stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BD 3/73 OKTOBER

G. DE LEVE
BESLISKUNDE, WAT IS DAT?

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

BESLISKUNDE is de studie die zich bezighoudt met het streven om beslissingsproblemen op zodanige wijze te vertalen in wiskundige problemen, dat de oplossing van de wiskundige versie van het beslissingsprobleem na terugvertaling de gevraagde beslissing of strategie oplevert.

Alhoewel het tijdstip waarop voor het eerst besliskunde werd bedreven, moeilijk is te bepalen, kan men toch wel zeggen dat de besliskunde zijn opkomst dankt aan de gecompliceerde beslissingsproblemen, waarvoor men zich in de Tweede Wereldoorlog gesteld zag. Hierbij kan gedacht worden aan militaire problemen, zoals de bepaling van de optimale omvang van een konvooi van schepen en het opstellen van optimale strategieën bij het opsporen van onderzeeboten. Na de Tweede Wereldoorlog bleek de ontwikkelde benaderingswijze ook goed bruikbaar voor het oplossen van tal van beslissingsproblemen op het gebied van het beheer en de produktie.

In de besliskunde onderscheidt men twee typen van beslissingssituaties. Beslissingssituaties waarin van de beslisser wordt verwacht dat hij slechts één enkele *beslissing* neemt, leiden tot zgn. één-stapsbeslissingsproblemen. Er zijn daarentegen ook beslissingssituaties waarin de beslisser in een al of niet begrensd tijdinterval een reeks van min of meer op elkaar afgestemde beslissingen moet nemen. De oplossing van deze meerstapsbeslissingsproblemen wordt gegeven door een *strategie*; d.i. een beslissingsvoorschrift dat voor ieder tijdstip vaststelt of de beslisser een beslissing moet nemen, en zo ja, welke dit zal zijn.

Het vertalen van een beslissingsprobleem in een wiskundig probleem is onverbrekelijk verbonden aan het construeren van een *wiskundig model* van de te beschouwen beslissingssituatie. In een dergelijk model wordt de onderlinge samenhang en de evolutie van de verschillende voor de beslissingssituatie relevante factoren op wiskundige wijze beschreven. Bij de beschrijving wordt gebruik gemaakt van *kennis* die, hetzij door de basiswetenschappen, zoals economie en wiskunde, wordt verschaft, hetzij uit beschikbare *gegevens* wordt gedistilleerd of uit *waarnemingen* wordt verkregen. Bovendien berust het wiskundige model op *veronderstellingen* die op het eerste gezicht redelijk lijken en niet op grond van de zojuist genoemde kennis dienen te worden verworpen. De kansrekening en de mathematische statistiek spelen een belangrijke rol bij het opstellen en testen van het wiskundige model.

Een belangrijk punt bij de constructie van het wiskundige model is de keuze van het *kriterium* voor het onderling vergelijken van beslissingen en strategieën. In veel beslissingsproblemen houdt het kriterium nauw verband met de gemiddelde kosten per tijdseenheid; bij sommige produktieproblemen zou men bijv. als kriterium het aantal produktiewijzigingen per tijdseenheid kunnen kiezen. Belangrijk is deze keuze van het kriterium, omdat de structuur van het kriterium dikwijls bepalend is voor de vraag of de wiskundige versie van het beslissingsprobleem al of niet met de huidige kennis en hulpmiddelen kan worden opgelost. In de praktijk betekent dit dat *vereenvoudigingen* in het model moeten worden aangebracht. Uiteraard moet dan worden nagegaan in hoeverre deze vereenvoudigingen het antwoord bepalen. Zowel nieuwe gegevens als onaanvaardbare "optimale" beslissingen leiden tot verwerping van het bestaande model en dus tot het opstellen van een nieuw.

Een groot deel van de besliskundige research heeft betrekking op het oplossen van speciale typen van wiskundige problemen. Dit onderdeel van de besliskunde wordt wel eens aangegeven met de naam *mathematische besliskunde*.

Ieder besliskundig onderzoek begint met een inventarisatie van mogelijke beslissingen of strategieën. Om de effecten van deze beslissingen en strategieën op wiskundige wijze te kunnen bestuderen, dient de beslissingssituatie voldoende kwantificeerbaar te zijn. Aangezien in beslissingssituaties het doen van experimenten veelal is uitgesloten, komen alleen die situaties voor een besliskundig onderzoek in aanmerking, waarvoor geldt dat het vereiste model een doorzichtige structuur bezit. Dit zijn dan ook de redenen waarom besliskundige technieken tot dusver voornamelijk hun toepassing vonden bij het oplossen van bedrijfsproblemen. In principe beperkt de toepassing van besliskundige technieken zich echter niet tot één of meer probleemgroepen.

Bij één-stapsbeslissingsproblemen start de wiskundige modelvorming met het wiskundig beschrijven van de mogelijke *beslissingen*. Het is gebruikelijk om een beslissing, waaraan n kwantitatieve aspecten te onderscheiden zijn, aan te geven door een vector x met n componenten $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. In een mengprobleem bijv. stellen deze componenten de fracties van de n samenstellende grondstoffen voor. Ook niet-kwantitatieve beslissingen laten zich dikwijls door vectoren weergeven. Zo kan de vector $x=(0,1,0)$ uitdrukken dat de machine 2 wèl $(x_2=1)$ en de machines 1 en 3 niet $(x_1=x_3=0)$ worden gebruikt bij de komende produktie. Uit de voorgaande toelichting volgt dat sommige componenten van de beslissingsvector alleen geheeltallige waarden mogen aannemen. De verzameling van indices j waarvoor x_j geheel moet zijn, wordt in het hiernavolgende steeds aangeduid met G. Omstandigheden, al dan niet typerend voor het beslissingstijdstip, beperken veelal de keuzemogelijkheden. Voor het bovengenoemde mengprobleem moet in ieder geval gelden:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,2,\ldots,n),$$

maar misschien ook

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots. + a_nx_n \leq b \,,$$

wanneer het mengsel hoogstens een fractie b aan ruwe celstof mag bevatten en voor de samenstellende grondstoffen deze fracties volgens recente analyses a_j $(j=1,2,\ldots,n)$ bedragen. Andere kwaliteitseisen leiden tot soortgelijke voorwaarden.

In het wiskundige model wordt de verzameling van *toegelaten beslissingen* X gegeven door gelijk- en ongelijkheden van bovenstaand type waaraan de componenten van de beslissingsvector moeten voldoen. Het opstellen van deze relaties vormt dikwijls het moeilijkste onderdeel van de modelvorming en vraagt enige oefening. Zo zal de formulering van het wiskundig equivalent van de voorwaarde: "de grondstoffen 1 en 2 mogen dan en slechts dan beide in het mengsel voorkomen als de fractie van grondstof 3 groter dan of gelijk is aan die van 4" wel enige moeite opleveren. In het wiskundig model wordt deze voorwaarde gegeven door:

$$x_1 \le x_{n+1},\ x_2 \le x_{n+2},\ x_4 - x_3 \le x_{n+3},$$
$$x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} \le 2 \qquad (n+1, n+2, n+3 \in G),$$

waarbij x_{n+1}, x_{n+2} en x_{n+3} nieuwe componenten zijn. (Ga na: $x_1 > 0$ én $x_2 > 0 \rightarrow \rightarrow x_{n+1} = x_{n+2} = 1 \rightarrow x_{n+3} = 0 \rightarrow x_3 \ge x_4$.)

Om een keuze te kunnen maken uit de verzameling is een *kriterium* vereist. Als voor grondstof j de kosten per eenheid c_j bedragen dan kan wellicht de functie

$$k = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

als kriterium dienen. In het algemeen is het optimaliteitskriterium een functie $K(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ van de componenten van de beslissingsvector x.

De wiskundige versie van het één-stapsbeslissingsprobleem luidt nu als volgt: "Bepaal het maximium (minimum) van $k = K(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ onder $x \in X$ en x_j=geheel als $j \in G$."

De studie gericht op het oplossen van problemen van dit type heet *mathematische programmering*. Als alle definiërende functies lineair zijn en de verzameling G leeg is, dan spreekt men van *lineaire programmering* (lp). Vele toewijzings-, produktie-, transport-, maar ook financieringsproblemen laten zich vertalen als lp-problemen. Kortom, problemen waarin schaarse middelen als kapitaal, capaciteiten, arbeid etc. zodanig benut moeten worden dat de winst maximaal is of de kosten minimaal zijn. Zowel voor de algemene versie (de simplexmethode) als voor lp-problemen met een speciale structuur zijn algoritmen ontwikkeld, die problemen van grote omvang in een redelijke tijd kunnen oplossen. De wiskundige achtergrond van deze methoden wordt gevormd door de lineaire algebra. Minder gunstig is de situatie als de verzameling G niet leeg is. Naar gelang de verzameling G alle of een deel van de indices bevat wordt de desbetreffende studie *geheeltallige-* of *gemengde programmering* genoemd. Technieken (snedemethoden), die uitgaan van de algemene probleemstelling, zijn tot dusver niet zo succesvol geweest. Vandaar dat het onderzoek thans veel meer gericht is op veel voorkomende structuren (branch and bound methoden). Bij de beschrijving van de beslissingssituaties kan dikwijls met succes gebruik gemaakt worden van begrippen uit netwerkanalyse en de grafentheorie. Daar vele beheers- en bedrijfsproblemen, waaronder (machine)volgorde-, vervoers-, indelings- en planningsproblemen, slechts vertaald kunnen worden in gemengde lp-problemen, is dit onderzoek zeer intensief.

Veel minder talrijk, maar daarom niet minder belangrijk, zijn de problemen die gedefinieerd moeten worden met behulp van niet-lineaire functies. Ook voor het *niet-lineaire programmeringsprobleem* zijn oplossingstechnieken bekend. De meeste echter leiden slechts onder zeer speciale omstandigheden tot een optimum.

De besliskundige aanpak van een één-stapsbeslissingsprobleem leidt niet alleen tot een optimale oplossing, maar verstrekt bovendien nuttige informatie over tal van zaken zoals het verband tussen maximale winst en de beschikbare capaciteit of de gevoeligheid van de gevonden oplossing met betrekking tot de vaak nogal wisselende kosten en prijzen. Het is dikwijls deze secondaire informatie die een besliskundige aanpak zo waardevol maakt.

Met enige goede wil kan men stellen dat in ieder meer-stapsbeslissingsprobleem van de beslisser verwacht wordt dat hij een proces bestuurt. Zo'n proces, waarin kosten worden gemaakt en/of opbrengsten worden verkregen, speelt zich bijvoorbeeld af rond een voorraad, machine of rij wachtenden voor een loket, kortom rond een *systeem*. De verschillende toestanden waarin het systeem zich kan bevinden, laten zich wiskundig beschrijven met behulp van een (toestands)vector s. Wanneer de beslisser zich afzijdig houdt en desondanks het systeem in de loop der tijd van toestand verandert, zegt men dat het systeem onderworpen is aan een *natuurlijk proces*. Een natuurlijk proces wordt wiskundig gegeven door de (kansverdeling van de) toestanden op toekomstige tijdstippen. Een en ander zullen wij nader toelichten met het volgende beeld. Laat s de omvang (toestand) zijn van een voorraad (systeem) die door verkopen op ongeregelde tijdstippen afneemt (natuurlijk proces). Elke maandagmorgen (beslissingstijdstip) wordt nagegaan of de voorraad moet worden aangevuld en, zo ja, met hoeveel (beslissing). De maximum voorraad stelt een bovengrens aan de omvang van de bestelling (verzameling van toegelaten beslissingen). Uit bovenstaand beeld volgt dat de toelaatbaarheid van een beslissing x mede bepaald wordt door de toestand s van het systeem op het beslissingstijdstip. De verzameling van toegelaten beslissingen wordt derhalve aangeduid met $X(s)$. Beslissingen brengen in het algemeen toestandsveranderingen met zich mee. Het begrip toestand dient derhalve zo ruim gekozen te zijn, dat de nieuwe toestand na de beslissing kan worden aangegeven. Als in bovenstaand beeld de bestelling onmiddellijk wordt afgeleverd, is de nieuwe toestand wederom een (toegenomen) omvang van de voorraad. Is daarentegen aan een bestelling een levertijd verbonden, dan moet hoogst waarschijnlijk aan de toestand bovendien afgelezen kunnen worden hoeveel goederen nog op bestelling wachten en wellicht ook wanneer de desbetreffende orders zijn afgegeven. In voorraadproblemen waarin nageleverd mag worden, als de voorraad ontoereikend is, kan men veelal volstaan met het geven van de economische voorraad (voorraad + hoeveelheid in bestelling). In de eerste fase van de modelvorming kiest men de toestand zelden juist. Een eerste analyse van het mathematisch beslissingsprobleem leert de beslisser pas welke informatie op het beslissingstijdstip strikt nodig is.

Doordat de toestand op elk beslissingstijdstip uiteindelijk afhangt van de beslissingen die in het verleden zijn genomen, zal men zonder rekening te houden met latere beslissingen zelden optimaal handelen. Uiteraard zal de beslisser zowel op van te voren vastgestelde als op vrij te kiezen beslissingstijdstippen zijn beslissingen baseren op de dan geldende toestand s' van het systeem. Welk *kriterium* hij ook kiest, de oplossing zal de vorm hebben van een -hierboven reeds omschreven- strategie, die wiskundig wordt weergegeven door de functie $x=z(s)$. In het bovengenoemde voorraadprobleem is de volgende strategie denkbaar (x=bestelling, s=voorraad, M_1= maximale voorraad):

$$x = z(s) = \begin{cases} M_1 - s & \text{als} \quad s \le -V_0 \\ M_2 - s & \text{als} \; -V_0 < s \le V_1 \\ M_3 - s & \text{als} \quad V_1 < s \le V_2 \\ 0 & \text{als} \quad V_2 < s \le M_1, \end{cases}$$

waarbij de getallen M_2, M_3, V_0, V_1 en V_2 de toe te passen strategie z bepalen.

Het is duidelijk dat, als een strategie wordt toegepast, het natuurlijk proces vanwege de extra toestandsveranderingen niet meer geëigend is om de ontwikkeling in de toestand van het systeem te beschrijven. Deze taak wordt nu overgenomen door het *beslissingsproces*, dat overeenkomstig het natuurlijke proces wordt gedefinieerd.

Het kriterium zelf is een functie K(s';z) van de huidige toestand s' en de toe te passen strategie z. In het algemeen is de optimale strategie z^* optimaal voor iedere begintoestand s'.

De wiskundige versie van het meer-stapsbeslissingsprobleem luidt nu als volgt: "Bepaal voor de begintoestand s' die functie x=z(s) waarvoor k=K(s';z) maximaal (minimaal) is onder de voorwaarde $z(s) \in X(s)$."

Als het kriterium de (verdisconteerde) totale (verwachte) kosten aangeeft, kan met behulp van dit kriterium bepaald worden hoeveel het de beslisser waard is om niet s' maar s" als huidige toestand van het systeem te hebben. Dankzij dit waardeverschil, K(s';z) - K(s";z) kan bijv. worden nagegaan of het misschien voordelig is een deel van de voorraad elders onder de prijs te verkopen. Ook kan worden vastgesteld of de machine thans in gebruik misschien beter kan worden vervangen door een toevallig aangebodene. Als K(s;x) de gemiddelde kosten per tijdseenheid aangeeft, dan kan een functie V(s;x) worden bepaald met de hierboven gegeven eigenschappen. Van deze secondaire informatie kan dikwijls nuttig gebruik gemaakt worden.

Heeft de toestandsvector niet meer dan drie componenten, dan is menig meer-stapsbeslissingsprobleem hetzij analytisch hetzij numeriek op te lossen. Voor iedere strategie wordt de kriteriumfunctie K(s;z) en V(s;z) gevonden door het oplossen van een stelsel functionaalvergelijkingen in K(s;z) en V(s;z). Voor het opstellen van deze vergelijkingen is dikwijls enige kennis van de kanstheorie vereist. De zgn. *strategie-verbeterings-*

methode stelt voor iedere strategie z vast of z optimaal is, en, zo niet, dan wijst zij een strategie aan die beter is. Op deze wijze ontstaat een rij van strategieën $\{z_n; n = 1,2,...\}$ die onder zekere voorwaarden convergeert naar de optimale strategie z . De studie, die gericht is op het oplossen van meer-stapsbeslissingsproblemen, heet *dynamische programmering*. Een groot aantal voorraad-, vervangings-,en produktieproblemen kan met behulp van een dynamische programmeringstechniek worden aangepakt.

Wachttijdproblemen worden dikwijls ten onrechte gerekend te behoren tot het terrein van de besliskunde. Indien echter door het toekennen van prioriteiten aan de wachtenden de verwachting van de totale wachttijd moet worden geminimaliseerd, dan ontstaat wederom een meer-stapsbeslissingsprobleem.

In de praktijk is men veelal tevreden met goede in plaats van optimale beslissingen. Indien een wiskundig model van de beslissingssituatie is geconstrueerd, kan men vaak met behulp van een rekenautomaat nagaan wat de consequenties zijn van een voorgestelde beslissing of strategie (simulatie). Door het aanbrengen van wijzigingen in de beslissing of strategie kan men dan trachten eventuele tekortkomingen op te heffen. Door eerst deelproblemen op te lossen en daarna door "sleutelen en testen" de resultaten te combineren kunnen op deze wijze voor een aantal beslissingssituaties aanvaardbare beslissingen of strategieën worden verkregen. Deze aanpak vraagt meer kunst dan kunde.

De besliskunde beslaat een groot deel van de activiteiten die men in de Verenigde Staten aanduidt met *operations research* en *management sciences*. De grenzen met bijvoorbeeld de econometrie en de cybernetica zijn niet scherp afgebakend.

Besliskunde in het bedrijf

In het bedrijf wordt naast de term besliskunde vaak de Amerikaanse benaming operations research gebruikt. Volgens velen houdt de operations research zich niet alleen bezig met het vraagstuk van de keuze van de *optimale* beslissing, doch wenst zij bovendien een bijdrage te leveren tot de verbetering van de beslissingsvoorbereiding. Operations research beoogt in de eerste plaats de beslisser een kwantitatief inzicht te geven in de structuur van de beslissingssituatie en hem vervolgens die instrumenten te verschaffen welke bij de keuze van de beslissing te pas kunnen komen.

Operations research is bijgevolg veelzijdiger dan de besliskunde zoals deze hierboven is gedefinieerd. Ze heeft dan meer het karakter van een speciale benaderingswijze van het beslissingsprobleem; een benaderingswijze die geïnspireerd is door de successen die zowel in de natuurwetenschappen als in de daarmee verwante 'engineering sciences' behaald zijn.

In het bedrijf wordt aan de besliskunde (operations research) vaak deze ruimere betekenis gegeven; daar omvat de term dus ook activiteiten die behoren tot de werkterreinen van andere wetenschappen in zoverre zij zich met de besluitvorming bezighouden, zoals bedrijfseconomie, sociale economie, sociologie, psychologie, statistiek en technische wetenschappen. Met het oog op de praktische toepassing is dus niet exact te formuleren welke van deze activiteiten wel en welke niet tot de bedrijfsbesliskunde gerekend moeten worden.