BA

stichting mathematisch centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BC 13/75 JULI

J.K. LENSTRA & A.H.G. RINNOOY KAN

REIZEN OP EEN GRAAF

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

AMS (MOS) subject classification scheme (1970): 05-01, 05C35, 90-01, 90B35

REIZEN OP EEN GRAAF

J.K. LENSTRA
Mathematisch Centrum, Amsterdam

A.H.G. RINNOOY KAN
Interfaculteit Bedrijfskunde, Delft

SAMENVATTING

We houden ons bezig met een reiziger op een graaf die elke kant precies één keer wil doorlopen of elk punt precies één keer wil bezoeken en zich afvraagt of een dergelijk Eulerpad resp. Hamiltoncircuit bestaat. We bekijken tevens de met deze existentieproblemen samenhangende optimaliseringsproblemen, nl. het Chinese postbodeprobleem en het handelsreizigersprobleem, en maken enige opmerkingen over routeringsproblemen zoals die in de praktijk kunnen voorkomen.

TREFWOORDEN: *Eulerpad, Hamiltoncircuit, kortste-padprobleem, Chinese postbodeprobleem, handelsreizigersprobleem, praktijkproblemen*

REIZEN OP EEN GRAAF

door

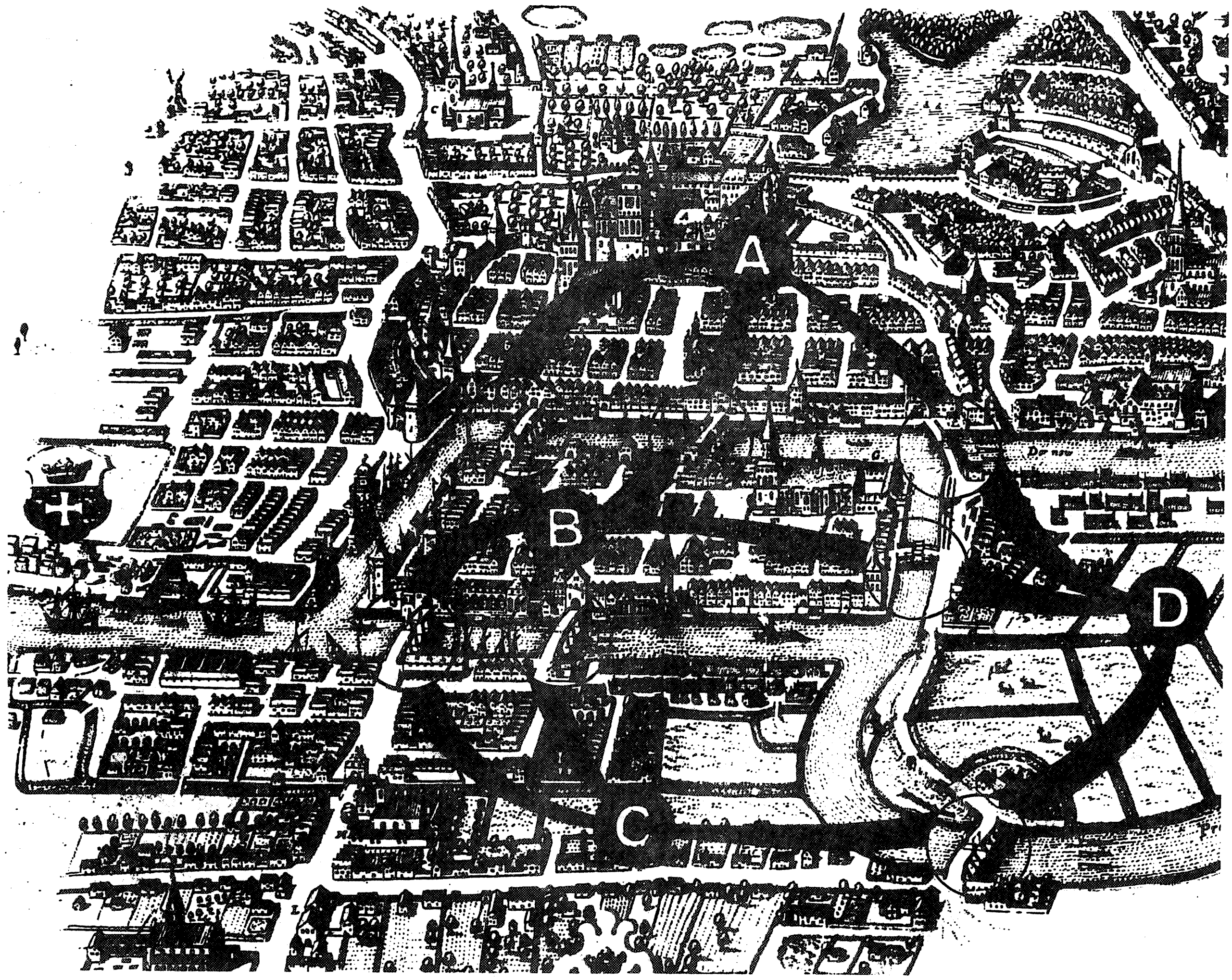
J.K. Lenstra & A.H.G. Rinnooy Kan

1. EULERPADEN EN HAMILTONCIRCUITS

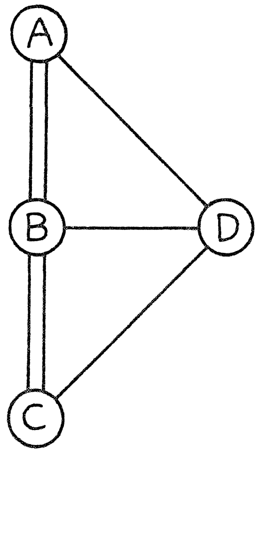
Een *graaf* G wordt gedefinieerd door een verzameling V van n *punten* en een collectie E van *kanten*. Een kant e = (v,w) is een element van V×V. Als G *gericht* is heeft een kant (v,w) *beginpunt* v en *eindpunt* w; de *ingraad* $\vec{d}(v)$ en *uitgraad* $\overleftarrow{d}(v)$ van v geven het aantal kanten aan met v als eindpunt resp. beginpunt. Als G *ongericht* is identificeren we (v,w) met (w,v); v en w *liggen op* (v,w) en de *graad* d(v) van v is het aantal kanten waarop v ligt. Merk op dat E een *zelfkant* (*lus*) (v,v) en *meervoudige kanten* (v,w),...,(v,w) kan bevatten.

Een reis op een graaf vindt plaats langs een *pad* $(v_1,v_2,\ldots,v_k)$ met $(v_i,v_{i+1}) \in E$ voor $i = 1,\ldots,k-1$; we spreken van een *circuit* als $v_1 = v_k$. Bij gerichte grafen is dus in elke kant sprake van éénrichtingsverkeer; kanten in een ongerichte graaf mogen in twee richtingen doorlopen worden. We beperken ons tot *samenhangende* grafen waarin met verwaarlozing van eventuele richtingen van de kanten, tussen elk tweetal punten een pad te vinden is.

Een reiziger op een graaf kan zich afhankelijk van zijn doelstellingen voor diverse problemen gesteld zien. Zo is het bijvoorbeeld mogelijk dat hij gaarne *elke kant precies één keer* zou willen doorlopen. Voor deze opgave zag de Zwitserse wiskundige LEONHARD EULER (1707-1783) zich geplaatst, toen hij wilde nagaan of het mogelijk was tijdens een wandeling in de stad Königsberg de zeven bruggen over de rivier de Pregel elk precies één keer over te steken. Waar zijn zwakke gezichtsvermogen uitgebreide experimenten tot een riskante aangelegenheid maakte, leerde een blik op de plattegrond (Figuur 1.1(a))



(a)



(b)

Figuur 1.1 De zeven bruggen van Königsberg hem al spoedig dat een dergelijke wandeling niet te maken was. Een achtste brug zou hiervoor noodzakelijk zijn en volgens niet bevestigde geruchten is die in het huidige Kaliningrad inmiddels ook aangelegd.

Elke brug in Figuur 1.1(a) komt overeen met een kant van de ongerichte graaf in Figuur 1.1(b). In het algemeen kan men zich afvragen of in een gegeven graaf een pad of circuit te vinden is dat elke kant precies één keer doorloopt. Een dergelijke route heet een *Eulerpad* resp. *Eulercircuit*.

Het is duidelijk dat in een ongerichte graaf die een Eulercircuit bevat de graad $d(v)$ van elk punt v even is. Bestaat er een Eulerpad, dan zijn er ten hoogste twee punten van oneven graad. In een gerichte graaf die een Eulercircuit bevat is $\vec{d}(v) = \overleftarrow{d}(v)$ voor elke v. Een analoge eigenschap van gerichte grafen die een Eulerpad bevatten is eenvoudig te formuleren.

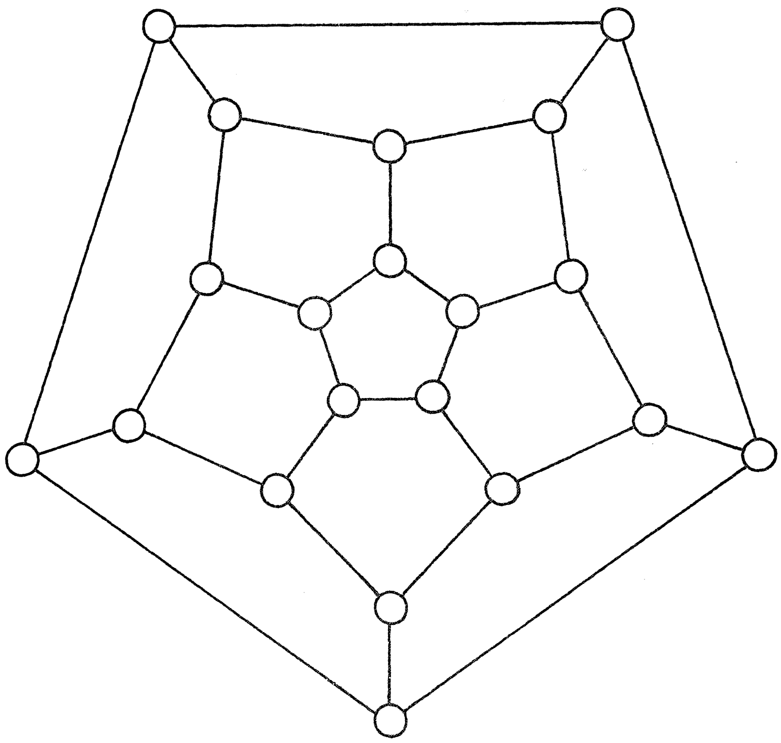
Deze *noodzakelijke* voorwaarden voor de existentie van Eulerpaden en Eulercircuits blijken ook *voldoende* te zijn. Men kan eenvoudig aantonen dat de onderstaande algoritme van FLEURY in een ongerichte graaf met $d(v)$ even voor alle v een Eulercircuit construeert:

Begin in een willekeurig punt en doorloop de kanten op willekeurige wijze met inachtneming van twee regels:

- verwijder elke doorlopen kant en elk punt dat daardoor graad 0 krijgt;
- gebruik een kant die na verwijdering de graaf in twee samenhangende stukken uiteen zou doen vallen alleen als het niet anders kan.

Deze methode laat zich gemakkelijk uitbreiden tot Eulerpaden en gerichte grafen.

Aangemoedigd door deze resultaten bekommeren wij ons nu om de reiziger op een graaf die gaarne *elk punt precies één keer* zou willen bezoeken en zich afvraagt of een dergelijke reis uitvoerbaar is. Hij zou op dit probleem gestuit kunnen zijn doordat hij een exemplaar van het spel "all around the world", ontworpen door de Ierse wiskundige SIR WILLIAM HAMILTON (1805-1865), heeft aangeschaft. De opgave in dit spel bestaat uit het vinden van een gesloten route langs de ribben van het dodecahedron, afgebeeld in Figuur 1.2, waarbij elk hoekpunt precies één keer bezocht moet worden. Het spel was geen commercieel succes, maar de naam van de ontwerper is aan het probleem gekoppeld gebleven; een circuit of pad op een graaf dat elk punt precies



Figuur 1.2 "All around the world"

één keer bezoekt heet een *Hamiltoncircuit* resp. *Hamiltonpad*.

Analoog aan de analyse van Eulerpaden en Eulercircuits zouden wij noodzakelijke en voldoende voorwaarden willen weten voor de existentie van Hamiltoncircuits en Hamiltonpaden. Helaas stuiten wij hier op een berucht en vooralsnog onopgelost probleem. Er zijn slechts enkele *voldoende* voorwaarden bekend, zoals bijvoorbeeld de stelling van ORE:

Een ongerichte graaf bevat een Hamiltoncircuit (Hamiltonpad) als $n \geq 3$ en $d(v)+d(w) \geq n$ $(d(v)+d(w) \geq n-1)$ voor alle $(v,w) \notin E$.

Noodzakelijk zijn deze voorwaarden niet, zoals de bestudering van een regelmatige vijfhoek onmiddellijk aantoont. Een soortgelijk resultaat is:

Een gerichte graaf bevat een Hamiltonpad als voor elk paar $(v,w) \in V\times V$ geldt dat òf $(v,w) \in E$ òf $(w,v) \in E$ (een dergelijke graaf wordt een *tournooi* genoemd).

Voor de bewijzen van bovenstaande en vergelijkbare stellingen verwijzen we naar BERGE [3] en LIU [7].

Tot dusver is de reiziger op de graaf geconfronteerd met *existentie-problemen*. In een *gewogen* graaf, waar aan elke kant een gewicht (lengte) is toegekend, kan hij met *optimaliseringsproblemen* te maken krijgen. Hieraan besteden we aandacht in het volgende hoofdstuk.

VRAAGSTUKKEN

1.1 Formuleer het Königsberger bruggenprobleem als het probleem om in een ongerichte graaf een Hamiltonpad te vinden.

1.2 Kunnen de 28 dominostenen zodanig in een cirkel gelegd worden dat de aangrenzende helften van elk paar opeenvolgende dominostenen gelijk zijn?

1.3 Laat zien dat 2^n nullen en enen zodanig op een cirkel te rangschikken zijn dat de 2^n n-tupels van n opeenvolgende cijfers alle verschillend zijn. (Er zijn $2^{2^{n-1}-n}$ dergelijke *De Bruijn-rijen.*)

1.4 Laat zien dat de 2^n verschillende n-tupels van nullen en enen zodanig op een cirkel te rangschikken zijn dat elke twee opeenvolgende n-tupels slechts op één plaats van elkaar verschillen. (Het is niet bekend hoeveel dergelijke *binaire Gray-codes* er zijn als functie van n.)

1.5 Stel dat er één drukpers en één bindmachine beschikbaar zijn om n boeken te produceren. Laten d_i en b_i de tijden zijn benodigd om boek i te drukken resp. te binden. Als voor elk tweetal boeken (i,j) geldt dat òf $d_i \leq b_j$ òf $d_j \leq b_i$, laat dan zien dat de boeken in een zodanige volgorde kunnen worden gedrukt dat de bindmachine zonder interrupties in bedrijf is.

1.6 Een paard moet elk veld van een n×n-schaakbord precies één keer bezoeken en weer op zijn startveld terugkeren. Is dit mogelijk voor n = 4, n = 6, n = 8?

2. KORTSTE PADEN, CHINESE POSTBODEN EN HANDELSREIZIGERS

Bevindt een reiziger zich in een punt van een gewogen graaf G, dan is een voor de hand liggende vraag welke van de paden naar een ander punt het kortste is. Laat G een gerichte graaf zijn met $V = \{v_1,\dots,v_n\}$; aan elke kant $(v_i,v_j) \in E$ is een niet-negatief gewicht c_{ij} toegekend. De lengte van het kortste pad van v_1 naar v_j wordt aangeduid met d_j, waarbij $d_1 = 0$.

Onderstel eerst dat G *acyclisch* is, d.w.z. geen circuits bevat. De kortste paden van v_1 naar alle punten v_j die uit v_1 bereikbaar zijn kunnen dan recursief worden bepaald m.b.v. de vergelijking

$$d_j = \min\{d_i+c_{ij} \mid (v_i,v_j) \in E\}.$$

Het is duidelijk dat deze methode hoogstens $\frac{1}{2}n(n-1)$ optellingen en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ vergelijkingen vergt: de *orde* van de methode is $O(n^2)$. Een dergelijke algoritme waarbij het aantal berekeningen polynomiaal begrensd is in de probleemparameters noemen we een *goede* of *efficiënte* algoritme. Merk op dat hier geen gebruik gemaakt wordt van de niet-negativiteit van de gewichten.

Indien G wel circuits bevat kunnen wij de volgende methode van G.B. DANTZIG toepassen. Stel dat we na de s-de stap van de algoritme de kortste paden gevonden hebben van v_1 naar alle punten in een verzameling $S \subset V$ met $|S| = s$. We bepalen voor elk punt $v_i \in S$ een punt $v_{i'} \notin S$ zodanig dat $c_{ii'} = \min\{c_{ik} \mid v_k \notin S,\ (v_i,v_k) \in E\}$. We kiezen vervolgens uit de punten $v_{i'}$ een punt $v_{j'}$ waarvoor

$$d_j+c_{jj'} = \min\{d_i+c_{ii'} \mid v_i \in S\}$$

en voegen $v_{j'}$ als (s+1)-ste punt aan S toe. Het is duidelijk dat $d_{j'} = d_j+c_{jj'}$, want elk pad van v_1 naar $v_{j'}$ moet via een punt $v_i \in S$ lopen en heeft dus een lengte tenminste gelijk aan $d_i+c_{ii'} \geq d_{j'}$.

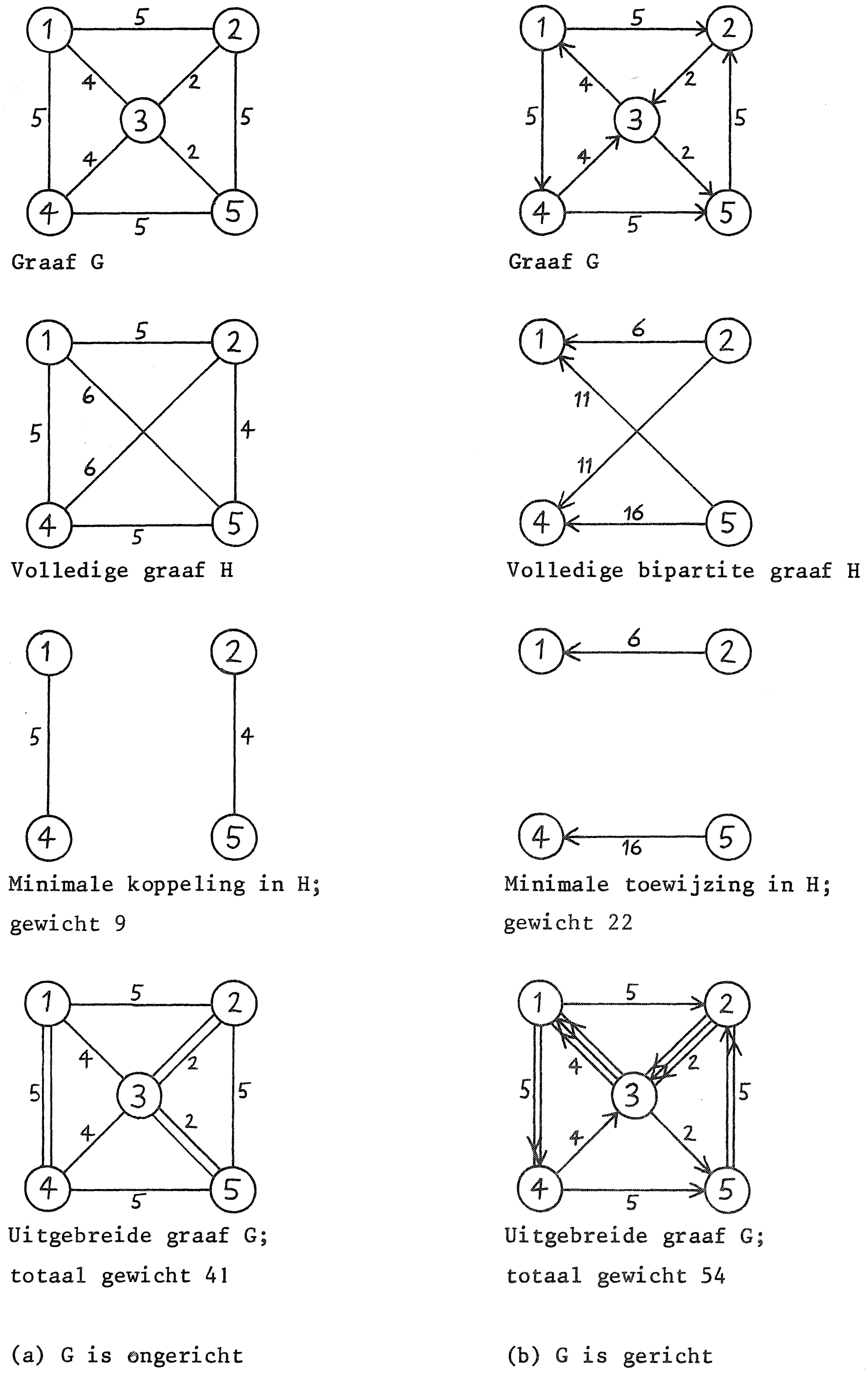
In een handige implementatie van E.W. DIJKSTRA is bovenstaande procedure uit te voeren in $O(n^2)$ stappen. Uitbreiding tot ongerichte grafen vindt plaats door elke ongerichte kant (v_i,v_j) te vervangen door twee gerichte kanten (v_i,v_j) en (v_j,v_i), beide met gewicht c_{ij}.

Staan wij ook negatieve gewichten toe, dan wordt het probleem lastiger maar het blijft efficiënt oplosbaar, tenzij de graaf circuits bevat van negatief totaal gewicht. Voor dit laatste geval is het bestaan van een efficiënte algoritme zeer onwaarschijnlijk (vgl. vraagstuk 2.3).

Gewapend met deze kennis wenden wij ons nu tot de reiziger die aan de hand van Eulers inzichten tot de conclusie is gekomen dat een eenmalig bezoek aan elke kant voor hem niet is weggelegd. Ongenoegen over deze situatie bestaat bijvoorbeeld bij een *postbode*, die zich beroepshalve toch verplicht acht een dergelijk bezoek af te leggen. Hij hoopt nu een zodanige gesloten route te kunnen vinden dat de totale lengte van de meer dan eens te doorlopen kanten (en daarmee de lengte van de gehele route) minimaal is. Wij kunnen hem onderstaande efficiënte algoritmen voor het *Chinese postbodeprobleem* (zo genoemd ter ere van de geestelijke vader MEI-KO KWAN) aanbieden.

Wij bekijken eerst het probleem op een *ongerichte* graaf G. De resultaten van hoofdstuk 1 wijzen uit dat wij paden zullen moeten toevoegen tussen punten van oneven graad, zodanig dat hun graad even wordt. In de *eerste stap* van de algoritme construeren wij een ongerichte graaf H op de m punten van G van oneven graad; merk op dat m even is. Tussen elk tweetal punten van H wordt een kant gelegd (een dergelijke graaf heet *volledig*) en elke kant (v,w) krijgt als gewicht de lengte van het kortste pad in G tussen v en w. Al deze gewichten zijn in $O(n^3)$ berekeningen te bepalen m.b.v. de algoritme van Dijkstra. In de *tweede stap* zoeken wij in H naar een deelverzameling van $\frac{1}{2}$m kanten van minimaal totaal gewicht zodanig dat elk punt op precies één van deze kanten ligt. Een dergelijke minimale *koppeling* is in $O(m^3)$ berekeningen te vinden m.b.v. een ingenieuze algoritme van J. EDMONDS. In de *derde stap* tenslotte breiden wij G uit met de $\frac{1}{2}$m paden die met de koppeling in H corresponderen. Alle punten van G zijn daardoor van even graad geworden en het kortste Eulercircuit voor de postbode laat zich vinden m.b.v. de algoritme van Fleury. De gehele procedure, daterend uit 1965, is geïllustreerd aan een voorbeeld in Figuur 2.1(a).

Voor het Chinese postbodeprobleem op een *gerichte* graaf G was al langer een efficiënte algoritme bekend. Uit eerdere overwegingen is het duidelijk dat we alleen paden hoeven toe te voegen van $S = \{v|\vec{d}(v) > \overleftarrow{d}(v)\}$ naar $T = \{v|\vec{d}(v) < \overleftarrow{d}(v)\}$. In de *eerste stap* van de algoritme vervangen wij elk



<u>Figuur 2.1</u> Chinese postbodeproblemen

punt $v \in S \cup T$ door $|\vec{d}(v)-\overleftarrow{d}(v)|$ kopieën; dit geeft twee verzamelingen S' en T' met $|S'| = |T'| = m$. Wij construeren een graaf H met puntenverzameling $S' \cup T'$ en kantenverzameling $S' \times T'$ (een graaf op twee disjuncte puntenverzamelingen waarin geen enkele kant twee punten uit dezelfde verzameling met elkaar verbindt heet *bipartiet*; H is een volledige bipartite graaf). Elke kant krijgt weer als gewicht de lengte van het overeenkomstige kortste pad in G. In de *tweede stap* zoeken wij in H naar een minimale koppeling van m kanten. Het koppelingsprobleem in een bipartite graaf heet een *toewijzingsprobleem*, omdat aan elk punt in S' precies één punt in T' wordt toegewezen en vice versa. Er bestaan diverse technieken om een minimale toewijzing in $O(m^3)$ berekeningen te bepalen. In de *derde stap* tenslotte levert uitbreiding van G met de m kortste paden die met deze toewijzing corresponderen, de oplossing van het probleem. Een uitgewerkt voorbeeld is te vinden in Figuur 2.1(b).

Slechts wanneer G een *gemengde* graaf is, d.w.z. zowel gerichte als ongerichte kanten bevat, kunnen wij het Chinese postbodeprobleem niet op efficiënte wijze oplossen. Waar het de bepaling van routes betreft wordt een sneeuwruimer voor moeilijker opgaven geplaatst dan een brievenbesteller.

Het is te verwachten dat ook de reiziger die een eenmalig bezoek aan elk punt wenst te brengen deze eis zal afzwakken tot het tenminste één keer bezoeken van elk punt. Definiëren we op de puntenverzameling V van de oorspronkelijke graaf G een volledige graaf G* met als gewicht c_{ij} voor elke kant (v_i,v_j) de lengte van het corresponderende kortste pad in G, dan is hij nu in wezen geïnteresseerd in de vraag welke van de $(n-1)!$ Hamiltoncircuits in G* het kortste is. De oplossing van een dergelijk probleem kan bijvoorbeeld van belang zijn voor een *handelsreiziger* die zijn klanten liefst in een zodanige volgorde bezoekt dat hij zo snel mogelijk weer thuis is. Het zal geen enkele automobilist verbazen dat het handelsreizigersprobleem *asymmetrisch* kan zijn: c_{ij} en c_{ji} zijn dan niet gelijk voor alle (v_i,v_j).

Geven wij elke kant van G een gewicht gelijk aan 1, dan zou een efficiënte methode om het kortste Hamiltoncircuit in G^* te bepalen ons tevens op efficiënte wijze duidelijk maken of G een Hamiltoncircuit bevat of niet; in het laatste geval is de optimale route in G^* namelijk langer dan n. Gezien de complexiteit van het existentieprobleem op G lijkt het niet waarschijnlijk dat een dergelijke efficiënte algoritme bestaat.

Gelukkig zijn er diverse methoden geconstrueerd waarmee de handelsreiziger toch, zijn het op niet efficiënte wijze, geholpen kan worden. Een belangrijke plaats nemen de z.g. *branch-and-bound* methoden in, die gebaseerd zijn op *impliciete aftelling* van alle $(n-1)!$ elementen van de oplossingsverzameling F. Elk element van F correspondeert met een bepaald Hamiltoncircuit in G^*. F wordt nu successievelijk gesplitst in steeds kleinere deelverzamelingen. Een deelverzameling $F' \subset F$ kan op twee manieren *geëlimineerd* worden:

(1) F' bevat slechts één oplossing;

(2) geen enkele oplossing in F' heeft een lagere waarde dan de beste oplossing die wij tot op dat moment gevonden hebben.

Een branch-and-bound procedure ligt zodoende vast door drie voorschriften:

(A) een *splitsingsvoorschrift* dat aangeeft hoe een bepaalde deelverzameling $F' \subseteq F$ gesplitst moet worden in (liefst disjuncte) deelverzamelingen;

(B) een *ondergrensberekening* die bij elke gegenereerde deelverzameling F' een getal $LB(F')$ levert dat kleiner dan of gelijk aan de waarde van elke oplossing in F' is;

(C) een *zoekstrategie* die vastlegt welke van de nog niet geëlimineerde deelverzamelingen in aanmerking komt voor verdere splitsing.

Op elk moment levert de waarde van de beste tot dan toe gevonden oplossing een *bovengrens* UB op voor de waarde van de optimale oplossing. Als F' t.g.v. (1) wordt geëlimineerd kan dit een verlaging van UB tot gevolg hebben; eliminatie t.g.v. (2) vindt plaats als $LB(F') \geq UB$. We zoeken nu net zo lang verder, voortdurend UB aanpassend, totdat alle gegenereerde deelverzamelingen geëlimineerd zijn. UB is dan gelijk aan de waarde van de optimale oplossing.

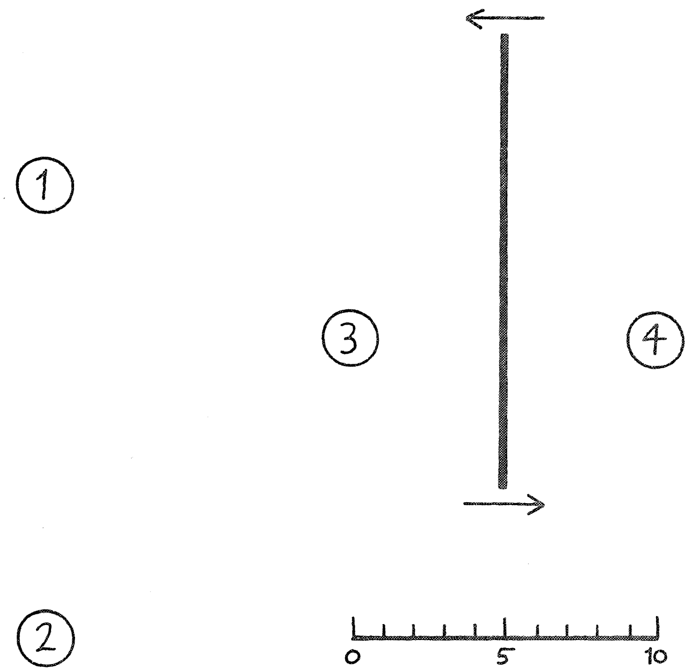
Voor het handelsreizigersprobleem zijn verscheidene splitsingsvoorschriften en ondergrensberekeningen bedacht. Een ondergrens $LB(F)$ voor de lengte van het kortste Hamiltoncircuit in G^* laat zich bijvoorbeeld berekenen door een bipartite graaf H te construeren op twee kopieën V' en V'' van V met kantenverzameling $\{(v_i,v_j) | v_i \in V';\ v_j \in V'',\ i \neq j\}$; het gewicht van (v_i,v_j) is c_{ij}. In H bepalen we een minimale toewijzing. Het is duidelijk dat bij de met deze toewijzing corresponderende reis in G^* precies één keer uit elk punt vertrokken wordt en precies één keer in elk punt aangekomen wordt. Niets garandeert echter dat de reis *samenhangend* is; hij kan best bestaan uit meer dan één circuit. Waar wij dus t.a.v. een Hamiltoncircuit strengere eisen stellen, is het totale gewicht van een minimale toewijzing in H nooit groter dan (en dus een ondergrens voor) de lengte van het kortste Hamiltoncircuit in G^*.

Als de toewijzing in H correspondeert met precies één circuit in G^* zijn we natuurlijk klaar. Anders bekijken we één van de circuits $(v_{i_1},v_{i_2},\ldots,v_{i_k},v_{i_1})$ (bijvoorbeeld het circuit waarvoor k minimaal is). De kanten in dit circuit kunnen nooit alle in één Hamiltoncircuit voorkomen en dit levert ons een splitsingsvoorschrift. We creëren k deelverzamelingen van F die tezamen F overdekken, door achtereenvolgens de kanten $(v_{i_1},v_{i_2}),\ldots,(v_{i_{k-1}},v_{i_k}),(v_{i_k},v_{i_1})$ te verbieden middels het op oneindig stellen van resp. $c_{i_1i_2},\ldots,c_{i_{k-1}i_k},c_{i_ki_1}$. De oplossing van de nieuwe toewijzingsproblemen levert een ondergrens voor elk van deze deelverzamelingen op.

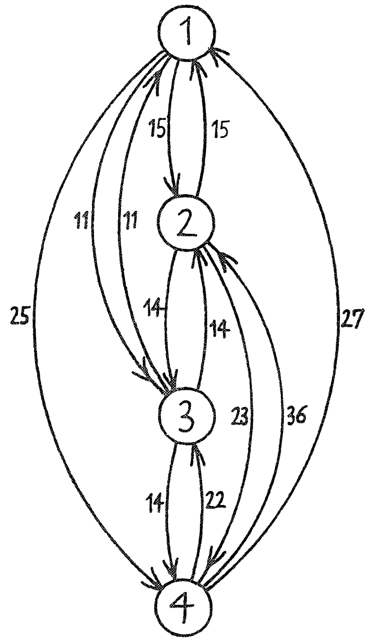
Wij kiezen nu (bijvoorbeeld) de deelverzameling met de laagste ondergrens voor verder onderzoek. Op deze wijze voortgaand tellen wij de gehele verzameling F impliciet af; elke gegenereerde deelverzameling wordt gekarakteriseerd door een aantal kanten die verboden zijn doordat hun gewichten op oneindig zijn gesteld.

Bij wijze van voorbeeld bekijken wij de situatie weergegeven in Figuur 2.2(a). De grafen G^* en H zijn afgebeeld in Figuur 2.2(b,c). De minimale toewijzing in H bestaat uit de kantenverzameling $\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$, heeft gewicht LB(F) = 66, en correspondeert met twee circuits (1,2,1) en (3,4,3) in G^*. F wordt gesplitst in twee deelverzamelingen F_1 en F_2 door resp. c_{12} en c_{21} op oneindig te stellen. In F_1 heeft de minimale toewijzing $\{(1,3),(2,4),(3,2),(4,1)\}$ een gewicht $LB(F_1) = 75$; in F_2 heeft de minimale toewijzing $\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$ een gewicht $LB(F_2) = 70$. Beide toewijzingen leveren een Hamiltoncircuit in G^*; het tweede hiervan is de optimale oplossing (1,2,3,4,1).

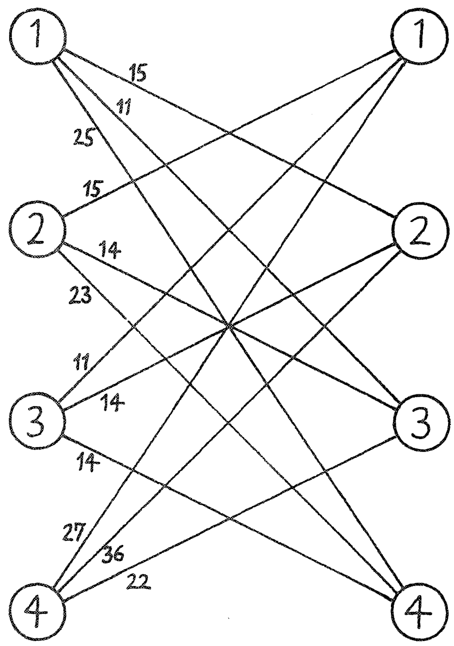
De hierboven geschetste procedure is in 1958 ontwikkeld door W.L. EASTMAN. Zij heeft twee nadelen:



(a) Plattegrond met wegversperring



(b) Volledige graaf G^*



(c) Bipartite graaf H

<u>Figuur 2.2</u> Een handelsreizigersprobleem

(1) als het probleem symmetrisch is, d.w.z. $c_{ij} = c_{ji}$ voor alle (v_i,v_j), zullen bij de ondergrensberekening relatief veel circuits van twee kanten ontstaan;

(2) het splitsingsvoorschrift leidt niet tot disjuncte deelverzamelingen.

Wij verwijzen naar [1] voor een bespreking van de wijze waarop deze bezwaren ondervangen kunnen worden.

Impliciete aftellingsprocedures als de bovenstaande worden gebruikt voor het oplossen van vele combinatorische optimaliseringsproblemen, indien er tenminste aanwijzingen zijn dat er geen efficiënte algoritme bestaat. De voornaamste uitdaging ligt dan in het construeren van een zodanig scherpe ondergrens dat de eventueel wat langere tijd die nodig is om hem te berekenen ruimschoots gecompenseerd wordt door de vroegtijdige eliminatie van grote deelverzamelingen. Bij elk van deze methoden is de rekentijd echter nogal onvoorspelbaar; vaak neemt zij drastisch (*superpolynomiaal*) toe met de omvang van het probleem. Bij grote problemen zoals die in de praktijk optreden ($n \geq 80$) zal men tevreden moeten zijn met het vinden van goede maar mogelijk niet optimale oplossingen. Hierover maken we enige opmerkingen in het laatste hoofdstuk.

VRAAGSTUKKEN

2.1 In een communicatienetwerk is de kans dat een bericht uit v in w aankomt gelijk aan p(v,w). Al deze kansen zijn onafhankelijk van elkaar. Formuleer het probleem van de betrouwbaarste route tussen twee punten als een kortste-padprobleem.

2.2 Als activiteit v vóór activiteit w moet geschieden geven wij dat aan d.m.v. een kant (v,w) in de gerichte graaf G. Aan ieder punt wordt een gewicht toegekend, corresponderend met de tijdsduur van de betreffende activiteit. De lengte van het langste pad tussen de (mogelijk fictieve) eerste en laatste activiteit bepaalt de minimale tijdsduur van het gehele project. Laat zien dat G acyclisch is en dat het zgn. *kritieke pad* op efficiënte wijze gevonden kan worden.

2.3 Vervang in een gewogen volledige graaf de gewichten c_{ij} door $\lambda - c_{ij}$, waarbij λ een groot getal is. Laat zien dat het kortste Hamiltonpad van v naar w in de oorspronkelijke graaf correspondeert met het langste pad van v naar w in de nieuwe graaf dat elk punt hoogstens één keer bezoekt. Waarom levert dit geen efficiënte algoritme (vgl. vraagstuk 2.2)?

2.4 Laat zien dat algoritmen om in een graaf
- het kortste Hamiltonpad van een gegeven punt v naar een gegeven punt w
- het kortste Hamiltonpad

te vinden gebruikt kunnen worden om het handelsreizigersprobleem op te lossen.

2.5 Op een machine moeten n produkten gefabriceerd worden. De omschakeltijd als produkt i direct gevolgd wordt door produkt j is gelijk aan c_{ij}. Laat zien dat het bepalen van de kortste totale produktietijd een handelsreizigersprobleem is.

2.6 Op een machine moeten n produkten gefabriceerd worden; elk produkt vereist één tijdseenheid. Als produkt i klaar komt op tijdstip t brengt dit kosten $c_i(t)$ met zich mee. De functies c_i zijn monotoon niet-dalend in t. Laat zien dat het vinden van een produktievolgorde die de totale kosten minimaliseert een toewijzingsprobleem is.

3. PRAKTIJKPROBLEMEN

Routeringsproblemen dienen zich in de praktijk niet altijd aan in de gestyleerde vorm van Chinese postbode- of handelsreizigersproblemen. Vaak is er meer dan één reiziger beschikbaar om de klanten te bezoeken; zowel de totale hoeveelheid goederen die een reiziger kan vervoeren als de afstand die hij kan afleggen zijn daarbij begrensd. Daarnaast stellen ook de klanten hun eisen t.a.v. het bezoektijdstip of zelfs t.a.v. de reiziger die zij wensen te ontvangen.

Stel dat m handelsreizigers onder dergelijke nevenvoorwaarden hun weg langs n klanten moeten vinden vanuit een gemeenschappelijk vertrekpunt v. We bekijken het vertrouwde handelsreizigersprobleem in een graaf op m+n punten, nl. m kopieën van het vertrekpunt en één punt voor elke klant. Elk hernieuwd bezoek aan v door de eenzame handelsreiziger correspondeert met het inzetten van een nieuwe reiziger in het oorspronkelijke probleem. Maken we de onderlinge afstand λ tussen de kopieën van v zeer groot, dan zullen inderdaad alle m reizigers op stap gaan; maken we λ zeer klein, dan zullen - met inachtneming van de oorspronkelijke restricties - zo weinig mogelijk reizigers gebruikt worden. In het algemeen kan men zeggen dat $-\lambda$ de kosten van het inzetten van een extra reiziger dient weer te geven. Op deze wijze is o.m. bij de PTT een aantal praktijkproblemen aangepakt; wij verwijzen naar [5] voor een uitgebreider toelichting.

Gezien de gebruikelijke omvang van praktijkproblemen, de verscheidenheid van de mogelijke nevenvoorwaarden en de fundamentele complexiteit van het handelsreizigersprobleem, zijn wij voor het oplossen van deze problemen aangewezen op *suboptimale* methoden (z.g. *heuristieken*) die relatief snel een goede maar wellicht niet optimale oplossing leveren.

Vaak kan bij het ontwikkelen van een dergelijke heuristiek met vrucht een beroep worden gedaan op ideeën ontwikkeld in de context van een gestyleerde vorm van het probleem. Zo heeft het vorige hoofdstuk ons bijvoorbeeld geleerd dat het Chinese postbodeprobleem aanzienlijk eenvoudiger is dan het handelsreizigersprobleem. Het ligt dan ook voor de hand om zoveel mogelijk punten die bezocht moeten worden te vervangen door kanten die doorlopen moeten worden en het resulterende probleem op te lossen met een impliciete aftellingsprocedure die gebruik maakt van verkregen inzichten in het Chinese postbodeprobleem. Een dergelijke omzetting van verplichte punten in verplichte kanten kan leiden tot een niet-optimale oplossing, maar deze methode geeft in de praktijk heel acceptabele resultaten (vgl. [8;9;6]).

Concluderend kan men zeggen dat het vele werk verzet om de klassieke problemen van postbode en handelsreiziger op te lossen het nodige rendement oplevert voor hen die onder ingewikkelder voorwaarden willen reizen op een graaf.

LITERATUUR

[1] BELLMORE, M., & J.C. MALONE, Pathology of traveling-salesman subtour elimination algorithms. *Operations Res.* 19 (1971), 278-307,1766.

[2] BERGE, C., *The Theory of Graphs and Its Applications*. Methuen, Londen (1962).

[3] BERGE, C., *Graphes et Hypergraphes*. Dunod, Paris (1970).

[4] LAWLER, E.L., *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*. Holt, Rinehart, and Winston, New York (to appear).

[5] LENSTRA, J.K. & A.H.G. RINNOOY KAN, Some simple applications of the travelling salesman problem. *Operational Res. Quart.* (to appear).

[6] LENSTRA, J.K. & A.H.G. RINNOOY KAN, On general routing problems. *Networks* (to appear).

[7] LIU, C.L., *Topics in Combinatorial Mathematics*. Mathematical Association of America (1972).

[8] ORLOFF, C.S., A fundamental problem in vehicle routing. *Networks* 4 (1974), 35-64.

[9] ORLOFF, C.S., Routing a fleet of M vehicles to/from a central facility. *Networks* 4 (1974), 147-162.

[10] WILSON, R.J., *Introduction to Graph Theory*. Oliver & Boyd, Edinburgh (1972).