stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BC 17/77 SEPTEMBER

G.L. WANROOY

ENIGE BEGRIPPEN UIT DE COÖPERATIEVE SPELTHEORIE

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O).

AMS(MOS) subject classification scheme (1970): 90D12

Enige begrippen uit de coöperatieve speltheorie

door

G.L. Wanrooy

SAMENVATTING

In deze syllabus worden begrippen uit de coöperatieve speltheorie geïntroduceerd, die gebruikt zullen worden bij de behandeling van toepassingen van coöperatieve spelen in de werkweek "Modelvorming met speltheorie".

1. INLEIDING

In de coöperatieve speltheorie zijn, in tegenstelling tot de niet coöperatieve theorie, mogelijkheden tot overleg en samenwerking tussen de spelers alvorens zij hun beslissingen nemen. In deze syllabus worden alleen die begrippen uit de coöperatieve speltheorie beschreven, die nodig zijn voor het behandelen van de toepassingen van coöperatieve spelen in [20]. Voor een meer volledige inleiding op dit gebied kan men zich wenden tot OWEN [15, ch VII.2 en VIII t/m X]. Andere teksten die goed als eerste kennismaking met coöperatieve speltheorie kunnen worden gelezen zijn: DAVIS [5, ch. 6], RAPOPORT [17] en LUCE & RAIFFA [13, ch. 6 en ch. 8 t/m 11]. We zullen ons beperken tot de meest verregaande vorm van samenwerking, d.w.z dat de uitkomst van het spel altijd optimaal is voor de groep van alle spelers tezamen. Zie bijvoorbeeld [1 en 6] voor modellen waarbij dit niet het geval behoeft te zijn.

Voorts zullen we ervan uitgaan dat de waarde die een speler toekomt is uitgedrukt in nutséénheden en onbeperkt overdraagbaar is aan andere spelers. Voor spelen waarbij deze nevenbetalingen verboden zijn zie bijvoorbeeld [2, 3 en 4]. Door deze aannamen vormt het bepalen van de beslissingen van de spelers een optimalisatieprobleem zonder strategische elementen. De speltheorie onderzoekt hoe de waarde die door coöperatief handelen wordt verkregen over de spelers wordt verdeeld. De inhoud van §2 t/m 5 komt globaal reeds voor in VON NEUMANN & MORGENSTERN [14]; §7 en §8 behandelen de inhoud van artikelen van SHAPLEY [19] respectievelijk SCHMEIDLER [18]. De begrippen zullen aan de hand van voorbeelden worden toegelicht. In deze voorbeelden worden nut en geld equivalent verondersteld.

2. KARAKTERISTIEKE FUNCTIEVORM

<u>VOORBEELD</u>. Drie bedrijven 1, 2 en 3 maken respectievelijk jaarlijks een winst van 1, 2 en 3 miljoen gulden. Een fusie tussen 1 en 2 levert een bedrijf dat jaarlijks 7 miljoen winst kan maken; tussen 2 en 3 wordt dit 8 miljoen en tussen 1 en 3 eveneens 8 miljoen. Een fusie tussen alle 3 bedrijven geeft een bedrijf met een jaarlijkse winst van 11 miljoen.

We veronderstellen dat het grootst mogelijke samenwerkingsverband ontstaat en dat de winst (11 miljoen) over de participanten moet worden verdeeld.

Als S een deelverzameling van de bedrijven is dan geven we de jaarlijkse winst in miljoenen guldens die deze bedrijven zonder steun van bedrijven buiten S kunnen maken aan met v(S). Dus $v(\{1\}) = 1$, $v(\{2\}) = 2$, $v(\{3\}) = 3$, $v(\{1,2\}) = 7$, $v(\{2,3\}) = 8$, $v(\{1,3\}) = 8$, $v(\{1,2,3\}) = 11$ en voor de volledigheid $v(\emptyset) = 0$.

De verzameling bedrijven tezamen met de winstfunctie v vormt een spel in karakteristieke functievorm waarvan we nu een definitie zullen geven.

<u>DEFINITIE</u>. Een *spel in karakteristieke functievorm* is een tweetal (N,v), waarbij $N = \{1,2,\ldots,n\}$ en v een functie van de deelverzamelingen van N (2^N) naar de reële getallen ($\mathbb{R}$) zodanig dat $v(\emptyset) = 0$.

De elementen van N noemen we *spelers* en v de *karakteristieke functie*. Een deelverzameling S van N noemen we een *coalitie* en v(S) de *waarde* van de coalitie S.

<u>DEFINITIE</u>. Een spel in karakteristieke functievorm is *super additief* als geldt:

(2.1) $\qquad v(S \cup T) \geq N(S) + v(T) \qquad$ voor alle $S,T \subset N$ met $S \cap T = \emptyset$

(2.1) houdt in dat twee samenwerkende disjuncte coalities tenminste de waarde kunnen realiseren die de coalities samen behalen bij afzonderlijk opereren. Als het spel in karakteristieke functievorm is afgeleid van een spel in normale vorm is hieraan altijd voldaan. Wij zullen ons tot super additieve spelen beperken.

3. IMPUTATIE.

Een verdeling van de gerealiseerde waarde over de spelers zullen we aangeven met een vector $x \in \mathbb{R}^n$, waarvan de i-de komponent (x_i) de waarde is, die wordt toegevoegd aan speler i. Ter vereenvoudiging van de notatie zullen we $\sum_{i\in S} x_i$, de waarde toegevoegd aan coalitie S schrijven als $x(S)$.

Omdat de grote coalitie N zich vormt zal de waarde $v(N)$ over de spelers moeten worden verdeeld. Voorts zal een verdeling de spelers minstens een waarde moeten toekennen die zij individueel kunnen realiseren.
Een verdeling die aan deze voorwaarden voldoet zullen we een imputatie noemen.

DEFINITIE. Een *imputatie* van het spel (N,v) is een vector $x \in \mathbb{R}^n$ zodanig dat:

(3.1) $\quad x(N) = v(N)$ en

(3.2) $\quad x_i \geq v(\{i\})$ voor alle $i \in N$.

Een verdeling die aan (3.1) voldoet heet *groepsrationeel* of *Pareto optimaal*, een verdeling die aan (3.2) voldoet *individueel rationeel*.

VOORBEELD. Voor het voorbeeld in §2 is de vector (3,3,5) een imputatie.
De vectoren (4,5,2) en (2,3,5) echter niet.

De verzameling van imputaties van het spel (N,v) zullen we noteren met $I(N,v)$ of ook wel kortweg I als duidelijk is welk spel bedoeld is.

DEFINITIE. Een spel in karakteristieke functievorm is *essentiëel* als geldt:

(3.3) $$v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\}).$$

Uit de super additiviteit van een spel volgt:

(3.4) $$v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\}).$$

Super additieve spelen hebben dus een niet lege imputatie verzameling; als het gelijkteken geldt is er slechts één imputatie. Wij zullen ons uitsluitend met essentiële spelen bezighouden. Een essentiëel super additief spel in karakteristieke functievorm zullen we in het vervolg met spel aanduiden.

4. DOMINANTIE.

Laten x en y twee verschillende imputaties zijn van het spel (N,v). Spelers i waarvoor geldt $x_i > y_i$ zullen aan x de voorkeur geven boven y. De verzameling spelers die de voorkeur geeft aan x en de verzameling spelers die de voorkeur geeft aan y zijn beide niet leeg, omdat

$$(4.1) \qquad x(N) = y(N) = v(N).$$

Teneinde te bepalen welke imputaties als eindverdeling in aanmerking komen moeten we behalve de voorkeur van spelers ook de macht van spelers om een imputatie te wijzigen beschouwen.

<u>DEFINITIE</u>. Laat $x,y \in I(N,v)$ en $S \subset N$ met $S \neq \emptyset$. Imputatie x *domineert* imputatie y *via* S, notatie $x \succ_S y$, als geldt

$$(4.2) \qquad x_i > y_i \quad \text{voor alle } i \in S \text{ en}$$

$$(4.3) \qquad x(S) \le v(S)$$

(4.2) brengt de voorkeur van de leden van S tot uitdrukking; (4.3) laat zien dat de leden van S in staat zijn x(S) voor zich op te eisen.
De relatie $\succ_S$ heeft de volgende eigenschappen:

irreflextief : $x \not\succ_S x$ voor alle $x \in I$
transitief : als $y \succ_S x$ en $z \succ_S y$ dan geldt $z \succ_S x$ voor alle $x,y,z \in I$
anti-symmetrisch: $x \succ_S y \Rightarrow y \not\succ_S x$ voor alle $x,y \in I$

Deze relatie is dus een partiële ordening.

<u>VOORBEELD</u>. In het voorbeeld van §2 domineert de imputatie (3,4,4) de imputatie (1,2,8) via {1,2}. De imputaties (1,2,8) en (5,2,4) zijn ten opzichte van $\succ_{\{1,2\}}$ onvergelijkbaar.

<u>DEFINITIE</u>. Laat $x,y \in I(N,v)$. Imputatie x *domineert* imputatie y, notatie $x \succ y$, als er een coalitie S bestaat zodanig dat $x \succ_S y$.

De relatie $\succ$ is i.h.a. noch transititief noch anti-symmetrisch.

VOORBEELD. In het voorbeeld van §2 geldt:

$(3,3,5) \succ (2,5,4)$ (via $\{1,3\}$)
$(3\frac{1}{2},3\frac{1}{2},4) \succ (3,3,5)$ (via $\{1,2\}$)
terwijl $(3\frac{1}{2},3\frac{1}{2},4) \not\succ (2,5,4)$

5. S-EQUIVALENTIE.

DEFINITIE. We noemen de spelen (N,v) en (N,w) S-*equivalent* als geldt dat er een $c \in \mathbb{R}^+$ en $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ bestaan zodanig dat

$$v(S) = cw(S) + \sum_{i \in S} a_i \quad \text{voor alle } S \subset N. \tag{5.1}$$

S-equivalentie is reflextief, symmetrisch en transitief en dus inderdaad een equivalentie relatie. We kunnen het spel v uit het spel w verkrijgen door alle waarden met c te vermenigvuldigen en bovendien aan speler i een extra waarde a_i toe te voegen. De onderhandelingssituatie tussen de spelers wordt door zo'n ingreep niet gewijzigd.

DEFINITIE. Een spel (N,v) is in $(0,1)$ *normalisatie* als geldt:

$$\begin{cases} v(\{i\}) = 0 & \text{voor alle } i \in N \\ v(N) = 1. & \end{cases} \tag{5.2}$$

Ieder spel is S-equivalent met precies één spel in $(0,1)$ normalisatie.

VOORBEELD. In het voorbeeld van §2 wordt de onderhandelingssituatie niet gewijzigd door de waarde van alle coalities te verminderen met de waarde die de leden van de coalitie ieder afzonderlijk zouden behalen.
We krijgen dan:

$v'(\{1,2,3\}) = 5$, $v'(\{1,2\}) = 4$, $v'(\{1,3\}) = 4$
$v'(\{2,3\}) = 3$ en alle overige waarden 0.

Als we vervolgens de winsten in 5-tallen miljoenen uitdrukken verkrijgen we het volgende spel in $(0,1)$ normalisatie.

$w(\{1,2,3\}) = 1$, $w(\{1,2\}) = 4/5$, $w(\{1,3\}) = 4/5$
$w(\{2,3\}) = 3/5$ en alle overige waarden 0.

De spelen $(\{1,2,3\},v)$ en $(\{1,2,3\},w)$ zijn S-equivalent.

DEFINITIE. Een spel (N,v) noemen we *simpel* als voor het S-equivalente spel in (0,1) normalisatie (N,w) geldt:

(5.3) $\qquad w(S) = 0$ of 1 voor alle $S \subset N$.

Coalities met $w(S) = 1$ noemen we *winnend* en met $w(S) = 0$ *verliezend*. Deze spelen worden toegepast bij de theorie van het stemmen.

6. DE CORE.

Een voorschrift om een bepaalde imputatie, verzameling imputaties of collectie van imputatie verzamelingen aan te wijzen als mogelijke eindverdelingen noemen we een oplossingsconcept voor het spel. Eén van deze oplossingsconcepten is de core.

DEFINITIE. De core van spel (N,v), notatie $C(N,v)$, is de verzameling van alle $x \in \mathbb{R}^n$ zodanig dat:

(6.1) $\qquad x(S) \geq v(S)$ voor alle $S \subset N$ en

(6.2) $\qquad x(N) = v(N)$.

Uit (6.1) voor de verzamelingen $S = \{i\}$ en (6.2) volgt

(6.3) $\qquad C(N,v) \subset I(N,v)$.

STELLING. *De core is de verzameling van imputaties die niet wordt gedomineerd.*

BEWIJS. Laat $y \in C(N,v)$ en veronderstel er bestaat een $x \in I(N,v)$ en een $S \subset N$ zodat $x \succ_S y$ dan geldt:

$$v(S) \geq x(S) > y(S) \geq v(S) \quad \text{tegenspraak.}$$

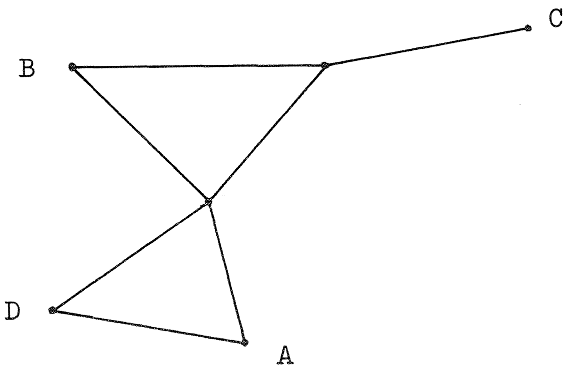
Andersom als $y \in I(N,v)-C(N,v)$ dan bestaat er een $S \subset N$ zodanig dat $y(S) < v(S)$. Voor $x \in R^n$ gegeven door

$$x_i = y_i + \frac{v(S)-y(S)}{|S|} \text{ als } i \in S \text{ en}$$

$$x_i = y_i - \frac{v(S)-y(S)}{|S|} \text{ als } i \notin S$$

geldt $x \in I(N,v)$ en $x \succ_S y$. □

<u>VOORBEELD</u>. In A, B en C bevinden zich handelaren die allen met een zelfde frequentie produkten afnemen bij een fabriek in D. Voor het afhalen van de produkten gebruiken ze een taxi. Taxi's zijn beschikbaar in A, B en C en moeten weer naar hun standplaats terugkeren.



De rijtijd tussen twee in de figuur direkt verbonden punten bedraagt 1 uur; het taxitarief is één geldeenheid per uur. De hoeveelheid voor de 3 handelaren tezamen kan vervoerd worden met één taxi. Het ligt dus voor de hand dat de handelaren voor het afhalen van hun produkten samenwerken. Hoe moeten de taxikosten (8 geldeenheden) tussen de handelaren worden verdeeld? Nummeren we de spelers in A, B, en C met respectievelijk 1, 2 en 3 dan ziet het bijbehorende spel in karakteristieke functievorm er als volgt uit:

$v(\{1\}) = -2$, $v(\{2\}) = -4$, $v(\{3\}) = -6$,
$v(\{1,2\}) = -5$, $v(\{2,3\}) = -7$, $v(\{1,3\}) = -7$ en
$v(\{1,2,3\}) = -8$.

Als we de kosten die de leden van een coalitie afzonderlijk maken niet bij de waarde van de coalitie rekenen dan verkrijgen we een spel S-equivalent met het vorige spel.

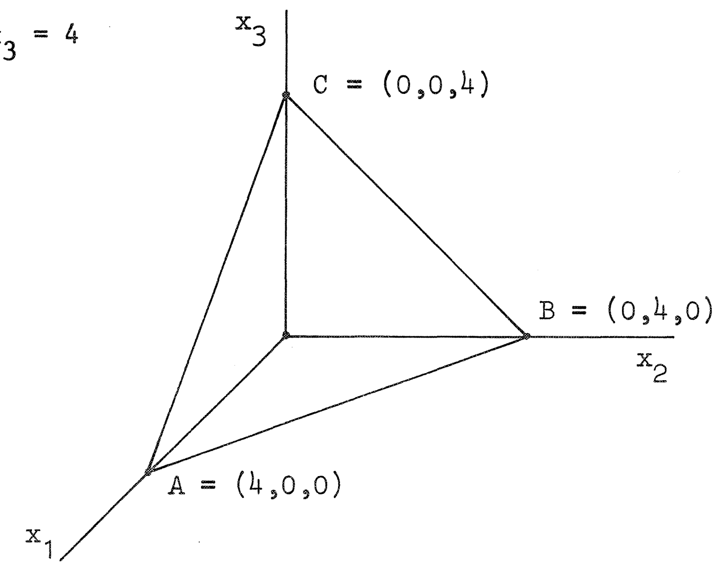
$w(\{1,2\}) = 1$, $w(\{2,3\}) = 3$, $w(\{1,3\}) = 1$,
$w(\{1,2,3\}) = 4$ en alle overige waarden 0.

De core van dit spel is de verzameling $x \in \mathbb{R}^3$ waarvoor geldt:

(6.4) $\qquad x_1, x_2, x_3, \geq 0$

(6.5) $\qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 3 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \end{cases}$

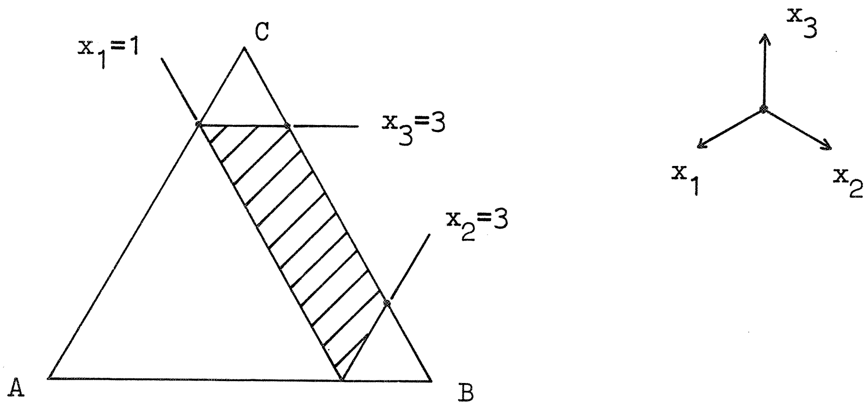
(6.6) $\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 4$



In de figuur vormt Δ ABC de imputatie verzameling I, dit zijn de punten die voldoen aan (6.4) en (6.6). Voor de punten van de core moet tevens (6.5) gelden hetgeen vanwege (6.6) equivalent is met:

(6.7) $\qquad x_1 \leq 1$ en $x_2, x_3 \leq 3$.

Het gearceerde gedeelte van Δ ABC is de core.



De core kan dus uit vele imputaties bestaan. Een ernstiger bezwaar tegen de core als oplossingsconcept is het feit dat er veel spelen (N,v) zijn met $C(N,v) = \emptyset$.

VOORBEELD. Laat (x_1,x_2,x_3) een element zijn van de core van het voorbeeld in §2 dan geldt:

$$
(6.8) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\}) = 7 \\ x_1 + x_3 \geq v(\{1,3\}) = 8 \\ x_2 + x_3 \geq v(\{2,3\}) = 8 \end{cases}
$$

Tellen we de ongelijkheden in (6.8) op dan krijgen we $2(x_1+x_2+x_3) \geq 23$, ofwel $x_1 + x_2 + x_3 \geq 11\frac{1}{2}$. Dit is in tegenspraak met

$$
(6.9) \qquad \begin{cases} x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 11. \end{cases}
$$

Voor dit spel geldt dus $C(\{1,2,3\},v) = \emptyset$.

Het gebruik van de core als oplossingconcept is afkomstig van GILLIES [7].

VON NEUMANN & MORGENSTERN [14] gebruikten de stabiele verzamelingen als oplossingsconcept.

DEFINITIE. Een verzameling $V \subset I(N,v)$ noemen we een *stabiele verzameling* als geldt:

(6.10) $\quad x,y \in V \Rightarrow x \not\succ y$

(6.11) $\quad$ bij iedere $x \in I-V$ bestaat er een $y \in V$ zodanig dat $y \succ x$.

Eigenschap (6.10), er is geen imputatie in V die een andere imputatie van V domineert, wordt *interne stabiliteit* genoemd. Eigenschap (6.11), iedere imputatie buiten V wordt gedomineerd door een imputatie binnen V, wordt *externe stabiliteit* genoemd.

Een moeilijkheid bij dit oplossingsconcept is dat er i.h.a. meerdere stabiele verzamelingen zijn. Bovendien werd in 1967, 23 jaar na de introductie van dit oplossingsconcept, door LUCAS [11 en 12] een 10-persoonsspel geconstrueerd zonder stabiele verzameling.

7. DE SHAPLEY WAARDE.

Er zijn oplossingsconcepten die bij ieder spel een unieke imputatie aangeven. Het meest bekende oplossingsconcept van deze soort is de Shapley waarde [19].

DEFINITIE. Een *drager* voor een spel (N,v) is een coalitie T zodanig dat

(7.1) $\quad v(S) = v(S \cap T)$ voor all $S \subset N$.

Een speler buiten een drager kan tot geen der coalities iets bijdragen.

Het produkt van de karakteristieke functie v met een constante c noteren we als cv. De som van twee karakteristieke functies v en w gedefinieerd op dezelfde verzameling 2^N noteren we als v+w. Laat $\pi(1),\dots,\pi(n)$ een permutatie van de getallen $1,\dots,n$ zijn en (N,v) een spel. Het spel (N,v) waarvoor geldt:

(7.2) $\quad w(\pi(i_1),\dots,\pi(i_s)) = v(S)$ voor alle $S = \{i_1 \dots, i_s\} \subset N$

zullen we noteren als (N,v_π). Het verschil tussen het spel (N,v) en (N,v_π) is uitsluitend de nummering van de spelers. Speler i in het eerste spel is speler $\pi(i)$ in het tweede spel.

DEFINITIE. Laat de verzameling spelers $N = \{1,\ldots,n\}$ gegeven zijn. De *Shapley waarde* van een spel (N,v) is een vector $\phi(N,v) = (\phi_1(N,v),\ldots,\phi_n(N,v))$ die zodanig is gekozen dat de verzameling van vectoren $\phi(N,v)$ behorende bij spelen van het type (N,v) met v variabel, de volgende eigenschappen heeft:

(7.3) $\sum_{i\in T} \phi_i(N,v) = v(T)$ voor alle dragers T en

(7.4) $\phi_{\pi(i)}(N,v_\pi) = \phi_i(N,v)$ voor alle permutaties π van N en alle v.

(7.5) $\phi_i(N,v+w) = \phi_i(N,v) + \phi_i(N,w)$ voor alle v en w.

Uit (7.1) volgt dat geldt:

(7.6) $v(T) = v(N)$ voor alle dragers T.

Eigenschap (7.3) houdt in dat de waarde $v(N)$ volledig over de spelers in een drager wordt verdeeld. Eigenschap (7.4) geeft aan dat de Shapley waarde niet afhankelijk is van de nummering van de spelers. Eigenschap (7.5) laat zien dat als twee onafhankelijke spelen worden gecombineerd tot één spel de Shapley waarde voor dat nieuwe spel gelijk is aan de som van de Shapley waarden in de oorspronkelijke spelen. Het zal blijken dat de Shapley waarde door de eigenschappen (7.3), (7.4) en (7.5) uniek bepaald is.

LEMMA. *Laat* $S \subset N$. *Het spel* (N,w^S) *gedefinieërd door:*

(7.7) $$w^S(T) = \begin{cases} 0 & \text{als } S \not\subset T \\ 1 & \text{als } S \subset T \end{cases}$$

heeft als Shapley waarde:

(7.8) $\qquad \phi_i(N,w^S) = 1/|S| \quad$ als $i \in S$ en

(7.9) $\qquad \phi_i(N,w^S) = 0 \quad$ als $i \notin S$.

BEWIJS. Als $S \subset T$ dan geldt $S \subset (T \cap S)$ dus S is een drager van het spel w^S. Uit (7.6) volgt (7.9). Voor alle permutaties π van N die S op zichzelf afbeelden geldt $w^S_\pi = w^S$. Dit tezamen met eigenschap (7.4) levert:

(7.10) $\qquad \phi_i(N,w^S) = \phi_j(N,w^S) \quad$ voor alle $i,j \in S$.

Uit (7.10) en eigenschap (7.3) volgt (7.8). □

GEVOLG. Als $c > 0$ dan geldt:

(7.11)
$$\phi_i(N,cw^S) = \begin{cases} c/|S| & \text{als } i \in S \\ 0 & \text{als } i \notin S. \end{cases}$$

LEMMA. *Bij ieder spel* (N,v) *bestaan er getallen* c^S *voor* $S \subset N$ *zodanig dat:*

$$v = \sum_{S \subset N} c^S w^S$$

met w^S *gedefinieërd volgens* (7.7).

BEWIJS. We kiezen:

(7.12) $\qquad c^S = \sum_{T:T \subset S} (-1)^{t-s} v(T)$, waarbij $t = |T|$ en $s = |S|$.

Als $U \subset N$ dan geldt:

$$\sum_{S:S \subset N} c^S w^S(U) = \sum_{S:S \subset U} c^S =$$

$$\sum_{S:S \subset U} \left(\sum_{T:T \subset S} (-1)^{s-t} v(T) \right) = \sum_{S,T:T \subset S \subset U} (-1)^{s-t} v(T) = 0$$

$$\sum_{T:T\subset U} \left(\sum_{s=t}^{u} \binom{u-t}{s-t}(-1)^{s-t} \right) v(T), \qquad \text{waarbij } u = |U|.$$

Immers het aantal deelverzamelingen S met $s = s_0$ en $T \subset S \subset U$ is gelijk aan $\binom{u-t}{s_0-t}$.

Vanwege:

$$\sum_{s=t}^{n} \binom{n-}{s-t}(-1)^{s-t} = (1-1)^{u-t} = \begin{cases} 0 \text{ als } t < n \\ 1 \text{ als } t = u \end{cases}$$

geldt: $\sum_{S:S\subset N} c^S w^S(U) = v(U)$. □

Als v,w en v-w karakteristieke functies zijn dan volgt uit eigenschap (7.5):

(7.13) $\qquad \phi_i(N,v-w) = \phi_i(N,v) - \phi_i(N,w).$

Uit beide lemma's, (7.5) en (7.3) volgt dat we de Shapley waarde al bestaat moeten kunnen schrijven als:

(7.14) $\qquad \phi_i(N,v) = \sum_{S:S\subset N} c^S \phi_i(N,w^S) = \sum_{\substack{S:S\subset N \\ i\in S}} c^S \frac{1}{s}.$

STELLING. *De Shapley waarde voor spel* (N,v) *is uniek en wordt gegeven door:*

(7.15) $\qquad \phi_i(N,v) = \sum_{\substack{T:T\subset N \\ i\in T}} \frac{(n-t)!(t-1)!}{n!} [v(T)-v(T-\{i\})]$

BEWIJS. Invullen van (7.12) in (7.14) levert als enige kandidaat voor de Shapley waarde:

$$\phi_i(N,v) = \sum_{\substack{S:S\subset N \\ i\in S}} \frac{1}{s} \left(\sum_{T:T\subset S} (-1)^{t-s} v(T) \right).$$

Door de coëfficiënten van een zelfde v(T) samen te nemen krijgen we:

(7.16) $$\phi_i(N,v) = \sum_{T:T\subset N} \Big(\sum_{S:(T\cup\{i\})\subset S\subset N} (-1)^{s-t} \frac{1}{s}\Big) v(T).$$

We noteren:

(7.17) $$\gamma_i(T) = \sum_{S:(T\cup\{i\})\subset S\subset N} (-1)^{s-t} \frac{1}{s}.$$

Als $i \in T$ dan geldt:

(7.18) $$\gamma_i(T) = \gamma_i(T-\{i\})$$

Immers in de sommatie komen dezelfde termen voor; het teken is echter verschillend vanwege $|T-\{i\}| = t-1$.
Als $i \in T$ geldt tevens:

(7.19) $$\gamma_i(T) = \sum_{s=t}^{n} \binom{n-t}{n-s}(-1)^{s-t} \frac{1}{s}$$

want er zijn precies $\binom{n-t}{n-s_0}$ verzamelingen S zodat $s = s_0$ en $T \subset S \subset N$.

Uit (7.16) en (7.17) volgt:

$$\phi_i(N,v) = \sum_{\substack{T:T\subset N\\ i\in T}} \gamma_i(T)v(T) + \sum_{\substack{T:T\subset N\\ i\in T}} \gamma_i(T)v(T) =$$

$$\sum_{\substack{T:T\subset N\\ i\in T}} \gamma_i(T)v(T) + \sum_{\substack{T:T\subset N\\ i\notin T}} \gamma_i(T-\{i\})v(T-\{i\}).$$

Kombineren we dit met (7.18) dan levert dit:

(7.20) $$\phi_i(N,v) = \sum_{\substack{T:T\subset N\\ i\in T}} \gamma_i(T)[v(T)-v(T-\{i\})].$$

We zullen nu aantonen dat:

(7.21) $$\gamma_i(T) = \frac{(n-t)!(t-1)!}{n!}.$$

Uit (7.19) volgt $\gamma_i(T) = \dfrac{n!}{(n-t)!(t-1)!} =$

$$\sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t} \binom{n-t}{s-t} \frac{1}{s} \frac{n!}{(n-t)!(t-1)!} =$$

$$\sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t} \frac{(s-1)(s-2)\ldots t}{(s-t)!} \binom{n}{s} =$$

$$\sum_{s=t}^{n} \binom{-t}{s-t}\binom{n}{s} = \sum_{s=0}^{n-t} \binom{-t}{s}\binom{n}{s+t}.$$

Voor $|z| < 1$ geldt:

$$(1+z)^{n-t} = (1+z)^{n}(1+z)^{-t} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \binom{n}{s} z^{s}\right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \binom{-t}{s} z^{s}\right)$$

De coëfficiënt van z^{n-t} levert de gelijkheid:

$$\sum_{s=0}^{n-t} \binom{-t}{s}\binom{n}{s+t} = 1, \quad \text{waarmee (7.21) bewezen is.}$$

Uit (7.20) en (7.21) volgt dat de enige kandidaat voor de Shapley waarde wordt gegeven door (7.15). Het is gemakkelijk te verifiëren dat (7.15) voldoet aan de eigenschappen (7.3),(7.4) en (7.5). □

STELLING. *De Shapley waarde is een imputatie.*

BEWIJS. Vanwege de super additiviteit van (N,v) volgt uit (7.15):

$$\phi_i(N,v) \geq \sum_{\substack{T:T\subset N \\ i\in T}} \gamma_i(T)v(\{i\}) \quad \text{voor alle } i \in N.$$

Met gebruikmaking van (7.21) vinden we:

$$\sum_{\substack{T:T\subset N \\ i\in T}} \gamma_i(T) = \sum_{t=1}^{n} \binom{n-1}{t-1} \gamma_i(T) = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

Dus:

$$(7.22) \qquad \phi_i(N,v) \geq v(\{i\}) \quad \text{voor alle } i \in N.$$

Uit (7.3) en (7.6) volgt:

(7.23) $$\sum_{i \in N} \phi_i(N,v) = v(N).$$

Uit (7.22) en (7.23) volgt de stelling. □

(7.15) geeft aanleiding tot de volgende interpretatie van de Shapley waarde. De spelers komen overeen de grote coalitie N als volgt op te bouwen. Beginnend met een coalitie bestaande uit één speler worden één voor één spelers aan de coalitie toegevoegd totdat de grote coalitie is bereikt. De volgorde waarin de spelers worden toegevoegd wordt door het lot bepaald zodat alle $n!$ volgorden dezelfde kans hebben. Als speler i wordt toegevoegd aan coalitie $T-\{i\}$ wordt hem precies zijn marginale waarde $v(T) - v(T-\{i\})$ toegekend. Het aantal volgorden waarbij i aan de coalitie $T-\{i\}$ wordt toegevoegd is gelijk aan $(t-1)!(n-t)!$. De kans dat i aan $T-\{i\}$ wordt toegevoegd is dus gelijk aan $(t-1)!(n-t)! / n!$. Dus (7.15) geeft bij deze procedure de verwachte opbrengst voor de spelers aan. Deze interpretatie geeft voor spelen met weinig spelers een gemakkelijke methode om de Shapley waarde te berekenen.

<u>VOORBEELD</u>. We berekenen de Shapley waarde voor het voorbeeld uit §2. Er zijn $3! = 6$ volgordes.

volgorde	marginale opbrengst		
	1	2	3
1 2 3	1	6	4
2 1 3	5	2	4
2 3 1	3	2	6
1 3 2	1	3	7
3 1 2	5	3	3
3 2 1	3	5	3
totaal	18	21	27
Shapley waarde	3	$3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$

Voor simpele spelen geldt dat $v(T) - v(T-\{i\})$ alleen de waarden 0 en 1 kan aannemen. De waarde 1 wordt alleen verkregen als T een winnende coalitie is en $T-\{i\}$ niet. We kunnen in dit geval de Shapley waarde dus schrijven als:

$$\phi_i(N,v) = \sum_T \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \tag{7.24}$$

waarbij wordt gesommeerd over winnende coalities T waarvoor geldt dat $T-\{i\}$ niet winnend is.

VOORBEELD. (afkomstig uit OWEN [15]).
Beschouw een vennootschap met 4 aandeelhouders, die respectievelijk 10, 20, 30 en 40 aandelen bezitten. De beslissingen in de aandeelhouders-vergadering moeten worden genomen door aandeelhouders die gezamenlijk een meerderheid van de aandelen in bezit hebben. We kunnen deze situatie opvatten als simpel 4-persoonsspel met als winnende coalities $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$ en $\{1,2,3,4\}$. Met behulp van (7.24) vinden we voor de Shapley waarde van dit spel (1/12, 1/4, 1/4, 5/12).

Als de aandeelhouders respectievelijk 10, 30, 30 en 40 aandelen in bezit hebben wordt de Shapley waarde (0, 1/3, 1/3, 1/3). De coalitie $\{2,3,4\}$ is in dit geval een drager van het spel.

8. DE NUCLEOLUS.

Laat (N,v) een spel zijn dat zodanig is genormeerd dat geldt $v(\{i\}) = 0$ voor alle $i \in N$. Bij iedere verdeling $x \in \mathbb{R}^n$ zullen we het verschil $v(S) - x(S)$ aanduiden als het *surplus* van coalitie S. Het surplus van een coalitie S is een maat voor de waardering die coalitie S voor verdeling x heeft. De coalities waarvoor het surplus het grootst is zullen de grootste bedreiging vormen voor het tot stand komen van verdeling x.
Voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$ definiëren we $q(x) \in \mathbb{R}^{2n}$ als de vector met als komponenten $v(S) - x(S)$ voor $S \subset N$ gesorteerd van groot naar klein.

DEFINITIE. Een vector $a \in \mathbb{R}^r$ is *lexicografisch kleiner* dan een vector $b \in \mathbb{R}^r$, notatie $a \overset{\ell}{<} b$, als er een $i \in \{1,\dots,r\}$ bestaat zodanig dat:

$$(8.1)\qquad \begin{cases} a_i < b_i \text{ en} \\ \\ a_j = b_j \text{ voor } j = 1,\ldots,i-1 \end{cases} .$$

DEFINITIE. Verdeling x is *meer aanvaardbaar* als verdeling y als $q(x) \overset{\ell}{<} q(y)$.

DEFINITIE. De *nucleolus* van $K \subset R^n$ behorende bij het spel (N,v) is de verzameling:

$$(8.2)\qquad N(K) = \{x \in K \mid q(x) \overset{\ell}{<} q(y) \text{ of } q(x) = q(y) \quad \text{voor alle } y \in K\}$$

Dit is dus de verzameling van "meest aanvaardbare" verdelingen in K.
De nucleolus van het spel (N,v), notatie $N(N,v)$, is de nucleolus van de imputatie verzameling.

$$(8.3)\qquad N(N,v) = N(I(N,v)).$$

Het oplossingsconcept de nucleolus is afkomstig van SCHMEIDLER [18]; de volgende stellingen zijn door hem bewezen.

STELLING. *De nucleolus van een kompakte verzameling is niet leeg.*

BEWIJS. Laat K een kompakte deelverzameling van de $\mathbb{R}^n$ zijn.
$v(S) - x(S)$ is een continue functie van x voor iedere $S \subset N$. We kunnen schrijven:

$$(8.4)\qquad q_i(x) = \max_{A\subset 2^N, |A|=i} (\min_{S\subset A}(v(S)-x(S)) \text{ voor } i = 1,\ldots,2^n.$$

Het maximum of het minimum van een eindig aantal continue functies is continu dus $q_i(x)$ is continu voor $i = 1,\ldots,2^n$.
Laat:

$$(8.5)\qquad K_1 = \{x \in I \mid q_1(x) \le q_1(y) \quad \text{voor alle } y \in K\} \text{ en}$$

$$(8.6)\qquad K_i = \{x \in I_{i-1} \mid q_i(x) \le q_i(y) \quad \text{voor alle } y \in K_{i-1}\}$$
$$\text{voor } i = 2,\ldots,2^n.$$

K_2 is de verzameling minima van een continue functie over een kompakte verzameling en daarom niet leeg en kompakt. Evenzo zijn K_i voor $i = 3,\ldots,2^n$ kompakt en niet leeg. Daar K_{2^n} de nucleolus is, is hiermee de stelling bewezen. $\square$

Laat $S_1,\ldots,S_{2^n}$ een willekeurig doch vaste volgorde zijn voor de $S \subset N$. Voor de afbeelding q bewijzen we het volgende lemma:

<u>LEMMA</u>. *Voor iedere paar* $x,y \subset R^n$ *geldt:*

(8.7) $$q(x+y) \overset{\ell}{<} q(x) + q(y) \quad \text{óf}$$

Bij iedere $t \in \{1,\ldots,2^n\}$ *bestaat er een* k_t *zodat:*

(8.8) $$\begin{cases} q_t(x) = v(S_{k_t}) - x(S_{k_t}) \text{ en} \\ q_t(y) = v(S_{k_t}) - y(S_{k_t}) \end{cases}$$

<u>BEWIJS</u>. Laat

$$q_t(x) = v(S_{i_t}) - x(S_{i_t}),$$
$$q_t(y) = v(S_{j_t}) - x(S_{j_t}) \text{ en}$$
$$q_t(x+y) = 2v(S_{k_t}) - x(S_{k_t}) - y(S_{k_t}).$$

Dan geldt:

$$v(S_{i_1}) - x(S_{i_1}) \geq v(S_{k_1}) - x(S_{k_1}) \text{ en}$$
$$v(S_{j_1}) - x(S_{i_1}) \geq v(S_{k_i}) - y(S_{k_i})$$

Als in één der ongelijkheden het > teken geldt, dan volgt $q(x+y) \overset{\ell}{<} q(x) + q(y)$. Laat nu gelden:

$$v(S_{i_\tau}) - x(S_{i_\tau}) = v(S_{k_\tau}) - x(S_{k_\tau}) \text{ en}$$

$$v(S_{j_\tau}) - x(S_{j_\tau}) = v(S_{k_\tau}) - x(S_{k_\tau}), \qquad \text{voor } \tau = 1,\ldots,t-1.$$

Dan kunnen we kiezen $i_\tau = j_\tau = k_\tau$ voor $\tau = 1,\ldots,t-1$. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} v(S_{i_t}) - x(S_{i_t}) &= \max_{\tau\in\{1,\ldots,2^n\}-\{k_1,\ldots,k_\tau\}} v(S_\tau) - x(S_\tau) \\ &\geq v(S_{k_t}) - x(S_{k_t}) \end{aligned}$$

evenzo

$$v(S_{j_t}) - y(S_{j_t}) \geq v(S_{k_t}) - y(S_{k_t}).$$

Als in één der ongelijkheden het $>$ teken geldt dan volgt $q(x+y) \overset{\ell}{<} q(x)$.

Dus als (8.7) niet geldt dan volgt hieruit (8.8). □

STELLING. *De nucleolus van een convexe verzameling bevat hoogstens één element.*

BEWIJS. Laat $K \subset R^n$ een convexe verzameling en $x,y \in N(K)$ dan geldt $q(x) = q(y)$. Als (8.7) van het lemma geldt dan volgt:

$$q(\tfrac{1}{2}(x+y)) = \tfrac{1}{2}q(x+y) < \tfrac{1}{2}(q(x) + q(y) = q(x)$$

hetgeen in tegenspraak is met $x \in N(K)$. Dus geldt (8.8) uit het lemma, kombineren we dit met $q(x) = q(y)$ dan volgt $x = y$. □

GEVOLG. Omdat de verzameling $I(N,v)$ kompakt en convex is bestaat de nucleolus van een spel uit precies één element.

Dit resultaat wordt op een andere manier bewezen door KOHLBERG [8]. De nucleolus is een optimale oplossing van het volgende lineair programmeringsprobleem.

Minimaliseer λ onder de voorwaarden:

$$\lambda \geq v(S) - x(S) \text{ voor alle } S \subset N.$$

Als de optimale oplossing uniek is hebben we de nucleolus gevonden. KOPELOWITZ [10] geeft een algoritme voor het berekenen van de nucleolus waarbij ten hoogste n-1 lineaire programmeringsproblemen moeten worden opgelost. KOHLBERG [9] laat zien dat de nucleolus ook kan worden berekend door het oplossen van één lineair programmeringsprobleem, echter met $2^n!$ bijvoorwaarden. OWEN [16] laat zien dat het aantal bijvoorwaarden terug-gebracht kan worden tot 4^n. Dit aantal bijvoorwaarden is echter nog zo groot dat de methode uitsluitend voor spelen met een zeer klein aantal spelers toepasbaar is.

LITERATUUR

[1] AUMANN, R.J. & M. MASHLER (1964), *The bargaining set for cooperative games*, Annals of Mathematical Studies, 52, 443-476.

[2] AUMANN, R.J. & B. PELEG (1960), *Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments*, Bull. Amer. Math. Soc., 66, 173-179.

[3] BILLERA, L.J., (1970), *Some theorems on the core of an* n*-person game without side payments*, SIAM Journal of Applied Mathematics, 18, 567-579.

[4] BILLERA, L.J., (1974), *On games without side payments arising from a general class of markets*, Journal of Mathematical Economy, 1, 129-139.

[5] DAVIES, M.D., (1970), *Game theory: a nontechnical introduction*, Basic Books, Nederlandse vertaling (1973), *Inleiding tot de speltheorie*, Het spectrum, Aula 495.

[6] DAVIES, M.D. & M. MASHLER, (1965), *The Kernel of a cooperative game*, Naval Research Logistics Quarterly, 12, 223-259.

[7] GILLIES, D.B., (1959), *Solutions of general non zero sum games*, Annals of Mathematical Studies, 40, 47-85.

[8] KOHLBERG, E., (1971), *On the nucleolus of a characteristic function game*, SIAM Journal of Applied Mathematics, 20, 62-66.

[9] KOHLBERG, E., (1972), *The nucleolus as a solution of a minimization problem,* SIAM Journal of Applied Mathematics, 23, 34-39.

[10] KOPELOWITE, A., (1967), *Computation of the kernels of simple games and the nucleolus of* n-*person games,* RM no.31, Research program in Game Theory and Mathematical Economics, Hebrew University of Jerusalem.

[11] LUCAS, W.F., (1968), *A game with no solution,* Bull. Amer. Math. Soc., 74, 237-239.

[12] LUCAS, W.F., (1969), *The proof that a game may not have a solution,* Trans. Amer. Math. Soc., 137, 219-229.

[13] LUCE, R.D. & H. RAIFFA, (1957), *Games and decisions,* John Wiley.

[14] NEUMANN, J. VON & O. MORGENSTERN, (1944), *Theory of games and economic behaviour*, Princeton University Press.

[15] OWEN, G., (1968), *Game theory*, Saunders.

[16] OWEN, G., (1974), *A note on the nucleolus*, International Journal of Game Theory, 3, 101-103.

[17] RAPOPORT, A., (1970), N-*person game theory: concepts and applications,* University of Michigan Press.

[18] SCHMEIDLER, D., (1969), *The nucleolus of a characteristic function game,* SIAM Journal of Applied Mathematics, 17, 1163-1170.

[19] SHAPLEY, L.S., (1953), *A value for* n-*person games*, Annals of Mathematical Studies, 28, 307-317.

[20] WANROOIJ, G.L., (1977), *Toepassingen van coöperatieve speltheorie*, Rapport BC 18/77, Mathematisch Centrum.