stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BC 11/74 AUGUSTUS

H.C. TIJMS

REGENERATIEVE PROCESSEN EN TOEPASSINGEN IN WACHTTIJDTHEORIE

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

AMS (MOS) subject classification scheme (1970): 60K25, 90B05

INHOUD

0. INLEIDING

In toepassingen van wachttijdtheorie op besliskundige problemen is het veelal voldoende om een bepaald gemiddelde zoals de gemiddelde rijlengte of de gemiddelde wachttijdkosten te berekenen om het beschouwde beslissingsprobleem op te lossen. Dergelijke gemiddelden kunnen vaak met relatief eenvoudige oplosmethoden bepaald worden. In dit rapport zullen wij dan ook een aantal wachttijdproblemen oplossen met behulp van eenvoudige methoden die gebaseerd zijn op basisresultaten uit de theorie van de regeneratieve processen. Deze processen hebben de eigenschap, dat tijdstippen optreden waarop het proces kanstheoretisch gezien als het ware opnieuw begint. Deze eigenschap is in de meeste wachttijdmodellen vervuld.

In hoofdstuk 1 geven wij een aantal benodigde resultaten uit de aan de theorie van de regeneratieve processen ten grondslag liggende vernieuwingstheorie. Daarnaast bevat hoofdstuk 1 enkele standaardresultaten voor de M\G\1 wachtrij. De eerste paragraaf van hoofdstuk 2 handelt over de theorie van de regeneratieve processen en in deze paragraaf geven wij een aantal basisstellingen voor deze processen. De resultaten uit paragraaf 2.1 worden in de paragrafen 2.2 en 2.3 gebruikt om de formule $L = \lambda W$ en een formule voor de gemiddelde kosten in een semi-Markov proces met een kostenstructuur af te leiden. In hoofdstuk 3 berekenen wij als toepassing de gemiddelde wachttijdkosten voor een tweetal besturingsregels voor de M\G\1 wachtrij waarin het bedieningsmechanisme wordt uitgeschakeld als het systeem leeg is en pas weer in werking wordt gesteld zodra de rijlengte respektievelijk de hoeveelheid werk in het systeem een bepaalde waarde overschrijdt. Tenslotte behandelen wij in hoofdstuk 4 een aantal prioriteitsmodellen. Voor de "non-preemptive", "preemptive-resume" en "discretionary" prioriteitsdiscipline worden met behulp van de resultaten uit de eerste twee hoofdstukken uitdrukkingen afgeleid voor de gemiddelde wachttijd per klant voor de verschillende typen klanten. Daarnaast wordt voor deze modellen een lineaire kostenstruktuur beschouwd en wordt binnen elk van deze prioriteitsmodellen bepaald hoe de prioriteiten aan de verschillende typen van klanten moeten worden toegekend opdat de gemiddelde wachttijdkosten per tijdseenheid minimaal zijn.

1. VERVANGINGSTHEORIE EN ENIGE BASISRESULTATEN VOOR DE M\G\1 WACHTRIJ

1.1. Vervangingstheorie

De vervangingstheorie (renewal theory) speelt een belangrijke rol in de theorie van de stochastische processen. In deze paragraaf geven wij een aantal resultaten die wij hierna nodig zullen hebben. Voor bewijzen verwijzen wij naar Feller (1966) en Ross(1970).

Laat $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots$ een rij zijn van onderling onafhankelijke, niet-negatieve en identiek verdeelde stochastische variabelen met verdelingsfunktie $F(t) = P\{\underline{y}_k \le t\}$. Wij nemen aan dat $F(0) = 0$ en $\mu = E\underline{y}_1 < \infty$. Definieer

$$\underline{s}_0 = 0,\ \underline{s}_n = \sum_{k=1}^{n} \underline{y}_k \text{ voor } n \ge 1, \text{ en } \underline{N}(t) = \sup\{n \ge 0 | \underline{s}_n \le t\} \text{ voor } t \ge 0.$$

Het proces $\{\underline{N}(t), t \ge 0\}$ wordt het vervangingsproces genoemd. Spreken wij van de n^{de} vervanging op tijdstip t als $\underline{s}_n = t$, dan is $\underline{y}_k$ de lengte van het tijdsinterval tussen de $(k-1)^{ste}$ en k^{de} vervanging, $\underline{s}_k$ het tijdstip van de k^{de} vervanging, en $\underline{N}(t)$ is gelijk aan het aantal vervangingen in $(0,t]$. Definieer

$$(1.1) \qquad F^{(n)}(t) = P\{\underline{s}_n \le t\} \qquad \text{voor } t \ge 0 \text{ en } n=1,2,\ldots .$$

Merk op dat $F^{(n)}(t) = \int_0^t F^{(n-1)}(t-y)dF(y)$ voor $t \ge 0$ en $n \ge 2$. De vervangingsfunktie $M(t)$ wordt gedefinieerd door

$$(1.2) \qquad M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t) \qquad \text{voor } t \ge 0.$$

De funktie $M(t)$ is eindig. Uit de relaties $E\underline{N}(t) = \sum_0^{\infty} P\{\underline{N}(t) > n\}$ en $P\{\underline{N}(t) > n\} = P\{\underline{s}_{n+1} \le t\}$ volgt

$$(1.3) \qquad E\underline{N}(t) = M(t) \qquad \text{voor } t \ge 0,$$

m.a.w. $M(t)$ is gelijk aan het verwachte aantal vervangingen in $(0,t]$. Verder gelden voor het vervangingsproces de limietrelaties

$$\lim_{t\to\infty} \underline{N}(t)/t = 1/\mu \text{ met kans } 1, \quad \lim_{t\to\infty} E\underline{N}(t)/t = 1/\mu. \tag{1.4}$$

Een integraalvergelijking voor M(t) kan worden afgeleid door te conditioneren op het tijdstip van de eerste vervanging. Dit is een standaard redenatie in de vervangingstheorie. Uit

$$E\underline{N}(t) = \int_0^\infty E(\underline{N}(t)|\underline{y}_1=y)dF(y) = \int_0^t \{1 + E\underline{N}(t-y)\}dF(y)$$

volgt dat M(t) voldoet aan de "renewal" vergelijking

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-y)dF(y) \qquad \text{voor } t \geq 0. \tag{1.5}$$

Beschouw nu de "renewal" vergelijking in zijn algemene vorm.

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-y)dF(y) \qquad \text{voor } t \geq 0, \tag{1.6}$$

waarbij z(t) een gegeven, reëelwaardige Baire funktie is die begrensd is op elk eindig interval, en Z(t) een onbekende funktie is die bepaald moet worden uit (1.6). Door (1.6) te itereren en gebruik te maken van de relatie onder (1.1) en het feit dat $F^{(n)}(t) \to 0$ als $n \to \infty$ voor elke t, vindt men dat

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t z(t-y)dM(y) \qquad \text{voor } t \geq 0, \tag{1.7}$$

de enige oplossing van (1.6) is die begrensd is op elk eindig interval.

Een uitspraak over het gedrag van Z(t) voor $t \to \infty$ kan gedaan worden door de beroemde "Key Renewal Theorem". Om deze stelling te formuleren, hebben wij de begrippen "een direct Riemann integreerbare funktie" en "een arithmetische verdelingsfunktie" nodig. Voor het eerste begrip verwijzen wij naar Feller (1966). Wij volstaan op te merken dat de funktie z(t) direct Riemann integreerbaar is als z(t) van begrensde variatie is en $\int_0^\infty z(t)dt$ bestaat. De verdelingsfunktie F(t) heet arithmetisch als deze verdelingsfunktie geconcentreerd is op een verzameling van punten $0,\lambda,2\lambda,\ldots$ voor een $\lambda > 0$, m.a.w. $\sum_0^\infty P\{\underline{y}_1=n\lambda\} = 1$.

"Key Renewal Theorem" *Als de verdelingsfunktie* F(t) *niet arithmetisch is en de funktie* z(t) *direct Riemann integreerbaar is, dan*

$$\lim_{t\to\infty} Z(t) = (1/\mu)\int_0^\infty z(x)dx. \tag{1.8}$$

Beschouw nu het speciale geval waarin de stochastische variabelen $\underline{y}_n$ een discrete kansverdeling $f_j = P\{\underline{y}_n = j\}$ voor $j=0,1,\ldots$ bezitten. Voor $j=0,1,\ldots$, definieer

$$f_j^{(n)} = P\{\underline{s}_n = j\} \qquad \text{voor } n \geq 1, \qquad \text{en } u_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}.$$

De vervangingsfunktie u_j is eindig. Beschouw nu de discrete "renewal" vergelijking. Laat $\{z_j, j\geq 0\}$ een gegeven rij van eindige getallen zijn. Laat de rij $\{Z_j\}$ voldoen aan

$$Z_j = z_j + \sum_{k=0}^{j} Z_{j-k} f_k \qquad \text{voor } j=0,1,\ldots \tag{1.9}$$

De unieke oplossing van (1.9) is $Z_j = z_j + \sum_{k=0}^{j} z_{j-k}\, u_k$. Onder de aanname $\sum_0^\infty |z_j| < \infty$ wordt het asymptotische gedrag van deze oplossing beschreven door het discrete versie van de Key Renewal Theorem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} Z_j = (1/\mu) \sum_{k=0}^{\infty} z_k, \tag{1.10}$$

en, ingeval g.g.d $\{n \mid f_n > 0\} = 1$, dan bestaat $\lim_{j\to\infty} Z_j$.

Wij besluiten deze paragraaf met Wald's vergelijking waarvan wij hierna herhaaldelijk gebruik zullen maken.

Wald's vergelijking. Laat $\{\underline{a}_n, n\geq 1\}$ een rij van onderling onafhankelijke, niet-negatieve en identiek verdeelde stochastische variabelen zijn waarbij $E\underline{a}_1$ eindig is. Laat $\underline{m}$ een positieve, geheelwaardige stochastische variabele zijn met een eindige verwachting. Als voor elke $m \geq 1$ de gebeurtenis $\{\underline{m}=m\}$ onafhankelijk is van $\underline{a}_{m+1}, \underline{a}_{m+2}, \ldots$, dan geldt

$$E\left(\sum_{k=1}^{\underline{m}} \underline{a}_k\right) = E\underline{a}_1 . E\underline{m}. \tag{1.11}$$

Bijvoorbeeld, toepassing van Wald's vergelijking levert dat de "excess" variabele $\underline{s}_{\underline{n}(t)+1}-t$ als verwachting heeft $\mu\{En(t)+1\}-t$, waaruit volgt dat

(1.12) $\quad M(t) \geq t/\mu-1 \qquad$ voor alle $t \geq 0$.

1.2. Enige basisresultaten voor de M\G\1 wachtrij

Alvorens de M\G\1 wachtrij te beschouwen, memoreren wij een drietal belangrijke eigenschappen van het Poisson proces waarvan in de wachttijd-theorie veelvuldig gebruik gemaakt wordt.

(I) Stel klanten komen aan bij een loket volgens een Poisson proces met parameter λ. Dan zijn de lengten van de tijdsintervallen tussen de aankomsten van opeenvolgende klanten onderling onafhankelijke stochastische variabelen die eenzelfde exponentiële kansverdeling met verwachting $1/\lambda$ hebben. Voorts geldt de wachttijd vanaf een willekeurig tijdstip tot de aankomst van de eerstvolgende klant exponentieel verdeeld is met verwachting $1/\lambda$, ongeacht het verloop van het aankomstproces voor dit tijdstip.

(II) Stel klanten komen aan volgens een Poisson proces. Gegeven dat in een tijdsinterval $(0,s)$ precies $n \geq 1$ klanten zijn aangekomen, dan geldt voor elk van deze n klanten dat zijn aankomsttijdstip homogeen verdeeld is op $(0,s)$ en derhalve verwachting $s/2$ heeft.

(III) Stel klanten van type 1 komen aan volgens een Poisson proces met parameter λ_1 en onafhankelijk daarvan komen klanten van type 2 aan volgens een Poisson proces met parameter λ_2. Dan is het proces dat de aankomst van de gezamenlijke klanten beschrijft een Poisson proces met parameter $\lambda_1 + \lambda_2$, en is met kans $\lambda_i/(\lambda_1+\lambda_2)$ een willekeurige klant een klant van type i, $i=1,2$.

Wij beschouwen nu de M\G\1 wachtrij. Bij een loket met één bediende komen klanten aan volgens een Poisson proces met parameter λ. De bedieningstijden van de klanten zijn onderling onafhankelijke, positieve stochastische variabelen met eenzelfde kansverdeling waarvan het eerste moment μ en het tweede moment $\mu^{(2)}$ eindig zijn. Wij nemen aan dat (de bezettingsgraad) $\rho = \lambda\mu < 1$ is. Als een klant bij aankomst de bediende vrij treft, dan vangt zijn bediening direct aan, terwijl een klant die bij aankomst de bediende bezet treft, blijft wachten totdat hij bediend wordt. Als een bediening afgelopen is en er staan klanten te wachten, dan vangt direct een volgende bediening aan. Wij nemen aan dat de klanten in volgorde van aankomst bediend worden waarbij een bediening nimmer onderbroken wordt als deze eenmaal begonnen is.

Veronderstel dat op tijdstip 0 een klant aankomt en geen andere klanten in het systeem treft. Laat $\underline{b}_1$ de bedieningstijd van deze klant zijn. Definieer de volgende stochastische variabelen:

$\underline{L}(t)$ = het aantal klanten aanwezig in het systeem op tijdstip t, $t \geq 0$.

$\underline{v}(t)$ = de som van de bedieningstijden van de klanten die op tijdstip t wachten op bediening plus de resterende bedieningstijd van de klant die op tijdstip t bediend wordt als $\underline{L}(t) \geq 1$, en 0 als $\underline{L}(t) = 0$, $t \geq 0$

$\underline{\tau}$ = het eerste tijdstip waarop geen klanten meer in het systeem zijn

$\underline{T}$ = het eerste op tijdstip 0 volgende tijdstip waarop een klant aankomt en geen andere klanten in het systeem treft

$\underline{\nu}$ = aantal klanten bediend in $[0,\underline{T}]$.

De stochastische variabele $\underline{v}(t)$ wordt zowel de virtuele wachttijd op tijdstip t als de hoeveelheid werk in het systeem op tijdstip t genoemd. *)
Het tijdsinterval $[0,\underline{\tau}]$ wordt een "busy period" genoemd, en het tijdsinterval $[0,\underline{T}]$ wordt een "busy cycle" genoemd. Merk op dat $\int_0^{\underline{T}} \underline{L}(t)dt$ de totale hoeveelheid tijd is die door de klanten in het systeem wordt doorgebracht gedurende één "busy cycle", en dat $\int_0^{\underline{T}} \underline{v}(t)dt$ geïnterpreteerd kan worden als de cumulatieve hoeveelheid werk in het systeem gedurende één "busy cycle".

Wij leiden nu een aantal resultaten af die wij later herhaaldelijk nodig zullen hebben.

---

*) Bij deze laatste benaming ziet men eenvoudig in dat de kansverdeling van $\underline{v}(t)$ niet afhangt van de specifieke vorm van de rijdiscipline aangenomen dat de rijdiscipline "work-conserving" is, vgl. Wolff (1970).

Stelling 1.1.

(a) $E(\underline{\tau}|\underline{b}_1=s) = s/(1-\rho)$ *voor* $s \geq 0$, $E\underline{\tau} = \mu/(1-\rho)$, $E\underline{T} = 1/\lambda(1-\rho)$ en $E\underline{\nu} = 1/(1-\rho)$.

(b) $E(\int_0^{\underline{T}} \underline{L}(t)dt) = \mu/(1-\rho) + \lambda\mu^{(2)}/2(1-\rho)^2$.

(c) $E(\int_0^{\underline{T}} \underline{v}(t)dt|\underline{b}_1=s) = s^2/2(1-\rho) + \lambda s\mu^{(2)}/2(1-\rho)^2$ *voor* $s \geq 0$ *en*

$$E(\int_0^{\underline{T}} \underline{v}(t)dt) = \mu^{(2)}/2(1-\rho)^2.$$

Bewijs. Definieer $\underline{n}_1$ als het aantal klanten dat in de bedieningstijd van de eerste klant aankomt. Onder de voorwaarde $\underline{b}_1 = s$ heeft $\underline{n}_1$ een Poisson verdeling met verwachting λs. Derhalve,

$$E(\underline{\tau}|\underline{b}_1=s,\underline{n}_1=n) = s + nE\underline{\tau} \Rightarrow E(\underline{\tau}|\underline{b}_1=s) = s + \lambda sE\underline{\tau} \Rightarrow E\underline{\tau} = \mu + \lambda\mu E\underline{\tau}$$

waaruit de eerste drie relaties in (a) volgen. Uit Wald's vergelijking (zie (1.12)) volgt $E\underline{\tau} = \mu E\underline{\nu}$. Stel $\alpha = E[\int_0^{\underline{T}} \underline{L}(t)dt]$. Gebruikmakend van bovenstaande eigenschap (II) van het Poisson proces, vinden wij

$$E(\int_0^{\underline{T}} \underline{L}(t)dt|\underline{b}_1=s,\underline{n}_1=n) = s + ns/2 + n\alpha + \sum_{k=1}^{n} (n-k)E\underline{\tau}$$

waaruit volgt $E(\int_0^{\underline{T}} \underline{L}(t)dt|\underline{b}_1=s) = s + \lambda s^2/2 + \lambda s\alpha + \lambda^2 s^2 E\underline{\tau}$. Hieruit leidt men nu eenvoudig (b) af. Tenslotte, stel $\beta = E(\int_0^{\underline{T}} \underline{v}(t)dt)$. Uit

$$E(\int_0^{\underline{T}} \underline{v}(t)dt|\underline{b}_1=s,\underline{n}_1=n) = s^2/2 + n\mu s/2 + n\beta + \tfrac{1}{2}n(n-1)\mu E\underline{\tau}$$

volgt op eenvoudige wijze (c). □

Opmerking 1.1. Als $\underline{w}_k$ de hoeveelheid tijd is die door de k^{de} klant wordt doorgebracht in het systeem, dan geldt

$$E(\sum_{k=1}^{\underline{\nu}} \underline{w}_k) = E(\int_0^{\underline{T}} \underline{L}(t)dt).$$

2. REGENERATIEVE PROCESSEN, DE FORMULE L = λW EN DE GEMIDDELDE KOSTEN IN EEN SEMI-MARKOV PROCES

2.1. Regeneratieve processen

Beschouw een reëelwaardig, niet-negatief linkscontinu stochastisch proces $\{\underline{x}(t), t\geq 0\}$ met continue tijdsparameter. Veronderstel dat een positief tijdstip $\underline{T}_1$ bestaat dat met kans 1 eindig is zodat de voortzetting van het proces vanaf tijdstip $\underline{T}_1$ kanstheoretisch gezien een herhaling is van het gehele proces beginnend op tijdstip 0. Dit houdt in dat verdere tijdstippen $\underline{T}_2, \underline{T}_3, \ldots$ bestaan met dezelfde eigenschap als $\underline{T}_1$. Onder bovenstaande aanname heet het proces $\{\underline{x}(t)\}$ een regeneratief proces (voor een preciesere definitie verwijzen wij naar het artikel van Stidham (1973) waarop de behandeling in deze paragraaf gebaseerd is). De tijdstippen $\underline{T}_0=0, \underline{T}_1, \underline{T}_2, \ldots$ heten de regeneratietijdstippen van het proces $\{\underline{x}(t)\}$. Merk op dat $\underline{T}_k - \underline{T}_{k-1}, k=1,2,\ldots$ onderling onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische variabelen zijn.

Voor het gemak nemen wij aan dat met kans 1 de realiseringen van het proces $\{\underline{x}(t)\}$ stuksgewijs linear zijn en slechts een eindig aantal discontinuiteitspunten in een eindig tijdsinterval bezitten. Dit heeft tot gevolg dat het cumulatieve proces $\{\int_0^t \underline{x}(s)ds, t\geq 0\}$ welgedefinieerd is en dat $P\{\underline{x}(t)\leq x, \underline{T}_1 > t\}$ direct Riemann integreerbaar is als van funktie van t voor elke x, zie Stidham (1973).

Laat $F(t) = P\{\underline{T}_1 \leq t\}$ voor $t \geq 0$ en veronderstel dat $E\underline{T}_1 < \infty$. Definieer de stochastische variabele $\underline{x}^*(0)$ door

$$(2.1) \qquad P\{\underline{x}^*(0)\leq x\} = (1/E\underline{T}_1) \int_0^\infty P\{\underline{x}(t)\leq x \mid \underline{T}_1 > t\}\{1-F(t)\}dt, \qquad x \geq 0.$$

Merk op dat $P\{\underline{x}^*(0)\leq x\} \to 1$ als $x \to \infty$ vanwege $E\underline{T}_1 = \int_0^\infty \{1-F(t)\}dt$. *)

Wij formuleren nu de volgende basisstelling.

Stelling 2.1

(a) Veronderstel dat $E[\int_0^{\underline{T}_1} \underline{x}(t)dt] < \infty$. *Dan*

*) Voor elke niet-negatieve stochastische variabele $\underline{u}$ met verdelingsfunktie $G(u) = P\{\underline{u}\leq u\}$ geldt $E\underline{u} = \int_0^\infty \{1-G(u)\}du$.

$$\lim_{t\to\infty} (1/t) \int_0^t \underline{x}(s)ds = E[\int_0^{\underline{T}_1} \underline{x}(t)dt]/E\underline{T}_1 \qquad \textit{met kans } 1,$$

en

$$\lim_{t\to\infty} (1/t)E[\int_0^t \underline{x}(s)ds] = E[\int_0^{\underline{T}_1} \underline{x}(t)dt]/E\underline{T}_1$$

(b) *Als de verdelingsfunktie* F *niet arithmetisch is, dan*

$$\lim_{t\to\infty} P\{\underline{x}(t)\le x\} = P\{\underline{x}^*(0)\le x\} \qquad \textit{voor alle } x \ge 0.$$

(c) $E\underline{x}^*(0) = E[\int_0^{\underline{T}_1} \underline{x}(t)dt]/E\underline{T}_1$. *)

<u>Bewijs</u>.

(a) Zie stelling 3.16 in Ross (1970) of zie Smith (1955)

(b) Voor elke $x \ge 0$ geldt,

$$P\{\underline{x}(t)\le x\} = P\{\underline{x}(t)\le x, \underline{T}_1 > t\} + \int_0^t P\{\underline{x}(t)\le x | \underline{T}_1 = y\}dF(y) =$$

$$= P\{\underline{x}(t)\le x, \underline{T}_1 > t\} + \int_0^t P\{\underline{x}(t-y)\le x\}dF(y), \qquad t \ge 0.$$

Uit deze "renewal" vergelijking (zie (1.6)) volgt bewering (b) nu door toepassing van de Key Renewal Theorem.

(c) Definieer $\underline{y}(t) = \underline{x}(t)$ voor $0 \le t < \underline{T}_1$, en $\underline{y}(t) = 0$ voor $t \ge \underline{T}_1$. Ter afkorting, stel $H_t(x) = P\{\underline{x}(t)\le x | \underline{T}_1 > t\}$. Nu geldt,

$$E[\int_0^{\underline{T}_1} \underline{x}(t)dt] = E[\int_0^\infty \underline{y}(t)dt] = \int_0^\infty E\underline{y}(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty E(\underline{x}(t)|\underline{T}_1 > t)\{1-F(t)\}dt = \int_0^\infty \{1-F(t)\}dt \int_0^\infty \{1-H_t(x)\}dx =$$

$$= \int_0^\infty dx \int_0^\infty \{1-H_t(x)\}\{1-F(t)\}dt = \int_0^\infty dx\ E\underline{T}_1 . P\{\underline{x}^*(0)>x\} = E\underline{T}_1 . E\underline{x}^*(0). \quad \square$$

---

*) De beweringen (b) en (c) gelden ook als $E[\int_0^{\underline{T}_1} \underline{x}(s)ds] = \infty$.

Wij zien dus dat ingeval F niet arithmetisch is het regeneratieve proces $\{\underline{x}(t)\}$ een limietverdeling bezit die gegeven wordt door (2.1). De verwachting van de verdeling (2.1) kan worden berekend met behulp van stelling 2.1(c).

Analoge resultaten gelden voor regeneratieve processen met een discrete tijdsparameter. Laat $\{\underline{x}_n, n=0,1,\ldots\}$ een rij van niet-negatieve stochastische variabelen zijn. Veronderstel dat een positieve, geheelwaardige stochastische variabele $\underline{N}_1$ bestaat zodat de voortzetting van het proces $\{\underline{x}_n\}$ vanaf tijdstip (index) $\underline{N}_1$ kanstheoretisch gezien een herhaling is van het gehele proces beginnend op tijdstip (index) 0. Dit houdt in dat verdere tijdstippen (indices) $\underline{N}_2, \underline{N}_3, \ldots$ bestaan met dezelfde eigenschap als $\underline{N}_1$. Onder bovenstaande aanname heet de rij $\{\underline{x}_n, n\geq 0\}$ regeneratief. De tijdstippen (indices) $0, \underline{N}_1, \underline{N}_2, \ldots$ heten de regeneratietijdstippen (regeneratie-indices) van de rij $\{\underline{x}_n\}$.

Laat $f_j = P\{\underline{N}_1 = j\}$ voor $j=1,2,\ldots$ en veronderstel dat $E\underline{N}_1 < \infty$. Definieer de stochastische variabele $\underline{x}_0^*$ door

$$P\{\underline{x}_0^* \leq x\} = (1/E\underline{N}_1) \sum_{j=0}^{\infty} P\{\underline{x}_j \leq x \mid \underline{N}_1 > j\} P\{\underline{N}_1 > j\} \qquad x \geq 0.$$

<u>Stelling 2.2.</u>

(a) *Veronderstel dat* $E[\sum_{i=0}^{\underline{N}_1 - 1} \underline{x}_i] < \infty$. *Dan*

$$\lim_{n\to\infty} (1/n) \sum_{i=0}^{n} \underline{x}_i = E[\sum_{i=0}^{\underline{N}_1 - 1} \underline{x}_i]/E\underline{N}_1 \qquad \textit{met kans } 1$$

en

$$\lim_{n\to\infty} (1/n) E[\sum_{i=0}^{n} \underline{x}_i] = E[\sum_{i=0}^{\underline{N}_1 - 1} \underline{x}_i]/E\underline{N}_1 .$$

(b) *Voor elke* $x \geq 0$ *geldt,*

$$\lim_{n\to\infty} (1/n) \sum_{i=0}^{n} P\{\underline{x}_i \leq x\} = P\{\underline{x}_0^* \leq x\}.$$

Als g.g.d. $\{j \mid f_j > 0\} = 1$, *dan bestaat* $\lim_{n\to\infty} P\{\underline{x}_n \leq x\}$ *voor alle* $x \geq 0$.

(c) $E\underline{x}_0^* = E[\sum_{i=0}^{\underline{N}_1 - 1} \underline{x}_i]/E\underline{N}_1$.

Bewijs. Het bewijs is analoog aan het bewijs van stelling 2.1, vgl. ook Stidham (1973). □

Beschouw nu een niet-negatief regeneratief proces $\{\underline{x}(t),t\geq 0\}$ met continue tijdsparameter. Wij veronderstellen dat op de bijbehorende regeneratietijdstippen $\underline{T}_0=0,\underline{T}_1,\underline{T}_2,\ldots$ het proces $\{\underline{x}(t)\}$ een vaste waarde aanneemt zoals in vrijwel alle toepassingen in wachttijdtheorie het geval is. Laat $\{\underline{n}(t),t\geq 0\}$ een Poisson proces zijn waarvan de "aankomsttijdstippen" gegeven worden door $\underline{t}_0=0,\underline{t}_1,\underline{t}_2\ldots$ (onder deze tijdstippen verstaan wij de tijdstippen waarop een gebeurtenis van het Poisson proces plaatsvindt, bijv. de aankomst van een klant). Veronderstel dat elk regeneratietijdstip van het proces $\{\underline{x}(t)\}$ samenvalt met een aankomsttijdstip van het Poisson proces $\{\underline{n}(t)\}$, en dat $\underline{x}(t)$ onafhankelijk is van de aankomsttijdstippen komend na tijdstip t. Definieer nu $\underline{x}_n=\underline{x}(\underline{t}_n),n=0,1,\ldots$. Het proces $\{\underline{x}_n\}$ is een regeneratief proces met discrete tijdsparameter waarvan het k^{de} regeneratietijdstip $\underline{N}_k$ gegeven wordt door het aantal aankomsttijdstippen vallend in $(\underline{T}_{k-1},\underline{T}_k]$. Stel dat $E\underline{T}_1 < \infty$ en $E\underline{N}_1 < \infty$. Neem verder aan dat de grootste gemene deler $\{j\,|\,P\{\underline{N}_1=j\}>0\} = 1$. Dan geldt, zie stelling 3 in Stidham (1973),

$$\lim_{n\to\infty} P\{\underline{x}_n\leq x\} = \lim_{t\to\infty} P\{\underline{x}(t)\leq x\} \qquad \text{voor alle } x \geq 0. \tag{2.2}$$

M.a.w. de limietverdeling van het proces $\{\underline{x}_n\}$ ingebed op de aankomsttijdstippen van het Poisson proces $\{\underline{n}(t)\}$ is hetzelfde als de limietverdeling van het gehele proces $\{\underline{x}(t)\}$. Van deze eigenschap wordt een veelvuldig gebruik gemaakt in wachttijdsystemen met een Poisson aankomstproces.

2.2. De formule L = λW

Beschouw een welgedefinieerd wachttijdsysteem dat begint op t = 0 en waar klanten aankomen en weer vertrekken na een behandeling in het systeem te zijn ondergaan. Wij veronderstellen dat de hieronder in te voeren stochastische variabelen zijn gedefinieerd op een kansruimte waarvan de elementen van de uitkomstenruimte Ω worden aangegeven door ω. Definieer de volgende stochastische variabelen.

$\underline{n}(t)$ = het aantal klanten dat in $[0,t]$ aankomt.

$\underline{L}(t)$ = het aantal klanten dat op tijdstip t in het systeem aanwezig is, $t \geq 0$.

$\underline{L}_q(t)$ = het aantal klanten dat op tijdstip t in het systeem aanwezig is en waarvan de bediening nog niet begonnen is, $t \geq 0$

$\underline{w}_n$ = de hoeveelheid tijd die door de n^{de} klant in het systeem wordt doorgebracht, $n \geq 1$

$\underline{d}_n$ = de hoeveelheid tijd tussen het moment dat de n^{de} klant aankomt en het moment dat zijn bediening voor het eerst begint, $n \geq 1$.

De waarden van deze stochastische variabelen voor een realisering ω geven wij aan door $n(t,\omega)$, $L(t,\omega)$, $L_q(t,\omega)$, $w_n(\omega)$ en $d_n(\omega)$. Wij zullen nu voorwaarden geven waaronder de veelgebruikte relatie geldt tussen het gemiddeld aantal klanten in het systeem en de gemiddelde wachttijd per klant. Voor elke $\omega \in \Omega$ waarvoor de limieten

$$\lambda(\omega) = \lim_{t\to\infty} (1/t)n(t,\omega), \quad L(\omega) = \lim_{t\to\infty} (1/t) \int_0^t L(s,\omega)ds$$

en

$$W(\omega) = \lim_{n\to\infty} (1/n) \sum_{k=1}^{n} w_k(\omega)$$

bestaan en waarvoor $\lambda(\omega)$ en $W(\omega)$ eindig zijn, geldt de relatie

$$L(\omega) = \lambda(\omega)W(\omega). \tag{2.3}$$

D.w.z. op de lange duur is het gemiddeld aantal klanten in het systeem gelijk aan het gemiddeld aantal klanten dat per tijdseenheid aankomt maal de gemiddelde hoeveelheid tijd die per klant in het systeem wordt doorgebracht. Evenzo, voor elke $\omega \in \Omega$ waarvoor de limieten

$$\lambda(\omega) = \lim_{t\to\infty} (1/t)n(t,\omega), \quad L_q(\omega) = \lim_{t\to\infty} (1/t) \int_0^t L_q(s,\omega)ds$$

en

$$W_q(\omega) = \lim_{n\to\infty} (1/n) \sum_{k=1}^{n} d_k(\omega)$$

bestaan en waarvoor $\lambda(\omega)$ en $W_q(\omega)$ eindig zijn, geldt de relatie

(2.4) $\qquad L_q(\omega) = \lambda(\omega)W_q(\omega).$

Een bijzonder eenvoudig en fraai bewijs van deze relaties is gegeven door Stidham (1974). Merk op dat voor de relaties (2.3) en (2.4) geen specifieke aannames zijn gemaakt omtrent het aankomstproces, het aantal bedienden, de rijdiscipline, etc. Het wachttijdsysteem mag zelfs een onderdeel zijn van een groter wachttijdsysteem waarvan wij bijvoorbeeld alleen geïnteresseerd zijn in de klanten uit een bepaalde prioriteitsklasse. Voor de relaties (2.3) en (2.4) wordt alleen geëist dat de betreffende limieten bestaan en eindig zijn. Deze voorwaarde zal in het algemeen vervuld zijn als de betreffende wachttijdprocessen regeneratief zijn, vgl. stelling 2.1(a) en stelling 2.2(a).

Ter illustratie van bovenstaande, beschouwen wij de M\G\1 wachtrij zoals geformuleerd in paragraaf 2.1. Voor deze wachtrij zijn de processen $\{\underline{L}(t), t\geq 0\}$ en $\{\underline{w}_n, n\geq 0\}$ regeneratief. De tijdstippen $\underline{T}_k$ waarop een klant aankomt en het systeem leeg treft, zijn de regeneratietijdstippen van het proces $\{\underline{L}(t)\}$, en de regeneratietijdstippen van het proces $\{\underline{w}_n, n\geq 1\}$ worden gegeven door $1, \underline{\nu}_1+1, \underline{\nu}_1+\underline{\nu}_2+1, \ldots$ waarbij $\underline{\nu}_k$ het aantal klanten is dat bediend wordt in de k^{de} busy period. Op grond van stelling 1.1 en opmerking 1.1 kunnen wij concluderen dat, met kans 1,

$$\lim_{n\to\infty} (1/n) \sum_{k=1}^{n} \underline{w}_k$$

bestaat en gelijk is aan het eindige getal $W = E[\sum_{i=1}^{\underline{\nu}_1} \underline{w}_i]/E\underline{\nu}_1$. Evenzo geldt dat, met kans 1,

$$\lim_{t\to\infty} (1/t) \int_0^t \underline{L}(s)ds$$

bestaat en gelijk is aan het eindige getal $L = E[\int_0^{\underline{T}_1} \underline{L}(t)dt]/E\underline{T}_1$. Tenslotte, uit relatie (1.4) volgt dat, met kans 1, $\lim_{t\to\infty} \underline{n}(t)/t$ bestaat en gelijk is aan λ. Derhalve vinden wij

$$L = \lambda W.$$

Deze relatie kan ook direct worden afgeleid m.b.v. de theorie van de regeneratieve processen zonder gebruik te maken van Stidham's resultaat (2.3), vgl. Jewell (1967) en Ross (1970).

2.3. De gemiddelde kosten in een semi-Markov proces.

Ruwweg gesteld, een semi-Markov proces is een stochastisch proces waarvan het verloop van de toestand beschreven wordt door een Markov keten en de tijd tussen twee opeenvolgende toestandsovergangen stochastisch is. Precieser, laat $\{\underline{x}(t), t\geq 0\}$ een stochastisch proces met continue tijdsparameter zijn dat op elk tijdstip in één van de toestanden van een verzameling I is. Wij veronderstellen dat I eindig of aftelbaar is. Laat $(p_{ij}), i,j \in I$ een Markov matrix zijn, d.w.z. $p_{ij} \geq 0$ voor alle i,j en $\sum_j p_{ij} = 1$. Voor elke $i,j \in I$, laat $F_{ij}(t)$ een verdelingsfunktie zijn. Het proces $\{\underline{x}(t), t\geq 0\}$ heet een semi-Markov proces als na een overgang van het proces naar toestand i de eerstvolgende overgang van het proces met kans p_{ij} naar toestand j plaatsvindt en, gegeven dat de volgende toestand j is, de tijd tot de eerstvolgende overgang een stochastische variabele met verdelingsfunktie $F_{ij}(t)$ is. *) Wij veronderstellen dat op tijdstip 0 een toestandsovergang van het proces plaatsvindt. Het proces wordt rechtscontinu verondersteld.

Definieer nu $\underline{x}_0 = \underline{x}(0)$, en laat $\underline{x}_n$ de toestand van het proces $\{\underline{x}(t)\}$ zijn vlak na de n^{de} toestandsovergang. Definieer $\underline{\tau}_0 = 0$, en laat $\underline{\tau}_n$ de lengte zijn van het tijdsinterval tussen de $(n-1)^{ste}$ en n^{de} toestandsovergang van het proces $\{\underline{x}(t)\}$ (de 0^{de} overgang is op tijdstip 0). Dus $P\{\underline{x}_n=j \mid \underline{x}_{n-1}=i\} = p_{ij}$ en $P\{\underline{\tau}_n \leq t \mid \underline{x}_{n-1}=i, \underline{x}_n=j\} = F_{ij}(t)$. Laat

$$F_i(t) = \sum_{j\in I} p_{ij}\, F_{ij}(t) \qquad \text{voor } t \geq 0 \text{ en } i \in I.$$

---

*) Een equivalente definitie is de volgende. Het proces $\{\underline{x}(t)\}$ heet een semi-Markov proces als na een overgang naar toestand i de eerstvolgende toestandovergang plaatsvindt na een stochastische tijd met verdelingsfunktie $H_i(t)$ en, gegeven dat deze overgang na een tijd t plaatsvindt, de volgende toestand gelijk aan j is met kans $q_{ij}(t)$.

Dan is $F_i(t)$ de verdelingsfunktie van de hoeveelheid tijd tot de eerstvolgende toestandsovergang van het proces $\{\underline{x}(t)\}$ gegeven dat het proces zojuist een overgang naar toestand i heeft gemaakt. Wij veronderstellen dat

$$\mu_i = \int_0^\infty t dF_i(t) < \infty \qquad \text{voor alle } i \in I.$$

Wij maken de volgende aannames:

<u>Aanname 1</u>. Er bestaan getallen $\varepsilon > 0$ en $\delta > 0$ zodat $1 - F_i(\delta) > \varepsilon$ voor alle $i \in I$.

M.a.w. na een toestandsovergang is de tijd tot de eerstvolgende toestandsovergang van het proces $\{\underline{x}(t)\}$ groter dan δ met een kans die tenminste ε is. Deze aanname heeft tot gevolg dat met kans 1 het proces $\{\underline{x}(t)\}$ slechts een eindig aantal toestandsovergangen maakt in een eindig tijdsinterval.

<u>Aanname 2</u>. Er is een toestand, noem deze r, zodat vanuit elke begintoestand het proces $\{\underline{x}(t)\}$ met kans 1 na een eindige tijd een overgang maakt naar toestand r. De verwachting van de hoeveelheid tijd die het proces $\{\underline{x}(t)\}$ nodig heeft om uitgaande van toestand r een overgang te maken naar toestand r is eindig.

Definieer

$$\underline{T} = \inf\{t>0 \mid \underline{x}(t) = r,\ \underline{x}(t^-) \neq r\},$$

dan stelt aanname 2 dat $P\{\underline{T}<\infty \mid \underline{x}(0) = i\} = 1$ voor alle $i \in I$ en $E(\underline{T} \mid \underline{x}(0) = r\} < \infty$. Uit de aannames 1 en 2 is eenvoudig af te leiden dat (zie lemma 7.4 in Ross (1970)),

$$(2.5) \qquad P\{\underline{x}_n = r \text{ voor één of andere } n \geq 1 \mid \underline{x}_0 = i\} = 1 \qquad \text{voor alle } i \in I,$$

en

$$(2.6) \qquad E(\underline{N} \mid \underline{x}_0 = r) < \infty \qquad \text{waarbij } \underline{N} = \inf\{n \geq 1 \mid \underline{x}_n = r\}.$$

De relaties (2.5) en (2.6) hebben tot gevolg dat de Markov keten $\{\underline{x}_n\}$ een unieke stationaire kansverdeling $\{\pi_j, j \in I\}$ bezit zodat (zie blz. 32-36 in Chung (1960); vgl. ook stelling 2.2(b)),

$$(2.7) \qquad \lim_{n\to\infty} (1/n) \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \pi_j \qquad \text{voor alle } i,j \in I, \text{ *)}$$

waarbij $p_{ij}^{(k)} = P\{\underline{x}_k = j \mid \underline{x}_0 = i\}$. Bovendien, uit de ergodenrelatie (9) op blz. 89 in Chung (1960) volgt dat voor begintoestand $\underline{x}_0 = r$,

$$(2.8) \qquad \lim_{n\to\infty} (1/n) \sum_{k=0}^{n} Ef(\underline{x}_k) = \sum_{j\in I} f(j)\pi_j$$

voor elke funktie f zodat $\sum_j |f(j)|\pi_j$ eindig is.

Wij nemen nu aan dat tijdens het proces $\{\underline{x}(t)\}$ de volgende kosten gemaakt worden. Als het proces een overgang naar toestand i maakt, dan worden direkte kosten $c_1(i)$ opgelopen. Verder worden kosten $c_2(i)$ gemaakt voor elke tijdseenheid dat het proces in toestand i is. Wij veronderstellen dat $c_1(i) \geq 0$ en $c_2(i) \geq 0$ voor alle $i \in I$. Definieer

$$\gamma_i = c_1(i) + c_2(i)\mu_i \qquad \text{voor } i \in I.$$

Merk op dat γ_i geïnterpreteerd kan worden als de verwachte kosten tussen twee opeenvolgende toestandsovergangen als de eerste van deze twee overgangen naar toestand i is.

Definieer de stochastische variabele $\underline{z}(t)$ als de totale kosten te maken in $[0,t]$, $t \geq 0$.

Aanname 3. $E(\underline{z}(\underline{T}) \mid \underline{x}(0)=i)$ is eindig voor alle $i \in I$.

Deze aanname stelt dat voor elke begintoestand de verwachte kosten te maken tot de eerste terugkeer van het proces $\{\underline{x}(t)\}$ in toestand r eindig zijn.

---

*) De kansverdeling $\{\pi_j\}$ is de unieke oplossing van

$$\pi_j = \sum_{i\in I} p_{ij}\, \pi_i \quad \text{voor } j \in I, \text{ en } \sum_{i\in I} \pi_i = 1.$$

Stelling 2.3. *Voor elke begintoestand* $\underline{x}(0) = i$ *geldt*

$$\lim_{t\to\infty} E\underline{z}(t)/t = \sum_{j\in I} \gamma_j\ \pi_j / \sum_{j\in I} \mu_j\ \pi_j. \tag{2.9}$$

Bewijs. Beschouw eerst het geval $\underline{x}_0 = r$. Definieer $\underline{C}_n$ als de kosten te maken in $[\sum_{i=0}^{n-1} \underline{\tau}_i, \sum_{i=0}^{n} \underline{\tau}_i)$, m.a.w. $\underline{C}_n$ is de kosten in het tijdsinterval tussen de $(n-1)^{\text{ste}}$ en n^{de} toestandsovergang van het proces $\{\underline{x}(t)\}$. Merk op dat $E(\underline{C}_n | \underline{x}_{n-1}=i) = \gamma_i$ en $E(\underline{\tau}_n | \underline{x}_{n-1}=i) = \mu_i$. In stelling 7.5 in Ross (1970) wordt aangetoond dat

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\underline{z}(t)}{t} = \frac{E\underline{z}(\underline{T})}{E\underline{T}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\underline{C}_k = E[\sum_{k=1}^{\underline{N}} \underline{C}_k]/E\underline{N},$$

en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\underline{\tau}_k = E[\sum_{k=1}^{\underline{N}} \underline{\tau}_k]/E\underline{N}.$$

Deze relaties zijn eenvoudig in te zien met behulp van stelling 2.1(a) en stelling 2.2(a). Verder geldt $E[\sum_{k=1}^{\underline{N}} \underline{C}_k] = E\underline{z}(\underline{T})$ en $E[\sum_{k=1}^{\underline{N}} \underline{\tau}_k] = E\underline{T}$. Derhalve vinden wij

$$\lim_{t\to\infty} E\underline{z}(t)/t = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\underline{C}_k / \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\underline{\tau}_k, \tag{2.10}$$

waarbij de noemer en de teller van het rechterlid van (2.10) eindig zijn. Gebruikmakend van het feit dat $\gamma_i \geq 0$ voor alle i, Fatou's lemma en relatie (2.7), vinden wij

$$\infty > \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\underline{C}_k = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j\in I} \gamma_j\ p_{rj}^{(k)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in I} \gamma_j\ n^{-1} \sum_{k=1}^{n} p_{rj}^{(k)} \geq \sum_{j\in I} \gamma_j\ \pi_j.$$

Evenzo, $\sum_j \mu_j\ \pi_j < \infty$. Op grond van (2.8) geldt nu

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\underline{C}_k = \sum_{j\in I} \gamma_j\ \pi_j, \quad \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\underline{\tau}_k = \sum_{j\in I} \mu_j\ \pi_j.$$

Uit (2.10) volgt nu de bewering (2.9) voor $\underline{x}_0 = r$. Aangezien voor elke begintoestand het tijdstip van de eerste terugkeer van het proces $\{\underline{x}(t)\}$ naar toestand r met kans 1 eindig is en de verwachting van de kosten te maken tot dit tijdstip eindig is, volgt eenvoudig dat $\lim_{t\to\infty} E\underline{z}(t)/t$ onafhankelijk is van de begintoestand. Hiermee is de stelling bewezen. □

Opmerking 2.1.

(a) In stelling 3.16 in Rosswordt aangetoond dat voor elke begintoestand geldt $\lim_{t\to\infty} E\underline{z}(t)/t = E[\underline{z}(\underline{T})|\underline{x}_0=r]/E(\underline{T}|\underline{x}_0=r\}$, m.a.w. op de lange duur zijn de gemiddelde verwachte kosten per tijdseenheid gelijk aan de verwachte kosten te maken tussen twee opeenvolgende bezoeken van het proces $\{\underline{x}(t)\}$ naar toestand r gedeeld door de verwachte tijd tussen deze twee bezoeken.

(b) Voor elke begintoestand geldt dat $\lim_{t\to\infty} \underline{z}(t)/t$ met kans 1 gelijk is aan $\lim_{t\to\infty} E\underline{z}(t)/t$, vgl. stelling 2.1(a).

(c) Uit formule (2.9) volgt dat de gemiddelde kosten alleen afhangen van de overgangskansen p_{ij}, de verwachte verblijftijd μ_i in toestand i en de verwachte kosten gedurende deze verblijftijd.

(d) Als speciaal geval van stelling 2.3 vinden wij dat op de lange duur de (verwachte) fraktie van de tijd waarop het proces $\{\underline{x}(t)\}$ in toestand i is gelijk is aan $\mu_i \pi_i/\sum_{j\in I} \mu_j \pi_j$.

3. DE N-POLITIEK EN DE D-POLITIEK VOOR HET M\G\1 WACHTTIJDSYSTEEM

Beschouw een wachttijdsysteem met één bediende waarbij klanten aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ. De bedieningstijden van de klanten zijn precies bekend op moment van aankomst en vormen onafhankelijke trekkingen uit een verdeling met verdelingsfunktie $F(x)$ waarvan het eerste moment μ en het tweede moment $\mu^{(2)}$ eindig zijn. Veronderstel dat $F(0) = 0$ en $\rho < 1$, waarbij $\rho = \lambda\mu$.

Het bedieningsmechanisme wordt uitgeschakeld zodra er geen klanten meer in het systeem zijn. Als het bedieningsmechanisme aangeschakeld is, vindt een bediening plaats waarbij de klanten één voor één bediend worden. Wij veronderstellen dat de rijdiscipline geen onderbreking van een bediening toestaat en onafhankelijk is van de bedieningstijden.

De kosten van het aanschakelen van het bedieningsmechanisme bedragen $K > 0$. Daarnaast zijn er voorraadkosten $h > 0$ per eenheid werk in het systeem per tijdseenheid, waarbij de hoeveelheid werk in het systeem op tijdstip t gelijk is aan de som van de bedieningstijden van de klanten wachtend op tijdstip t op bediening plus de resterende bedieningstijd van de klant die op tijdstip t bediend wordt als het systeem op tijdstip t niet leeg is en gelijk is aan nul anders. De hoeveelheid werk in het systeem op tijdstip t geven wij aan door de stochastische variabele $\underline{v}(t)$. Wij veronderstellen dat op tijdstip 0 het systeem leeg is en het bedieningsmechanisme uitgeschakeld wordt.

Aangezien het aanschakelen van het bedieningsmechanisme kosten met zich meebrengt, kan het zinvol zijn het mechanisme niet direct aan te schakelen bij de aankomst van de eerste klant. Wij zullen dan ook de volgende twee politieken beschouwen: De N-politiek schakelt het bedieningsmechanisme weer aan zodra er N klanten in het systeem zijn, en de D-politiek schakelt het bedieningsmechanisme weer aan zodra de hoeveelheid werk in het systeem de waarde D overschrijdt. Beide politieken schakelen het bedieningsmechanisme alleen dan uit wanneer geen klanten meer in het systeem zijn. Hierbij is N een positief geheel getal en D een niet-negatief getal.

Voor zowel de N-politiek als de D-politiek zullen wij een formule afleiden voor de gemiddelde kosten. Daarnaast bepalen wij de optimale waarden van N en D. De behandeling in deze paragraaf is gebaseerd op Balachandran (1973), Balachandran en Tijms (1974), en Tijms (1973).

Daartoe merken wij eerst op dat zowel onder de N-politiek als de D-politiek elk tijdstip waarop het bedieningsmechanisme wordt uitgeschakeld een regeneratietijdstip voor het proces $\{\underline{v}(t), t \geq 0\}$ is. Op tijdstip 0 wordt het bedieningsmechanisme uitgeschakeld. Laat $\underline{T}_1$ het eerstvolgende tijdstip zijn waarop dit gebeurt. Op grond van stelling 2.1(a) geldt nu dat

$$(3.1) \qquad \lim_{t\to\infty} (1/t)E\left[\int_0^t \underline{v}(s)ds\right] = E\left[\int_0^{\underline{T}_1} \underline{v}(t)dt\right]/E\underline{T}_1$$

aangezien hierna zal blijken dat voor zowel de N-politiek als de D-politiek de noemer en de teller van het rechterlid van (3.1) eindig zijn. Definieer $\underline{n}(t)$ als het aantal keren dat in $[0,t]$ het bedieningsmechanisme wordt aangeschakeld. Uit (1.4) volgt dat $E\underline{n}(t)/t$ naar $1/E\underline{T}_1$ convergeert als $t \to \infty$. Definieren wij $\underline{z}(t)$ als de totale kosten in $[0,t]$, dan volgt met behulp van $\underline{z}(t) = h \int_0^t \underline{v}(s)ds + K\underline{n}(t)$ dat

$$(3.2) \qquad \lim_{t\to\infty} E\underline{z}(t)/t = \left\{hE\left[\int_0^{\underline{T}_1} \underline{v}(t)dt\right] + K\right\}/E\underline{T}_1.$$

<u>Beschouw nu eerst de N-politiek</u>. Definieer $\underline{t}$ als het eerste tijdstip waarop het bedieningsmechanisme wordt aangeschakeld. Uiteraard $E\underline{t} = N/\lambda$. Met behulp van stelling 1.1(b) volgt nu eenvoudig dat

$$(3.3) \qquad E\underline{T}_1 = N/\lambda + N\mu/(1-\rho) = N/\lambda(1-\rho).$$

Tevens zal direct duidelijk zijn dat

$$(3.4) \qquad E\left[\int_0^{\underline{t}} \underline{v}(s)ds\right] = \mu(N-1)/\lambda + \ldots + \mu/\lambda = \mu N(N-1)/2\lambda,$$

terwijl met behulp van stelling 1.1(a) en (c) eenvoudig volgt dat

$$(3.5) \qquad E\left[\int_{\underline{t}}^{\underline{T}_1} \underline{v}(s)ds\right] = N\mu^{(2)}/2(1-\rho)^2 + (1/2)N(N-1)\mu^2/(1-\rho).$$

Uit (3.2) - (3.5) volgt na enig rekenwerk dat

$$(3.6) \qquad \lim_{t\to\infty} E\underline{z}(t)/t = h\{(N-1)\mu/2 + \lambda\mu^{(2)}/2(1-\rho)\} + K\lambda(1-\rho)/N.$$

Het is nu eenvoudig na te gaan dat de waarde van N waarvoor de gemiddelde kosten van de N-politiek minimaal is gelijk is aan $[\alpha^*]$ of $[\alpha^*] + 1$, waarbij

$$(3.7) \qquad \alpha^* = \sqrt{2K\lambda(1-\rho)/h\mu}.$$

<u>Beschouw vervolgens de D-politiek</u>. Wij voeren eerst enige notatie in. Laat $\underline{b}_k$ de bedieningstijd van de k^{de} klant zijn en stel $\underline{s}_k=\underline{b}_1+\dots+\underline{b}_k$ voor $k \geq 1$. Definieer $F^{(n)}(x) = P\{\underline{s}_n \leq x\}$ voor $x \geq 0$ en $n \geq 1$, en definieer de vervangingsfunktie $M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(x)$. De grootheid M(x) kan geinterpreteerd als het verwachte aantal klanten alvorens de cumulatieve bedieningstijden de waarde x overschrijden (zie paragraaf 1.1). Laat $\underline{\tau}_k$ het tijdstip zijn waarop de k^{de} klant aankomt. Voor elke $x \geq 0$, definieer

$$\underline{\nu}(x) = \min\{n\geq 1 \mid \underline{s}_n > x\}, \quad \underline{t}(x) = \underline{\tau}_{\underline{\nu}(x)} \quad \text{en} \quad \underline{u}(x) = \underline{s}_{\underline{\nu}(x)}.$$

Derhalve, $\underline{\nu}(D)$ is het aantal klanten op het moment dat het bedieningsmechanisme voor het eerst wordt aangeschakeld, $\underline{t}(D)$ is het tijdstip waarop dit gebeurt en $\underline{u}(D)$ is de hoeveelheid werk in het systeem op tijdstip $\underline{t}(D)$. Tenslotte, definieer voor $0 \leq x \leq D$

$$\underline{w}(x) = \int_0^{\underline{t}(x)} \underline{v}(s)ds,$$

m.a.w. $\underline{w}(x)$ is de cumulatieve hoeveelheid werk in het systeem tot het tijdstip waarop voor het eerst de aanwezige hoeveelheid werk de waarde x overschrijdt.

Met behulp van stelling 1.1(a) volgt nu eenvoudig dat

$$(3.8) \qquad E\underline{T}_1 = E\underline{t}(D) + E\underline{u}(D)/(1-\rho)$$

terwijl met behulp van stelling 1.1(a) en (c) volgt

$$(3.9)\qquad E\Big[\int_0^{T_1} \underline{v}(t)dt\Big] = E\underline{w}(D) + E[\underline{u}(D)]^2/2(1-\rho) + \lambda E\underline{u}(D)\mu^{(2)}/2(1-\rho)^2.$$

Wij zullen nu de benodigde verwachtingen gaan berekenen. Uit (1.1) volgt

$$(3.10)\qquad E\underline{\nu}(x) = 1 + M(x) \qquad\qquad \text{voor } x \geq 0,$$

terwijl wij met behulp van Wald's vergelijking (zie (1.11)) vinden dat

$$(3.11)\qquad E\underline{t}(x) = (1/\lambda)E\underline{\nu}(x) \quad \text{en } E\underline{u}(x) = \mu E\underline{\nu}(x) \qquad \text{voor } x \geq 0.$$

Om $E[\underline{u}(x)]^2$ te berekenen, merken wij op dat onder de voorwaarde $\underline{b}_1 = y$ geldt dat $\underline{u}(x)$ gelijk aan y is voor $y > x$ en verdeeld is als $y + \underline{u}(x-y)$ voor $y \leq x$. Derhalve,

$$(3.12)\qquad E[\underline{u}(x)]^2 = \mu^{(2)} + 2\int_0^x yE\underline{u}(x-y)dF(y) + \int_0^x E[\underline{u}(x-y)]^2 dF(y)$$

voor $x \geq 0$. Uit (1.7) volgt dat de oplossing van deze "renewal" vergelijking gegeven wordt door

$$(3.13)\qquad E[\underline{u}(x)]^2 = \mu^{(2)}\{1+M(x)\} + 2\mu a(x) + 2\mu\int_0^x a(x-y)dM(y), \quad x \geq 0.$$

waarbij (zie (3.10) en (3.11)),

$$(3.14)\qquad a(x) = \int_0^x y\{1+M(x-y)\}dF(y), \qquad\qquad x \geq 0.$$

Op analoge wijze berekenen wij $E\underline{w}(x)$. Onder de voorwaarde $\underline{b}_1 = y$ geldt dat $\underline{w}(x)$ gelijk aan nul is voor $y > x$ en verdeeld is als $y\underline{t}(x-y) + \underline{w}(x-y)$ voor $y \leq x$. Derhalve,

$$(3.15)\qquad E\underline{w}(x) = \int_0^x \{yE\underline{t}(x-y) + E\underline{w}(x-y)\}dF(y) =$$

$$= a(x)/\lambda + \int_0^x E\underline{w}(x-y)dF(y) \qquad\qquad \text{voor } 0 \leq x \leq D.$$

Uit (1.7) volgt dat de oplossing van deze "renewal" vergelijking gegeven wordt door

$$(3.16)\qquad E\underline{w}(x) = a(x)/\lambda + (1/\lambda)\int_0^x a(x-y)dM(y) \qquad \text{voor } 0 \le x \le D.$$

Wij tonen vervolgens aan dat

$$(3.17)\qquad a(x) + \int_0^x a(x-y)dM(y) = \int_0^x ydM(y) = xM(x) - \int_0^x M(y)dy, \qquad x \ge 0.$$

Stel daartoe $c(x) = \int_0^x tdM(t)$. Met behulp van (1.5) vinden wij na partiële integratie en een verwisseling van de integratievolgorde

$$c(x) = \int_0^x tdF(t) + \int_0^x td\{\int_0^t M(t-y)dF(y)\} = \int_0^x tdF(t) +$$

$$+ x\int_0^x M(x-y)dF(y) - \int_0^x dt\int_0^t M(t-y)dF(y) =$$

$$= \int_0^x tdF(t) + x\int_0^x M(x-y)dF(y) - \int_0^x dF(y)\int_0^{x-y} M(u)du =$$

$$= \int_0^x tdF(t) + x\int_0^x M(x-y)dF(y) - \int_0^x dF(y)[(x-y)M(x-y) +$$

$$- \int_0^{x-y} udM(u)] = a(x) + \int_0^x c(x-y)dF(y).$$

Uit de verkregen "renewal" vergelijking volgt nu de eerste gelijkheid in (3.17). De tweede gelijkheid in (3.17) volgt door partiële integratie.

Uit (3.2), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11), (3.13), (3.16) en (3.17) volgt na enig rekenwerk dat

$$(3.18)\qquad \lim_{t\to\infty} E\underline{z}(t)/t = h\lambda\mu^{(2)}/2(1-\rho) + hD + \{K\lambda(1-\rho) - hD +$$

$$- h\int_0^D M(y)dy\}/\{1+M(D)\}.$$

Geef het rechterlid van (3.18) aan door $g(D)$. Gebruikmakend van het feit dat $M(x)$ een niet-dalende funktie van x is, gaat men eenvoudig na dat de gemiddelde kosten g(D) minimaal zijn voor de unieke waarde van D, noem deze D^*, die voldoet aan

$$(3.19) \qquad D^* + \int_0^{D^*} M(y)dy = K\lambda(1-\rho)/h.$$

Uit (3.18) en (3.20) volgt

$$(3.20) \qquad g(D^*) = h\lambda\mu^{(2)}/2(1-\rho) + hD^*.$$

Deze vergelijking kan in het algemeen alleen numeriek opgelost worden. Wij merken op dat uit (1.12) en (3.19) volgt dat

$$D^* \leq \sqrt{2K\lambda(1-\rho)\mu/h}.$$

Als $F(t) = 1 - e^{-\phi t}$ voor $t \geq 0$ dan kan D^* expliciet gegeven worden. Aangezien in dit geval $M(t) = \phi t$ voor $t \geq 0$, volgt uit (3.19)

$$D^* = \frac{1}{\phi}\{-1+\sqrt{1+2K\lambda(1-\rho)\phi/h}\}.$$

Voor het geval van een exponentiële bedieningstijd gaat men tevens eenvoudig na dat $g(D^*)$ kleiner is dan de gemiddelde kosten van de beste N-politiek. Intuitief mag men verwachten dat voor elke verdeling van de bedieningstijd de gemiddelde kosten van de beste D-politiek kleiner of gelijk is aan de gemiddelde kosten van de beste N-politiek. In Balachandran en Tijms (1974) is deze bewering alleen bewezen voor enkele speciale gevallen.

In onderstaande tabellen geven wij voor enkele getallenvoorbeelden de optimale waarden D^* en N^* en de bijbehorende waarden $g(D^*)$ en $g(N^*)$ van de gemiddelde kosten. Wij kiezen $\lambda = 1$, $K = 20$ en $h = 1$ en beschouwen het geval dat $F(x)$ een $\Gamma(1,\phi)$ verdeling heeft en het geval dat $F(x)$ een $\Gamma(2,\phi)$ verdeling heeft voor verschillende waarden van ϕ.

ϕ	D^*	$g(D^*)$	N^*	$g(N^*)$
2	2.702	3.202	6	3.417
$1\frac{1}{2}$	2.388	3.722	4	4.000
$1\frac{1}{4}$	1.853	5.053	3	5.333
$1\frac{1}{8}$	1.288	8.400	2	8.667
$1\frac{1}{16}$	0.820	15.878	2	16.118
$1\frac{1}{32}$	0.485	31.515	1	31.636
$1\frac{1}{64}$	0.271	63.286	1	63.323

$F(x) = 1 - e^{-\phi x}$.

ϕ	D^*	$g(D^*)$	N^*	$g(N^*)$
4	2.804	3.179	6	3.292
3	2.513	3.513	4	3.667
$2\frac{1}{2}$	1.984	4.384	3	4.533
$2\frac{1}{4}$	1.406	6.739	2	6.889
$2\frac{1}{8}$	0.907	12.201	2	12.353
$2\frac{1}{16}$	0.537	23.810	1	23.879
$2\frac{1}{32}$	0.294	47.556	1	47.569

$F(x) = 1 - e^{-\phi x} - \phi x e^{-\phi x}$.

Opmerking 3.1. Definieer $\underline{L}(t)$ als het aantal klanten dat op tijdstip t in het systeem aanwezig is, $t \geq 0$. Op grond van de stellingen 2.1(a) en 1.1 geldt voor zowel de N-politiek als de D-politiek dat

$$\lim_{t\to\infty} (1/t)E\left[\int_0^t \underline{L}(s)ds\right]$$

bestaat en gegeven wordt door $L = E[\int_0^{\underline{T}_1} \underline{L}(t)dt]/E\underline{T}_1$. Voor de N-politiek vindt men met behulp van stelling 1.1 en (3.3) dat

$$L = [N\{\mu(1-\rho) + \lambda\mu^{(2)}/2(1-\rho)^2\} + (1/2)N(N-1)/(1-\rho)]/E\underline{T}_1 =$$

$$= \rho + \lambda^2\mu^{(2)}/2(1-\rho) + (N-1)/2.$$

Deze formule werd reeds gevonden in Yadin en Naor (1963). Voor de D-politiek is de afleiding van een formule voor L minder eenvoudig. In dit geval geldt

$$L = \rho + \lambda^2\mu^{(2)}/2(1-\rho) + [1+M(D)]^{-1}\ [\lambda \int_0^D ydM(y) +$$
$$+ (1-\rho)\{M(D)+\int_0^D M(D-y)dM(y)\}].$$

Voor een afleiding verwijzen wij naar Tijms (1973) (in deze verwijzing dient het rechterlid van de relatie in stelling 1(e) vervangen te worden $\mu\{1+M(x)\} + \int_0^x ydM(y)$; deze correctie laat zich eenvoudig afleiden via een "renewal" vergelijking).

4. PRIORITEITEN

4.1. Inleiding

In vele wachttijdsituaties worden rijdisciplines gehanteerd waarbij de klanten in verschillende klassen worden onderverdeeld en deze klassen in een bepaalde volgorde bediend worden. Dergelijke rijdisciplines worden prioriteitsdisciplines genoemd. Een zeer groot aantal prioriteitsdisciplines is bestudeerd onder verschillende aannames. In dit hoofdstuk beperken wij ons tot een aantal belangrijke prioriteitsregels. Voor een uitgebreider overzicht verwijzen wij naar Jaiswail (1968).

Ruwweg, twee hoofdtypen van prioriteitsdisciplines kunnen worden onderscheiden.

(1) De "non-preemptive" prioriteitsdiscipline wanneer de bediening van een klant nimmer onderbroken wordt als de bediening eenmaal begonnen is.

(2) De "preemptive" prioriteitsdiscipline waarbij de bediening van een klant bij aankomst van een klant van hogere prioriteit onmiddellijk onderbroken wordt ten gunste van de aangekomen klant. Hierbij wordt onderscheid gemaakt tussen de "preemptive-resume" prioriteitsdiscipline waarbij een onderbroken bediening bij hervatting wordt hervat op het punt waarop deze voor het laatst onderbroken werd en tussen de "preemptive-repeat" prioriteitsdiscipline waarbij een onderbroken bediening bij hervatting opnieuw begint. De "preemptive-repeat" prioriteitsdiscipline zullen wij niet behandelen en voor deze discipline verwijzen wij naar Jaiswail (1968), zie ook Cohen (1969) en Conway, Maxwell en Miller (1967).

Naast deze regels zijn er een groot aantal andere prioriteitsregels die daar min of meer tussen in liggen. Bijvoorbeeld, de hieronder te behandelen "discretionary" prioriteitsdiscipline waarbij de bediening van een klant bij aankomst van een klant van hogere prioriteit alleen dan onderbroken wordt als de reeds gegeven bediening beneden een bepaalde waarde ligt. Daarnaast noemen wij de "alternating" prioriteitsdiscipline waarbij de klanten behorende tot dezelfde klasse als de klant die bediend wordt de hoogste prioriteit bezitten, en de "dynamic" prioriteitsdiscipline waarbij de prioriteit van een klant hoger wordt naarmate de tijd dat de klant in het systeem is toeneemt. Voor de "alternating" prioriteitsdiscipline verwijzen wij naar Avi-Itzhak, Maxwell en Miller (1965) en naar Stidham (1973), en voor de "dynamic" prioriteitsdiscipline verwijzen wij naar Jaiswail (1968).

4.2. De "non-preemptive" prioriteitsdiscipline

Beschouw een wachttijdsysteem met 1 bediende waar r verschillende typen van klanten aankomen volgens onderling onafhankelijke Poisson processen. De klanten van type i komen aan volgens een Poisson proces met parameter λ_i, $i=1,\ldots,r$. De bedieningstijden van de klanten zijn onderling onafhankelijke stochastische variabelen waarbij de bedieningstijden van de klanten van type i eenzelfde kansverdeling met eindig eerste moment μ_i en eindig tweede moment $\mu_i^{(2)}$ bezitten, $i=1,\ldots,r$. Wij nemen aan dat $\rho = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\mu_i$ kleiner dan 1 is.

De klanten worden één voor één bediend. Een klant die bij aankomst de bediende vrij treft wordt direkt bediend, en een klant die bij aankomst de bediende bezet treft blijft wachten totdat hij bediend wordt. Als een bediening afgelopen is en er staan klanten te wachten, dan vangt direkt een volgende bediening aan. Wij beschouwen nu de rijdiscipline waarbij een klant van type i prioriteit heeft boven een klant van type j voor $1 \le i < j \le r$ en waarbij een bediening nimmer onderbroken wordt als deze eenmaal begonnen is. Verder geldt dat de klanten uit eenzelfde prioriteitsklasse in volgorde van aankomst bediend worden. Deze rijdiscipline heet de "non-preemptive" prioriteitsdiscipline en is voor het eerst bestudeerd door Cobham (1954). Dit prioriteitsmodel vormt een basismodel voor vele andere prioriteitsmodellen.

Wij zullen nu een uitdrukking afleiden voor de gemiddelde wachttijd per klant van type i, $i=1,\ldots,r$. Daartoe maken wij eerst de volgende opmerkingen met betrekking tot het aankomstproces, vgl. blz. 4. De klanten behorende tot een klasse kleiner dan of gelijk aan k komen aan volgens een Poisson proces met parameter $\lambda_1+\ldots+\lambda_k$. Voorts geldt dat verwachting van de bedieningstijd van een willekeurige klant behorende tot een klasse kleiner dan of gelijk aan k gelijk is aan

$$(4.1) \qquad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mu_j / (\lambda_1 + \ldots + \lambda_k).$$

In het bijzonder geldt dat de klanten tesamen aankomen volgens een Poisson proces met parameter $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_r$ en dat

$$(4.2) \qquad E\underline{s} = \sum_{j=1}^{r} (\lambda_j/\lambda)\mu_j \qquad \text{en } E\underline{s}^2 = \sum_{j=1}^{r} (\lambda_j/\lambda)\mu_j^{(2)},$$

waarbij $\underline{s}$ verdeeld is als de bedieningstijd van een willekeurige klant. Merk op dat $\rho = \lambda E\underline{s}$.

Wij definiëren nu voor $i=1,\ldots,r$ de volgende stochastische variabelen.

$\underline{d}_{ni}$ = de hoeveelheid tijd die door de n^{de} klant van type i wordt doorgebracht in het systeem alvorens zijn bediening begint, $n \geq 1$.

$\underline{v}_i(t)$= de hoeveelheid tijd die een klant van type i aankomend op tijdstip t moet wachten alvorens zijn bediening begint, $t \geq 0$.

$\underline{L}_q^{(i)}(t)$ = het aantal klanten van type i dat op tijdstip t in het systeem aanwezig is en waarvan de bediening nog niet begonnen is, $t \geq 0$.

$\underline{R}(t)$ = de op tijdstip t resterende bedieningstijd van de klant die op tijdstip t bediend wordt als op tijdstip t het systeen niet leeg is, = 0 als op tijdstip t het systeem leeg is, $t \geq 0$.

Kies nu i vast en veronderstel dat op tijdstip 0 een klant van type i aankomt die geen andere klanten in het systeem aantreft. Het zal duidelijk zijn dat de tijdstippen $\underline{T}_{0i}=0, \underline{T}_{1i}, \underline{T}_{2i}, \ldots$ waarop een klant van type i aankomt en geen andere klanten in het systeem aantreft regeneratietijdstippen vormen voor zowel het proces $\{\underline{v}_i(t), t\geq 0\}$ als het proces $\{\underline{L}_q^{(i)}(t), t\geq 0\}$. Behalve deze processen is ook de rij $\{\underline{d}_{ni}, n\geq 1\}$ regeneratief waarbij de regeneratieindices van deze rij gegeven worden door $1, \underline{\nu}_{1i}+1, \underline{\nu}_{1i}+\underline{\nu}_{2i}+1, \ldots$ waarbij $\underline{\nu}_{ki}$ het aantal klanten van type i dat bediend wordt in $[T_{k-1,i}, T_{ki}]$, $k=1,2,\ldots$. Met behulp van stelling 1.1 volgt eenvoudig dat

$$E\underline{T}_{1i}, E\underline{\nu}_{1i}, E\Big[\int_0^{\underline{T}_{1i}} \underline{v}_i(t)dt\Big],\ E\Big[\int_0^{\underline{T}_{1i}} \underline{L}_q^{(i)}(t)dt\Big] \text{ en } E\Big[\sum_{j=1}^{\underline{\nu}_{1i}} \underline{d}_{ji}\Big]$$

eindig zijn. Op grond van relatie (2.2) geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} P\{\underline{d}_{ni} \le x\} = \lim_{t\to\infty} P\{\underline{v}_i(t) \le x\} \qquad \text{voor alle } x \ge 0.$$

Uit deze betrekking en de stellingen 2.1 en 2.2 volgt nu eenvoudig dat

$$(4.3) \qquad W_q^{(i)} = \lim_{t\to\infty} (1/t)E\Big[\int_0^t \underline{v}_i(s)ds\Big]$$

waarbij

$$(4.4) \qquad W_q^{(i)} = \lim_{n\to\infty} (1/n)E\Big[\sum_{k=1}^{n} \underline{d}_{ki}\Big].$$

Wij zullen nu het rechterlid van (4.3) bepalen. Daartoe merken wij eerst op dat de kansverdeling van $\underline{v}_i(t)$ hetzelfde als voor het geval waar de klanten van type $j < i$ in volgorde van aankomst bediend worden. Met behulp van deze opmerking, bovenstaande opmerkingen omtrent het aankomstproces (zie 4.1)) en de eerste relatie in stelling 1.1(a), vinden wij dat

$$(4.5) \qquad E\underline{v}_i(t) = \Big[\sum_{j=1}^{i} \mu_j E\underline{L}_q^{(j)}(t) + E\underline{R}(t)\Big]/\Big(1-\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j\mu_j\Big) \qquad \text{voor } t \ge 0,$$

waarbij $\sum_1^0 = 0$. Op grond van relatie (2.4) geldt

$$(4.6) \qquad L_q^{(j)} = \lambda_j W_q^{(j)} \qquad \text{voor } j=1,\dots,r$$

waarbij

$$(4.7) \qquad L_q^{(j)} = \lim_{t\to\infty} (1/t)E\Big[\int_0^t \underline{L}_q^{(j)}(s)ds\Big].$$

Vervolgens merken wij op dat het proces $\{\underline{R}(t), t\ge 0\}$ regeneratief is waarbij de tijdstippen waarop een bediening beëindigd wordt en geen klanten meer in het systeem achterblijven regeneratietijdstippen zijn. Om de limiet van $E[\int_0^t \underline{R}(s)ds]/t$ te berekenen, veronderstel dat tijdstip 0 een dergelijk regeneratietijdstip is, laat $\underline{t}$ het eerstvolgende regeneratietijdstip van dit type zijn en laat $\underline{\nu}$ het aantal klanten zijn dat bediend wordt in $(0,\underline{t}]$. Uit stelling 1.1(a) volgt $E\underline{t} = 1/\lambda(1-\rho)$ en $E\underline{\nu} = 1/(1-\rho)$ aangezien de verdelingen van $\underline{t}$ en $\underline{\nu}$ hetzelfde zijn als voor het geval de klanten in volgorde van aankomst bediend worden. Met behulp van stelling 2.1(a) en (4.2) vinden wij dat

$$\text{(4.8)} \qquad \lim_{t\to\infty} (1/t)E\left[\int_0^t \underline{R}(s)ds\right] = E\left[\int_0^{\underline{t}} \underline{R}(s)ds\right]/E\underline{t} =$$

$$= E\underline{\nu}(E\underline{s}^2/2)/E\underline{t} = \lambda E\underline{s}^2/2 = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\mu_j^{(2)}/2.$$

Uit (4.3) - (4.8) volgt nu

$$W_q^{(i)} = \left[\sum_{j=1}^{i} \lambda_j\mu_j W_q^{(j)} + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\mu_j^{(2)}/2\right]/\left(1-\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j\mu_j\right).$$

Deze relatie geldt voor alle $i=1,\dots,r$. Met induktie naar i volgt nu eenvoudig

$$\text{(4.9)} \qquad W_q^{(i)} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\mu_j^{(2)}/2\left(1-\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_j\mu_j\right)\left(1-\sum_{j=1}^{i}\lambda_j\mu_j\right) \qquad \text{voor } i=1,\dots,r.$$

Tenslotte merken wij op dat de gemiddelde hoeveelheid tijd die per klant wordt doorgebracht in het systeem alvorens zijn bediening begint, gelijk is aan

$$\text{(4.10)} \qquad W_q = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i/\lambda)W_q^{(i)}.$$

<u>Toepassing 1.</u>

Beschouw het bovenstaand wachttijdsysteem. Veronderstel nu dat voor een klant van type i wachttijdkosten c_i gemaakt worden per tijdseenheid dat de klant op bediening wacht, $i=1,\dots,r$. Voor elke permutatie $(n_1,\dots,n_r)$ van $(1,\dots,r)$ definieren wij de politiek $(n_1,\dots,n_r)$ als de "non-preemptive" prioriteitsdiscipline waarbij de klanten van type n_i prioriteit hebben boven de klanten van type n_j voor $1 \le i < j \le r$. Voor een politiek $(n_1,\dots,n_r)$

geldt dat op de lange duur de gemiddelde wachttijdkosten per tijdseenheid gelijk zijn aan (vgl. (4.6)),

$$(4.11) \qquad \sum_{i=1}^{r} c_{n_i} \lambda_{n_i} W_q^{n_i},$$

waarbij $W_q^{n_i}$ gelijk is aan het rechterlid van (4.9) waarin λ_j, μ_j en $\mu_j^{(2)}$ vervangen zijn door λ_{n_j}, μ_{n_j} en $\mu_{n_j}^{(2)}$. Door permutaties te vergelijken die op slechts twee plaatsen verschillen kan men eenvoudig bewijzen dat (4.11) minimaal is voor de politiek $(n_1,\ldots,n_r)$ met (zie Brosh en Naor (1963) of Cox en Smith (1960)).

$$(4.12) \qquad c_{n_1}/\mu_{n_1} \geq c_{n_2}/\mu_{n_2} \geq \ldots \geq c_{n_r}/\mu_{n_r}.$$

M.a.w. de prioriteiten worden toegekend in volgorde van afnemende grootte van de quotienten $c_i/\mu_i, i=1,\ldots,r$, waarbij het klantentype waarvoor het quotient van de wachttijdkosten per tijdseenheid en de verwachte bedieningstijd het grootst is de hoogste prioriteit heeft. Als speciaal geval vinden wij dat voor de klasse van politieken $(n_1,\ldots,n_r)$ de gemiddelde wachttijd per klant minimaal is voor de politiek welke klantentype i prioriteit geeft boven klantentype j als de verwachte bedieningstijd voor een klant van type i kleiner is dan die van een klant van type j.

Toepassing 2.

Bij een loket met 1 bediende komen klanten aan volgens een Poisson proces met parameter λ. De bedieningstijden van de klanten zijn precies bekend op moment van aankomst en vormen onafhankelijke trekkingen uit eenzelfde kansverdeling met verdelingsfunktie $F(x)$ waarvan het eerste moment μ en het tweede moment $\mu^{(2)}$ eindig zijn. Wij nemen aan dat $F(x)$ een positieve kansdichtheid $f(x)$ bezit. Verder veronderstellen wij dat $\rho = \lambda\mu$ kleiner dan 1 is. Laat σ een vast positief getal zijn. Beschouw nu de non-preemptive prioriteitsdiscipline die klanten waarvan de bedieningstijd kleiner dan of gelijk aan σ is prioriteit geeft boven klanten met een bedieningstijd groter dan σ. Wij zullen nu de waarde van σ bepalen waarvoor in de klasse van deze prioriteitsregels de gemiddelde wachttijd per klant minimaal is.

Wij merken eerst op dat de klanten met een bedieningstijd kleiner dan of gelijk aan σ aankomen volgens een Poisson proces met parameter $\lambda_1 = \lambda F(\sigma)$ en dat de andere klanten aankomen volgens een Poisson proces met parameter $\lambda_2 = \lambda\{1-F(\sigma)\}$. De verdelingsfunktie van de bedieningstijd van een klant met bedieningstijd kleiner dan of gelijk aan σ wordt gegeven door $F(x)/F(\sigma)$ voor $0 \leq x \leq \sigma$, terwijl de verdelingsfunktie van de bedieningstijd van een klant met een bedieningstijd groter dan σ gelijk is aan $\{F(x)-F(\sigma)\}/\{1-F(\sigma)\}$ voor $x > \sigma$. Uit (4.9) en (4.10) leidt men nu eenvoudig af dat onder de prioriteitsdiscipline met scheidingspunt σ de gemiddelde hoeveelheid tijd die per klant wordt doorgebracht in het systeem alvorens zijn bediening begint, gelijk is aan

$$W_q(\sigma) = \lambda\mu^{(2)}\{1-\rho F(\sigma)\}/2(1-\rho)(1-\lambda \int_0^\sigma xf(x)dx).$$

De grootheid $W_q(\sigma)$ is minimaal voor de unieke waarde σ^* die voldoet aan

$$\sigma^* = \mu + \rho \int_0^{\sigma^*} F(x)dx.$$

Tevens gaat men eenvoudig na dat

$$W_q(\sigma^*) = (\mu/\sigma^*)\lambda\mu^{(2)}/2(1-\rho).$$

Merk op dat $W_q(\sigma^*)$ een faktor $\sigma^*/\mu(>1)$ kleiner is dan de gemiddelde wachttijd per klant voor het geval de klanten in volgorde van aankomst bediend worden.

Bovenstaande prioriteitsregel met 1 scheidingspunt kan worden gegeneraliseerd tot een prioriteitsregel met maximaal N scheidingspunten waarbij N een vast positief geheel getal is. Veronderstel dat wij N scheidingspunten $\sigma_1,\ldots,\sigma_N$ met $\sigma_0=0\leq\sigma_1\leq\ldots\leq\sigma_N<\sigma_{N+1} = \infty$ mogen kiezen zo dat de klanten met een bedieningstijd in $[\sigma_{i-1},\sigma_i)$ prioriteit hebben boven de klanten met een bedieningstijd in $[\sigma_i,\sigma_{i+1})$ voor $i=1,\ldots,N$, waarbij een bediening nimmer onderbroken mag worden als deze eenmaal begonnen is. Voor een dergelijke prioriteitsregel kan met behulp van dynamische programmering bepaald worden hoe bij vaste N de waarden $\sigma_1,\ldots,\sigma_N$ gekozen moeten worden opdat de gemiddelde wachttijd per klant minimaal is, zie Oliver en Pestalozzi (1965). Uiteraard is de minimale gemiddelde wachttijd per klant een niet-stijgende funktie van N.

Een extreem geval van een prioriteitsdiscipline gebaseerd op de bekend zijnde bedieningstijden van de klanten is de discipline welke de hoogste prioriteit geeft aan de klant met de kleinste bedieningstijd waarbij een bediening nimmer onderbroken mag worden als deze eenmaal begonnen is. Deze discipline heet de "*shortest-service-time*" prioriteitsdiscipline. Voor deze discipline is de gemiddelde hoeveelheid tijd die per klant wordt doorgebracht in het systeem alvorens zijn bediening begint, gelijk aan

$$W_q = \frac{\lambda\mu^{(2)}}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\{1-\rho(y)\}^2} f(y)dy$$

waarbij $\rho(y) = \lambda \int_0^y xf(x)dx$. Deze relatie kan op eenvoudige wijze uit (4.9) en (4.10) worden afgeleid door een limietovergang; voor een strenge afleiding verwijzen wij naar Takacs (1965).

Het zal intuitief duidelijk zijn dat de kleinste waarde voor de gemiddelde wachttijd per klant wordt bereikt voor de prioriteitsdiscipline die een onderbreking van een bediening toestaat waarbij geen reeds gegeven bediening verloren gaat en die de hoogste prioriteit geeft aan de klant met de kleinste resterende bedieningstijd. Deze discipline heet de "*shortest remaining service time*" prioriteitsdiscipline en is bestudeerd in Schrage en Miller (1968) en Schrage (1969).

4.3. De "preemptive-resume" prioriteitsdiscipline

Wij beschouwen nu voor het wachttijdsysteem uit paragraaf 4.2 de volgende rijdiscipline. De klanten van type i hebben prioriteit boven de klanten van type j voor $1 \leq i < j \leq r$. Als een klant van type i aankomt terwijl een klant van type $j > i$ wordt bediend, dan wordt deze bediening onmiddellijk onderbroken en vangt de bediening van de zojuist aangekomen klant aan. Bij een hervatting van een onderbroken bediening wordt deze hervat op het punt waar de bediening voor het laatst onderbroken werd, d.w.z. er gaat geen reeds gegeven bediening verloren. De klanten uit eenzelfde prioriteitsklasse worden in volgorde van aankomst bediend. Deze rijdiscipline heet de "preemptive-resume" prioriteitsdiscipline.

Definieer $\underline{d}_{ni}$ voor $i=1,\dots,r$ en $n \geq 1$ op dezelfde wijze als in paragraaf 4.2 en definieer $W_q^{(i)}$ door (4.4). Kies i vast. Merk op dat de klanten van type $j > i$ voor de klanten van type i van geen belang zijn. Het is nu eenvoudig in te zien dat de uitdrukking voor $W_q^{(i)}$ gelijk is aan de uitdrukking voor $W_q^{(r)}$ voor de "non-preemptive" prioriteitsdiscipline met $r = i$ prioriteitsklassen. Derhalve geldt (zie (4.9))

$$W_q^{(i)} = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j \mu_j^{(2)} / 2(1-\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \mu_j)(1-\sum_{j=1}^{i} \lambda_j \mu_j) \qquad \text{voor } i=1,\dots,r.$$

Vervolgens definiëren wij voor een klant van type i de stochastische variabele $\underline{\gamma}_i$ als de lengte van het tijdsinterval tussen het moment waarop de bediening van de klant begint en het moment waarop de bediening van de klant beëindigd wordt. Met behulp van de eerste relatie in stelling 1.1(a) en de in paragraaf 4.2 gemaakte opmerkingen over het aankomstproces gaat men eenvoudig na dat

$$E\underline{\gamma}_i = \mu_i / (1-\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \mu_j).$$

Tenslotte beschouwen wij het volgende kostenmodel. Voor een klant van type i worden wachttijdkosten c_i gemaakt per tijdseenheid dat de klant in het systeem is. Voor elke permutatie $(n_1,\dots,n_r)$ van $(1,\dots,r)$ definieer nu de politiek $(n_1,\dots,n_r)$ als de "preemptive-resume" prioriteitsdiscipline waarbij de klanten van type n_i prioriteit hebben boven de klanten van type n_j voor $1 \leq i < j \leq r$. Voor het geval de bedieningstijden *exponentieel* verdeeld zijn geldt dat binnen deze klasse van politieken de gemiddelde wachttijdkosten per tijdseenheid minimaal zijn voor de politiek $(n_1,\dots,n_r)$ met

$$c_{n_1}/\mu_{n_1} \geq c_{n_2}/\mu_{n_2} \geq \dots \geq c_{n_r}/\mu_{n_r}.$$

De afleiding van deze ongelijkheid is analoog aan die van (4.12) en kan gevonden worden in Brosh en Naor (1963) of Jaiswail (1968). In tegenstelling tot het "non-preemptive" model geldt bovenstaande relatie niet algemeen voor het "preemptive-resume" model wanneer de bedieningstijden niet exponentieel verdeeld zijn.

4.4. De "discretionary" prioriteitsdiscipline

Wij beschouwen het wachttijdsysteem uit paragraaf 4.2 met $r = 2$ typen van klanten. Wij nemen aan dat de bedieningsrijd van een klant van type 2 een constante B_2 is. De volgende prioriteitsdiscipline wordt beschouwd. De klanten van type 1 hebben prioriteit boven de klanten van type 2. Als een klant van type 1 aankomt terwijl een klant van type 2 bediend wordt dan wordt deze bediening alleen dan onderbroken om de aangekomen klant te bedienen als de bediening van de klant van type 2 minder dan een hoeveelheid tijd β gevorderd is, waarbij β een vast getal is met $0 \le \beta \le B_2$. Bij hervatting van een onderbroken bediening wordt deze hervat op het punt waar de bediening voor het laatst onderbroken werd, d.w.z. reeds gegeven bediening gaat niet verloren. De klanten uit eenzelfde prioriteitsklasse worden in volgorde van aankomst bediend. Deze rijdiscipline wordt de "discretionary" prioriteitsdiscipline genoemd. Voor deze discipline zullen nu een uitdrukking afleiden voor de gemiddelde wachttijd per klant van type $i, i=1,2$. De behandeling in deze paragraaf is gebaseerd op Avi-Itzhak, Brosh en Naor (1964).

Wij definiëren voor $i=1,2$ de processen $\{\underline{v}_i(t), t\ge 0\}, \{\underline{L}_q^{(i)}(t), t\ge 0\}$ en $\{\underline{d}_{ni}, n\ge 1\}$ op dezelfde wijze als in paragraaf 4.2. Op geheel analoge wijze als in paragraaf 4.2 gaat men na dat de limieten

$$W_q^{(i)} = \lim_{n\to\infty} (1/n)E\Big[\sum_{k=1}^{n} \underline{d}_{ki}\Big], \quad L_q^{(i)} = \lim_{t\to\infty} (1/t)E\Big[\int_0^t \underline{L}_q^{(i)}(s)ds\Big]$$

en

$$\lim_{t\to\infty} (1/t)E\Big[\int_0^t \underline{v}_i(s)ds\Big] \qquad \text{voor } i=1,2$$

bestaan en eindig zijn. Voorts geldt op grond van relatie (2.2) dat

(4.13) $$W_q^{(i)} = \lim_{t\to\infty} (1/t)E[\int_0^t \underline{v}_i(s)ds] \qquad \text{voor } i=1,2,$$

terwijl uit (2.4) volgt dat

(4.14) $$L_q^{(i)} = \lambda_i W_q^{(i)} \qquad \text{voor } i=1,2.$$

Het zal duidelijk zijn dat $W_q^{(2)}$ gelijk is aan de uitdrukking voor $W_q^{(2)}$ voor de "non-preemptive" prioriteitsdiscipline met $r = 2$ prioriteitsklassen. Derhalve geldt (zie (4.9))

(4.15) $$W_q^{(2)} = (\lambda_1\mu_1^{(2)} + \lambda_2 B_2^2)/2(1-\lambda_1\mu_1)(1-\lambda_1\mu_1-\lambda_2 B_2).$$

Definieer voor een klant van type 2 de stochastische variabele $\underline{\gamma}_2$ als de lengte van het tijdsinterval tussen het moment waarop zijn bediening begint en het moment waarop zijn bediening beeïndigd wordt. Met behulp van de eerste relatie in stelling 1.1(a) gaat men eenvoudig na dat

(4.16) $$E\underline{\gamma}_2 = \beta/(1-\lambda_1\mu_1) + B_2 - \beta.$$

Om $W_q^{(1)}$ te bepalen, definieren wij voor $t \geq 0$ de volgende stochastische variabelen

$\underline{R}_1(t)$ = de op tijdstip t resterende bedieningstijd van de klant van type 1 die op tijdstip t bediend wordt als op tijdstip t de bediening van een klant van type 1 gaande is,
= 0, anders.

$\underline{R}_2(t)$ = de op tijdstip t resterende bedieningstijd van de klant van type 2 die op tijdstip t bediend wordt als op tijdstip t de bediening van een klant van type 2 gaande is waarvan op tijdstip t de bediening reeds meer dan een tijd β gevorderd is,
= 0, anders.

Het zal duidelijk zijn dat

(4.17) $$E\underline{v}_1(t) = \mu_1 E\underline{L}_q^{(1)}(t) + E\underline{R}_1(t) + E\underline{R}_2(t) \qquad \text{voor } t \geq 0.$$

De processen $\{\underline{R}_1(t),t\geq 0\}$ en $\{\underline{R}_2(t),t\geq 0\}$ zijn regeneratief met als regeneratietijdstippen de tijdstippen waarop een bediening beëindigd wordt en geen klanten meer in het systeem achterblijven. Veronderstel voor het moment dat tijdstip 0 een dergelijk regeneratietijdstip is en laat $\underline{t}$ het eerstvolgende regeneratietijdstip van dit type zijn. Definieer $\underline{\nu}_i$ als het aantal klanten van type i dat in $(0,\underline{t}]$ bediend wordt voor $i=1,2$. Het zal duidelijk zijn dat de kansverdelingen van $\underline{t}$, $\underline{\nu}_1$ en $\underline{\nu}_2$ hetzelfde zijn als voor het geval de klanten in volgorde van aankomst bediend worden en een bediening nimmer onderbroken wordt. Met behulp van stelling 1.1(a) volgt nu eenvoudig dat $E\underline{t} = 1/\lambda(1-\rho)$ en $E\underline{\nu}_i = \lambda_i/\lambda(1-\rho)$ voor $i=1,2$, waarbij $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ en $\rho = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2 B_2$. Toepassing van stelling 2.1(a) levert nu

(4.18) $$\lim_{t\to\infty} (1/t)E[\int_0^t \underline{R}_1(s)ds] = E[\int_0^{\underline{t}} \underline{R}_1(s)ds]/E\underline{t} = $$
$$= E\underline{\nu}_1\mu_1^{(2)}/2E\underline{t} = \lambda_1\mu_1^{(2)}/2$$

en

(4.19) $$\lim_{t\to\infty} (1/t)E[\int_0^t \underline{R}_2(s)ds] = E[\int_0^{\underline{t}} \underline{R}_2(s)ds]/E\underline{t} = $$
$$= E\underline{\nu}_2(B_2-\beta)^2/2E\underline{t} = \lambda_2(B_2-\beta)^2/2.$$

Uit (4.13), (4.14) en (4.17) - (4.19) volgt dat

(4.20) $$W_q^{(1)} = \{\lambda_1\mu_1^{(2)} + \lambda_2(B_2-\beta)^2\}/2(1-\lambda_1\mu_1).$$

Tenslotte, veronderstel dat voor een klant van type i wachttijdkosten c_i worden gemaakt per tijdseenheid dat de klant in het systeem aanwezig is. Wij nemen aan dat $c_1/\mu_1 \geq c_2/B_2$, vgl. (4.12). Met behulp van (2.3) volgt dat het gemiddeld aantal klanten van type i dat in het systeem aanwezig gelijk is aan $L^{(i)}$ met $L^{(1)} = \lambda_1(\mu_1+W_q^{(1)})$ en $L^{(2)} = \lambda_2(E\underline{\gamma}_2+W_q^{(2)})$. Tesamen met (4.15), (4.16) en (4.20) volgt nu dat voor de "discretionary" prioriteitsdiscipline met parameter β de gemiddelde wachttijdkosten per tijdseenheid gelijk zijn aan

$$(4.21)\qquad c_1\lambda_1[\mu_1 + \{\lambda_1\mu_1^{(2)} + \lambda_2(B_2-\beta)^2\}/2(1-\lambda_1\mu_1)] + c_2\lambda_2[\beta/(1-\lambda_1\mu_1) +$$

$$+ B_2 - \beta + (\lambda_1\mu_1^{(2)} + \lambda_2B_2^2)/2(1-\lambda_1\mu_1)(1-\lambda_1\mu_1-\lambda_2B_2)].$$

Men gaat eenvoudig na dat de uitdrukking (4.21) minimaal is voor

$$(4.22)\qquad \beta^* = B_2 - c_2\mu_1/c_1.$$

Uit (4.22) volgt dat

$$c_1/\mu_1 \geq c_2/(B_2-\beta) \text{ voor } \beta \leq \beta^* \text{ en } c_2/(B_2-\beta) \geq c_1/\mu_1 \quad \text{voor } \beta \geq \beta^*.$$

Wij zien dus dat onder de "discretionary" prioriteitsdiscipline met parameterwaarde β^* de bediening van een klant van type 2 bij aankomst van een klant van type 1 alleen dan onderbroken wordt als het quotient van c_2 en de (verwachte) resterende bedieningstijd kleiner dan c_1/μ_1 is. Dit resultaat hebben wij bewezen voor het geval dat de bedieningstijd van een klant van type 2 een constante is. Echter dit resultaat geldt ook als de bedieningstijd van een klant van type 2 een stochastische variabele $\underline{b}_2$ is met de eigenschap dat $E(\underline{b}_2|\underline{b}_2>b)$ een niet-stijgende funktie van b is, zie Etschmaier (1972) en Jaiswail (1968).

Tenslotte maken wij de volgende opmerking. Stel $\mu_1 \leq B_2$. Aangezien de "discretionary" prioriteitsdiscipline met parameterwaarde $\beta = 0$ resp. $\beta = B_2$ gelijk is aan de "non-preemptive" resp. de "preemptive-resume" prioriteitsdiscipline, vinden wij door $c_1 = c_2 = 1$ te stellen in (4.22) dat toepassing van de "discretionary" prioriteitsdiscipline met parameterwaarde $\beta^* = B_2 - \mu_1$ leidt tot een lagere waarde van de gemiddelde hoeveelheid tijd die per klant in het systeem wordt doorgebracht dan toepassing van de "non-preemptive" of "preemptive-resume" prioriteitsdiscipline. Intuitief is dit te verklaren uit het feit dat de "discretionary" prioriteitsdiscipline gebruik maakt van de informatie hoe lang een bediening reeds gaande is.

LITERATUUR

Avi-Itzhak, B., Brosh, I. & P. Naor (1964), *On discretionary priority queuing,* Z. Angew. Math. Mech. 44, 235-242.

Avi-Itzhak, B., Maxwell, W.L. & L.W. Miller (1965), *Queuing with alternating priority,* Operations Res. 13, 306-318.

Balachandran, K.R. (1973), *Control policies for a single server system* Management Sci. 19, 1013-1018.

Balachandran, K.R. & H.C. Tijms (1974), *On the D-policy for the M\G\1 queue.*

Brosh, I. & P. Naor (1963), *On optimal disciplines in priority queuing,* Bull. Inst. Internat. Statist. 40, 593-609.

Chung, K.L. (1960), *Markov chains with stationary transition probabilities,* Springer-Verlag, Berlin.

Cobham, A. (1954), *Priority assignment in waiting line problems,* Operations Res. 2, 70-76.

Cohen, J.W. (1969), *The single server queue,* North-Holland, Amsterdam

Conway, R.W., Maxwell, W.L. & L.W. Miller (1967), *Theory of Scheduling,* Addison-Wesley, Massachusetts.

Cox, D.R. & W.L. Smith (1960), *Queues,* Methuen, Londen. Etschmaier, M.M.

Etschmaier, M.M. (1972), *Optimal priority queues: the simple discretionary priority rule,* Zeitschrift für Operations Res. Ser. A. 16, 101-112.

Feller, W.L. (1966), *An introduction to probability theory and its applications, Vol.. 2,* Wiley, New York.

Jaiswail, N.K. (1968), *Priority queues,* Academic Press, New York.

Jewell, W.S. (1967), *A simple proof of* L = λW, Operations Res. 15, 1109-1116.

Oliver, R.M. & G. Pestalozzi (1965), *On a problem of optimal priority classification,* J. Soc. Indust. Appl. Math. 13, 890-901.

Ross, S.M. (1970), *Applied probability models with optimization applications*, Holden-Day, San Francisco.

Schrage, L. & L.W. Miller (1966), *The queue M\G\1 with shortest remaining processing time discipline*, Operations Res. 14, 670-684.

Schrage, L. (1968), *A proof of the optimality of the shortest remaining processing time discipline*, Operations Res. 16, 687-690.

Stidham, S., Jr. (1972), *Regenerative processes in the theory of queues, with applications to the alternating priority queue*, Adv. Appl. Prob. 4, 542-577.

Stidham, S., Jr. (1974), *A last word on* L = λW, Operations Res. 24, 417-421.

Takâcs, L. (1964), *Priority queues*, Operations Res. 12, 63-74.

Tijms, H.C. (1973), *On a control policy for a single server queue*, Rapport BN 19/73, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

Wolff, R.W. (1970), *Work-conserving priorities*, J. Appl. Prob. 7, 327-337.

Yadin, M. & P. Naor (1963), *Queuing systems with removable service station*, Operat. Res. Quart. 14, 393-405.