoogstens een lokaal extreem en dan is het van belang te weten of dit nu globaal is of niet. De volgende stelling leert ons, wanneer een lokaal extreem in ieder geval een globaal extreem is.

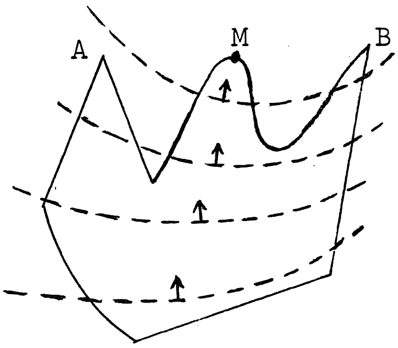
<u>Stelling 3.3</u>: Een lokaal maximum (minimum) van een concave (convexe) functie f(X), gedefinieerd op een convexe verzameling, is een globaal maximum (minimum) van deze functie.

Ter verduidelijking van de betekenis van deze stelling zijn in de figuren 3.11 t/m 3.15 voor het 2-dimensionale geval enige mogelijke situaties geschetst, die bij niet-convexe programmeringsproblemen kunnen optreden. Het toegelaten gebied is hierbij aangegeven met getrokken lijnen. Stippellijnen stellen lijnen met f(X) = constant voor. De pijltjes geven de richting aan, waarin een lijn f(X) = c verschoven wordt bij toename van c. Bij de globale maxima is overal een M geschreven, terwijl de lokale maxima zijn aangeduid met andere hoofdletters. In figuur 3.11 is een geval getekend, waarbij aan de voorwaarden van stelling 3.3 is voldaan. Er is één maximum, dat bereikt wordt in M. In de figuren 3.12, 3.13 en 3.14 komen verschillende maxima voor, terwijl figuur 3.15 toont, dat de voorwaarde uit de stelling niet noodzakelijk is.

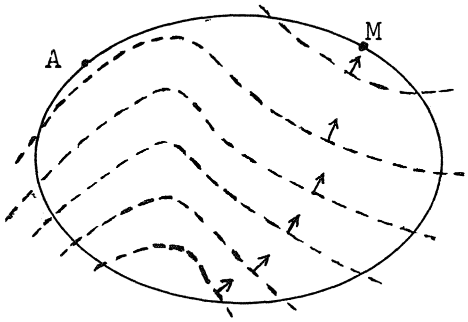
Figuur 3.11 Gebied convex
Kriterium functie
concaaf



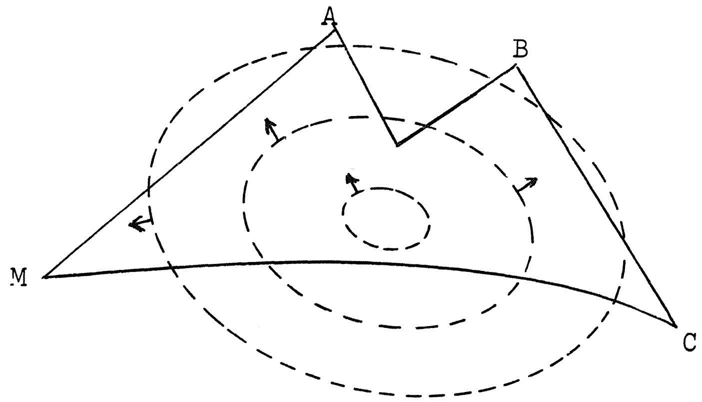
Figuur 3.12 Gebied niet convex
Kriterium functie
concaaf



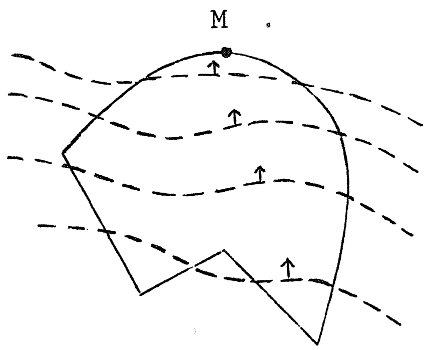
Figuur 3.13 Gebied convex
Kriterium functie
niet concaaf



Figuur 3.14 Gebied niet convex
Kriterium functie
niet concaaf



Figuur 3.15 Gebied niet convex
Kriterium functie niet concaaf



Passen wij de algoritmen uit de convexe programmering toe op problemen, waarin aan de in stelling 3.3 gestelde eisen is voldaan, dan vinden wij zeker globale extremen. Is de functie f(X) niet concaaf, dan leveren sommige algoritmen een lokaal maximum op, terwijl andere algoritmen in het geheel niet tot een zinvol resultaat komen. Het analoge geldt voor de bepaling van minima van niet convexe functies.

Wanneer is een functie nu (strikt) convex of (strikt) concaaf? We zullen eerst kwadratische functies bekijken. Elke kwadratische functie f(X) kan geschreven worden in de gedaante:

$$f(X) = c + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j .$$

Hierbij kan altijd $q_{ij} = q_{ji}$ gemaakt worden. Immers, is a de coëfficiënt van $x_i x_j$, dan kan men $a x_i x_j$ vervangen door $q_{ij} x_i x_j + q_{ji} x_j x_i$ met $q_{ij} = q_{ji} = \frac{1}{2}a$. De coëfficiënten van de <u>kwadratische vorm</u>

$q(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j$ kunnen nu worden weergegeven in een symmetrische

matrix

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} \cdots q_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ q_{n1} \cdots q_{nn} \end{bmatrix}$$

Volgens de opmerkingen a) en b) op bladzijde 12 behoeven we om vast te stellen of f(X) (strikt) convex of (strikt) concaaf is alleen te onderzoeken of q(X) (strikt) convex, respectievelijk (strikt) concaaf is. Dit kan geschieden met behulp van de volgende stelling.

<u>Stelling 3.4</u>: De kwadratische vorm $q(X) = X' \mathcal{Q} X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j$ is dan en slechts dan convex, respectievelijk(strikt) convex, als voor elke $X \neq (0,\ldots,0)$ geldt: $q(X) \geq 0$, respectievelijk $q(x) > 0$.

De formulering van een soortgelijke stelling voor (strikt) concave functies is overbodig, omdat q(X) concaaf is, als -q(X) convex is. Hieronder volgen enige voorbeelden van de toepassing van stelling 3.4.

Voorbeelden:

1. $q_1(X) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2$ is strikt convex, want voor iedere $X \neq (0,0,0)$ wordt $q_1(X) > 0$.
2. $q_2(X) = x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2$ is noch convex, noch concaaf, want $q_2(1,1) > 0$ en $q_2(1,-1) < 0$.
3. $q_3(X) = x_1^2 + 0.x_2^2$ is convex, want voor iedere $X \neq (0,0)$ is $q_3(X) \geqq 0$, maar niet strikt convex, want $q_3(0,a) = 0$ voor iedere $a \neq 0$.

Definitie 3.3: Een vierkante matrix Φ heet positief (semi-)definiet, als voor elke $X \neq 0$ geldt:
$X' \Phi X \geqq 0$, resp. $X' \Phi X > 0$.

Op analoge wijze wordt het begrip negatief (semi-) definiete matrix gedefiniëerd.

Wij kunnen nu een uitbreiding van stelling 3.4 als volgt formuleren:

Stelling 3.5: Een functie f(X) met continue tweede afgeleiden is dan en slechts dan convex, resp. strikt convex, als de matrix $\Phi(X)$ met elementen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}$ voor elke X positief semi-definiet resp.positief definiet is.

4. SEPARABELE PROBLEMEN

Definitie 4.1: Een functie f(X) heet separabel, als hij geschreven kan worden in de vorm:

$$f(X) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n). \tag{4.1}$$

We zullen een probleem, waarin gevraagd wordt een functie $f(x_1,\ldots,x_n)$ te maximaliseren (minimaliseren) onder de voorwaarden

$$\begin{aligned} & g_i(x_1,\ldots,x_n) \leqq b_i \qquad && i = 1,\ldots,m \\ & x_j \geqq 0 && j = 1,\ldots,n \end{aligned} \tag{4.2}$$

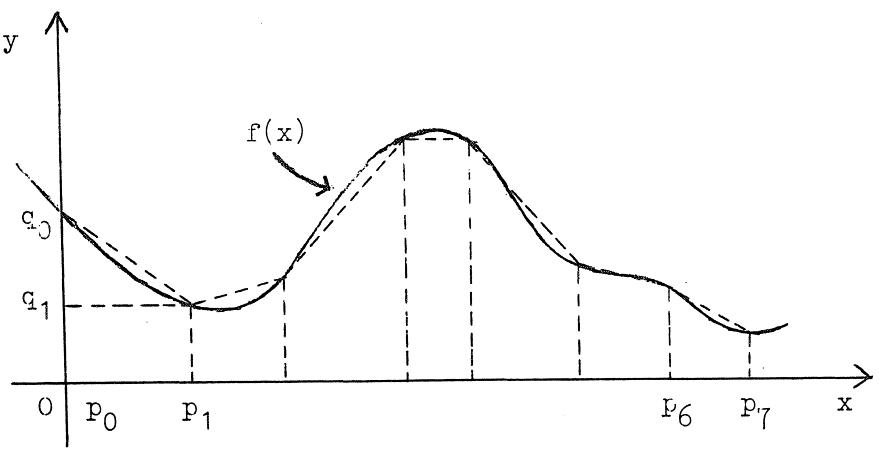
separabel noemen, als alle functies $g_i(x_1,\ldots,x_n)$ en $f(x_1,\ldots,x_n)$ separabel zijn.
Wil men een separabel probleem oplossen, dan is het, vooral bij proble-

men met niet-lineaire bijvoorwaarden, dikwijls aan te raden de niet--lineaire functies door knikfuncties te vervangen. Men zegt in dit geval, dat het oorspronkelijke probleem is gelineariseerd. Men kan trachten de oplossing van dit gelineariseerde probleem te bepalen met behulp van de simplexmethode (of, zo nodig, met behulp van een methode voor het oplossen van gemengde programmeringsproblemen). Deze oplossing kan men gebruiken als benadering van de oplossing van het oorspronkelijke probleem.

Stel, dat de functie $y = f(x)$ op een interval van de x-as door een knikfunctie benaderd moet worden. Dit kan geschieden door het interval te verdelen in k deelintervallen van al dan niet gelijke lengte $[p_0,p_1],\ldots,[p_{k-1},p_k]$. (Hierbij zal een benadering een groter aantal deelintervallen vragen, naarmate hij nauwkeuriger moet zijn). Bij de eindpunten van de intervallen behoren functiewaarden $q_h = f(p_h)$, $h = 0,\ldots,k$. De knikfunctie, die men gebruikt om f(x) te benaderen, wordt grafisch weergegeven door de rechte lijnstukken, die respectievelijk (p_0,q_0) verbinden met (p_1,q_1), (p_1,q_1) met $(p_2,q_2),\ldots,$ (p_{k-1},q_{k-1}) met (p_k,q_k).

Figuur 4.1 geeft een grafische voorstelling weer van een functie f(x) en een mogelijke benadering door een knikfunctie.

Figuur 4.1 <u>Benadering van een kromme door een knikfunctie</u>



De punten (x,y), die op een lijnstuk $(p_h,q_h)-(p_{h+1},q_{h+1})$ liggen, zijn al die punten, die voldoen aan de betrekkingen

$$\begin{aligned} x &= t_h p_h + t_{h+1} p_{h+1} \\ y &= t_h q_h + t_{h+1} q_{h+1} \\ t_h + t_{h+1} &= 1 \\ t_h &\geqq 0 \\ t_{h+1} &\geqq 0 \;. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Een punt $(x,y) \neq (p_h,q_h)$, $h = 0,\ldots,k$ van de kniklijn kan op slechts één lijnstuk tegelijk liggen, zodat de punten (x,y) die op de kniklijn liggen al die punten zijn, die voldoen aan de volgende voorwaarden:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{h=0}^{k} p_h t_h \\ y &= \sum_{h=0}^{k} q_h t_h \\ \sum_{h=0}^{k} t_h &= 1 \\ t_h &\geqq 0, \quad h = 0,\ldots,k. \end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.5) Hoogstens twee t_h, die bovendien opeenvolgende indices moeten hebben, mogen positief zijn.

Om (4.5) wiskundig te omschrijven moeten we geheeltallige variabelen δ_h invoeren, met

$$\delta_h = \begin{cases} 1 \text{ als } x_h \text{ ligt in het interval } [p_{h-1},p_h] \\ 0 \text{ anders} \end{cases} \tag{4.6}$$

(4.5) kan dan vervangen worden door

$$
(4.7)\qquad
\begin{aligned}
&t_0 \leqq \delta_1 && .\\
&t_h \leqq \delta_h + \delta_{h+1} && (h = 1,\ldots,k-1)\\
&t_k \leqq \delta_k &&\\
&\sum_{h=1}^{k} \delta_h = 1 &&\\
&\delta_h \text{ geheel } \quad (h = 1,\ldots,k) \quad .
\end{aligned}
$$

Men kan op de hier beschreven wijze te werk gaan bij elke x_j, die in een of meer niet-lineaire functies voorkomt. Het is het eenvoudigste, hoewel niet altijd even efficiënt, hierbij dezelfde verdeling in deelintervallen te gebruiken voor alle niet-lineaire functies van x_j tegelijk.

Het gelineariseerde probleem bevat veel meer variabelen en bijvoorwaarden dan het oorspronkelijke, maar het is lineair. De bijvoorwaarden (4.7) leveren echter moeilijkheden op. Wel blijken zij te kunnen worden weggelaten, als het oorspronkelijke probleem een convex programmeringsprobleem is. De simplexmethode kan dan ongewijzigd worden toegepast.
In de andere gevallen kan de simplexmethode eveneens worden gebruikt voor het probleem zonder (4.7). Deze methode wordt dan aangevuld met de regel, dat bij elke j slechts dan een t-variabele in de basis mag worden opgenomen, als hierdoor niet een voorwaarde van de gedaante (4.5) wordt geschonden. De gevonden oplossing is dan een lokaal optimum van het gelineariseerde probleem.

Opmerking: Het is dikwijls mogelijk om niet-separabele functies in separabele om te zetten. Stel bijvoorbeeld, dat een functie de term x_1x_2 bevat. Deze kan na toevoeging van de bijvoorwaarden $x_1 = y_1 + y_2$ en $x_2 = y_1 + y_2$ worden vervangen door $y_1^2 - y_2^2$. Een andere mogelijkheid is vervanging door y met $\log y = \log x_1 + \log x_2$.
Met behulp van dergelijke substituties kunnen de voorbeelden 2, 3, 4 en 5 alle als separabele problemen worden geformuleerd.

5. DE STELLING VAN KUHN EN TUCKER

In de niet-lineaire programmering wordt een belangrijke rol gespeeld door de stelling van Kuhn en Tucker. Deze geeft noodzakelijke en voldoende voorwaarden, waaronder een oplossing $\bar{X} = (\bar{x}_1,\ldots\bar{x}_n)$ van probleem (1.1), (1.2), (1.3) optimaal is. Een mogelijke formulering is de volgende.

Stelling 5.1: Veronderstel, dat in probleem (1.1), (1.2), (1.3) de functies $g_i(X)$ convex zijn en $f(X)$ concaaf is, en dat al deze functies differentieerbaar zijn. Neem verder aan, dat er tenminste één punt X_o bestaat met $g_i(X_o) < b_i$ voor alle functies $g_i(X)$, die niet-lineair zijn. Dan is een noodzakelijke en voldoende voorwaarde, opdat $\bar{X}$ optimaal is voor dit probleem, dat er getallen $\bar{u}_i$, $\bar{y}_i$ $i=1,\ldots,m$ en $\bar{v}_j$, $j=1,\ldots,n$ bestaan, die voldoen aan

$$(5.1) \qquad \left.\frac{\partial f(X)}{\partial x_j}\right|_{X=\bar{X}} = \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i \left.\frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}\right|_{X=\bar{X}} - \bar{v}_j \ ,$$

$$(5.2) \qquad g_i(\bar{X}) + \bar{y}_i = b_i \qquad i = 1,\ldots,m,$$

$$(5.3) \qquad \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i \ \bar{y}_i = 0$$

$$(5.4) \qquad \sum_{j=1}^{n} \bar{v}_j \ \bar{x}_j = 0,$$

$$(5.5) \qquad \bar{u}_i \geqq 0, \quad \bar{y}_i \geqq 0, \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$(5.6) \qquad \bar{v}_j \geqq 0, \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Aan deze stelling kan een meetkundige interpretatie gegeven worden, wanneer de begrippen uit de 2-dimensionale ruimte worden gegeneraliseerd voor de n-dimensionale ruimte R^n. Hier gelden de volgende definities:

De lengte van een vector A met componenten a_j, $j=1,\ldots,n$, is

$$(5.7) \qquad |A| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \ .$$

De hoek α tussen een vector A en een vector B wordt vastgelegd door

$$(5.8) \qquad \cos\alpha = \frac{A'B}{|A|\ |B|} \ .$$

In het bijzonder volgt hieruit, dat A en B loodrecht op elkaar staan, als $A'B = 0$ is en dat α scherp, respectievelijk stomp is, als $A'B > 0$, resp. $A'B < 0$ is.

De punten X, die voldoen aan een vergelijking $f(X) = c$ vormen een hyper-oppervlak. Is $f(X)$ lineair, dan spreekt men van een hypervlak.
Voortaan zullen wij er van uitgaan, dat de door ons beschouwde functies overal in het toegelaten gebied continue afgeleiden bezitten naar alle variabelen x_j. Volgens de middelwaardestelling geldt voor zo'n functie $h(X)$ in een omgeving van een vast punt $\bar{X}$

$$h(X) = h(\bar{X}) + \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x}_j) \frac{\partial\, h(\Theta\, \bar{X} + (1 - \Theta)X\,)}{\partial\, x_j} \tag{5.9}$$

met $0 \leqq \Theta \leqq 1$.

Stel nu, dat men vanuit $\bar{X}$ een stap van de lengte t doet langs een vector R met lengte 1.
Wegens

$$h\,(\bar{X} + tR) = h(\bar{X}) + t \sum_{j=1}^{n} r_j \frac{\partial h(\bar{X} + t(1-\Theta)\,R)}{\partial x_j} \tag{5.10}$$

is dan

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{h(\bar{X} + tR) - h(\bar{X})}{t} = \sum_{j=1}^{n} r_j \frac{\partial h(\bar{X})}{\partial x_j}$$

$$= R'\, \nabla\, h(\bar{X}) \tag{5.11}$$

$$= |\nabla\, h(\bar{X})|\, \cos\alpha\ ,$$

waarbij $\nabla h(\bar{X})$ een vector is met componenten $\frac{\partial h(\bar{X})}{\partial x_j}$ en α de hoek tussen deze vector en R voorstelt.
$\nabla\, h(\bar{X})$ wordt de gradiënt van h in $\bar{X}$ genoemd. Zoals uit het linker lid van (5.11) blijkt, stelt $R'\, \nabla\, h(\bar{X})$ de toename van $h(X)$ per lengte-eenheid voor bij een infinitesimale verplaatsing in de richting van R. De toename is het grootst voor $\cos\alpha = 1$, dus als R dezelfde richting heeft als de gradiënt. Voor $\alpha < 90^o$ vindt een toename, voor $\alpha > 90^o$ een afname plaats.

De gradiënt van de functie $A'X$ in een willekeurig punt $\bar{X}$ is A. Deze vector staat loodrecht op het hypervlak $A'X = A'\bar{X}$ wegens $A'(X - \bar{X}) = 0$. Heeft een bijvoorwaarde (1.2) de gedaante $A'X \leqq b$ en geldt $A'X = b$, dan is A, met begin-punt $\bar{X}$, vanaf het toegelaten gebied naar buiten gericht. Voor een toegelaten punt X is de hoek, die $X - \bar{X}$ met A maakt, niet-scherp.

Ook voor niet-lineaire bijvoorwaarden $g_i(X) \leq b_i$ wijst de gradiënt in een punt $\bar{X}$ van $g_i(X) = b_i$ naar buiten. Bij verplaatsing vanuit $\bar{X}$ in richtingen loodrecht op $\nabla g_i(\bar{X})$ komt men nu echter in het algemeen in punten buiten het toegelaten gebied terecht. Deze punten vormen het raakhypervlak $(X-\bar{X})' \nabla g_i(\bar{X})$ aan $g_i(X) = b_i$ in $\bar{X}$. De vector vanuit $\bar{X}$ in de richting van de gradiënt, maar met lengte 1, wordt de (naar buiten wijzende) <u>normaal</u> in $\bar{X}$ op $g_i(X)=b_i$ genoemd.

Beschouw nu de voorwaarden van Kuhn en Tucker.
Stel, dat een optimaal punt $\bar{X}$ geheel binnen het toegelaten gebied ligt.
Dan is $\bar{x}_j > 0$ voor alle j en $\bar{y}_i > 0$ voor alle i, dus volgens (5.3),...,(5.6) is $\bar{v}_j = 0$ voor alle j en $\bar{u}_i = 0$ voor alle i. In (5.1) staat dan

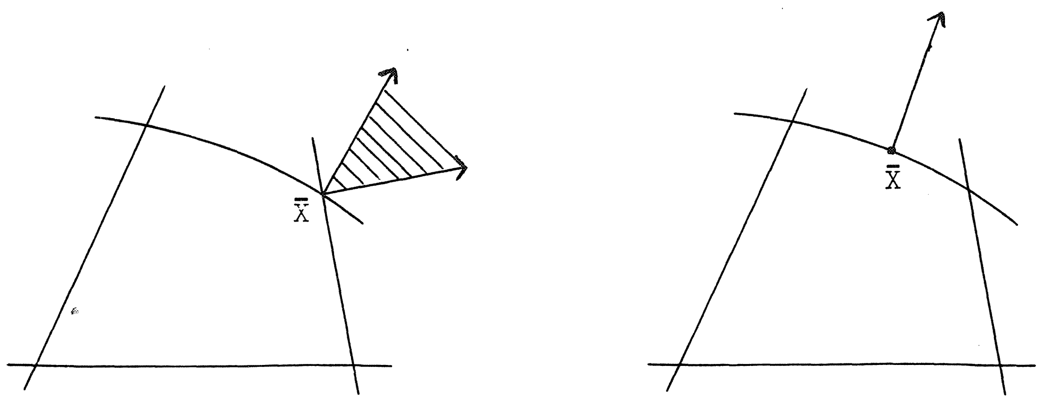
(5.12) $$\frac{\delta f(\bar{X})}{\delta x_j} = 0, \qquad j = 1,\ldots,n$$

de gebruikelijke noodzakelijke voorwaarde voor een maximum van f(X) in $\bar{X}$, wanneer geen bijvoorwaarden zijn gesteld. Bij concave f is deze voorwaarde tevens voldoende.

In alle andere gevallen is volgens de voorwaarden van Kuhn en Tucker de gradiënt van f(X) in $\bar{X}$ een lineaire combinatie met niet-negatieve coëfficiënten van de naar buiten wijzende normalen op die hyperoppervlakken, die $\bar{X}$ bevatten. Voor een optimale $\bar{X}$ moet $\nabla f(\bar{X})$ liggen binnen de kegel, die deze normalen als ribben heeft.

Ter illustratie is in de tekeningen van figuur 5.1 een voorbeeld van een toegelaten gebied in R^2 getekend. Problemen, waarvoor $\nabla f(\bar{X})$ ligt in het in de linker tekening gearceerde gebied, hebben een optimum in $\bar{X}$. Het punt $\bar{X}$ in de rechter tekening kan slechts optimaal zijn, als de richting van $\nabla f(\bar{X})$ samenvalt met de normaal in $\bar{X}$.

Figuur 5.1 <u>Optimale punten</u>



6. KWADRATISCHE PROGRAMMERING

Het kwadratische programmeringsprobleem luidt in zijn meest algemene gedaante:
maximaliseer

$$(6.1) \qquad f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j$$

onder de voorwaarden

$$(6.2) \qquad \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leqq b_i \qquad & i = 1,\dots,m \\ x_j &\geqq 0 \qquad & j = 1,\dots,n \end{aligned}$$

waarbij is aangenomen, dat f(X) concaaf is, dus dat de matrix $\mathcal{Q}$ met elementen q_{ij} positief definiet is.

Er bestaan verschillende methoden voor het oplossen van dit probleem, waarbij men begint met het opstellen van de voorwaarden van Kuhn en Tucker en vervolgens probeert een punt $\bar{X}$ te vinden, dat aan deze voorwaarden voldoet. Wegens zijn eenvoud is van deze methoden die van Wolfe de bekendste.

In algebraïsche vorm zien de voorwaarden van Kuhn en Tucker voor probleem (6.1), (6.2) er als volgt uit:

$X = \bar{X}$ is de oplossing van het kwadratische programmeringsprobleem, als er bij de getallen $\bar{x}_j$ getallen $\bar{v}_j$, $j = 1,\dots,n$, $\bar{y}_i$ en $\bar{u}_i$, $i = 1,\dots,m$ te vinden zijn, die voldoen aan

$$(6.3) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j + \bar{y}_i = b_i, \qquad i = 1,\dots,m$$

$$(6.4) \qquad \sum_{k=1}^{n} q_{kj}\bar{x}_k + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{u}_i - \bar{v}_j = c_j, \qquad j = 1,\dots,n$$

$$(6.5) \qquad \begin{aligned} \bar{x}_j &\geqq 0, \quad \bar{v}_j \geqq 0, \qquad & j = 1,\dots,n \\ \bar{y}_i &\geqq 0, \quad \bar{u}_i \geqq 0, \qquad & i = 1,\dots,m \end{aligned}$$

$$(6.6) \qquad \bar{x}_j\bar{v}_j = 0, \qquad j = 1,\dots,n$$

$$(6.7) \qquad \bar{y}_i\bar{u}_i = 0, \qquad i = 1,\dots,m .$$

Volgens de methode van Wolfe wordt een punt $\bar{X}$, dat aan de voorwaarden (6.3) ... (6.7) voldoet, gevonden met behulp van de simplexmethode. Hiertoe worden kunstmatige variabelen ingevoerd in de vergelijkingen (6.3) en (6.4). Op dezelfde wijze als bij fase I van de simplexmethode wordt eerst de som van de kunstmatige variabelen, behorend bij (6.3) en vervolgens de som van de kunstmatige variabelen, behorend bij (6.4), geminimaliseerd tot nul. Aan (6.6) wordt voldaan door het opnemen van een uitsluitregel, die zegt, dat voor elke j niet tegelijk x_j en v_j basisvariabelen mogen zijn. Eenzelfde uitsluitregel voor y_i en u_i zorgt ervoor, dat (6.7) geldt. Op deze wijze wordt in een eindig aantal stappen het maximum bereikt.

Is φ niet positief definiet, dan leidt de methode als regel tot een volkomen onbruikbare oplossing. Voor φ positief-semidefiniet kan men het probleem voor de methode geschikt maken door bij de diagonaalelementen een klein positief getal ε op te tellen, waardoor deze matrix wel positief definiet wordt.

Een snellere methode, die op een soortgelijke wijze gebruik maakt van (6.3) ... (6.7), is afkomstig van Dantzig. Hiermee nauw verwant is een methode van Beale, die het voordeel heeft voor elke φ tot een lokaal maximum te leiden. Voor φ niet positief semi-definiet is een methode geconstrueerd door Ritter, waarbij de methode van Beale gebruikt wordt voor het oplossen van deelproblemen. Telkens wanneer een niet optimaal punt gevonden is, dat aan de voorwaarden van Kuhn en Tucker voldoet, wordt dit punt door een hypervlak van de rest van het toegelaten gebied afgesneden. Ook deze methode levert het optimum na een eindig, hoewel meestal zeer groot, aantal stappen.

De kriteriumfuncties van de voorbeelden 1 en 2 zijn beide strikt concaaf, zodat zij kunnen worden opgelost met alle in deze paragraaf vermelde methoden.

7. ALGEMENE NIET-LINEAIRE PROGRAMMERING

Voor het oplossen van niet-lineaire programmeringsproblemen is het van doorslaggevend belang te beschikken over een methode, waarmee het optimum van een functie zonder bijvoorwaarden op efficiënte wijze kan worden bepaald.

De meeste van deze methoden brengen een oneindig voortlopende rij van punten met monotoon stijgende functievoorwaarden voort. In elke stap k wordt in een punt X^k een richting S^k bepaald, waarin f(X), althans in de naaste

omgeving van X^k, toeneemt. Vervolgens wordt de waarde van λ benaderd, waarvoor $f(X^k + \lambda S^k)$ maximaal wordt. Is deze waarde λ^k, dan wordt in de (k+1)ste stap uitgegaan van $X^{k+1} = X^k + \lambda^k S^k$.
Voor de bepaling van λ^k kan men de vergelijking $\frac{df(X^k + \lambda S^k)}{d} = 0$ numeriek oplossen of men kan $f(X^k + \lambda S^k)$ voor een aantal waarden van λ berekenen tot een redelijke waarde gevonden is.

Voor S^k kan men elke richting nemen, die een scherpe hoek maakt met de gradiënt in X_k. Een van de mogelijkheden is, dat men in de eerste stap x_1 variëert, in de tweede stap x_2 enz. Men krijgt dan een groot aantal stappen, waarvoor per stap weinig berekeningen nodig zijn. Neemt men de gradiënt zelf, dan wordt het aantal stappen kleiner, maar het aantal berekeningen per stap groter. Nog kleiner wordt dit aantal, als men gebruik maakt van de matrix van tweede afgeleiden in X_k (geconjugeerde richtingen). Is $f(X)$ kwadratisch, dan kan het totale aantal stappen zelfs worden teruggebracht tot n. Voor niet-kwadratische functies blijkt echter de berekening van de $\frac{1}{2}n(n+1)$tweede afgeleiden zoveel extra werk met zich mee te brengen, dat dit niet lonend is. Dit bezwaar wordt opgeheven in een methode van Fletcher en Powell, waarin de matrix van tweede afgeleiden aanvankelijk wordt vervangen door de eenheidsmatrix, en deze vervolgens in elke stap op zodanige wijze wordt gecorrigeerd, dat de matrix van tweede afgeleiden steeds beter wordt benaderd. In het kwadratische geval is deze na n stappen zelfs exact verkregen. De methoden, die volgens dit principe werken, lijken de beste resultaten op te leveren.

Bij het oplossen van problemen met bijvoorwaarden kunnen soortgelijke methoden worden toegepast. Men moet er dan echter voor zorgen, dat de X^k in het toegelaten gebied liggen, dus dat $X^k + \lambda S^k$ voor λ voldoend klein toegelaten is. Zoutendijk bereikt dit in zijn methoden van toegelaten richtingen door in elke stap een lineair programmeringsprobleem op te lossen, waarin $f(X^k)$ de rol van C - vector vervult en de niet-lineaire bijvoorwaarden door lineaire worden benaderd.

Gunstige resultaten zijn bereikt met de Generalized Reduced Gradient methode van Abadie en Carpentier. Bij deze methode worden de ongelijkheden (1.2) door invoering van niet-negatieve verschilvariabelen omgezet in gelijkheden, terwijl verder wordt aangenomen, dat alle variabelen vaste onder- en bovengrenzen bezitten. In elke stap zijn de variabelen verdeeld in n onafhankelijke variabelen en m afhankelijke variabelen, welke laatste door middel van de restricties in de eerste kunnen worden uitgedrukt. In stap k wordt in punt X^k begonnen met de berekening van de gradiënt van de functie, die door eliminatie van de afhankelijke variabelen uit f(X) kan worden verkregen. Hieruit wordt een richting bepaald, waarin deze functie toeneemt. Een verplaatsing in die richting levert een nieuw toegelaten punt X^{k+1} met een hogere waarde van f(X), van waaruit de stap wordt herhaald. De verzameling van afhankelijke variabelen behoeft niet steeds dezelfde te zijn.

Fiacco en Mc.Cormick brengen probleem (1.1), (1.2), (1.3) in hun Sequential Unconstrained Minimization Technique terug tot een rij maximaliserings-problemen zonder bijvoorwaarden. De criteriumfuncties bij deze problemen hebben de gedaante

$$(7.1) \qquad f(X) - r \sum_{i=1}^{m} \psi(b_i - g_i(X)) - r \sum_{j=1}^{n} \psi(x_j)$$

waarbij r een positief getal voorstelt en $\psi(t)$ een zogenaamde boetefunctie is, die willekeurig groot wordt voor $t \downarrow 0$, maar die overigens kleine waarden bezit. Een functie, die hieraan voldoet, is $\psi(t) = \frac{1}{t}$. Het probleem wordt opgelost met steeds kleinere waarden van r, waardoor de oplossingen steeds dichter tot de rand van het gebied kunnen naderen. Extrapolatie levert een benadering van de oplossing van (1.1), (1.2), (1.3). Lootsma heeft de eigenschappen van andere mogelijke boetefuncties onderzocht.

De tot dusver beschreven methoden hebben alle tot resultaat, dat voor een willekeurig niet-lineair programmeringsprobleem een lokaal maximum willekeurig dicht benaderd kan worden. Meestal verlopen de berekeningen gemakkelijker voor convexe programmeringsproblemen, terwijl dan een globaal maximum wordt gevonden.

Tenslotte vermelden wij het geometrische programmeringsprobleem.
Dit is een probleem van de gedaante
minimaliseer

$$(7.2) \qquad f(X)$$

onder de bijvoorwaarden

$$(7.3) \qquad \begin{array}{ll} g_i(X) & \leq 1 \\ X & > 0 \end{array}$$

en waarbij de functies f en g_i sommen zijn van termen van de gedaante

$c_k\, x_1^{a_{k1}}\, x_2^{a_{k2}} \ldots x_n^{a_{kn}}$ met $c_k > 0$. Zij zijn in het algemeen niet concaaf of convex.

Voorbeeld 5 is geformuleerd als geometrisch programmeringsprobleem. Geometrische programmeringsproblemen ontstaan meestal bij de formulering van constructieproblemen, waarin technologische wetten een rol spelen. Duffin, Petersen en Zener toonden aan, dat geometrische programmeringsproblemen d.m.v. corresponderende duale problemen kunnen worden opgelost. Soms leidt dit tot het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen, meestal echter is het duale probleem een convex programmeringsprobleem met lineaire bijvoorwaarden.

Uit het bovenstaande zijn de volgende conclusies te trekken. Behoort een probleem tot een deelklasse van niet-lineaire programmeringsproblemen, waarvoor speciale oplossingsmethoden bestaan, dan moet men hiervan zeker gebruik maken. Welke methode in het algemene geval te prefereren valt, hangt af van de hoeveelheid werk, die benodigd is om functiewaarden en gradiënten te berekenen en van de mate, waarin de niet-lineaire functies van lineaire functies afwijken.

LITERATUUR

W.I.ZANGWILL, Nonlinear Programming: A Unified Approach, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969 (algemeen)

D.J.WILDE, C.S.BEIGHTLER, Foundations of Optimization, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967 (algemeen)

H.P.KUENZI, W.KRELLE, Nichtlineare Optimierung, Springer, Berlin, 1962 (vooral kwadratische programmering)

J.ABADIE, Integer and Nonlinear Programming, North-Holland Publishing Company, Amsterdam,1970 (proceedings).