stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BC 9/73 DECEMBER

H.C. TIJMS

INLEIDING TOT DE WACHTTIJDTHEORIE

Syllabus bij de Leergang Mathematische Besliskunde

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

AMS(MOS) subject classification scheme (1970): 60K25

INHOUD

1. INLEIDING

Aan een ieder van ons zijn talrijke situaties bekend waarin klanten bij een installatie aankomen om daar bediend te worden. Onder een "klant" kunnen wij bijvoorbeeld een persoon, een machine, een schip of een vliegtuig verstaan. Evenzo dient het begrip "bedienen" ruim opgevat te worden. In de wachttijdproblemen zijn het aankomst- en bedieningsmechanisme niet beide deterministisch van aard, doch is tenminste één van de mechanismen stochastisch. Tengevolge van deze stochastiek *treden afwisselend op, perioden waarin klanten op bediening wachten en perioden waarin de "bediende" op klanten wacht*. Deze twee verschillende vormen van wachten vinden onvermijdelijk plaats en kunnen nimmer *beide tegelijk* onderdrukt worden. De wachttijdtheorie kan gebruikt worden om inzicht te krijgen in de samenhang van deze twee vormen van wachten en om de gevolgen van bepaalde veranderingen in het aankomst- en bedieningsmechanisme aan te geven. De wachttijdtheorie zal ons straks leren dat in wachttijdproblemen de gevolgen van bepaalde veranderingen heel anders kunnen zijn dan men intuïtief zou verwachten. Bijvoorbeeld in een druk bezet systeem kan een geringe toename in het aantal binnenkomende klanten een enorme stijging van het gemiddeld aantal wachtende klanten tengevolge hebben. Vandaar dat men in wachttijdproblemen voorzichtig moet zijn met vertrouwen op intuïtie.

Zoals gebruikelijk stellen wij eerst een wiskundig model op alvorens een wachttijdprobleem analytisch te bestuderen. Wij zullen daarin het aankomstpatroon van de klanten, de volgorde waarin de klanten bediend worden en de wijze van bedienen moeten specificeren. Op elk van deze facetten gaan wij nu iets nader in.

(a) *Het aankomstproces*. Er zijn zowel situaties waarin de klanten individueel als situaties waarin de klanten in groepjes binnenkomen. Wij zullen ons beperken tot de eerstgenoemde situaties. Uiteraard moeten wij een veronderstelling maken over de tijdstippen waarop de klanten binnenkomen. Een veel gemaakte aanname is dat de lengtes van de tijdsintervallen tussen twee opeenvolgende aankomsten onafhankelijk verdeelde stochastische variabelen zijn die allen eenzelfde exponentiële verdeling hebben (het Poisson proces; zie paragraaf 2). Deze aanname blijkt in vele praktische situaties vervuld te zijn; met name in die situaties waarin de potentiële klanten een zeer grote populatie vormen en de individuele klanten zich onafhankelijk van elkaar gedragen. Lijnrecht tegenover dit aankomstproces waarin de klanten op aselekte tijdstippen aankomen, staat het aankomstproces waarin de klanten op van te voren vaststaande tijdstippen binnenkomen. Dit laatste geval zullen wij echter niet behandelen.

Wij moeten ook aangeven of een klant die bij aankomst de bedieningsinstallatie bezet aantreft, blijft wachten of niet; er kan bijv. slechts voor een beperkt aantal klanten plaats zijn in een wachtkamer.

(b) *De rijdiscipline.* In veel wachttijdproblemen moeten wij weten in welke volgorde de klanten bediend worden. De meest gebruikelijke rijdiscipline is die waarbij de klanten in volgorde van binnenkomst worden bediend. Deze rijdiscipline wordt aangeduid als de *"FIFO-regel" ("first-in, first-out")*. Een andere rijdiscipline is de *"LIFO-regel" ("last-in, first-out")* laatst binnengekomen klant als eerstvolgende klant bediend wordt. Denk bijv. aan een stapel blikjes in een winkel; het als laatst op de stapel geplaatste blikje wordt het eerst gepakt. Een andere rijdiscipline, die bijvoorbeeld in veel telefoonsystemen wordt gevolgd, is de *"SIRO-regel" ("service in random order")*, waarbij de als volgende te bedienen klant willekeurig wordt gekozen uit de op bediening wachtende klanten.

In situaties waarin verschillende klantentypes zijn te onderscheiden worden vaak *prioriteitsregels* gevolgd; sommige klantentypen krijgen voorrang boven andere. In dergelijke situaties moeten wij tevens onderscheid maken tussen het geval waarin de bediening van een klant nimmer onderbroken wordt als een klant van hogere prioriteit binnenkomt en het geval waarin dit wel geschiedt. Wij zullen alleen het eerstgenoemde geval beschouwen.

(c) *Het bedieningsmechanisme.* In de eerste plaats moeten wij specificeren of er één of meer bedienden zijn. Als er meerdere bedienden zijn, kunnen wij ruwweg onderscheid maken tussen het geval waarin de bedienden parallel werken en elke klant slechts één bediening ondergaat en het geval waarin de bedienden in serie werken en elke klant achtereenvolgens langs deze bedienden moet. Wij moeten ook weten of een bediende slechts één klant of meerdere klanten tegelijk bedienen kan. Het geval waarin de bedienden in serie werken en het geval waarin een bediende meer klanten tegelijk kan helpen zullen wij niet behandelen. Tenslotte moeten wij ook de kansverdeling van de hoeveelheid tijd die een bediende nodig heeft voor de bediening van een klant specificeren.

Is het (wiskundige) wachttijdmodel eenmaal gedefinieerd, dan kunnen wij overgaan tot de wiskundige behandeling daarvan. Vanaf nu zullen wij steeds veronderstellen dat aankomst- en bedieningsmechanisme homogeen in de tijd zijn, d.w.z. de kansverdelingen van de aankomstintervallen en de bedieningstijden hangen niet van het moment van beschouwen af.

Wij voeren de volgende terminologie in. Onder het *aantal klanten in de rij* verstaan wij het aantal klanten dat op bediening wacht en onder het *aantal klanten in het systeem* verstaan wij het aantal klanten in de rij plus het aantal klanten dat bediend wordt. Evenzo, de hoeveelheid tijd die een klant doorbrengt in de rij is gedefinieerd als de hoeveelheid tijd die verstrijkt tussen het moment waarop hij aankomt en het moment waarop zijn bediening begint, terwijl de hoeveelheid tijd die een klant doorbrengt in het systeem wordt gedefinieerd als de hoeveelheid tijd die hij doorbrengt in de rij plus zijn bedieningstijd.

Voor een wachttijd model kunnen de kansverdelingen van de volgende stochastische grootheden van belang zijn:

1. het aantal klanten dat in het systeem resp. in de rij is,
2. de hoeveelheid tijd die een klant doorbrengt in het systeem resp. in de rij.

Bij een aantal wachttijdmodellen zullen wij de kansverdelingen van deze stochastische grootheden bepalen onder de aanname dat het systeem in een stationaire toestand is. De uitdrukking *"het systeem is in een stationaire toestand"* wordt vaak gebruikt, en daarmee wordt het volgende bedoeld. Laat de toestand van het systeem gedefinieerd zijn als het aantal klanten aanwezig in het systeem. Stel dat het systeem *nu*, op tijdstip 0, in een gegeven begintoestand is. De kansverdeling van de toestand waarin het systeem over t tijdseenheden zal zijn hangt van tijdstip t en de begintoestand af. In vrijwel alle wachttijdmodellen van praktische betekenis, zal deze afhankelijkheid minder worden naarmate t toeneemt om uiteindelijk te verdwijnen.

Is de afhankelijkheid niet meer aanwezig, dan zeggen wij dat het systeem in een stationaire toestand verkeert. Deze uitdrukking is enigszins misleidend, omdat het begrip stationair betrekking heeft op de *kansverdeling* van de toestand van het systeem en niet op de toestand zelf. Hoewel strikt genomen het systeem pas na een oneindig lange tijd in een stationaire toestand kan geraken, geldt in vele gevallen dat na een geschikte aanlooptijd het systeem bij benadering in een stationaire toestand verkeert.

Voor een groot aantal modellen waarin bovengenoemde kansverdelingen niet expliciet bepaald kunnen worden, is het wel mogelijk om één of meer van de volgende operationele grootheden te bepalen:

1. het gemiddeld aantal klanten dat aanwezig is in het systeem resp. in de rij
2. de gemiddelde hoeveelheid tijd die per klant wordt doorgebracht in het systeem resp. in de rij
3. de fraktie van de tijd dat de installatie leeg staat.

Vaak is het kennen van deze grootheden, die gedefinieerd worden met betrekking tot een oneindig lange tijdsduur, voldoende om het beschouwde beslissingsprobleem op te lossen.

In de wachttijdtheorie - die zijn oorsprong heeft in het pionierswerk dat A.K. ERLANG verricht heeft in het begin van deze eeuw op het gebied van telefoonproblemen - zijn een enorm aantal wachttijdmodellen wiskundig geanalyseerd. Bruikbare oplossingen zijn evenwel voornamelijk voor betrekkelijk eenvoudige modellen gevonden. Voor een wachttijdprobleem is men meestal gedwongen een specifieke veronderstelling te maken omtrent de verdeling van het aankomstinterval of de verdeling van de bedieningstijd (vaak neemt men een exponentiële verdeling aan) wil men tot een analytische oplossing geraken. Niettemin moet het belang van een analytische oplossing voor zo'n *vereenvoudigd* model niet onderschat worden. Deze oplossing kan soms dienen als basis voor een benaderingsoplossing voor een meer complex model dat nauwer bij de realiteit aansluit. Eventueel kan zo'n benaderingsoplossing gecontroleerd en mogelijk zelfs verbeterd worden met behulp van simulatie. Simulatie is dan ook een veel gebruikte techniek om numerieke resultaten voor een wachttijdprobleem te verkrijgen. Hoewel men zich met deze techniek strikter aan de realiteit kan houden, moet de waarde van deze aanpak niet overschat worden. Om met simulatie tot een redelijk nauwkeurig antwoord op een wachttijdprobleem te geraken kan veel rekenwerk nodig zijn. Er zijn uiteraard wachttijdsituaties waarin simulatie het enige hulpmiddel is, doch waar mogelijk lijkt een samenspel van wiskundige analyse en simulatie zinvoller dan het uitsluitend toepassen van simulatie.

Tenslotte een opmerking over een veel gebruikte notatie om bepaalde wachttijdproblemen te classificeren. Deze notatie bestaat uit drie symbolen die van elkaar gescheiden worden door een schuine streep: .../.../... . Het eerste resp. tweede symbool heeft betrekking op het type verdelingsfunktie van de tussenaankomsttijden resp. bedieningstijden; G betekent een willekeurige verdeling, M betekent een exponentiële verdeling en D betekent dat de tussenaankomsttijd resp. bedieningstijd constant is. Het derde symbool tenslotte geeft het aantal bedienden aan. Bijv., M/G/1 betekent Poisson-aankomst, willekeurig verdeelde bedieningstijd en één bediende.

2. HET POISSON PROCES

In elk wachttijdmodel moeten wij het aankomstproces specificeren. Een veel gemaakte aanname is dat de aankomst van de klanten bij het loket beschreven wordt door een Poisson proces. Voor dit proces, dat op verschillende wijzen kan worden gedefinieerd, zullen wij een min of meer verbale definitie geven. Wij zeggen dat klanten volgens een *Poisson proces* aankomen als aan de volgende veronderstellingen voldaan is.

a) In elk eindig tijdsinterval komt met kans 1 slechts een eindig aantal klanten aan.
b) Voor elke $T > 0$ en $t \geq 0$ geldt dat de kansverdeling van het aantal klanten dat aankomt in het tijdsinterval $(t,t+T]$ alleen afhangt van de lengte T van het tijdsinterval en dus onafhankelijk van t is, m.a.w. het aankomstproces is tijdsonafhankelijk.
c) De kansverdeling van het aantal klanten dat aankomt in het tijdsinterval $(t,t+T]$ hangt niet af van het aantal klanten dat aankomt in het tijdsinterval $(0,t]$, m.a.w. het aankomstproces is geheugenloos.

d) De kans dat in een interval van de lengte Δt twee of meer klanten aankomen is verwaarloosbaar klein t.o.v. Δt als Δt klein is.*)

Wij zullen nu een aantal eigenschappen van het Poisson proces geven. Voor bewijzen, zie bijv. ROSS (1969,1972).

Wij definiëren λ als het verwachte aantal klanten dat per tijdseenheid aankomt. **) De grootheid λ wordt de *parameter* van het Poisson proces genoemd.

Eigenschap 1: Voor elke $T > 0$ geldt,

$$P\{\text{in een tijdsinterval van de lengte } T \text{ komen precies } k \text{ klanten aan}\} =$$

$$= e^{-\lambda T}(\lambda T)^k/k!, \qquad (k=0,1,\ldots). \tag{2.1}$$

Wij zien dus dat het aantal klanten dat aankomt in een tijdsinterval van de lengte T een Poisson verdeelde stochastische variabele is met verwachting λT.

Aanname d) stelt dat de kans op twee of meer aankomsten in een tijd Δt verwaarloosbaar klein is t.o.v. Δt als Δt klein is. Uit (2.1) en de benadering $e^{-x} \approx 1-x$ voor x klein, volgt

Eigenschap 2: Voor Δt klein is de kans dat in een tijdsinterval van de lengte Δt precies één klant aankomt gelijk aan $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ en is de kans dat in een tijdsinterval van de lengte Δt geen klant aankomt gelijk aan $1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$, ongeacht wat voor dit tijdsinterval gebeurd is.

Beschouw vervolgens de tijdstippen waarop de klanten aankomen. Uit aanname d) volgt dat de klanten één voor één aankomen. Definieer $t_0 = 0$ en en definieer $\underline{t}_k$ als het tijdstip waarop de k^{de} klant aankomt.

---

*) Precies gesteld, deze kans is gelijk aan $o(\Delta t)$, waarbij het wiskundige symbool $o(x)$ een verzamelnaam is voor elke funktie $f(x)$ die de eigenschap heeft dat $f(x)/x$ naar nul gaat als x tot nul nadert.

**) De grootheid λ kan ook als volgt geïnterpreteerd worden: op de lange duur is het gemiddeld aantal klanten dat per tijds eenheid aankomt met kans 1 gelijk aan λ.

Eigenschap 3: De stochastische variabelen $\underline{t}_k - \underline{t}_{k-1}$, $k = 1,2,\ldots$ zijn onderling onafhankelijk en hebben eenzelfde exponentiële verdeling met verwachting $1/\lambda$. Dus voor elke $k \geq 1$ geldt

$$P\{\underline{t}_k - \underline{t}_{k-1} \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad (t\geq 0).$$

Eigenschap 4: Laat de stochastische variabele $\underline{w}(t)$ de wachttijd zijn vanaf tijdstip t tot het eerstvolgend tijdstip waarop een klant aankomt. Dan geldt dat de kansverdeling van $\underline{w}(t)$ onafhankelijk van t is en gegeven wordt door

$$P\{\underline{w}(t) \leq u\} = 1 - e^{-\lambda u}, \qquad (u\geq 0). \qquad (2.2)$$

Dus voor elk tijdstip t geldt dat de wachttijd tot de aankomst van de eerstvolgende klant dezelfde exponentiële verdeling heeft als de lengte van het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende klanten, ongeacht wat tot en met tijdstip t gebeurd is. Het is deze *"geheugenloosheidseigenschap"* die maakt dat het zo prettig werken is met het Poisson proces; men behoeft niet te weten wanneer voor het laatst een klant aankwam. Deze kenmerkende eigenschap van het Poisson proces is nauw verbonden met de volgende eigenschap van de exponentiële verdeling. Als $\underline{x}$ exponentieel verdeeld is, dan geldt

$$P\{\underline{x} > x_0 + x \mid \underline{x} > x_0\} = P\{\underline{x} > x\} \text{ voor alle } x_0 > 0 \text{ en } x > 0. \qquad (2.3)$$

Dus als $\underline{x}$ bijv. de bedieningstijd van een klant voorstelt, dan volgt uit (2.3) dat, ongeacht hoe lang de bediening reeds gaande is, de resterende bedieningstijd van de klant dezelfde exponentiële verdeling heeft als de oorspronkelijke bedieningstijd. Het bewijs van (2.3) is eenvoudig. Stel dat $\underline{x}$ is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\mu$, dan volgt uit de definitie van voorwaardelijke kans:

$$P\{\underline{x} > x_0 + x \mid \underline{x} > x_0\} = P\{\underline{x} > x_0 + x \text{ en } \underline{x} > x_0\}/P\{\underline{x} > x_0\} =$$
$$= P\{\underline{x} > x_0 + x\}/P\{\underline{x} > x_0\} = e^{-\mu(x+x_0)}/e^{-\mu x_0} = e^{-\mu x} = P\{\underline{x} > x\}.$$

De exponentiële verdeling is de enige continue verdeling die eigenschap (2.3) bezit. Uit (2.3) en de benadering $e^{-x} \approx 1 - x$ voor x klein, volgt voor x klein

$$P\{\underline{x} > x_0 + \Delta x \mid \underline{x} > x_0\} = e^{-\mu\Delta x} = 1 - \mu\Delta x + o(\Delta x). \qquad (2.4)$$

Dit betekent dat als op een gegeven moment de bediening nog gaande is, deze bediening met kans $\mu\Delta x + o(\Delta x)$ binnen een tijd Δx beëindigd wordt, ongeacht hoe lang de bediening reeds gaande is.

Een toepassing van (2.4) wordt gegeven in het onderstaande voorbeeld dat gebruikt zal worden in paragraaf 6.

Voorbeeld 2.1. In een postkantoor zijn op een gegeven moment M bedieningen gaande. Deze bedieningen vinden onafhankelijk van elkaar plaats en elk van deze bedieningen heeft een exponentieel verdeelde bedieningstijd met verwachting $1/\mu$. Wij zijn geïnteresseerd in de kans dat binnen een tijd Δt één van deze bedieningen beëindigd wordt.

Oplossing. Voor elk van de M bedieningen geldt dat de bediening met kans $p = \mu\Delta t + o(\Delta t)$ binnen een tijd Δt beëindigd wordt. Derhalve is het aantal bedieningen dat binnen een tijd Δt beëindigd wordt binomiaal verdeeld met parameters M en p, omdat de bedieningen onafhankelijk van elkaar verlopen. Hieruit volgt dat met kans $M\mu\Delta t + o(\Delta t)$ binnen een tijd Δt precies één bediening beëindigd wordt, terwijl de kans dat binnen een tijd Δt twee of meer bedieningen beëindigd worden gelijk is aan $o(\Delta t)$ en derhalve verwaarloosbaar klein is t.o.v. Δt als Δt klein is.

Eigenschap 5: Stel dat gedurende het tijdsinterval (0,T) precies N klanten zijn aangekomen, waarbij N een vast positief geheel getal is. Gegeven deze informatie, geldt voor elk van deze N klanten dat zijn aankomsttijdstip een stochastische variabele is met verwachting T/2. Dit geldt ongeacht de waarde van N.

Eigenschap 6: Stel bij een loket komen klanten van type 1 aan volgens een Poisson proces met parameter λ_1 en onafhankelijk hiervan komen klanten van type 2 aan volgens een Poisson proces met parameter λ_2. Dan geldt dat de aankomst van de klanten tesamen beschreven wordt door een Poisson proces met parameter $\lambda_1 + \lambda_2$. Verder geldt dat een willekeurige klant met kans $\lambda_i/(\lambda_1+\lambda_2)$ een klant van type i is (i=1,2).

Omgekeerd geldt ook het volgende. Als bij een loket de klanten aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ en elke klant is ŏf een klant van type 1 ŏf een klant van type 2 waarbij p_i de kans is dat een klant van type i is, dan komen de klanten van type i aan volgens een Poisson proces met parameter λp_i (i=1,2).

3. HET GEBOORTE-STERFTEPROCES

Dit proces speelt een belangrijke rol in de wachttijdtheorie, aangezien een groot aantal wachttijdmodellen waarin de klanten volgens een Poisson proces aankomen en de bedieningstijden exponentieel verdeeld zijn, als een speciaal geval van het geboorte-sterftemodel kunnen worden opgevat.

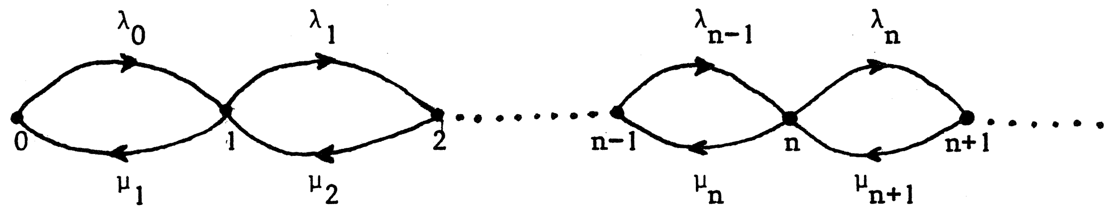
Wij beschouwen een gegeven wachttijdsysteem. Definieer de toestand van het systeem als het aantal klanten in het systeem. Het proces dat het verloop van het aantal klanten in het systeem beschrijft, wordt een geboorte-sterfteproces genoemd als aan de volgende aanname voldaan is.

Aanname: Het systeem kan vanuit toestand n alleen overgaan in toestand n+1 of toestand n-1; vanuit 0 is alleen een overgang naar 1 mogelijk. Er bestaan niet-negatieve getallen λ_n en μ_n met de volgende eigenschap.*) Als het systeem op tijdstip t in toestand n is, dan is, ongeacht het verloop van de toestand in $[0,t]$, de kans dat in het tijdsinterval $(t,t+\Delta t]$ een overgang plaatsvindt naar toestand n+1 gelijk aan $\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$, terwijl de kans dat in $(t,t+\Delta t]$ een overgang plaatsvindt naar toestand n-1 gelijk is aan $\mu_n \Delta t + o(\Delta t)$. De kans dat in $(t,t+\Delta t]$ meer dan één toestandsverandering plaatsvindt is gelijk aan $o(\Delta t)$ en is derhalve verwaarloosbaar klein t.o.v. Δt als Δt klein is.

---

*) Wij nemen aan dat een constante c bestaat met $\lambda_n/n \leq c$ voor alle $n \geq 1$.

In fig. 3.1 geven wij de mogelijke overgangen schematisch weer.



Figuur 3.1. Mogelijke toestandsovergangen.

Merk op dat met kans $1 - (\lambda_n+\mu_n)\Delta t + o(\Delta t)$ geen toestandsverandering in $(t,t+\Delta t]$ optreedt als op tijdstip t de toestand n is.

Definieer $p_n(t)$ als de kans dat op het systeem op tijdstip t in toestand n zal zijn. Voor elke $n = 0,1,\ldots$ geldt (vgl. FELLER (1957)),

$$p_n = \lim_{t\to\infty} p_n(t)$$

bestaat en is onafhankelijk van de begintoestand. De kansen p_n worden de *stationaire* kansen genoemd. De kansen p_n kunnen expliciet bepaald worden. De techniek die hiervoor gebruikt wordt is op zichzelf al van groot belang, is afkomstig van A.K. ERLANG en wordt veelvuldig toegepast in de wachttijdtheorie.

Stelling 3.1. De stationaire kansen worden gegeven door

$$p_n = \frac{\lambda_0\,\lambda_1\,\cdots\,\lambda_{n-1}}{\mu_1\,\mu_2\,\cdots\,\mu_n}\,p_0 \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{3.1}$$

waarbij

$$p_0 = [1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\,\lambda_1\,\cdots\,\lambda_{n-1}}{\mu_1\,\mu_2\,\cdots\,\mu_n}]^{-1}, \tag{3.2}$$

aangenomen dat de uitdrukking tussen vierkante haakjes eindig is.

Bewijs. Wij zullen het bewijs in het kort schetsen. Door te beschouwen wat in $(t,t+\Delta t]$ gebeuren kan, leidt men eenvoudig af dat voor elke $t > 0$,

$$p_n(t+\Delta t) = p_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t + p_n(t)\{1 - (\lambda_n+\mu_n)\Delta t\} + $$
$$+ p_{n+1}(t)\mu_{n+1}\Delta t + o(\Delta t), \quad (n\geq 0)$$

waarbij $\lambda_{-1} = \mu_0 = 0$. Trek van beide leden van deze gelijkheid $p_n(t)$ af, deel door Δt en laat vervolgens Δt naar 0 gaan. Dit leidt tot

$$p_n'(t) = \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) - (\lambda_n+\mu_n)p_n(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t), \quad (n\geq 0).$$

Gebruikmakend van $p_n(t) \to p_n$ en $p_n'(t) \to 0$ als $t \to \infty$, vinden wij de "evenwichtsvergelijkingen"

$$(\lambda_n+\mu_n)p_n = \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1}, \quad (n\geq 0). \quad (3.3)$$

Wij vinden $\lambda_k p_k = \mu_{k+1}p_{k+1}$ voor $k \geq 0$ door voor $n = 0,1,\ldots$ twee opeenvolgende vergelijkingen in (3.3) op te tellen. Uit de laatste gevonden relatie en $\Sigma p_n = 1$ volgt de stelling.

4. DE FUNDAMENTELE WACHTTIJDFORMULES $L = \lambda W$ en $L_q = \lambda W_q$.

In deze paragraaf behandelen wij de fundamentele relaties $L = \lambda W$ en $L_q = \lambda W_q$ die vrijwel voor elk wachttijdmodel van toepassing zijn. De relatie $L = \lambda W$ (resp. $L_q = \lambda W_q$) stelt dat *op de lange duur het gemiddeld aantal klanten in het systeem (resp. in de rij) gelijk is aan het gemiddeld aantal klanten dat per tijdseenheid aankomt maal de gemiddelde hoeveelheid tijd die per klant wordt doorgebracht in het systeem (resp. in de rij).*

Wij geven niet de meest algemene voorwaarden waaronder deze relaties gelden. Beschouw een wachttijdsysteem waar de klanten op een welgedefinieerde wijze aankomen, bediend worden en vertrekken. Voor het gemak nemen wij aan dat de klanten één voor één aankomen en elke klant blijft wachten tot hij bediend wordt. Verder nemen wij voor het gemak aan dat op tijdstip 0 een klant aankomt die geen andere klanten in het systeem aantreft. *Laten wij de gebeurtenis dat een klant bij aankomst geen andere klanten in het systeem aantreft aangeven met* H. Wij maken de volgende aannames:

Aannames:

1. De gebeurtenis H is een steeds weer terugkerende gebeurtenis met de eigenschap dat na het optreden van H het systeem als het ware opnieuw begint, d.w.z. met kans 1 treedt H na een eindige tijd wederom op en op een moment waarop H optreedt kunnen wij, wat het aankomst- en bedieningsmechanisme betreft, net doen alsof wij op tijdstip 0 zijn. De periode tussen twee opeenvolgende tijdstippen waarop H optreedt noemen wij een *herhalingsperiode*.
2. De verwachting van de lengte van een herhalingsperiode is eindig.
3. De verwachting van het aantal klanten dat gedurende één herhalingsperiode bediend wordt, is eindig.
4. De totale hoeveelheid tijd die gedurende één herhalingsperiode door de klanten wordt doorgebracht in het systeem, heeft een eindige verwachting.

Deze aannames zijn in vrijwel alle wachttijdsystemen van praktische betekenis vervuld. Merk op dat wij geen specifieke veronderstellingen hebben gemaakt over het aankomstproces, het bedieningsmechanisme en de rijdiscipline.

Wij voeren nu de volgende stochastische variabelen in.

$\underline{L}(t)$ = het aantal klanten dat op tijdstip t in het systeem is,

$\underline{n}(t)$ = het aantal klanten dat in $[0,t]$ aankomt,

$\underline{w}_k$ = de hoeveelheid tijd die de k^{de} klant doorbrengt in het systeem.

Onder bovenstaande aannames zijn de volgende gemiddelden welgedefinieerd en eindig,

$$L = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t E\underline{L}(u)du, \qquad \lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\underline{n}(t)$$

en

$$W = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\underline{w}_k.$$

De volgende relatie bestaat tussen deze grootheden,

$$L = \lambda W. \tag{4.1}$$

Wij zullen een heuristisch bewijs van (4.1) geven. Beschouw een tijdsinterval $[0,T]$, waarbij T een zeer groot getal is. Bij benadering kunnen wij dan stellen dat gedurende $[0,T]$ gemiddeld L klanten in het systeem zijn. Dus de totale hoeveelheid tijd die door de klanten binnenkomend in $[0,T]$ doorgebracht wordt in het systeem is bij benadering gelijk aan LT. Anderzijds, in $[0,T]$ komen bij benadering λT klanten binnen en voor elk van deze klanten is de gemiddelde verblijftijd in het systeem bij benadering gelijk aan W. Derhalve $LT \approx \lambda TW$, hetgeen tot formule (4.1) leidt. Voor een exact bewijs, zie JEWELL (1967).

Op analoge wijze als L en W, kunnen wij definiëren

L_q = het gemiddeld verwachte aantal klanten in de rij,
W_q = de gemiddelde verwachte hoeveelheid tijd die per klant wordt doorgebracht in de rij.

Analoog aan (4.1) geldt

$$L_q = \lambda W_q. \tag{4.2}$$

Uiteraard bestaat tussen W en W_q een eenvoudig verband, aangezien de hoeveelheid tijd die een klant doorbrengt in het systeem gelijk is aan de hoeveelheid tijd die hij doorbrengt in de rij plus zijn bedieningstijd. Voor veel wachttijdsystemen betekent dit dat als één van de grootheden L, L_q, W en W_q bepaald is, de overigen direkt gevonden kunnen worden.

Opmerking 4.1. In veel wachttijdproblemen kan een uitdrukking voor het gemiddeld aantal klanten in het systeem verkregen worden uit de relatie

$$L = \{\text{de totale verwachte hoeveelheid tijd die gedurende één herhalingsperiode door de klanten wordt doorgebracht in het systeem}\}/\{\text{de verwachte lengte van één herhalingsperiode}\}. \tag{4.3}$$

Deze relatie kan eenvoudig als volgt worden ingezien. Stel dat voor elke klant kosten worden gemaakt die gelijk zijn aan de hoeveelheid tijd die door de klant wordt doorgebracht in het systeem. Op grond van een standaard resultaat (vgl. DE LEVE en TIJMS (1971)) geldt dat op de lange duur de gemiddelde kosten per tijdseenheid gelijk zijn aan het quotiënt van de verwachte kosten in één herhalingsperiode en de verwachte lengte van één herhalingsperiode. Dit leidt tot (4.3), aangezien in dit geval de gemiddelde kosten per tijdseenheid gelijk is aan het gemiddeld aantal klanten in het systeem.

Opmerking 4.2. De grootheden L, L_q, W en W_q zijn gedefinieerd als verwachte gemiddelden. Echter onder de gemaakte aannames kunnen aan deze grootheden ook de volgende "aansprekende" interpretaties gegeven worden. Op de lange duur is het (werkelijk) gemiddeld aantal klanten in het systeem (resp. in de rij) een ontaarde stochastische variabele die met kans 1 gelijk is aan L (resp. L_q). Evenzo, op de lange duur is de (werkelijke) gemiddelde hoeveelheid tijd die per klant wordt doorgebracht in het systeem (resp. in de rij) met kans 1 gelijk aan W (resp. W_q). Dit zijn interpretaties waar men "houvast" aan heeft.

Opmerking 4.3. Stel dat naast de gemaakte aannames bovendien geldt dat de lengte van een herhalingsperiode een *continu* verdeelde stochastische variabele is.*) Dan geldt dat $p_n = \lim_{t\to\infty} P\{\underline{L}(t) = n\}$ bestaat voor $n = 0,1,\ldots$ en

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} np_n. \tag{4.4}$$

De stationaire kansverdeling $\{p_n\}$ kan tevens als volgt worden geïnterpreteerd: op de lange duur is de fraktie van de tijd waarop n klanten in het systeem zijn met kans 1 gelijk aan p_n. In geval het aankomstproces een Poisson proces is, dan kan p_n ook geïnterpreteerd worden als de kans dat een willekeurige klant die aankomt als het systeem in een stationaire toestand verkeert bij aankomst n andere klanten in het systeem aantreft.

De geïnteresseerde lezer wordt voor bewijzen van de beweringen in de opmerkingen 4.2 en 4.3 verwezen naar de meer geadvanceerde literatuur, bijv. ROSS (1969) en STIDHAM (1972).

---

*) Deze voorwaarden zijn vervuld in alle wachttijdmodellen uit dit rapport.

5. ÉÉN BEDIENDE, POISSON-AANKOMST EN EXPONENTIËLE BEDIENINGSTIJD

Bij een loket met één bediende komen klanten aan volgens een Poisson proces met parameter λ. De bediende kan slechts één klant tegelijk helpen. De bedieningstijden van de klanten zijn onafhankelijke stochastische variabelen die eenzelfde exponentiële verdeling met verwachting $1/\mu$ hebben. Een klant die bij aankomst de bediende vrij treft wordt direkt bediend. Treft een aankomende klant de bediende bezet dan blijft hij wachten tot hij bediend wordt. Bij beëindiging van een bediening vertrekt de bediende klant en vangt direkt een volgende bediening aan ingeval er klanten in de rij staan. De volgorde waarin de klanten bediend worden is in onze eerste beschouwingen niet van belang; wij nemen echter wel aan dat deze volgorde niet afhangt van de bedieningstijden.

De *bezettingsgraad* ρ van het systeem wordt gedefinieerd als

$$\rho = \lambda/\mu,$$

m.a.w. ρ is het quotiënt van de gemiddelde bedieningstijd per klant en de gemiddelde lengte van het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende aankomsten. Wij nemen aan dat $\rho < 1$ is. Deze aanname zal intuïtief duidelijk zijn (als $\rho \geq 1$, dan neemt uiteindelijk het aantal klanten in het systeem onbeperkt toe).

Aangezien de klanten aankomen volgens een Poisson proces en de bedieningstijden exponentieel verdeeld zijn, wordt het verloop van het aantal klanten in het systeem beschreven door een geboorte-sterfteproces met als parameters $\lambda_n = \lambda$ voor $n \geq 0$ en $\mu_n = \mu$ voor $n \geq 1$ (ga dit na m.b.v. eigenschap 2 van het Poisson proces en relatie (2.4)). Uit stelling 3.1 leidt men vervolgens na enig eenvoudig rekenwerk af dat de stationaire kans p_n op n klanten in het systeem gegeven wordt door

$$p_n = (1-\rho)\rho^n \qquad (n=0,1,\ldots). \tag{5.1}$$

Wij zullen nu enige interpretaties voor deze kansen geven. Op grond van opmerking 4.3 kunnen wij stellen dat op de lange duur de fraktie van de tijd waarop n klanten in het systeem zijn met kans 1 gelijk is aan p_n. Hieruit en uit $p_0 = 1-\rho$ volgt dat op de lange duur de fraktie van de tijd waarop de bediende bezet is met kans 1 gelijk is aan ρ. Aangezien het aankomstproces een Poisson proces is, volgt bovendien uit opmerking 4.3 dat met kans $1-p_0 = \rho$ een willekeurige klant die aankomt als het systeem in een stationaire toestand verkeert moet wachten.

Vervolgens bepalen wij de gemiddelden L, L_q, W en W_q (vgl. par. 4). Uit de relaties (4.4) en (5.1) volgt na eenvoudig rekenwerk dat

$$L = \rho/(1-\rho). \tag{5.2}$$

M.b.v. relaties $L = \lambda W$, $L_q = \lambda W_q$ en $W = W_q + 1/\mu$ (zie par. 4) vinden wij

$$W = 1/\mu(1-\rho), \quad W_q = \rho/\mu(1-\rho) \quad \text{en} \quad L_q = \rho^2/(1-\rho). \tag{5.3}$$

De formules (5.2) en (5.3) geven een duidelijke illustratie van een bekend verschijnsel uit de wachttijdtheorie: *"kleine oorzaken kunnen grote gevolgen hebben"*. Uit deze formules blijkt dat voor ρ dicht bij 1 een kleine verandering in ρ een relatief veel grotere verandering in L, L_q, W en W_q tengevolge heeft. Bijv., $L = 9$ voor $\rho = 0{,}9$, $L = 19$ voor $\rho = 0{,}95$ en $L = 99$ voor $\rho = 0{,}99$. In dit vb. heeft een toename in ρ van 10% tot gevolg dat het gemiddeld aantal klanten in het systeem met 1000% toeneemt.

De grootheden die wij tot nu bepaald hebben hangen niet van de gevolgde rijdiscipline af. Wel van de rijdiscipline hangt bijv. de kansverdeling van de stochastische variabele $\underline{w}_q$ af, waarbij $\underline{w}_q$ gedefinieerd wordt als de hoeveelheid tijd die in de rij wordt doorgebracht door een willekeurige klant die aankomt als het systeem in de stationaire toestand verkeert. Wij bepalen de verdelingsfunktie van $\underline{w}_q$ onder de aanname dat de klanten in volgorde van aankomst bediend worden. Gebruikmakend van de relatie

$$P\{\underline{w}_q > w\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\underline{w}_q > w \mid n \text{ klanten in het systeem}\} p_n,$$

en het feit dat onder de voorwaarde dat n klanten in het systeem zijn $\underline{w}_q$ verdeeld is als de som van n onafhankelijke stochastische variabelen die allen een exponentiële verdeling met verwachting $1/\mu$ hebben (deze som is gamma verdeeld en heeft als kansdichtheid $\mu^n t^{n-1} e^{-\mu t}/(n-1)!$), volgt eenvoudig dat

$$P\{\underline{w}_q > w\} = \rho e^{-\mu(1-\rho)w} \qquad (w \geq 0). \tag{5.4}$$

Voorbeeld 5.1. In de haven van Zeeburg komen graanschepen aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 12 schepen per etmaal. De lostijd per schip volgt een exponentiële verdeling. De havendirektie staat voor een beslissing omtrent de aanschaf van een nieuwe losinstallatie ter vervanging van de in gebruik zijnde installatie. Een losinstallatie waarvan de lossnelheid zodanig is dat de gemiddelde lostijd per schip $1/\mu$ uur is, brengt kosten $c_1\mu$ per uur met zich mee, waarbij $c_1 = 450$. Voor elk schip zijn de ligkosten evenredig met de hoeveelheid tijd dat het schip in de haven is (inclusief lostijd); deze kosten bedragen $c_2 = 100$ per uur. De losinstallatie, die continu in bedrijf is, kan slechts één schip tegelijk lossen.

(i) Bepaal de lossnelheid μ waarvoor op de lange duur de gemiddelde kosten minimaal zijn.

(ii) Bepaal voor de gevonden waarde van μ de bezettingsgraad; het gemiddeld aantal schepen dat op lossen wacht; en de kans dat een schip langer dan 2 uur wachten moet alvorens het gelost wordt, aangenomen dat de schepen in volgorde van aankomst gelost worden.

Oplossing. Kies het uur als tijdseenheid. Gemiddeld komt dan $\lambda = 1/2$ schip per tijdseenheid aan. Stel dat een losinstallatie met snelheid μ wordt aangeschaft. Op de lange duur bedragen dan de gemiddelde kosten per uur,

$$C(\mu) = c_1\mu + c_2L = c_1\mu + c_2\lambda/(\mu-\lambda).$$

De funktie $C(\mu)$ moet naar μ geminimaliseerd worden onder de voorwaarde $\mu > \lambda$. Deze voorwaarde is een gevolg van de eis $\rho < 1$. Stellen wij de afgeleide van $C(\mu)$ naar μ gelijk aan nul, dan vinden wij:

$$c_1 - c_2\lambda/(\mu-\lambda)^2 = 0 \Longrightarrow (\mu-\lambda)^2 = c_2\lambda/c_1 \Longrightarrow \mu = \lambda \pm (c_2\lambda/c_1)^{\frac{1}{2}}.$$

De gezochte oplossing is uiteraard $\mu^* = \lambda + (c_2\lambda/c_1)^{\frac{1}{2}}$ vanwege de eis $\rho < 1$.

De funktie $C(\mu)$ neemt in μ^* een absoluut minimum aan omdat $C(\mu)$ convex is voor $\mu > \lambda$. Dit betekent voor de gegeven getalwaarden dat een losinstallatie met snelheid $\mu^* = 5/6$ wordt aangeschaft; de gemiddelde lostijd per schip bedraagt dan 6/5 uur. Op de lange duur is de fraktie van de tijd waarop deze installatie in gebruik is met kans 1 gelijk aan de bezettingsgraad $\rho = \lambda/\mu^* = 3/5$. Uit (5.3) volgt dat het gemiddeld aantal op lossen wachtende schepen gelijk is aan $L_q = 9/10$. Tenslotte, uit (5.4) volgt dat met kans $P\{\underline{w}_q > 2\} \approx 0{,}31$ een schip langer dan 2 uur moet wachten alvorens het gelost wordt als de schepen in volgorde van aankomst worden gelost.

6. s BEDIENDEN, POISSON-AANKOMST EN EXPONENTIËLE BEDIENINGSTIJD

Bij een wachttijdsysteem met s bedienden komen klanten aan volgens een Poisson proces met parameter λ. De bedienden werken parallel en onafhankelijk van elkaar. Elke bediende kan slechts één klant tegelijk helpen. Een klant die bij aankomst één of meer bedienden vrij treft, wordt direkt bediend door een willekeurige vrije bediende, terwijl een klant die bij aankomst alle bedienden bezet treft blijft wachten totdat hij bediend wordt. Als een bediening beëindigd wordt dan vertrekt de bediende klant en vangt direkt een volgende bediening aan ingeval er klanten in de rij staan. De volgorde waarin de klanten bediend worden is in onze eerste beschouwingen niet van belang; wij nemen echter aan dat deze volgorde niet afhangt van de bedieningstijden.

De bezettingsgraad van dit systeem wordt gedefinieerd als

$$\rho = \lambda/s\mu.$$

Wij nemen aan dat $\rho < 1$ is. Het verloop van het aantal klanten in het systeem wordt beschreven door een geboorte-sterteproces met als parameters $\lambda_n = \lambda$ voor $n \geq 0$, $\mu_n = n\mu$ voor $1 \leq n < s$ en $\mu_n = s\mu$ voor $n \geq s$ (ga dit na m.b.v. eigenschap 2 van het Poisson proces en voorbeeld 2.1). Uit stelling 3.1 volgt nu na enig eenvoudig rekenwerk dat de stationaire kans op n klanten in het systeem gegeven wordt door

$$p_n = (s\rho)^n p_0/n! \quad \text{voor } 1 \leq n < s, \quad p_n = s^s\rho^n p_0/s! \quad \text{voor } n \geq s, \tag{6.1}$$

waarbij

$$p_0 = [1 + \sum_{k=1}^{s-1} \frac{(s\rho)^k}{k!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)}]^{-1}. \tag{6.2}$$

In dit model heeft ρ de volgende interpretatie: voor elke bediende geldt dat op de lange duur de fraktie van de tijd waarop de bediende bezig is met kans 1 gelijk is aan ρ.*)

Uit de relaties (4.4), (6.1), (6.2) en $L = \lambda W$ (zie (4.1)) volgt

$$L = s\rho + \frac{\rho(s\rho)^s}{s!(1-\rho)^2} p_0 \quad \text{en} \quad W = \frac{1}{\mu} + \frac{(s\rho)^s}{s!s\mu(1-\rho)^2} p_0. \tag{6.3}$$

Uit de relaties $W = W_q + 1/\mu$ en $L_q = \lambda W_q$ (zie (4.2)) volgt

$$W_q = \frac{(s\rho)^s}{s!s\mu(1-\rho)^2} p_0 \quad \text{en} \quad L_q = \frac{\rho(s\rho)^s}{s!(1-\rho)^2} p_0. \tag{6.4}$$

De hierboven bepaalde grootheden hangen niet van de gevolgde rijdiscipline af. Uiteraard hangt de kansverdeling van de stochastische variabele $\underline{w}_q$ wel van de rijdiscipline af, waarbij $\underline{w}_q$ de hoeveelheid tijd is die in de rij wordt doorgebracht door een willekeurige klant die aankomt als het systeem in een stationaire toestand is. Als de klanten in volgorde van aankomst bediend worden, dan geldt

$$P\{\underline{w}_q > w\} = [(s\rho)^s p_0/s!(1-\rho)]e^{-s\mu(1-\rho)w} \qquad (w \geq 0).$$

Opmerking 6.1. Het in deze paragraaf beschouwde wachttijdmodel (waarvan het model uit paragraaf 5 een speciaal geval is) heeft de volgende belangwekkende eigenschap: Als het systeem in een stationaire toestand verkeert, dan is het proces dat het vertrek van de bediende klanten beschrijft een Poisson proces met parameter λ (zie BURKE (1956)). Deze eigenschap is van grote betekenis voor het geval waarin elke klant achtereenvolgens door een aantal bedienden geholpen moet worden.

---

*) Wij leiden dit niet af doch volstaan met op te merken dat deze fraktie gegeven wordt door $\sum_{n=s}^{\infty} p_n + \sum_{n=1}^{s-1} (n/s)p_n$.

Voorbeeld 6.1. In het postkantoor te Weverdijk zijn twee loketten, één voor geldzaken en één voor postzaken. Elke aankomende klant komt voor slechts één van deze twee diensten. De klanten voor geldzaken (resp. postzaken) komen aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 15 (resp. 18) klanten per uur. De bedieningstijd voor elke klant is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 3 minuten. Bij de huidige regeling kan een klant voor geldzaken (resp. postzaken) alleen terecht bij het loket voor geldzaken (resp. postzaken). Men overweegt echter beide loketten open te stellen voor zowel geld- als postzaken. Ga na wat deze nieuwe regeling voor invloed heeft op de bezettingsgraad van de loketten en het gemiddeld aantal klanten in het postkantoor.

Oplossing. Kies het uur als tijdseenheid. Bij de huidige regeling hebben wij te maken met twee 1 loketproblemen van het type behandeld in paragraaf 5: bij geldzaken (resp. postzaken) komen de klanten aan volgens een Poisson proces met parameter $\lambda_1 = 15$ (resp. 18), terwijl de bedieningstijd van elke klant exponentieel verdeeld is met verwachting $1/\mu$ waarbij $\mu = 20$. De fraktie van de tijd waarop het loket geldzaken (resp. postzaken) bezet is, is dan met kans 1 gelijk aan $\rho_1 = \lambda_1/\mu = 3/4$ (resp. $\rho_2 = \lambda_2/\mu = 9/10$). Voor geldzaken (resp. postzaken) staan dan gemiddeld $L_1 = \rho_1/(1-\rho_1) = 3$ (resp. $L_2 = \rho_2/(1-\rho_2) = 9$) klanten (zie formule (5.2)). Bij de huidige regeling zijn dus gemiddeld $L_1 + L_2 = 12$ klanten in het systeem. Beschouw nu de nieuwe regeling. Bij deze regeling hebben wij te maken met een wachttijdsysteem waarin $s = 2$ loketten aanwezig zijn, de klanten aankomen volgens een Poisson proces met parameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 33$ (zie eigenschap 6 van het Poisson proces) en de bedieningstijd van elke klant exponentieel verdeeld is met verwachting $1/\mu$. Nu geldt voor elk loket dat op de lange duur de fraktie van de tijd waarop het loket bezet is gelijk is aan $\rho = \lambda/s\mu = 33/40$. Uit de formules (6.2) en (6.3) volgt na enig rekenwerk dat bij de voorgestelde nieuwe regeling het gemiddeld aantal klanten in het postkantoor gelijk is aan $L \approx 5{,}16$.

7. ÉÉN BEDIENDE, POISSON-AANKOMST EN ALGEMENE BEDIENINGSTIJD

Wij beschouwen hetzelfde wachttijdmodel als in paragraaf 5 met dien verstande dat wij nu veronderstellen dat de bedieningstijden van de klanten onafhankelijk en identiek verdeelde stochastische variabelen zijn met een gegeven doch willekeurige kansverdeling. Wij nemen aan dat $E\underline{s}$ en $E\underline{s}^2$ eindig zijn, waarbij $\underline{s}$ een stochastische variabele is met dezelfde kansverdeling als de bedieningstijd van een klant. De bezettingsgraad van het systeem wordt gedefinieerd als

$$\rho = \lambda E\underline{s}.$$

Wij veronderstellen dat $\rho < 1$ is. Ter bepaling van de grootheid L m.b.v. formule (4.3), voeren wij de volgende grootheden in. Een periode die begint op een moment waarop een klant aankomt terwijl de bediende vrij is en die eindigt op het eerstvolgende tijdstip waarop een bediende klant bij vertrek geen andere klanten in het systeem achterlaat, wordt een *werkperiode* genoemd. De lengte van één werkperiode geven wij aan door de stochastische variabele $\underline{b}$. Een periode die begint op een moment dat een bediende klant bij vertrek geen andere klanten in het systeem achterlaat en die eindigt op het eerstvolgende tijdstip waarop een klant aankomt (deze klant treft de bediende vrij!), wordt een *vrije periode* genoemd. Definieer de stochastische variabele $\underline{v}$ als de lengte van een vrije periode. Merk op dat een *herhalingsperiode* gedefinieerd als het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende tijdstippen waarop een klant bij aankomst geen andere klanten in het systeem aantreft, uit een werkperiode en een vrije periode bestaat. Tenslotte definiëren wij de stochastische variabele $\underline{\tau}$ als de totale hoeveelheid tijd die gedurende één herhalingsperiode door de klanten wordt doorgebracht in het systeem.

Stelling 7.1. De vrije periode $\underline{v}$ is exponentieel verdeeld met $E\underline{v} = 1/\lambda$ en

$$E\underline{b} = E\underline{s}/(1-\rho). \tag{7.1}$$

Bewijs. De eerste bewering is een direkt gevolg van eigenschap 4 van het Poisson proces. Om $E\underline{b}$ te bepalen, definiëren wij eerst de stochastische variabele $\underline{s}$ als de bedieningstijd van de klant met wiens bediening de werkperiode begint en de stochastische variabele $\underline{m}$ als het aantal klanten dat gedurende deze bedieningstijd aankomt. Op grond van eigenschap 1 van het Poisson proces geldt dat onder de voorwaarde $\underline{s} = s$ de stochastische variabele $\underline{m}$ Poisson verdeeld is met verwachting λs. Hieruit volgt,

$$E(\underline{m} \mid \underline{s} = s) = \lambda s \quad \text{en} \quad E\{\underline{m}(\underline{m}-1) \mid \underline{s} = s\} = \lambda^2 s^2. \tag{7.2}$$

Wij zullen nu eerst de verwachting van $\underline{b}$ bepalen onder de voorwaarden dat $\underline{s} = s$ en $\underline{m} = m$. Daartoe zullen wij ons van een klassiek geworden kunstgreep bedienen. Deze kunstgreep berust op het feit dat de kansverdeling van een werkperiode niet afhangt van de volgorde waarin de klanten bediend worden. Stel dat $m \geq 1$ is. Wij doen alsof deze m klanten op de volgende wijze bediend worden. De m klanten worden allen afgezonderd. Aan het eind van de bedieningstijd s is, afgezien van de m afgezonderde klanten, het loket leeg. Eén van de m klanten wordt dan toegelaten om bediend te worden. Als er in zijn bedieningstijd klanten aankomen, dan worden die meteen na hem bediend; komen in de bedieningstijd van die klanten weer klanten aan dan worden die meteen daarna bediend, etc.. Deze werkwijze wordt gevolgd tot op het moment dat het loket leeg is (terwijl er dus nog steeds m-1 klanten in afzondering wachten). De tijd die tot dat moment verstreken is sinds het einde van de bedieningstijd s, geven wij aan met $\underline{b}_1$. De stochastische variabele $\underline{b}_1$ heeft dezelfde kansverdeling als de werkperiode (ga dit na en gebruik daarbij de "geheugenloosheidseigenschap" 4 van het Poisson proces). Aan het einde van de tijd $\underline{b}_1$ begint een tijdsduur $\underline{b}_2$ door weer één van de m-1 afgezonderde klanten toe te laten voor een bediening, terwijl alle klanten die in zijn bedieningstijd aankomen weer direkt na hem bediend worden, etc.. De tijdsduur $\underline{b}_2$ eindigt op het eerstvolgende moment waarop het loket leeg is en alleen nog de overige m-2 afgezonderde klanten wachten. Uiteraard heeft ook $\underline{b}_2$ dezelfde kansverdeling als de werkperiode. Dit procédé wordt voortgezet tot dat de laatste van de afgezonderde klanten bediend is en alle klanten die in zijn bedieningstijd aankwamen, etc.. Zo komt tenslotte de bediende vrij, en dit betekent het einde van de werktijd $\underline{b}$.

Uit bovenstaande volgt $E(\underline{b} \mid \underline{s} = s, \underline{m} = m) = E(s+\underline{b}_1+\ldots+\underline{b}_m)$. Dus

$$E(\underline{b} \mid \underline{s} = s, \underline{m} = m) = s + mE\underline{b}. \tag{7.3}$$

Formule (7.3) is van toepassing voor alle $m \geq 0$. Uit (7.2) en (7.3) volgt,

$$E(\underline{b} \mid \underline{s} = s) = s + \lambda s E\underline{b} \Rightarrow E\underline{b} = E\underline{s} + \lambda E\underline{s}E\underline{b}.$$

Uit de laatste relatie volgt (7.1).

Stelling 7.2. De totale hoeveelheid tijd die gedurende één herhalingsperiode door de klanten wordt doorgebracht in het systeem heeft als verwachting

$$E\underline{\tau} = \frac{E\underline{s}}{1-\rho} + \frac{\lambda E\underline{s}^2}{2(1-\rho)^2}. \tag{7.4}$$

Bewijs. Laten de stochastische variabelen $\underline{s}$ en $\underline{m}$ gedefinieerd zijn als in het bewijs van stelling 7.1. De stochastische variabele $\underline{\tau}$ schrijven wij als $\underline{\tau} = \underline{\tau}^{(1)} + \underline{\tau}^{(2)}$, waarbij $\underline{\tau}^{(1)}$ gedefinieerd als de totale hoeveelheid tijd die gedurende de bedieningstijd $\underline{s}$ door de klanten wordt doorgebracht in het systeem, en $\underline{\tau}^{(2)}$ gedefinieerd is de totale hoeveelheid tijd die gedurende de resterende duur van de werkperiode $\underline{b}$ door de klanten wordt doorgebracht in het systeem. Uit eigenschap 5 van het Poisson proces volgt

$$E(\underline{\tau}^{(1)} \mid \underline{s} = s, \underline{m} = m) = s + ms/2. \tag{7.5}$$

M.b.v. (7.2) en (7.5) vinden wij vervolgens

$$E(\underline{\tau}^{(1)} \mid \underline{s} = s) = s + \lambda s^2/2 \Rightarrow E\underline{\tau}^{(1)} = E\underline{s} + \lambda E\underline{s}^2/2. \tag{7.6}$$

Om $E\underline{\tau}^{(2)}$ te berekenen, merken wij eerst op dat de kansverdeling van $\underline{\tau}^{(2)}$ niet afhangt van de volgorde waarin de klanten bediend worden (niet de individuele maar de gezamenlijke wachttijd is van belang!). Laten wij dan ook aannemen dat bij de bediening van de klanten het procédé wordt gevolgd zoals beschreven in het bewijs van stelling 7.1. Wij bepalen nu eerst de verwachting van $\underline{\tau}^{(2)}$ onder de voorwaarden $\underline{s} = s$ en $\underline{m} = m$. In het bewijs van stelling 7.1 hebben wij reeds gezien dat het gedeelte van de werkperiode dat komt na de bedieningstijd s geschreven kan worden als $\underline{b}_1 + \ldots + \underline{b}_m$, waarbij $\underline{b}_k$ verdeeld is als $\underline{b}$. In de tijdsperiode $\underline{b}_k$, welke begint met de bediening van de k^{de} afgezonderde klant, wordt door de resterende m-k afgezonderde klanten in totaal een hoeveelheid tijd $(m-k)\underline{b}_k$ doorgebracht in het systeem. De totale hoeveelheid tijd die gedurende de tijdsperiode $\underline{b}_k$ door de andere klanten in het systeem wordt doorgebracht geven wij aan met $\underline{\tau}_k$. Het zal na enig nadenken duidelijk zijn dat op grond van eigenschap 4 van het Poisson proces $\underline{\tau}_k$ dezelfde kansverdeling heeft als $\underline{\tau}$. Uit bovenstaande volgt nu,

$$E(\underline{\tau}^{(2)} \mid \underline{s} = s, \underline{m} = m) = E\{\sum_{k=1}^{m} (m-k)\underline{b}_k + \sum_{k=1}^{m} \underline{\tau}_k\} =$$

$$= \tfrac{1}{2}m(m-1)E\underline{b} + mE\underline{\tau}.$$

M.b.v. deze relatie en (7.2) vinden wij vervolgens

$$E(\underline{\tau}^{(2)} \mid \underline{s} = s) = \lambda^2 s^2 E\underline{b}/2 + \lambda s E\underline{\tau} \Rightarrow E\underline{\tau}^{(2)} = \lambda^2 E\underline{s}^2 E\underline{b}/2 + \lambda E\underline{s}E\underline{\tau}.$$

Uit de laatste relatie en de laatste relatie in (7.6) volgt

$$E\underline{\tau} = E\underline{s} + \lambda E\underline{s}^2/2 + \lambda^2 E\underline{s}^2 E\underline{b}/2 + \lambda E\underline{s}E\underline{\tau}.$$

Uit deze relatie en (7.1) volgt (7.4).

Uit relatie (4.3) volgt $L = E\underline{\tau}/\{E\underline{v} + E\underline{b}\}$. Deze formule en de stellingen 7.1 en 7.2 leiden na enig rekenwerk tot

$$\boxed{L = \rho + \frac{\lambda^2 E\underline{s}^2}{2(1-\rho)}} \qquad (7.7)$$

Uit de relaties $L = \lambda W$, $L_q = \lambda W_q$ en $W = W_q + E\underline{s}$ (vgl. par. 4) leiden wij vervolgens af

$$W = E\underline{s} + \frac{\lambda E\underline{s}^2}{2(1-\rho)}, \quad W_q = \frac{\lambda E\underline{s}^2}{2(1-\rho)} \quad \text{en} \quad L_q = \frac{\lambda^2 E\underline{s}^2}{2(1-\rho)}. \qquad (7.8)$$

Uit de formules (7.7) en (7.8) volgt dat L, L_q, W en W_q afnemen als bij *gelijkblijvende gemiddelde bedieningstijd de variatie in de bedieningstijd* *verminderd wordt.* Bijv., $L = \rho/(1-\rho)$ als de bedieningstijd exponentieel verdeeld is, terwijl $L = (1-\rho/2)\rho/(1-\rho)$ als de bedieningstijd constant is (ga dit na). Dit betekent dat voor ρ dicht bij 1 het gemiddeld aantal klanten in het systeem bij exponentiële bedieningstijden bijna tweemaal groter is dan bij constante bedieningstijden, aangenomen dat de gemiddelde bedieningstijd per klant in beide gevallen hetzelfde is.

Op p_0 na, kunnen de stationaire kansen p_n (vgl. opmerking 4.3) voor een willekeurig verdeelde bedieningstijd niet expliciet bepaald worden. De kans p_0 kan als volgt gevonden worden. In het systeem treden afwisselend op perioden waarin de bediende bezet is en perioden waarin de bediende vrij is. Deze perioden zijn onderling onafhankelijk, terwijl de vrije perioden een continue kansverdeling bezitten. Uit een klassiek resultaat in de waarschijnlijkheidsrekening (zie bijv. ROSS (1972)) volgt nu dat p_0 gelijk is aan $E\underline{v}/(E\underline{v}+E\underline{b})$. M.b.v. stelling 7.1 vinden wij dan

$$p_0 = 1 - \rho.$$

Op grond van opmerking 4.3 kunnen wij ρ nu de volgende twee interpretaties geven: (i) op de lange duur is de fraktie van de tijd waarop de bediende bezet is met kans 1 gelijk aan ρ, en (ii) de kans dat een klant die aankomt als het systeem in een stationaire toestand verkeert, moet wachten is gelijk aan ρ.

Tenslotte geven wij voor de "liefhebbers" een voorbeeld dat gezien kan worden als een illustratie van de bruikbaarheid van formule (4.3) om L te bepalen voor wachttijdmodellen die een variant zijn op een standaard wachttijdmodel.

Voorbeeld 7.1. In het familiebedrijf "Multilever" te Rijnoord wordt het produkt "Entabogeen" op order geproduceerd. Dit hoogwaardige produkt kan slechts op één machine gemaakt worden. Deze machine wordt ook voor andere doeleinden gebruikt doch kan op elk gewenst moment vrijgemaakt worden voor de produktie van Entabogeen. De orders voor Entabogeen komen aan volgens een Poisson proces met parameter λ. De produktietijd nodig voor één order is een stochastische variabele $\underline{s}$ waarvan $E\underline{s}$ en $E\underline{s}^2$ eindig zijn. Als er geen orders voor Entabogeen meer uitstaan, wordt de machine voor andere doeleinden gebruikt. Het weer in bedrijf stellen van de machine voor de produktie van Entabogeen brengt kosten $K > 0$ met zich mee. Vandaar dat de volgende regel wordt aangehouden: de produktie van Entabogeen wordt pas hervat zodra R orders voor dit produkt aanwezig zijn. Gevraagd wordt naar de optimale waarde van R als tevens gegeven is dat per order kosten gemaakt worden die gelijk zijn aan c maal de hoeveelheid tijd tussen het aankomsttijdstip van de order en het tijdstip waarop de produktie van de order beëindigd wordt, waarbij $c > 0$ is.

Oplossing. Dit probleem is van een variant van het standaard model uit deze paragraaf en verschilt hiermee als volgt: als na afloop van een bediening geen klanten meer in het systeem zijn, dan wordt het loket pas weer opengesteld voor bediening zodra R klanten in het systeem aanwezig zijn. Definieer voor het in deze paragraaf reeds behandelde standaard wachttijdmodel $\underline{b}$ als de lengte van een werkperiode en $\underline{\tau}$ als de totale hoeveelheid tijd die gedurende één herhalingsperiode door de klanten wordt doorgebracht in het systeem. Dan worden $E\underline{b}$ en $E\underline{\tau}$ gegeven door (7.1) en (7.4).

Door zich voor te stellen dat bij de bediening van de R klanten (orders) die aanwezig zijn bij de hervatting van het werk door de bediende (machine) hetzelfde procédé wordt gevolgd als bij de bediening van de m klanten uit het bewijs van stelling 7.1, ziet men eenvoudig in dat de verwachte lengte van één herhalingsperiode gelijk is aan

$$R/\lambda + RE\underline{b} = R/\lambda(1-\rho). \tag{7.9}$$

De totale verwachte hoeveelheid tijd die gedurende het deel van de herhalingsperiode waarin de bediende niet werkzaam is door de klanten wordt doorgebracht in het systeem, is gelijk aan

$$(R-1)/\lambda + (R-2)/\lambda + \ldots + 1/\lambda = \tfrac{1}{2}R(R-1)/\lambda. \tag{7.10}$$

Analoog aan (7.9) gaat men eenvoudig na dat de totale verwachte hoeveelheid tijd die gedurende het deel van de herhalingsperiode waarin de bediende werkzaam is door de klanten wordt doorgebracht in het systeem, gelijk is aan (vgl. afleiding van $E\underline{\tau}^{(2)}$ in het bewijs van stelling 7.2)

$$\sum_{k=1}^{R} (R-k)E\underline{b} + RE\underline{\tau} = \tfrac{1}{2}R(R-1)E\underline{b} + RE\underline{\tau}. \tag{7.11}$$

Uit relatie (4.3) volgt nu dat L gelijk is aan de som van de rechterleden in (7.10) en (7.11) gedeeld door het rechterlid in (7.9). Na enig rekenwerk vinden wij m.b.v. (7.1) en (7.4) dat

$$L = \rho + \frac{\lambda^2 E\underline{s}^2}{2(1-\rho)} + \frac{R-1}{2}\ .$$

Derhalve geldt voor het beschouwde produktieprobleem dat op de lange duur de gemiddelde kosten per tijdseenheid met kans 1 gelijk zijn aan

$$C(R) = \frac{K}{R/\lambda(1-\rho)} + c\{\rho + \frac{\lambda^2 E\underline{s}^2}{2(1-\rho)} + \frac{R-1}{2}\}\ .$$

De vergelijking $C'(R) = 0$ heeft als positieve oplossing

$$R^* = \sqrt{2\lambda(1-\rho)K/c}.$$

Uit $C''(R) > 0$ voor $R > 0$ volgt dat de funktie $C(R)$ convex in R is. Derhalve geldt dat de optimale waarde van $R > 0$ gelijk is aan één van de twee gehele getallen die het dichtst bij R^* liggen.

8. EEN PRIORITEITSMODEL

In deze paragraaf beperken wij ons tot het volgende standaard wachttijdmodel met prioriteiten. Bij een loket met één bediende komen klanten aan, waarbij elke klant geclassificeerd kan worden als een klant van type 1 òf als een klant van type 2. De klanten van type 1 komen aan volgens een Poisson proces met parameter λ_1 en onafhankelijk daarvan komen de klanten van type 2 aan volgens een Poisson proces met parameter λ_2. De bedieningstijden van de klanten zijn onafhankelijk van elkaar waarbij de bedieningstijd van een klant van type i een stochastische variabele $\underline{s}_i$ is met een gegeven doch willekeurige kansverdeling waarvan $E\underline{s}_i$ en $E\underline{s}_i^2$ eindig zijn (i=1,2). De bediende kan slechts één klant tegelijk helpen. Een klant die bij aankomst de bediende vrij treft wordt direkt bediend, terwijl een klant die bij aankomst de bediende bezet treft blijft wachten tot hij bediend wordt. Wij nemen aan dat de volgende *prioriteitsregel* wordt gevolgd. Als een bediening beëindigd wordt en er staan klanten in de rij, dan wordt direkt een volgende klant geholpen waarbij een klant van type 1 *voorrang* heeft boven een klant van type 2. Verder veronderstellen wij dat de bediening van een klant van type 2 *niet onderbroken* wordt als tijdens deze bediening een klant van type 1 aankomt. In onze beschouwingen is het van geen belang in welke volgorde klanten van eenzelfde prioriteit bediend worden, aangenomen dat deze volgorde niet afhangt van de bedieningstijden.

Wij voeren nu enige notatie in. Definieer

$$\rho_i = \lambda_i E\underline{s}_i \quad \text{voor } i = 1,2, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2 \quad \text{en} \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Wij nemen aan dat $\rho < 1$ is. Op grond van eigenschap 6 van het Poisson proces komen de klanten aan volgens een Poisson proces met parameter λ en is een willekeurige klant met kans λ_i/λ een klant van type i (i=1,2). Derhalve geldt

$$E\underline{s} = (\lambda_1/\lambda)E\underline{s}_1 + (\lambda_2/\lambda)E\underline{s}_2 \quad \text{en} \quad E\underline{s}^2 = (\lambda_1/\lambda)E\underline{s}_1^2 + (\lambda_2/\lambda)E\underline{s}_2^2, \tag{8.1}$$

waarbij $\underline{s}$ de bedieningstijd van een willekeurige klant is. Merk op dat $\rho = \lambda E\underline{s}$ (ρ heeft dus dezelfde interpretaties als in par. 7). Definieer

$L^{(i)}$ resp. $L_q^{(i)}$ = het gemiddeld aantal klanten van type i in het systeem resp. in de rij.

$W^{(i)}$ resp. $W_q^{(i)}$ = de gemiddelde hoeveelheid tijd die per klant van type i wordt doorgebracht in het systeem resp. in de rij.

L resp. L_q = het gemiddeld aantal klanten in het systeem resp. in de rij.

W resp. W_q = de gemiddelde hoeveelheid tijd die per klant wordt doorgebracht in het systeem resp. in de rij.

Stelling 8.1.

$$L^{(1)} = \rho_1 + \frac{\lambda_1\{\lambda_1 E\underline{s}_1^2 + \lambda_2 E\underline{s}_2^2\}}{2(1-\rho_1)}, \quad L^{(2)} = \rho_2 + \frac{\lambda_2\{\lambda_1 E\underline{s}_1^2 + \lambda_2 E\underline{s}_2^2\}}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}.$$

Bewijs. Wij volstaan met een bewijsschets. Definieer een werkperiode als het tijdsinterval tussen een moment waarop een klant bij aankomst de bediende vrij treft en het eerstvolgende tijdstip waarop een klant bij vertrek geen andere klanten in het systeem achterlaat. Voor een werkperiode waarvan gegeven is dat deze begint met de bediening van een klant van type k definiëren wij a_k als de verwachte lengte van deze werkperiode en w_{ik} als de totale verwachte hoeveelheid tijd die gedurende deze werkperiode door de klanten van type i wordt doorgebracht in het systeem (i,k=1,2). Door analoog te werk te gaan als in par. 7 kan men aantonen (het bewijs laten wij achterwege)

$$\begin{aligned}
a_1 &= E\underline{s}_1/(1-\rho_1), \quad a_2 = E\underline{s}_2/(1-\rho),\\
w_{11} &= (1-\rho)^{-1}\{\lambda_1(1-\rho_2)E\underline{s}_1^2/2(1-\rho_1) + \lambda_2\rho_1 E\underline{s}_2^2/2(1-\rho_1) + (1-\rho_2)E\underline{s}_1\},\\
w_{12} &= (1-\rho)^{-1}\{\lambda_1^2 E\underline{s}_2 E\underline{s}_1^2/2(1-\rho_1) + \lambda_1 E\underline{s}_2^2/2 + \rho_1 E\underline{s}_2\},\\
w_{22} &= (1-\rho)^{-1}\{\lambda_1\rho_2 E\underline{s}_1^2/2(1-\rho_1)(1-\rho) + \lambda_2 E\underline{s}_2^2/2(1-\rho) + (1-\rho_1)E\underline{s}_2\},\\
w_{21} &= (1-\rho)^{-1}\{\lambda_2(1-\rho_2)E\underline{s}_1^2/2(1-\rho_1)(1-\rho) + \lambda_2^2 E\underline{s}_1 E\underline{s}_2^2/2(1-\rho_1)(1-\rho) + \rho_2 E\underline{s}_1\}.
\end{aligned}$$

De kans dat een willekeurige werkperiode begint met de bediening van een klant van type k is gelijk aan λ_k/λ (k=1,2). Hieruit volgt dat de verwachte lengte van één herhalingsperiode gelijk aan $(1/\lambda) + (\lambda_1/\lambda)a_1 + (\lambda_2/\lambda)a_2$ is, en dat de totale verwachte hoeveelheid tijd die gedurende één herhalingsperiode door de klanten van type i wordt doorgebracht in het systeem gelijk aan $(\lambda_1/\lambda)w_{i1} + (\lambda_2/\lambda)w_{i2}$ is (i=1,2). Nu geldt (vgl. opmerking 4.1 in par. 4),

$$L^{(i)} = \{(\lambda_1/\lambda)w_{i1} + (\lambda_2/\lambda)w_{i2}\}/\{(1/\lambda) + (\lambda_1/\lambda)a_1 + (\lambda_2/\lambda)a_2\} \quad (i=1,2).$$

Uit deze relatie volgt na enig eenvoudig rekenwerk de stelling.

Voor de grootheden $L_q^{(i)}$, $W^{(i)}$, $W_q^{(i)}$, L, L_q, W en W_q kunnen vervolgens formules worden afgeleid uit de relaties (vgl. par. 4)

$$L^{(i)} = \lambda_i W^{(i)}, \quad W^{(i)} = W_q^{(i)} + E\underline{s}_i, \quad L_q^{(i)} = \lambda_i W_q^{(i)} \quad \text{voor } i = 1,2, \tag{8.2}$$

$$L = L^{(1)} + L^{(2)}, \quad L = \lambda W, \quad W = W_q + E\underline{s} \quad \text{en} \quad L_q = \lambda W_q. \tag{8.3}$$

Bijv. uit stelling 8.1 en de formules (8.1) - (8.4) volgt eenvoudig dat

$$W_q = \{2(1-\rho_1)(1-\rho)\}^{-1}\{\lambda_1(1-\rho) + \lambda_2\}E\underline{s}^2. \tag{8.4}$$

Door de invoering van prioriteiten kan men bijv. de gemiddelde wachttijdkosten per tijdseenheid of de gemiddelde wachttijd per klant *reduceren*. Wij zullen dit illustreren aan de hand van de volgende twee toepassingen.

Toepassing 1. Twee klantentypen met lineaire wachttijdkosten.

Beschouw de hiervoor beschreven situatie waarin twee soorten klanten aankomen, waarbij de klanten van type i aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ_i en zowel $E\underline{s}_i$ als $E\underline{s}_i^2$ eindig zijn voor de bedieningstijd $\underline{s}_i$ van een klant van type i (i=1,2). Aan het wachten in de rij zijn kosten verbonden. Voor elke klant van type i geldt dat de kosten verbonden aan het wachten in de rij gelijk zijn aan c_i maal de hoeveelheid tijd die door de klant wordt doorgebracht in de rij, waarbij $c_i > 0$ (i=1,2). In de volgende stelling laten wij zien dat de gemiddelde wachttijdkosten per tijdseenheid minimaal zijn door prioriteit te verlenen aan het klantentype waarvoor het quotiënt van de gemiddelde bedieningstijd en de wachttijdkosten per tijdseenheid per klant het kleinst is.

Stelling 8.2. De gemiddelde wachttijdkosten per tijdseenheid zijn minimaal als aan de klanten van type 1 prioriteit gegeven wordt in het geval $E\underline{s}_1/c_1 \leq E\underline{s}_2/c_2$ is en aan de klanten van type 2 prioriteit gegeven wordt in het geval $E\underline{s}_1/c_1 > E\underline{s}_2/c_2$ is.

Bewijs. Stel $\rho_i = \lambda_i E\underline{s}_i$ (i=1,2) en $\rho = \rho_1 + \rho_2$. Laat g_1 de gemiddelde kosten per tijdseenheid zijn als de klanten van type 1 prioriteit hebben. Dan geldt $g_1 = c_1L_q^{(1)} + c_2L_q^{(2)}$. Uit (8.2) volgt $L_q^{(i)} = L^{(i)} - \rho_i$ $(i=1,2)$. Vervolgens vinden wij m.b.v. stelling 8.1,

$$g_1 = \frac{c_1\lambda_1(\lambda_1 E\underline{s}_1^2+\lambda_2 E\underline{s}_2^2)}{2(1-\rho_1)} + \frac{c_2\lambda_2(\lambda_1 E\underline{s}_1^2+\lambda_2 E\underline{s}_2^2)}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}\,. \tag{8.5}$$

Laat g_2 de gemiddelde kosten per tijdseenheid zijn als de klanten van type 2 prioriteit hebben. Dan is g_2 gelijk aan het rechterlid van (8.5) indien wij hierin de rollen van de indices 1 en 2 verwisselen. Na recht toe recht aan rekenwerk vindt men dat $g_1-g_2 \le 0$ is dan en slechts dan als $E\underline{s}_1/c_1 \le E\underline{s}_2/c_2$ is, waaruit de stelling volgt.

Toepassing 2. De bedieningstijd van elke klant is bekend bij zijn aankomst.

Beschouw het wachttijdmodel uit par. 7 waarin bij een loket met 1 bediende de klanten aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ. Wij nemen nu echter aan dat voor elke klant *de waarde van zijn bedieningstijd precies geschat kan worden op het moment van zijn aankomst.* De bedieningstijden van de klanten vormen onafhankelijke trekkingen uit een kansverdeling met een gegeven verdelingsfunktie $F(s)$ waarvan het eerste moment α en het tweede moment β eindig zijn. Voor het gemak veronderstellen wij dat $F(s)$ een kansdichtheid $f(s)$ bezit. Uiteraard nemen wij aan dat $\rho = \lambda\alpha$ kleiner dan 1 is.

Als de klanten bediend worden volgens een rijdiscipline die niet afhangt van de bedieningstijden, dan is op grond van relatie (7.8) de gemiddelde hoeveelheid tijd die per klant wordt doorgebracht in de rij gelijk aan

$$\lambda\beta/2(1-\rho). \tag{8.6}$$

De gemiddelde wachttijd per klant kan echter gereduceerd worden door gebruik te maken van het feit dat voor elke klant zijn exacte bedieningstijd bekend wordt op het moment van zijn aankomst. Beschouw nu de volgende prioriteitsregel die van dit feit gebruik maakt. De klanten worden in twee klassen verdeeld. Een klant behoort tot klasse 1 resp. klasse 2 als zijn bedieningstijd kleiner dan of gelijk aan $\phi\alpha$ is resp. groter dan $\phi\alpha$ is, waarbij de parameter ϕ van de prioriteitsregel een vast positief getal is. De klanten uit klasse 1 hebben prioriteit boven de klanten uit klasse 2. Voor deze prioriteitsregel met parameter ϕ geven wij de gemiddelde hoeveelheid tijd die per klant wordt doorgebracht in de rij aan met $W_q(\phi)$.

Stelling 8.3. Voor elke ϕ geldt

$$W_q(\phi) = \frac{\lambda\beta}{2(1-\rho)} \{1 - \lambda \int_0^{\phi\alpha} sf(s)ds\}^{-1}\{1 - \rho F(\phi\alpha)\}. \tag{8.7}$$

Het getal ϕ^* waarvoor $W_q(\phi)$ minimaal is voldoet aan de relatie

$$\phi^* = 1 + \lambda \int_0^{\phi^*\alpha} F(s)ds. \tag{8.8}$$

Bewijs. Laat q_i de kans zijn dat een willekeurige klant tot klasse i behoort, dan geldt $q_1 = F(\phi\alpha)$ en $q_2 = 1-q_1$. Definieer $\underline{s}$ als de bedieningstijd van een willekeurige klant en definieer $\underline{s}_i$ als de bedieningstijd van een klant behorende tot klasse i (i=1,2). Uiteraard geldt

$$\beta = E\underline{s}^2 = q_1 E\underline{s}_1^2 + q_2 E\underline{s}_2^2. \tag{8.9}$$

Uit $P\{\underline{s}_1 \le s\} = P\{\underline{s} \le s \mid \underline{s} \le \phi\alpha\}$ volgt $P\{\underline{s}_1 \le s\} = F(s)/q_1$ voor $s \le \phi\alpha$. Evenzo, $P\{\underline{s}_2 \le s\} = \{F(s) - F(\phi\alpha)\}/q_2$ voor $s > \phi\alpha$. Derhalve geldt

$$E\underline{s}_1 = (1/q_1) \int_0^{\phi\alpha} sf(s)ds \quad \text{en} \quad E\underline{s}_2 = (1/q_2) \int_{\phi\alpha}^{\infty} sf(s)ds. \tag{8.10}$$

Op grond van eigenschap 6 van het Poisson proces geldt dat de klanten behorende tot klasse i aankomen volgens een Poisson proces met parameter $\lambda_i = \lambda q_i$ (i=1,2). Uit de relaties (8.4), (8.9) en (8.10) volgt nu na enig rekenwerk de relatie (8.7). Door de afgeleide van $W_q(\phi)$ naar ϕ nul te stellen, vinden wij na enig rekenwerk de relatie (8.8).

Opmerking 8.1. Uit (8.7) en (8.8) leidt men m.b.v. partiële integratie eenvoudig af

$$W_q(\phi^*) = (1/\phi^*)\lambda\beta/(1-\rho).$$

Uit deze relatie en (8.6) volgt dat voor de prioriteitsregel met ϕ^* als parameter de gemiddelde wachttijd per klant ϕ^* (>1) maal zo klein als de gemiddelde wachttijd per klant voor het geval waar de rijdiscipline niet afhangt van de bedieningstijden.

Opmerking 8.2.
(a) Als de bedieningstijd een trekking is uit een exponentiële verdeling met verwachting $1/\mu$ (dus $f(s) = \mu e^{-\mu s}$ voor $s \geq 0$), dan vereenvoudigt (8.8) tot

$$\phi^* = 1 + (1-\rho)^{-1}\rho e^{-\phi^*}. \tag{8.11}$$

(b) Als de bedieningstijd een trekking is uit de homogene verdeling op $[a,b]$ (dus $f(s) = (b-a)^{-1}$ voor $a \leq s \leq b$), dan volgt na enig rekenwerk uit (8.8) dat

$$\phi^* = 1 + (2\rho\alpha)^{-1}(b-a)(2-\rho-2\sqrt{1-\rho}). \tag{8.12}$$

De in deze toepassing beschreven indeling van de klanten in twee prioriteitsklassen kan men uiteraard verfijnen door elke prioriteitsklasse weer in twee deelklassen te verdelen, etc. Dit leidt tot een verdere daling van de gemiddelde wachttijd per klant. Echter het grootste deel van de daling in de gemiddelde wachttijd per klant treedt in het algemeen reeds op bij een splitsing in twee prioriteitsklassen.

Voorbeeld 8.1. Het vertrouwde rijwielverhuurbedrijf "Van Kilsdonk & Bestebreur" te Heemswoud bezit ten behoeve van haar zeer uitgebreide rijwielpark een reparatieplaats. Bij deze herstelinrichting die werkdagen van 12 uur telt, komen bij redelijke benadering de beschadigde fietsen aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 6 fietsen per werkdag. Voor elk rijwiel kan bij aankomst in de herstelplaats de reparatietijd nauwkeurig geschat worden. De reparatietijd is een trekking uit een homogene verdeling met als ondergrens een half uur en als bovengrens twee en half uur. Slechts één fiets tegelijk kan gerepareerd worden. Op voorstel van de pas afgestudeerde direkteurszoon Van Kilsdonk jr. wil de direktie overgaan tot een op de reparatietijden gebaseerde indeling van de beschadigde fietsen in twee prioriteitsklassen. Gevraagd wordt zowel naar de indeling waarvoor de gemiddelde wachttijd per fiets minimaal is, als naar de besparing die deze indeling oplevert t.o.v. de situatie waar de fietsen in volgorde van aankomst worden gerepareerd.

Oplossing. Kies het uur als tijdseenheid. Gemiddeld komt $\lambda = 1/2$ beschadigde fiets aan. De reparatietijd van een fiets is homogeen verdeeld op $[a,b]$ waarbij $a = 1/2$, $b = 5/2$ en heeft derhalve als verwachting $\alpha = (a+b)/2 =$ $= 3/2$ en als tweede moment $\beta = (b-a)^2/12 + (a+b)^2/4 = 31/12$. Voor deze numerieke waarden vinden wij $\rho = 3/4$, waarna uit (8.12) volgt

$$\phi^* = 11/9.$$

In de optimale prioriteitsindeling wordt derhalve aan rijwielen met een reparatietijd kleiner dan of gelijk aan $\phi^*\alpha = 11/6$ uur voorrang gegeven boven fietsen met een reparatietijd groter dan $11/6$ uur. Uit opmerking 8.1 volgt dat voor deze indeling de gemiddelde wachttijd per fiets gelijk is aan $W_q(\phi^*) = 93/22$ uur, hetgeen een besparing van $100(1-1/\phi^*) \approx 18\%$ betekent op de gemiddelde wachttijd per fiets in het geval waar de fietsen in volgorde van aankomst worden gerepareerd.

LITERATUUR *)

1. BURKE, P.J. (1956), "The output of a queueing system", *Operations Research* 4, 699-704.

2. COHEN, J.W. (1969), *The Single Server Queue*, North Holland Publ. Co., Amsterdam.

3. COX, D.R. en W.L. Smith (1961), *Queues*, Chapman and Hall, London.

4. FELLER, W., (1957), *Introduction to Probability Theory and its Applications*, Wiley, New York.

5. HILLIER, F.S. en G.J. LIEBERMAN (1967), *Introduction to Operations Research*, Holden-Day Inc., San Francisco.

6. JEWELL, W.S. (1967), "A simple proof of: L = λW", *Operations Research* 15, 109-116.

7. KOSTEN, L. (1973), *Stochastic Theory of Service Systems*, Pergamon Press, Oxford.

8. LEE, A.M. (1966), *Applied Queueing Theory*, MacMillan, Londen.

9. LEVE, G. de en H.C. TIJMS (1971), *Dynamische Programmering 3*, deel 7c van de leergang besliskunde, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

10. NEWELL, G.F. (1971), *Applications of Queueing Theory*, Chapman and Hall, Londen.

11. RIORDAN, J. (1962), *Stochastic Service Systems*, Wiley, New York.

12. ROSS, S.M. (1969), *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day Inc., San Francisco.

13. ROSS, S.M. (1972), *Introduction to Probability Models*, Academic Press, New York.

14. SAATY, T.L. (1961), *Elements of Queueing Theory*, McGraw-Hill, New York.

---

*) Naast de verwijzingen gedaan in de tekst van dit rapport, zijn in de literatuurlijst een aantal boeken over wachttijdtheorie opgenomen.

15. STIDHAM, S., Jr. (1972), "Regenerative processes in the theory of queues, with applications to the alternating-priority queue", *Advances in Applied Probability* 4, 542-577.