BA

stichting mathematisch centrum

MC

BA

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BN 4/71 AUGUSTUS

A.J.M. KESTER en G. ZWANEVELD

OPTIMALISERING VAN EEN M/G/1 WACHTRIJ MET MEER BEDIENINGSMETHODEN

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Inhoud

Hoofdstuk 0. Inleiding.

0.1 Situatie 1.

Klanten die volgens een Poissonproces met intensiteit λ bij een loket aankomen, worden één voor één door één bediende geholpen. Deze bediende heeft k verschillende bedieningsmethoden $M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}$ tot zijn beschikking, en wel geldt dat de tijdsduur van een bediening volgens methode M_i een stochastische variabele $\underline{s}_i$ is, met verdelingsfunctie B_i $(i=0,1,\ldots,k-1)$.

Veronderstel dat $\min\limits_{0\leq i\leq k-1} \mathcal{E}\underline{s}_i = \mathcal{E}\underline{s}_0 < \frac{1}{\lambda}$.

De wachttijdtheorie leert dan dat bij gebruik van methode M_0 geen oneindig lange wachtrij ontstaat.

Elke wachtende klant (en ook de klant die op het moment juist geholpen wordt) veroorzaakt voor de beheerder van het systeem kosten, namelijk b gulden per tijdseenheid. De bediening van een klant volgens methode M_i kost de beheerder een bedrag c_i $(i=0,1,\ldots,k-1)$. c_i is een constante en niet afhankelijk van de tijdsduur van de bediening, maar alleen van de methode.

De beheerder wil zijn kosten minimaliseren door telkens op grond van de lengte van de rij wachtenden de bedieningsmethode te bepalen. Hij vraagt zich af welke strategie hij moet volgen.

0.2 Situatie 2.

N machines hebben elk, onafhankelijk van elkaar, een stochastische looptijd, die exponentiëel verdeeld is met parameter μ. Aan het einde van een looptijd wordt een machine direct gerepareerd als hij de enige is die op dat moment kapot is, en in het andere geval staat hij stil tot hij aan de beurt is om gerepareerd te worden. Er wordt slechts een machine tegelijk behandeld. Na reparatie begint de machine aan een nieuwe van de vorige onafhankelijke looptijd, met dezelfde verdeling. Reparaties kunnen geschieden volgens k verschillende methoden $M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}$, die resp. $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ kosten en een stochastische tijd $\underline{s}_0, \underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_{k-1}$ vergen. Bij $\underline{s}_i$ hoort een verdelingsfunctie B_i $(i=1,2,\dots,k-1)$. Als een machine niet loopt, dus tijdens het wachten en gedurende reparatie zijn er kosten van productieverlies, namelijk b per machine per tijdseenheid.

De beheerder van dit systeem wil de totale kosten minimaliseren door op grond van het aantal wachtende machines te beslissen volgens welke methode gerepareerd wordt.

0.3 Samenvatting en inhoud.

Situatie 1 en situatie 2 beschrijven twee wachttijdproblemen, namelijk een loketprobleem en een machineprobleem, die alleen verschillen in aankomstverdeling. De twee gebezigde terminologieën zullen waar in de volgende hoofdstukken de aankomstverdeling niet gespecificeerd is, door elkaar worden gebruikt. Het blijkt mogelijk te zijn een optimale strategie te bepalen, d.w.z. een strategie waarvoor de verwachte gemiddelde kosten per tijdseenheid minimaal zijn.

Het principe van de hier gebezigde methode wordt beschreven in [3]; [1] en [2] geven ervan de waarschijnlijkheidstheoretische achtergronden en de bewijzen. In hoofdstuk 1 zullen we een voor onze doeleinden vereenvoudigde versie van de in [3] gegeven methode behandelen. Door deze methode toe te passen vinden we in hoofdstuk 2 een iteratieproces dat naar de optimale strategie convergeert. Hoofdstuk 3 en 4 geven noodzakelijke berekeningen, terwijl in hoofdstuk 5 enige numerieke resultaten worden gepresenteerd. Hoofdstuk 6 bevat de beschrijving van een andere iteratieprocedure voor de oplossing van het probleem, die echter numeriek minder aantrekkelijk lijkt. Enige gebruikte begrippen en stellingen zijn in een appendix opgenomen, alsmede een benadering van het probleem vanuit puur kanstheoretisch gezichtspunt.

Hoofdstuk 1. Methode.

1.1 Definities.

Een systeem doorloopt een verzameling toestanden. In de ruimte van alle mogelijke toestanden, de toestandsruimte X, is voor elk punt $x \in X$ een verzameling $D(x)$ van toegelaten beslissingen gedefinieerd. Voor elke $x \in X$ bevat $D(x)$ tenminste de z.g. nulbeslissing, die wil zeggen dat het proces niet wordt beinvloed. Eventuele andere beslissingen $\in D(x)$ worden interventies genoemd. Als op zeker tijdstip het systeem zich in toestand $x \in X$ bevindt en we doen een interventie $d \in D(x)$ dan verschuift het systeem onmiddellijk naar een andere toestand. Deze nieuwe toestand wordt geheel door x en d bepaald en is in dit verhaal niet stochastisch. Het proces dat het systeem doorloopt wanneer we steeds de nulbeslissing nemen heet het natuurlijk proces. Een stationaire strategie z is een functie die aan elk punt $x \in X$ een beslissing $z(x) \in D(x) \cup \{\text{nulbeslissing}\}$ toekent. De toevoeging "stationair" wil zeggen dat $z(x)$ alleen afhangt van x en niet van het tijdstip waarop de beslissing genomen moet worden. Laat Z de verzameling van alle stationaire strategieën zijn.

1.2 De opzet.

Voor het bepalen van een optimale strategie gaan wij te werk zoals beschreven wordt in §1.2.t/m §1.6. Kies eerst de ruimte X zo, dat X de toestanden waarin het systeem kan verkeren beschrijft. Bepaal voorts bij elke $x \in X$ de verzameling $D(x)$ en de toestand waarheen het systeem verschuift als in het punt x beslissing d genomen wordt. Voor elke $z \in Z$ wordt A_z ingevoerd als de verzameling van die toestanden x, waarin bij strategie z een interventie $z(x) \in D(x)$ gedaan wordt. Bij strategie z wordt dus in $X - A_z$ steeds de nulbeslissing genomen, en in A_z nooit de nulbeslissing.

We kiezen nu uit Z een klasse Z' van strategieën en in X een deelverzameling A_0 die voldoen aan de volgende twee voorwaarden

a) $A_0 = \bigcap_{z \in Z'} A_z$.

b) In het natuurlijk proces komt het systeem vanuit elke toestand $x \in X$ met kans 1 in een eindige tijd in A_0 terecht.

Dat we de te voeren strategie op A_0 gedeeltelijk vastleggen (voorwaarde a)) beperkt natuurlijk Z (tot Z'), maar door A_0 handig te kiezen zal de optimale oplossing in Z' ook optimaal zijn in Z.

1.3 Voorbereidende berekeningen.

Bepaal nu voor elke $x \in X$ en $d \in D(x)$ de verwachting van zowel de kosten als de tijdsduur van twee stochastische wandelingen die het systeem doorloopt, namelijk

a) beginnend in x met beslissing d en verder het natuurlijk proces volgend totdat voor het eerst een toestand in A_0 bereikt is

b) beginnend in x en steeds het natuurlijk proces volgend totdat voor het eerst een toestand in A_0 bereikt is.

We hebben nu dus verwachte kosten die we noemen k_a en k_b en verwachte tijdsduren t_a en t_b. Definieer nu:

$$k(x,d) = k_a - k_b \qquad \text{en} \qquad t(x,d) = t_a - t_b.$$

Duidelijk is dat $k(x,d) = t(x,d) = 0$ als d de nulbeslissing is.
De iteratieprocedure verloopt hierna als volgt: start met een willekeurige strategie $z \in Z'$.

1.4 Stap 1.

Beschouw de volgende functionaalvergelijkingen in de grootheden $r(z;x)$ en $c(z;x)$:

$$(1.4.1) \qquad r(z;x) = \vec{P} r(z;\underline{I}_1) \qquad \text{voor alle } x \in X$$

$$(1.4.2) \qquad c(z;x) = k(x;z(x)) - r(z;x) \, . \, t(x;z(x)) + P c(z;\underline{I}_1)$$

$$\text{voor alle } x \in X.$$

Hierin is $\underline{I}_1$ de eerste toestand in A_z die het systeem bereikt na toestand x, als de begintoestand x is en strategie z wordt gevolgd.

Onder strategie z vormen de toestanden die het systeem doorloopt een Markov-keten. Laten $E_1, E_2, \ldots, E_m$ de verschillende ergodische verzamelingen van deze Markovketen. Kies in elke E_j een toestand e_j en stel

$$c(z;e_j) = 0 \qquad \text{voor } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.4.3}$$

Nu heeft het stelsel vergelijkingen (1.4.1), (1.4.2) en (1.4.3) precies één oplossing. Bepaal deze oplossing.

<u>Opmerking</u>: Wij zullen allen het geval m = 1 tegenkomen. Daar r(z;x) constant is op elke ergodische verzameling, is in het geval m = 1, r(z;x) onafhankelijk van x. We kunnen dan vergelijking (1.4.1) laten vervallen en in (1.4.2) en verder r(z) schrijven in plaats van r(z;x). De grootheid r(z) geeft aan wat de verwachte gemiddelde kosten per tijdseenheid zijn bij strategie z.

1.5 <u>Stap 2</u>.

Bepaal voor alle $x \in X$ een $d \in D(x)$ waarvoor c(d.z;x) minimaal is. De testgrootheid c(d.z;x) is als volgt gedefinieerd:

$$c(d.z;x) = k(x;d) - r(z) \cdot t(x;d) + \mathcal{E}c(z;\underline{u}), \tag{1.5.1}$$

waarin $\underline{u}$ de (mogelijk stochastische, maar bij ons deterministische) toestand is waarnaar het systeem wordt verschoven door de beslissing $d \in D(x)$. Als voor meerdere elementen van D(x) het minimum wordt bereikt kies dan willekeurig een element, maar kies z(x) als z(x) ook de minimumwaarde geeft. De zo gekozen verzameling van c(d.z;x)-minimaliserende d bepalen een nieuwe strategie z_1. Voor z_1 geldt

$$A_{z_1} \supseteq A_z. \tag{1.5.2}$$

Definieer vervolgens

$$(1.5.3)\qquad c(\hat{z};x) = c(z_1(x).z;x) \qquad \text{voor alle } x \in A_{z_1}.$$

$c(\hat{z};x)$ is dus de waarde van het gevonden minimum.
Formule (1.5.2) geeft aan dat het werkingsgebied van strategie z_1 groter of gelijk is aan dat van z. We noemen stap 2 daarom <u>uitbreiden</u>.

1.6 <u>Stap 3</u>.

Bepaal nu $X(\hat{z})$, de klasse van verzamelingen A, die voldoen aan de volgende twee relaties

$$(1.6.1)\qquad A_0 \subseteq A \subseteq A_{z_1}.$$

$$(1.6.2)\qquad c(A.\hat{z};x) \leq c(\hat{z};x) \qquad \text{voor alle } x \in A_{z_1}.$$

Hierin is $c(A.\hat{z};x) = \mathscr{E}c(\hat{z};\underline{a})$, met $\underline{a}$ de eerste toestand die het systeem aanneemt in A, als het start in x en het natuurlijk proces volgt. Neem nu

$$(1.6.3)\qquad A'_z = \bigcap_{A \in X(\hat{z})} A.$$

Dan vinden wij een nieuwe strategie z' met $r(z') \leq r(z)$ als we nemen

$$(1.6.4)\qquad z'(x) = \begin{cases} z_1(x) & \text{als } x \in A'_z \\ \text{nulbeslissing} & \text{als } x \notin A'_z. \end{cases}$$

Uit (1.6.1) en (1.6.3) volgt dat

$$(1.6.5)\qquad A'_z \subseteq A_{z_1}$$

hetgeen wil zeggen dat het werkingsgebied van strategie z' kleiner of gelijk is aan dat van z_1. Stap 3 noemen we daarom <u>afkappen</u>.

Eén iteratieslag is nu beschreven; als $z' \neq z$ begin dan opnieuw bij stap 1, maar met z' in plaats van z.

1.7 Opmerkingen.

Een strategie z is optimaal wanneer bij het doorlopen van een iteratieslag aan de volgende twee gelijkheden wordt voldaan

(1.7.1) $z_1 = z$

(1.7.2) $A_z' = A_z$.

Wanneer het handiger is kan men in de iteratieprocedure een of meer malen stap 3 overslaan, en pas wanneer aan (1.7.1) voldaan is stap 3 doen. Wordt dan ook aan (1.7.2) voldaan, dan is de gevonden strategie optimaal. Voor de strategie z_1, verkregen na stap 2 geldt namelijk $r(z') \leq r(z_1) \leq r(z)$.

Hoofdstuk 2. Uitwerking.

2.1 Vooronderstellingen.

In dit en alle volgende hoofdstukken zullen we ervan uitgaan dat interventies alleen genomen worden op tijdstippen dat een nieuwe bedienings-(reparatie-)periode begint. De keuze van de toestandsruimte en het natuurlijk proces is bepalend voor de aard van de iteratieprocedure en is dus van fundamenteel belang. Bij deze keuze moet men vaststellen wat tot het natuurlijk proces gerekend moet worden en welke de interventies zullen zijn. Twee mogelijkheden doen zich voor: een voor de hand liggende is:

(2.1.1) noem alleen het veranderen van methode een interventie.

Een andere mogelijke keuze is:

(2.1.2) zeg dat een beslissing (mogelijk de nulbeslissing) genomen wordt telkens wanneer een nieuwe bedieningsperiode begint.

De keuze van (2.1.1) of (2.1.2) bepaalt het natuurlijk proces. Wij kiezen (2.1.2) omdat dat tot een prettiger en numeriek beter hanteerbare iteratieprocedure leidt. De opbouw van de iteratieprocedure na keuze van (2.1.1) zal in hoofdstuk 6 worden gegeven.

2.2 De toestandruimte en het natuurlijk proces.

Definieer verzamelingen L en L_i $(i=0,1,\dots,k-1)$ door

(2.2.1) $L = \{x \mid x \geq 0 \text{ en } x \text{ geheel getal}\}$

(2.2.2) $L_i = \{(x,i,t) \mid x \geq 0,\ x \text{ geheel};\ t \geq 0;\ t \text{ reëel}\}.$

Neem nu

(2.2.3) $X = L \cup \bigcup_{i=0}^{k-1} L_i.$

X bevat dus voor elke bedieningsmethode een copie van het product van de verzameling der niet-negatieve gehele getallen met de niet-negatieve halfrechte en daarbij nog eens een copie van de verzameling der niet-negatieve gehele getallen.

De punten van X hebben de volgende betekenis:

(2.2.4) We zeggen dat het systeem zich in punt $x \in L$ bevindt als er x klanten aanwezig zijn en zojuist een bediening beeindigd is; de afgehandelde klant telt niet meer mee.

(2.2.5) We zeggen dat het systeem zich in punt $(x,i,t) \in L_i$ bevindt als er x klanten aanwezig zijn, en er een tijd t verlopen is sinds de bediening van één van hen begonnen is, terwijl deze klant bediend wordt volgens methode M_i.

Alleen wanneer het systeem zich in L bevindt (en dus juist een bedieningsperiode is afgelopen) kan door de beslisser worden geintervenieerd. Een beslissing om de volgende bediening of reparatie volgens methode M_i te laten plaatsvinden geven we aan met i. Hierbij definieren wij de beslissing 0 als een nulbeslissing; dus de beslissingen $1, \ldots, k-1$ zijn interventies. In elk punt $x \in L$ bestaat dus $D(x)$ uit de beslissingen 0 tot en met $k - 1$. In alle overige punten, namelijk de punten (x,i,t) bevat $D(x,i,t)$ alleen de nulbeslissing. Op het moment dat we beslissing i nemen verschuift het systeem van L naar L_i $(i=0,1,\ldots,k-1)$. Hoe dit precies gebeurt volgt hieronder.

Eerst beschrijven we het natuurlijk proces, hetgeen wil zeggen dat uitsluitend de nulbeslissing wordt genomen. Stel dat het systeem zich in het punt $x \in L$ bevindt. Als $x > 0$ is, dan begint onmiddellijk een nieuwe bedieningsperiode, terwijl in het geval $x = 0$ de bediening begint zodra een nieuwe klant binnenkomt (het systeem verschuift dan naar het punt $1 \in L$). Deze bediening geschiedt volgens methode M_0 en duurt dus $\underline{s}_0$. Zodra de bediening start verschuift het systeem van $x \in L$ naar $(x,0,0) \in L_0$. Na een tijd t, met $t < \underline{s}_0$ is het syteem in het punt $(x+\underline{k}(t),0,t) \in L_0$ gekomen, waarbij $\underline{k}(t)$ het aantal klanten is dat in het tijdsinterval $[0,t]$ is binnengekomen. Eventueel is $\underline{k}(t)$ ook nog van x afhankelijk. Als de bediening is afgelopen verspringt het systeem van $(x+\underline{k}(\underline{s}_0),0,\underline{s}_0) \in L_0$ naar $x + \underline{k}(\underline{s}_0) - 1 \in L$. De term $- 1$ duidt op de afgeholpen klant, die de wachtrij heeft verlaten.

Wanneer wel geintervenieerd kan worden verloopt het proces als volgt. Stel dat het systeem zich in $x \in L$ bevindt en we interventie $i \geq 1$ nemen. Voor $x > 0$ begint dan een bediening volgens methode M_i met een duur $\underline{s}_i$, en het systeem verschuift naar het punt $(x,i,0) \in L_i$. Daarna blijft het verder gedurende de gehele bedieningsperiode in L_i en wel geldt dat na een tijd $t < \underline{s}_i$ het systeem zich in $(x+\underline{k}(t),i,t)$ bevindt. Hierin heeft $\underline{k}(t)$ weer de bovenomschreven betekenis. Na een tijd $\underline{s}_i$ is de bediening afgelopen en springt het systeem terug van $(x+\underline{k}(\underline{s}_i),i,\underline{s}_i) \in L_i$ naar $x + \underline{k}(\underline{s}_i) - 1 \in L$. Zodra het systeem op L terug is, herhaalt zich bovenstaand verhaal.

2.3 Beperking en voorbereidingen.

We beperken ons nu tot het geval $k = 2$, zodat we te maken hebben met twee verschillende bedieningstijden $\underline{s}_0$ en $\underline{s}_1$, en we zullen deze zo gerangschikt nemen dat $\mathcal{E}\underline{s}_0 < \mathcal{E}\underline{s}_1$ (voor $\mathcal{E}\underline{s}_0 = \mathcal{E}\underline{s}_1$ zie opmerking in §2.9). De beperking tot $k = 2$ is niet essentieel en alleen omwille van de eenvoud. Met $k = 4$ is in hoofdstuk 5 een voorbeeld uitgerekend.

Een strategie z kan nu als volgt worden gekarakteriseerd: omdat op $L_0 \cup L_1$ alleen de nulbeslissing mogelijk is hoeven we z alleen te geven op L. Voor elke $x \in L$ is $z(x)$ gelijk aan 0 of 1, naargelang we de nulbeslissing nemen (dus tot een snelle bediening besluiten) dan wel besluiten de langzame methode toe te passen. Z is de verzameling van strategieen.

Laat $A_0 = \{0\} \subset L$, en neem $z(0) = 0$ voor elke $z \in Z$. Dit is geen beperking van de klasse van strategieen die we beschouwen want alleen als het systeem in een punt $x > 0$ verkeert, begint een nieuwe bedieningsperiode en dus is het in $x = 0$ niet van belang welke beslissing we nemen. Nu moeten we nog controleren of aan voorwaarde (1.2.b) voldaan is. We behandelen dit apart voor de twee genoemde problemen: het loketprobleem (0.1) en het machineprobleem (0.2).

In het geval dat we met het machineprobleem te maken hebben vormen voor elke strategie de toestanden van L een eindige irreducibele Markovketen. Dan geldt dat alle toestanden ergodisch zijn, hetgeen wil zeggen dat ze volhardend zijn met eindige terugkeertijd. Vanuit elke toestand wordt dan toestand 0 in eindige tijd bereikt. Voor de gebruikte stellingen zie bijvoorbeeld [4], deel I, XV.6, blz. 390 e.v.

Voor het loketgeval wordt in appendix 3 bewezen dat alle toestanden ergodisch zijn mits $\mathcal{E}\underline{s}_0 < \lambda^{-1}$. Dit laatste is voortdurend onze aanname (zie 0.1). Dezelfde stellingen als boven kunnen dan worden toegepast.

De waarden van $k(x;1)$ en $t(x;1)$ worden voor het loketprobleem berekend in hoofdstuk 3 en voor het machineprobleem in hoofdstuk 4. Hierna gaan we ervan uit dat we deze waarden kennen.

In het vervolg zullen we de overgangswaarschijnlijkheden nodig hebben tussen de punten van L in een bedieningsperiode. Laat daarom voor $x \geq 1$, $j \geq 0$ en $i = 0, 1$

(2.3.1) $p_j^{(i)}(x)$ = de kans dat in één bedieningsperiode volgens M_i, die aanvangt terwijl de rijlengte x is, precies j klanten (machines) binnenkomen.

Voor het loketprobleem resp. het machineprobleem geldt

$$p_j^{(i)}(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^j}{j!} \, dB_i(s) \tag{2.3.2}$$

resp.

$$p_j^{(i)}(x) = \int_0^\infty \binom{N-x}{j} (1-e^{-\mu s})^j \, e^{-\mu s(N-x-j)} \, dB_i(s). \tag{2.3.3}$$

Merk op dat (2.3.2) niet van x afhangt. Dit is duidelijk omdat bij het loketprobleem het inputproces niet afhangt van het aantal wachtenden. De overgangswaarschijnlijkheden op L zijn nu als volgt: als het systeem in toestand $x \in L$ verkeert en beslissing i wordt genomen, dan komt het systeem de volgende keer in L volgens een kansverdeling, die aan het punt $x + j-1 \in L$ de kans $p_j^{(i)}(x)$ toekent.

2.4 De iteratie.

Een strategie z heet aaneengesloten als er een getal x_0 bestaat zodat

$$(2.4.1)\qquad z(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x > x_0 \\ 1 & \text{voor } x \leq x_0. \end{cases}$$

We hebben dan dat $A_z = \{x \mid x \leq x_0\} \subset L$.
We beschouwen uitsluitend aaneengesloten strategieen, omdat onder zekere voorwaarden de optimale strategie aaneengesloten is (zie §2.7).

Start met een willekeurige strategie z die aan (2.4.1) voldoet, en bereken zoals in 1.4 de functie $c(z;x)$. Omdat interventies alleen in L gedaan kunnen worden hoeven we in de gehele iteratieprocedure geen aandacht te besteden aan punten in $L_0 \cup L_1$.

De toestanden van L behoren tot dezelfde ergodische verzameling in X zodat we één c-waarde vrij kunnen kiezen. Kies

$$(2.4.2)\qquad c(z;x_0) = 0.$$

Uit (1.4.2) volgt, omdat $k(x;z(x)) = t(x;z(x)) = 0$ voor $x > x_0$, dat

$$(2.4.3)\qquad c(z;x) = \mathcal{E}c(z;\underline{I}_1) \qquad \text{voor } x > x_0,$$

met $\underline{I}_1$ de eerste toestand $\in A_z$ die het systeem bereikt. Omdat het systeem echter op L met slechts één toestand tegelijk kan teruglopen, en in het natuurlijk proces lagere toestanden op L met kans 1 in eindige tijd worden bereikt geldt voor alle $x > x_0$ dat $\underline{I}_1 = x_0$ met kans 1. We hebben dus

$$(2.4.4)\qquad c(z;x) = 0 \qquad \text{voor } x \geq x_0.$$

Voor een toestand $x \in A_z$ geldt dat $z(x) = 1$ en (1.4.2) wordt dan

$$(2.4.5)\qquad c(z;x) = k(x;1) - r(z)t(x;1) + \sum_{j=0}^{x_0-x} p_j^{(1)}(x)\; c(z;x+j-1).$$

De kansverdeling van $\underline{I}_1$ is hier al ingevuld. Deze formule is juist voor $x = 1, 2, \ldots, x_0$. Voor $x = 0$ geldt

$$(2.4.6) \qquad c(z;0) = k(0;1) - r(z)t(0;1) + \sum_{j=0}^{x_0} p_j^{(1)}(1)\, c(z;j).$$

Met (2.4.2) vormen de vergelijkingen (2.4.5) en (2.4.6) een stelsel $x_0 + 1$ lineaire vergelijkingen met $x_0 + 1$ onbekenden namelijk $c(z;0), c(z;1), \ldots, c(z;x_0-1)$ en $r(z)$. Dit stelsel is een Hessenberg-stelsel (zie appendix 2) en heeft één oplossing. Bepaal deze oplossing.

2.5 Uitbreiden.

In 2.5 tot en met 2.9 gaan we ervan uit dat de k- en t-functies zodanig zijn dat $k(x,1) - r(z)t(x,1)$ een monotoon stijgende functie is in x voor elke strategie z die we tegenkomen. In het loketgeval is aan deze voorwaarde zonder meer voldaan (zie 3.10), in het machinegeval kan de voorwaarde tijdens de iteratieprocedure telkens worden nagegaan. De onderhavige strategie z wordt nu als volgt uitgebreid.

Gezien (2.4.4) volgt uit (1.5.1) met $d = 1$ resp. $d = 0$

$$(2.5.1) \qquad c(1.z;x) = k(x,1) - r(z)t(x,1) \qquad \text{voor } x > x_0,$$

resp.

$$(2.5.2) \qquad c(0.z;x) = c(z;x) = 0 \qquad \text{voor } x > x_0.$$

In overeenstemming met 1.5 kiezen we dus $z_1(x) = 1$ voor alle $x > x_0$ waarvoor geldt

$$(2.5.3) \qquad k(x;1) - r(z)t(x;1) < 0.$$

Voor de overige $x > x_0$ kiezen we $z_1(x) = 0$.

Voor d is nulbeslissing geldt $k(x;d) = t(x;d) = 0$, dus uit (1.5.1) en $z(x) = 1$ voor $x \leq x_0$ volgt

$$(2.5.4) \qquad c(0.z;x) = c(z;x) = c(1.z;x) \qquad \text{voor } x \leq x_0.$$

Dit betekent dat $z_1(x) = z(x) = 1$ voor $x \leq x_0$.

Omdat het rechterlid van (2.5.3) een monotoon stijgende functie in x verondersteld is bestaat een getal $x_1 \geq x_0$ zô dat

$$(2.5.5) \qquad z_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } x \leq x_1 \\ 0 & \text{voor } x > x_1. \end{cases}$$

Nu geldt (zie (1.5.3)):

$$(2.5.6) \qquad c(\hat{z};x) = \begin{cases} c(z;x) & \text{voor } x \leq x_0 \\ k(x;1) - r(z)t(x;1) & \text{voor } x_0 < x \leq x_1 \\ 0 & \text{voor } x > x_1 \end{cases}$$

en

$$(2.5.7) \qquad A_{z_1} = \{x \mid x \leq x_1\} \subset L.$$

Door uitbreiden behoudt men dus een aaneengesloten strategie.

2.6 Afkappen.

We kiezen speciale verzamelingen A die voldoen aan (1.6.1) en waarvoor we (1.6.2) controleren, definieer namelijk

$$(2.6.1) \qquad A_a = \{x \mid x \leq x_a\} \text{ met } x_a \leq x_1.$$

Dan is

$$(2.6.2) \qquad c(A.\hat{z};x) = \begin{cases} c(\hat{z};x_a) & \text{voor } x \geq x_a \\ c(\hat{z};x) & \text{voor } x \leq x_a. \end{cases}$$

Dit volgt onmiddellijk uit de betekenis van $c(A.\hat{z};x)$ namelijk de $c(\hat{z},.)$-waarde van het eerste punt dat het systeem aandoet in A, als het start in het punt x en het natuurlijk proces volgt. Als $x > x_a$, dan geldt met eenzelfde redenering als na formule (2.4.3) dat x_a

noodzakelijkerwijs het eerste punt in A is. Voor $x \leq x_a$ is de gelijkheid duidelijk.
De eis (1.6.2) komt nu neer op

$$(2.6.3) \qquad c(\hat{z};x_a) \leq c(\hat{z};x) \qquad \text{voor } x_a < x \leq x_1.$$

Als hieraan voldaan is dan is $A_a \in X(\hat{z})$. We dienen nu de doorsnede te nemen van deze verzamelingen, neem dus x_a het kleinste getal waarvoor geldt

$$(2.6.4) \qquad c(\hat{z};x_a) = \min_{1 \leq x \leq x_1} c(z;x).$$

Een nieuwe, verbeterde strategie z' wordt dan gegeven door

$$(2.6.5) \qquad z'(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } x \leq x_a \\ 0 & \text{voor } x > x_a. \end{cases}$$

Als bij uitbreiden en afkappen gevonden wordt dat $x_0 = x_1 = x_a$ dan hebben we de optimale aaneengesloten strategie gevonden. Dat dit onder een extra voorwaarde ook de optimale strategie is onder alle stationaire strategieen wordt in 2.7 bewezen.

Een opmerking over de opeenvolging van uitbreiden en afkappen moet nog worden gemaakt, in aansluiting op de mededeling in 1.7. Als $x_1 > x_0$, dus als er echt is uitgebreid, dan geldt in (2.6.3) voor $x_a = x_0+1$ het $\leq$ teken voor alle x met $x_0+1 < x \leq x_1$. Dit volgt door beide leden van (2.6.3) te vervangen door de in (2.5.6) gegeven waarden en de monotonie van $k(x,1) - r(z)t(x,1)$ te gebruiken. Dit betekent dat bij het afkappen hoogstens één punt van de vorige uitbreiding overblijft. Het kan daarom de iteratie versnellen als pas wordt afgekapt wanneer een uitbreiding niets oplevert, dus wanneer $x_1 = x_0$ gevonden is.

2.7 De optimale oplossing.

We leggen nu een extra voorwaarde op aan de bedieningstijden namelijk dat de bedieningstijd met de kleinste verwachting ook stochastisch kleiner is dan de andere. Voor de definitie van het begrip stochastisch kleiner en voor de hierna te gebruiken lemma's en stelling zie A.1. Onder deze voorwaarde bewijzen we dat de optimale strategie een aaneengesloten strategie is.

Beschouw een willekeurige niet-aaneengesloten strategie z. Laat $[x_1+1,x_0]$ het laatste interval zijn van A_z (eventueel $x_1+1 = x_0$), en laat $[x_2+1,x_1]$ het daarvóór komende interval zijn van $L - A_z$ (eventueel $x_2+1 = x_1$). We hebben dus

$$(2.7.1) \qquad z(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } x_1+1 \leq x \leq x_0 \text{ en voor } x = x_2 \\ 0 & \text{voor } x_2+1 \leq x \leq x_1. \end{cases}$$

De overige waarden van z blijven ongespecificeerd. Veronderstel dat A_z in het punt x_0 niet kan worden afgekapt (anders is een verbeterde strategie mogelijk). We nemen aan dat voor z de waarden van r(z) en de c-functie bepaald zijn zoals beschreven in 1.4, dus uit (1.4.2) en (1.4.3) met $m = 1$ en $e_1 = x_0$.

De functie c(z;x) in de variabele x voldoet aan de vergelijkingen (A.2.2) als we stellen

$$c_x = c(z;x)$$

$$p_k^{(x)} = p_k^{(z(x))}(x) \qquad \text{(voor definitie zie (2.3.1))}$$

$$u_x = \begin{cases} k(x,1) - r(z)t(x,1) & \text{als } z(x) = 1 \\ 0 & \text{als } z(x) = 0 \end{cases}$$

en

$$n = x_0.$$

Stelling A.2 kunnen we dus op c(z;x) toepassen.
We laten eerst zien

$$(2.7.2) \qquad k(x_0,1) - r(z)t(x_0,1) < 0.$$

We doen dit in twee gedeelten. Neem aan dat $x_1+1 = x_0$ en dat (2.7.2) niet geldt. Nu is aan voorwaarde (b) uit stelling A.2 voldaan en dus is $c(z;x)$ monotoon niet-dalend voor $x_2 \leq x \leq x_0$.

Daar in het punt x_0 niet kan worden afgekapt geldt dat A_{x_2} niet tot $X(z)$ behoort (zie 1.6). Met A_{x_2} bedoelen we de doorsnede van A_z met het interval $[0,x_2]$. Uit (1.6.2) volgt dan dat er een $\tilde{x} \geq x_2+1$ bestaat met

$$(2.7.3) \qquad c(A_{x_2}.z;\tilde{x}) > c(z;\tilde{x}).$$

Zoals in 2.6 geldt dat het eerste lid van deze formule gelijk is aan $c(z;x_2)$, terwijl wegens de monotonie van $c(z;x)$ het tweede lid groter of gelijk is aan $c(z;x_2+1)$. Formule (2.7.3) geeft dus

$$(2.7.4) \qquad c(z;x_2) > c(z;x_2+1).$$

Dit is een tegenspraak met de monotonie, dus (2.7.2) geldt.

Nu het tweede deel: stel dat $x_1+1 \leq x_0-1$. Dan geldt omdat in x_0 niet kan worden afgekapt dat A_{x_0-1} niet tot de klasse $X(z)$ behoort. Dit betekent (zie (1.6.2))

$$(2.7.5) \qquad c(z;x_0-1) > c(z;x_0) = 0.$$

Formule (2.7.2) volgt nu als we stelling A2c toepassen.

Uit de monotonie van $k(x,1) - r(z)t(x,1)$ en (2.7.1) volgt nu dat $k(x,1) - r(z)t(x,1) < 0$ voor alle $x \leq x_0$ en dus is aan de voorwaarde onder (a) van stelling A.2 voldaan met $n_1 = 1$. We weten dan dat $c(z;x)$ een monotoon niet-stijgende functie is voor $0 \leq x \leq x_0$, en zelfs voor $0 \leq x < \infty$ omdat $c(z;x) = 0$ voor $x \geq x_0$.

We zullen nu laten zien dat de strategie verbeterd kan worden. Laat $\tilde{x}$ een punt zijn met $\tilde{x} \leq x_1$ en $z(\tilde{x}) = 0$. Dan geldt

$$(2.7.6) \qquad c(1.z;\tilde{x}) = k(\tilde{x};1) - r(z)t(\tilde{x};1) + \mathcal{E}c(z;x+\underline{k}_1-1)$$

$$(2.7.7) \qquad c(z;\tilde{x}) = \mathcal{E}c(z;x+\underline{k}_0-1).$$

Hierin is $\underline{k}_i$ voor i = 0, 1 een stochastische variabele die het aantal aankomsten weergeeft gedurende één bediening volgens methode M_i. Formules (2.7.6) en (2.7.7) volgen door (1.5.1) te combineren met (1.4.2) en de grootheid $\underline{I}_1$ uit (1.4.2) in te vullen. Bij het bepalen van een verbeterde strategie z_1 is $z_1(\tilde{x}) = 1$ als (2.7.6) < (2.7.7), dus als

$$(2.7.8) \qquad k(\tilde{x},1) - r(z)t(\tilde{x};1) < \mathcal{E}c(z;x+\underline{k}_0-1) - \mathcal{E}c(z;x+\underline{k}_1-1).$$

Nu is hiervan het linkerlid < 0 wegens monotonie en (2.7.2). Omdat $\underline{s}_0 \subset \underline{s}_1$ geldt volgens stelling A.1 dat $\underline{k}_0 \subset \underline{k}_1$. De functie $c(z;\tilde{x}+u)$ is monotoon niet stijgend in u, dus lemma A.2 kan worden toegepast op $-\ c(z;\tilde{x}+u)$ en met lemma A.1 volgt dan

$$(2.7.9) \qquad \mathcal{E}c(z;x+\underline{k}_0-1) \geq \mathcal{E}c(z;x+\underline{k}_1-1),$$

zodat het rechterlid van (2.7.8) $\geq$ 0 is.
Hieruit volgt dat (2.7.8) geldt, dus $z_1(\tilde{x}) = 1$. Daar deze redenering opgaat voor alle $\tilde{x} \in L-A_z$, geldt dat uit de niet aaneengesloten strategie z een verbeterde aaneengesloten strategie z_1 wordt gevonden.

2.8 De benadering.

Nu we weten dat we uitsluitend aaneengesloten strategieën hoeven te beschouwen kunnen we zo'n strategie z identificeren met het punt x_0, dat het grootste punt is waarvoor $z(x) = 1$. Een strategie z_0 is optimaal wanneer er noch kan worden uitgebreid noch kan worden afgekapt (formules (1.7.1) en (1.7.2)).
Als z_0 niet kan worden uitgebreid, dan betekent dat voor het punt z_0 (eindpunt van de strategie), dat z_0 het laatste punt is waarvoor (2.5.3) geldt, m.a.w.

$$(2.8.1) \qquad k(z_0+1;1) - r(z_0)t(z_0+1;1) \geq 0.$$

Als z_0 niet kan worden afgekapt, dan geldt dat $c(z_0;z_0)$ het minimum is van alle $c(z_0;x)$, dus dat $c(z_0,z_0-1)$ positief is, want $c(z_0;z_0) = 0$.
Met stelling A.2c concluderen we dan dat

(2.8.2) $\quad k(z_0;1) - r(z_0)t(z_0;1) < 0.$

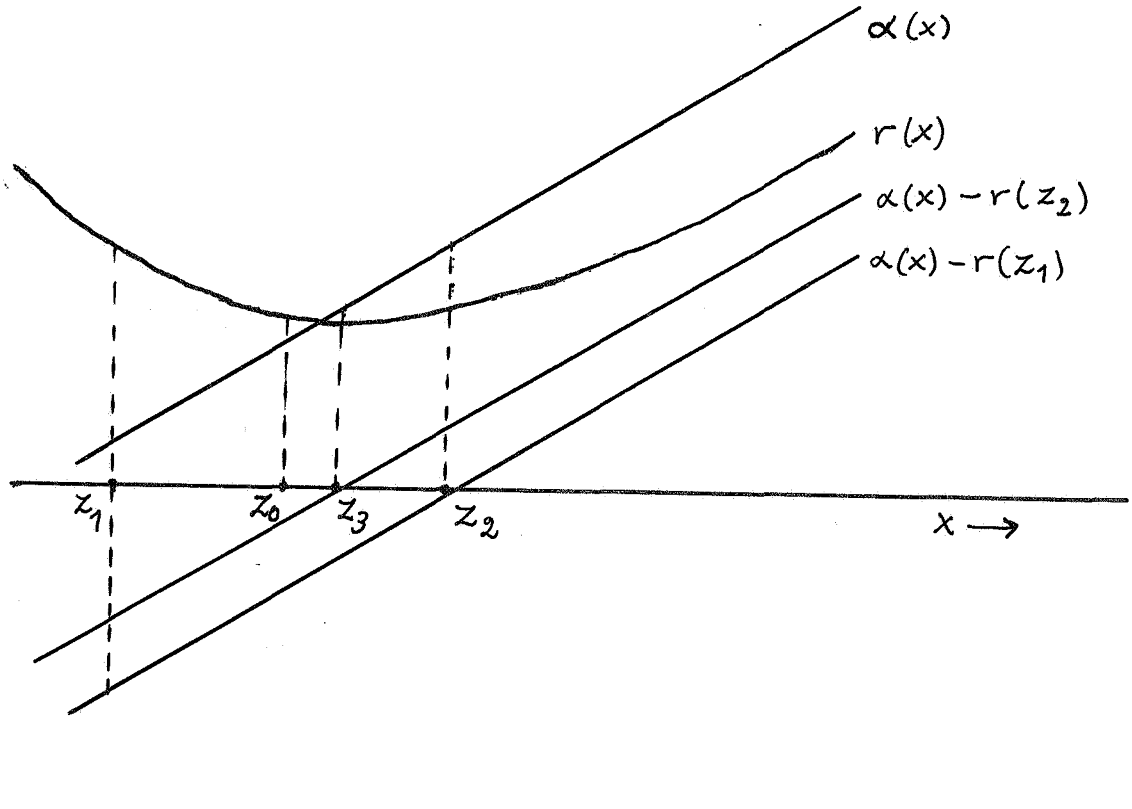
Daar in het loketgeval $t(x;1)$ voor $x \geq 1$ niet van x afhangt kunnen we dan schrijven

$$(2.8.3) \qquad \alpha(x) = \frac{k(x;1)}{t(x;1)} ,$$

en we weten dan dat $\alpha(x)$ lineair is in x en stijgend voor $x \geq 1$. Formules (2.8.1) en (2.8.2) kunnen we dan samennemen tot

$$(2.8.4) \qquad \alpha(z_0) < r(z_0) \leq \alpha(z_0+1).$$

Beschouw nu eens de functie $r(x)$, de verwachte gemiddelde kosten van de strategie die x als eindpunt heeft. Veronderstel dat $r(x)$ precies één minimum heeft. Dan kunnen we nagaan hoe in de iteratie het optimum wordt gevonden. Laten gegeven zijn $r(x)$ en $\alpha(x)$ voor alle $x \in L$.



We tekenen gesloten lijnen en krommen, maar bedenken dat het alleen gaat om de gehele punten.

1. Start met een strategie z_1.
2. Bepaal $\alpha(z_1) - r(z_1)$ en trek de lijn $\alpha(x) - r(z_1)$ evenwijdig aan $\alpha(x)$. De grootheid $\alpha(x) - r(z_1)$ is $k(x;1) - r(z_1)t(x;1)$ uitgedrukt in de eenheid $t(x;1)$.
3. Bepaal een verbeterde strategie z_2. Deze strategie voldoet aan $\alpha(z_2) - r(z_1) < 0$ en als $z_2 > z_1$ ook aan $0 \leq \alpha(z_2+1)-r(z_1)$. Verder weten we dat $r(z_2) \leq r(z_1)$.
4. Als $z_2 \neq z_1$ begin dan weer bij 2.
5. Als $z_2 = z_1$ dan is $z_1 = z_0$ optimaal.

Daar de verzameling der strategieën discreet is, zal z_0 na een eindig aantal stappen bereikt zijn.

2.9 Omschakelkosten en andere opmerkingen.

Tot nu toe hebben we verondersteld dat het omschakelen van methode M_i naar M_j geen extra kosten met zich meebrengt. De toestand waarin het systeem zich bevindt geeft geen uitsluitsel of er bij de aanvang van een nieuwe bediening omgeschakeld wordt of niet. Om toch deze kosten in de beschouwing te kunnen betrekken veranderen we daarom de toestandsruimte. We zullen dit beschrijven voor het geval $k = 2$. Neem

$$X = L \cup L' \cup L_0 \cup L_1, \tag{2.9.1}$$

waarin L en L' hetzelfde zijn als L in (2.2.1) en L_0 en L_1 gedefinieerd zijn als in (2.2.2).

Het natuurlijk proces verloopt hetzelfde als in 2.3 beschreven is, behalve dat na een bedieningsperiode het systeem vanuit L_1 steeds terugspringt naar L' en vanuit L_0 steeds naar L. Op deze manier onderscheiden we op het moment van beslissen of de zojuist beeindigde bediening volgens methode M_0 of M_1 geweest is. Zowel in L als in L' kan beslissing 1 worden genomen met de voor de hand liggende betekenis. Kies weer $A_0 = \{0\} \subset L$. We moeten nu voor alle punten $x \in L$ en $x' \in L'$

$k(x,1)$, $k(x',1)$ $t(x;1)$ en $t(x';1)$ bepalen. Met $\tilde{k}(x;1)$ en $\tilde{t}(x;1)$ geven we de waarden aan van de k- en t-functies zoals die in hoofdstuk 3 en hoofdstuk 4 zijn bepaald.Het is duidelijk dat overgangskosten geen invloed hebben op de t-functie. We hebben dus

$$(2.9.2) \qquad t(x;1) = t(x';1) = \tilde{t}(x;1) \qquad \text{voor } x \geq 0.$$

Laten de overgangskosten van methode M_i naar M_j e_{ij} zijn $(i,j=0,1)$. Er geldt dan

$$(2.9.3) \qquad \begin{aligned} k(x;1) &= \tilde{k}(x;1) + e_{01} + e_{10} && \text{voor } x \geq 0 \\ k(x';1) &= \tilde{k}(x;1) && \text{voor } x \geq 0. \end{aligned}$$

Bij deze toestandsruimte moeten we iets ingewikkelder strategieën beschouwen namelijk functies z, gedefinieerd op $L \cup L'$, met waarden 0 (= nulbeslissing) of 1. Hiervan beschouwen we de aaneengesloten strategieën van de vorm

$$(2.9.4) \qquad z(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x > x_0 \\ 1 & \text{voor } x \leq x_0 \end{cases}$$

$$z(x') = \begin{cases} 0 & \text{voor } x' > x_1' \\ 1 & \text{voor } x' \leq x_1' \end{cases}$$

met $\quad x_0 \leq x_1$.

Dit levert verder weinig extra moeilijkheden en we zullen dit dan ook niet nader uitwerken.

In de oorspronkelijke opzet zijn er geen kosten wanneer het loket leeg is. Deze kosten kunnen gemakkelijk worden meeberekend. $k(0;1)$ wordt dan groter.

Voor de aardigheid kijken we even naar een loketprobleem waarin twee bedieningsmethoden mogelijk zijn die gelijke verwachting hebben maar verschillende variantie. Laat $\mathcal{E}\underline{s}_0 = \mathcal{E}\underline{s}_1$ en var $\underline{s}_0$ < var $\underline{s}_1$. De optimale strategie bestaat er dan in steeds de ene methode te gebruiken en nooit de andere. Welke van de twee gebruikt wordt hangt af van de kosten van de bediening. Uit (3.10.6) en (3.10.5) vinden we dat

(2.9.5)
$$t(x;1) = 0 \qquad \text{voor } x \geq 1$$
$$k(x;1) = b \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\text{var } \underline{s}_1 - \text{var } \underline{s}_0}{1 - \lambda\, \mathcal{E}\underline{s}_0} + c_1 - c_0 \qquad \text{voor } x \geq 1.$$

$k(x;1)$ is dus onafhankelijk van x voor $x \geq 1$, en uit §2.5 en 2.6 blijkt gemakkelijk dat we methode M_0 (met de kleinste variantie) gebruiken als $k(x;1) > 0$ en M_1 als $k(x,1) < 0$. Uit (2.9.5) volgt dat $k(x;1) > 0$ is als

(2.9.6)
$$c_0 - c_1 < b \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\text{var } \underline{s}_1 - \text{var } \underline{s}_0}{1 - \lambda\, \mathcal{E}\underline{s}_0} .$$

De methode met de kleinste variantie mag dus nog iets duurder zijn dan de andere en kan dan nog goedkoper uitkomen.

Hoofdstuk 3. Berekening van de k- en t-functies voor het loketprobleem.

3.1 Een paar opmerkingen vooraf.

Voorafgaande aan de afleiding van de formules voor de k- en t-functies geven we eerst een overzicht van de voorkomende stochastische variabelen en enige van hun eigenschappen die we voor die afleiding nodig hebben.

We verkeren in dit hoofdstuk in de situatie van het loketprobleem met twee bedieningsmethoden M_0 en M_1, waarbij M_0 de "snelle" methode is.

De k- en t-functies voor het algemene geval met k ($k \geq 2$) bedieningsmethoden volgen op analoge wijze (vervang "i=0,1" overal door "i=0,1,2,...,k-1").

3.2 De bedieningstijden.

We bekijken eerst de bedieningstijden. Met $\underline{s}_i$ wordt de lengte van een bedieningstijd volgens methode M_i aangegeven voor i = 0, 1.

We nemen aan dat $\underline{s}_0$ en $\underline{s}_1$ onderling onafhankelijk (o.o) zijn met respectievelijke verdelingsfuncties B_0 en B_1, waarvoor geldt

$$B_i(0-) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \uparrow 0} B_i(h) = 0, \qquad \text{voor } i = 0,\ 1.$$

We nemen verder aan dat van beide het tweede moment bestaat, dus

$$\mathcal{E}\underline{s}_i^2 = \int_0^\infty s^2 dB_i(s) < \infty,$$

en bovendien dat geldt

$$0 < \mathcal{E}\underline{s}_0 = \int_0^\infty s dB_0(s) < \int_0^\infty s dB_1(s) = \mathcal{E}\underline{s}_1 < \infty.$$

3.3 Het aankomstenproces.

De klanten komen volgens een stationair Poissonproces met intensiteit $\lambda > 0$ aan bij het loket. Dit wil het volgende zeggen. We definiëren eerst

$$\underline{\tau}_k \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 \quad , & \text{voor } k = 0 \\ \text{het tijdstip, waarop de } k^{\text{de}} \text{ klant ná } \underline{\tau}_0 \text{ bij} & \\ \text{het loket arriveert,} & \text{voor } k = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Vervolgens definiëren we de tussenaankomsttijden

$$\underline{a}_k \overset{\text{def}}{=} \underline{\tau}_k - \underline{\tau}_{k-1} , \qquad \text{voor } k = 1, 2, \ldots$$

zodat

(3.3.1) $$\underline{\tau}_k = \sum_{j=1}^{k} \underline{a}_j \quad , \qquad \text{voor } k = 1, 2, \ldots .$$

De stochastische variabelen $\underline{a}_k$ zijn o.o. en hebben allen een exponentiële verdeling met parameter λ, dus voor $k = 1, 2, \ldots$

$$A(t) \overset{\text{def}}{=} P\{\underline{a}_k \leq t\} = \begin{cases} 0 \quad , & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Uit de onderlinge onafhankelijkheid der $\underline{a}_k$ en (3.3.1) volgt dat de $\underline{\tau}_k$ een gammaverdeling hebben, dat wil zeggen, dat voor $k = 1, 2, \ldots$ geldt

$$P\{\underline{\tau}_k \leq t\} = \int_0^t f_k(\tau)d\tau, \qquad \text{voor } t \geq 0,$$

waarbij

(3.3.2) $$f_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda\tau}, \qquad \text{voor } \tau \geq 0.$$

Bekend is verder dat, als we met $\underline{k}(t)$ het aantal klanten aangeven dat in $[0,t]$ bij het loket arriveert, dus

$$\underline{k}(t) = \max\{k \mid \underline{\tau}_k \leq t\},$$

dat dan $\underline{k}(t)$ een Poissonverdeling heeft met parameter λt, zo dat

$$P\{\underline{k}(t) = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad \text{voor } k = 0, 1, 2, \ldots \text{ en } t > 0.$$

We maken nog een aantal opmerkingen over het Poissonproces (c.q. de exponentiële verdeling).

a) De exponentiële verdeling heeft als enige continue verdeling de eigenschap, dat de stochastische variabele $\underline{\tau}_{\underline{k}(t)+1} - t$ (dus de tijd, die men na het tijdstip t moet wachten tot de eerstvolgende binnenkomst) weer een exponentiële verdeling met dezelfde parameter heeft.

b) Er geldt voor ieder natuurlijk getal n en elk n-tal reële getallen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ met $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ dat de stochastische variabelen $\underline{k}(t_2) - \underline{k}(t_1), \underline{k}(t_3) - \underline{k}(t_2), \ldots, \underline{k}(t_n) - \underline{k}(t_{n-1})$ onderling onafhankelijk zijn ($\underline{k}(0)$ is hierbij identiek 0 verondersteld).

c) Tenslotte geldt dat het aantal klanten dat in een willekeurig tijdsinterval ter lengte t binnenkomt dezelfde verdeling heeft als $\underline{k}(t)$, dus voor $t,s \geq 0$ en $k = 0, 1, 2, \ldots$ geldt

$$P\{\underline{k}(t+s) - \underline{k}(s) = k\} = P\{\underline{k}(t) = k\}.$$

Zie voor het Poissonproces en zijn eigenschappen bijv. [4], ch. I 3,4 en ch. VI, 4.

3.4 Het aantal klanten dat in een bedieningstijd binnenkomt.

Op 3.2 aansluitend definiëren we $\underline{k}_i$ als het aantal klanten dat gedurende $\underline{s}_i$ binnenkomt, voor $i = 0, 1$. Met behulp van de eigenschappen van het Poissonproces vinden we de kansverdeling van $\underline{k}_i$ gemakkelijk. Er geldt namelijk

$$p_k^{(i)} \overset{\text{def}}{=} P\{\underline{k}_i = k\} = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \, dB_i(s),$$

voor $k = 0, 1, 2, \ldots$ en $i = 0, 1$.

Bovendien geldt

(3.4.1) $\mathcal{E}\underline{k}_i = \lambda\mathcal{E}\underline{s}_i$

en

(3.4.2) $\mathcal{E}\underline{k}_i(\underline{k}_i-1) = \lambda^2\mathcal{E}\underline{s}_i^2.$

Ten einde ervan verzekerd te zijn dat het loket in een eindige tijd "leegloopt" (en dus elke klant met kans 1 een eindige wachttijd heeft) nemen we voor eens en voor altijd B_0 en λ zó dat

$$0 < \lambda\mathcal{E}\underline{s}_0 < 1.$$

3.5 Een "busy period".

$\underline{t}_i$ is de tijdsduur van een zgn. "busy period", waarin de eerste klant geholpen wordt volgens bedieningsmethode M_i en alle volgende klanten volgens methode M_0, dus $\underline{t}_i$ is de totale tijdsduur vanaf de binnenkomst van de eerste klant (onmiddellijk daaraan voorafgaande was het loket dus leeg) tot het moment waarop daarna het loket voor het eerst leeg komt.

Om de verwachting van $\underline{t}_i$ te berekenen passen we een kunstgreep van Takács toe.

Eerst merken we op dat de totaaltijd $\underline{t}_i$ niet beïnvloed wordt door verandering van de bedieningsvolgorde, nadat de eerste bediening voltooid is. We wijzigen deze nu zodanig dat steeds de laatst binnengekomende het eerst wordt bediend. Laten in de eerste bedieningstijd van $\underline{t}_i$, dus die volgens methode M_i, $\underline{k}_i$ klanten binnenkomen, genaamd $A_1, A_2, \ldots, A_{\underline{k}_i}$. Deze klanten zetten we apart en $A_{\underline{k}_i}$ wordt dus als eerste geholpen. Komen in zijn bedieningstijd klanten binnen dan doen we weer hetzelfde, we zetten ze apart en helpen de laatstbinnengekomene als eerste, enz. De tijd die nodig is om $A_{\underline{k}_i}$ en allen die na hem binnenkomen te helpen tot het moment, waarop alleen nog $A_1, A_2, \ldots, A_{\underline{k}_i-1}$ wachten, noemen we $\underline{t}_0^{(\underline{k}_i)}$. Onmiddellijk daarna wordt $A_{\underline{k}_i-1}$ geholpen en al diegenen die in zijn bedieningstijd binnenkomen, en die in de daarop volgende bedieningstijden, steeds de regel volgend dat de laatstbinnengekomene het eerst wordt bediend. De tijd die verstrijkt vanaf het begin van de bediening van $A_{\underline{k}_i-1}$ tot het moment waarop alleen nog $A_1, A_2, \ldots, A_{\underline{k}_i-2}$ staan te wachten noemen we $\underline{t}_0^{(\underline{k}_i-1)}$.

Algemeen geven we met $\underline{t}_0^{(j)}$ de tijd aan die verstrijkt tussen het begin van A_j's bediening en het begin van A_{j-1}'s bediening $(j=2,3,\ldots,\underline{k}_i)$. Met $\underline{t}_0^{(1)}$ geven we de tijd aan die verstrijkt tussen het begin van de bediening van A_1 en het moment waarop het loket leegkomt.

Omdat de klanten volgens een Poissonproces binnengekomen zijn, zijn voor vaste k (k is een natuurlijk getal) $\underline{t}_0$, $\underline{t}_0^{(1)}$, $\underline{t}_0^{(2)}$, $\ldots$, $\underline{t}_0^{(k)}$ o.o. gelijkverdeelde stochastische variabelen (zie 3.3 a)).
We kunnen dus konkluderen dat voor i = 0, 1

$$\underline{t}_i = \underline{s}_i + \underline{t}_0^{(\underline{k}_i)} + \underline{t}_0^{(\underline{k}_i-1)} + \ldots + \underline{t}_0^{(2)} + \underline{t}_0^{(1)},$$

zo dat met (3.4.1) volgt

$$\mathcal{E}\underline{t}_0 = \mathcal{E}\underline{s}_0 + \mathcal{E}\underline{k}_0 \cdot \mathcal{E}\underline{t}_0$$

of

$$\mathcal{E}\underline{t}_0 = \frac{\mathcal{E}\underline{s}_0}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} \tag{3.5.1}$$

en

$$\mathcal{E}\underline{t}_1 = \mathcal{E}\underline{s}_1 + \mathcal{E}\underline{k}_1\,\mathcal{E}\underline{t}_0 = \mathcal{E}\underline{s}_1 + \frac{\lambda\mathcal{E}\underline{s}_1\,\mathcal{E}\underline{s}_0}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} = \frac{\mathcal{E}\underline{s}_1}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} \;. \tag{3.5.2}$$

3.6 De bedieningskosten gedurende $\underline{t}_i$.

De kosten van bediening gedurende $\underline{t}_i$ geven we aan met $\underline{c}_i$ (i=0,1). De verwachting van $\underline{c}_i$ kunnen we analoog als in 3.5 berekenen. ~~We her-~~ inneren er nog even aan dat de kosten van één bediening volgens methode M_i c_i bedragen. Dit geeft voor i = 0, 1

$$\underline{c}_i = c_i + \underline{c}_0^{(\underline{k}_i)} + \underline{c}_0^{(\underline{k}_i-1)} + \ldots + \underline{c}_0^{(2)} + \underline{c}_0^{(1)},$$

waarbij $\underline{c}_0^{(j)}$ de bedieningskosten gedurende $\underline{t}_0^{(j)}$ zijn ($j=1,2,\ldots,\underline{k}_i$) en voor elk vast natuurlijk getal k $\underline{c}_0, \underline{c}_0^{(1)}, \underline{c}^{(2)}, \ldots, \underline{c}_0^{(k)}$ o.o. gelijkverdeelde stochastische variabelen zijn. We vinden zo

$$\mathcal{E}\underline{c}_0 = c_0 + \mathcal{E}\underline{k}_0\,\mathcal{E}\underline{c}_0$$

of

$$\mathcal{E}\underline{c}_0 = \frac{c_0}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} \tag{3.6.1}$$

en

$$\mathcal{E}\underline{c}_1 = c_1 + \mathcal{E}\underline{k}_1\,\mathcal{E}\underline{c}_0 = c_1 + \frac{c_0\lambda\mathcal{E}\underline{s}_1}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0}\,. \tag{3.6.2}$$

3.7 De wachttijdkosten gedurende $\underline{t}_i$.

De totale wachttijd gedurende $\underline{t}_i$ (dit is de totaaltijd van wachten en bediend worden van alle klanten die zich gedurende $\underline{t}_i$ in het systeem bevinden) geven we aan met $\underline{m}_i$. (Ter herinnering: de produktieverlieskosten zijn op b per tijdseenheid gesteld, zo dat de wachttijdkosten gedurende $\underline{t}_i$ $b\underline{m}_i$ zijn.) Analoog met boven geven we met $\underline{m}_0^{(j)}$ de totale wachttijd gedurende $\underline{t}_0^{(j)}$ ($j=1,2,\ldots,\underline{k}_i$) aan. We kunnen nu voor $\underline{m}_i$ de volgende formule opschrijven

$$\underline{m}_i = \underline{s}_i + \sum_{k=1}^{\infty} (\underline{s}_i-\underline{\tau}_k)^+ + \sum_{j=1}^{\underline{k}_i} \underline{m}_0^{(j)} + \sum_{j=2}^{\underline{k}_i} (j-1)\underline{t}_0^{(j)}, \tag{3.7.1}$$

waarbij $\underline{\tau}_k$ het tijdstip is waarop na het begin van $\underline{t}_i$ (of $\underline{s}_i$) de k^{de} klant bij het loket arriveert en t^+ voor elk reëel getal t dat gedefiniëerd is door

$$t^+ = \max(0,t). \tag{3.7.2}$$

Wederom geldt dat voor elk vast natuurlijk getal k $\underline{m}_0, \underline{m}_0^{(1)}, \underline{m}_0^{(2)}, \ldots, \underline{m}_0^{(k)}$ onderling onafhankelijke stochastische variabelen zijn met dezelfde kansverdeling.

Het volgende plaatje illustreert (3.7.1) enigszins.

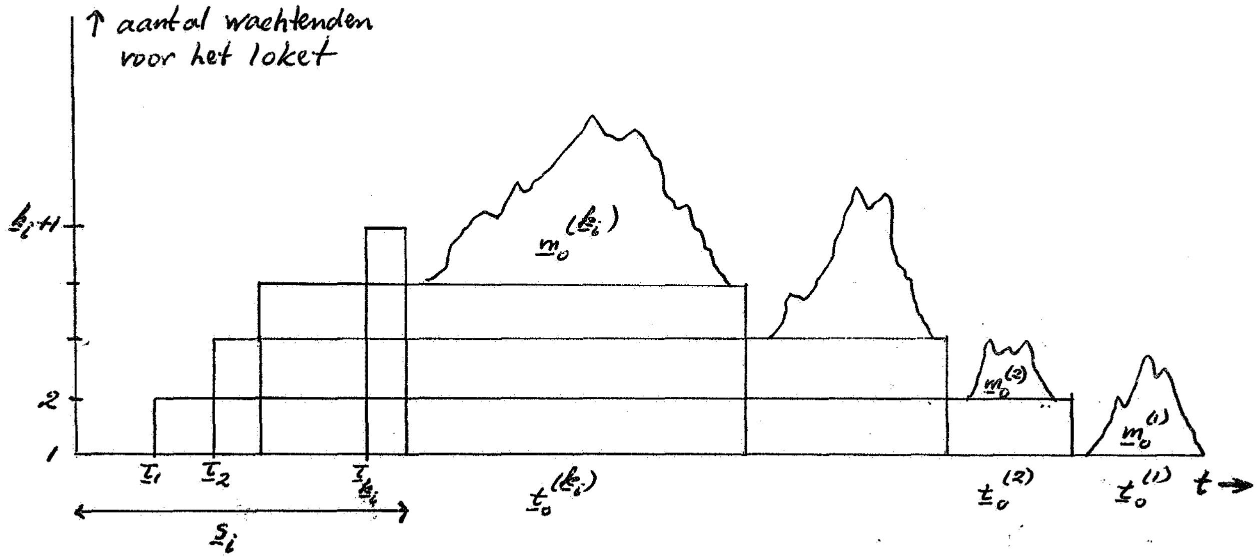


fig. 3.1 $\underline{m}_i$ is "de oppervlakte onder de kromme"

We berekenen nu eerst $\mathcal{E}\sum_{k=1}^{\infty}(\underline{s}_i-\underline{\tau}_k)^+$.

Zoals in 3.2 is opgemerkt heeft $\underline{\tau}_k$ een gamma verdeling. Met (3.3.2) volgt nu voor i = 0, 1

(3.7.3) $$\mathcal{E}\sum_{k=1}^{\infty}(\underline{s}_i-\underline{\tau}_k)^+ = \int_0^{\infty}\int_0^{s}\sum_{k=1}^{\infty}(s-\tau)f_k(\tau)d\tau dB_i(s) =$$

$$= \lambda\int_0^{\infty}\int_0^{s}(s-\tau)d\tau dB_i(s) = \frac{\lambda}{2}\int_0^{\infty}s^2 dB_i(s) = \frac{\lambda}{2}\,\mathcal{E}\underline{s}_i^2 .$$

Nemen we nu in (3.7.1) de verwachting en substitueren we daarin (3.7.3), (3.4.1), (3.4.2) en (3.5.1) dan krijgen we

$$\mathcal{E}\underline{m}_0 = \mathcal{E}\underline{s}_0 + \frac{\lambda}{2}\,\mathcal{E}\underline{s}_0^2 + \mathcal{E}\underline{k}_0 \,.\, \mathcal{E}\underline{m}_0 + \frac{1}{2}\,\mathcal{E}\underline{k}_0\,(\underline{k}_0-1)\,\mathcal{E}\underline{t}_0,$$

of

$$(3.7.4)\quad \mathcal{E}\underline{m}_0 = \frac{1}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0}\{\mathcal{E}\underline{s}_0 + \frac{\lambda}{2}\mathcal{E}\underline{s}_0^2 + \frac{\lambda^2}{2}\mathcal{E}\underline{s}_0^2 \cdot \frac{\mathcal{E}\underline{s}_0}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0}\} =$$

$$= \frac{\mathcal{E}\underline{s}_0}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} + \frac{\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0^2}{2(1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0)^2}$$

en

$$(3.7.5)\quad \mathcal{E}\underline{m}_1 = \mathcal{E}\underline{s}_1 + \frac{\lambda}{2}\mathcal{E}\underline{s}_1^2 + \mathcal{E}\underline{k}_1\,\mathcal{E}\underline{m}_0 + \frac{1}{2}\mathcal{E}\underline{k}_1\,(\underline{k}_1-1)\,\mathcal{E}\underline{t}_0 =$$

$$= \frac{\mathcal{E}\underline{s}_1}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} + \frac{\lambda}{2}\mathcal{E}\underline{s}_1^2 + \frac{\lambda^2\mathcal{E}\underline{s}_1\mathcal{E}\underline{s}_0^2}{2(1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0)^2} + \frac{\lambda^2\mathcal{E}\underline{s}_1^2\mathcal{E}\underline{s}_0}{2(1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0)} =$$

$$= \frac{\mathcal{E}\underline{s}_1}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} + \frac{\lambda\mathcal{E}\underline{s}_1^2}{2(1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0)} + \frac{\lambda^2\mathcal{E}\underline{s}_1\mathcal{E}\underline{s}_0^2}{2(1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0)^2} =$$

$$= \frac{\mathcal{E}\underline{s}_1}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} + \frac{\lambda\mathcal{E}\underline{s}_1^2+\lambda^2(\mathcal{E}\underline{s}_1\mathcal{E}\underline{s}_0^2-\mathcal{E}\underline{s}_0\mathcal{E}\underline{s}_1^2)}{2(1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0)^2}\,.$$

3.8 Het produktieverlies gedurende $\underline{s}_i$.

$\underline{v}_i(x)$ is de totale wachttijd in een bediening volgens methode M_i, terwijl er bij het begin van die bediening x wachtende klanten zijn (d.w.z. x - 1 "echte" wachtende en één die bediend wordt), voor $x = 0, 1, 2, \ldots$ en $i = 0, 1$. Met (3.7.3) volgt onmiddellijk, daar

$$\underline{v}_i(x) = x\underline{s}_i + \sum_{k=1}^{\infty} (\underline{s}_i-\tau_k)^+,$$

dat

$$(3.8.1)\quad \mathcal{E}\underline{v}_i(x) = x\mathcal{E}\underline{s}_i + \frac{\lambda}{2}\mathcal{E}\underline{s}_i^2\,.$$

3.9 Het produktieverlies in de tijd om van x naar x-1 wachtende klanten te komen.

$\underline{m}_i(x)$ geeft voor $x = 1, 2, \ldots$ de totale wachttijd vanaf het moment dat er x wachtende klanten zijn, terwijl er juist een nieuwe bediening volgens methode M_i is gestart en alle volgende bedieningen volgens methode M_0 gebeuren, tot het moment waarop er daarna voor het eerst x-1 wachtende zijn, dus $\underline{m}_i(1) = \underline{m}_i$.

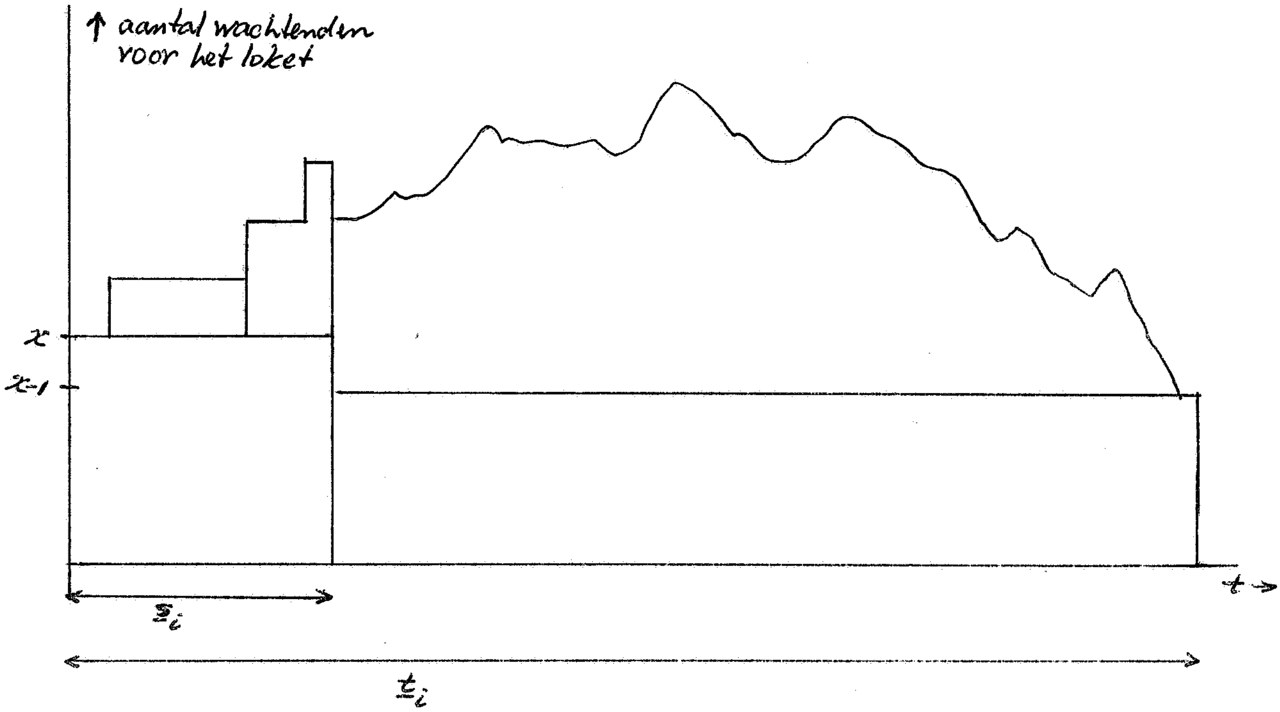


fig. 3.2 $\underline{m}_i(x)$ is "de oppervlakte onder de kromme"

Men ziet gemakkelijk dat voor $\underline{m}_i(x)$ geldt

$$\underline{m}_i(x) = (x-1)\underline{t}_i + \underline{m}_i, \qquad \text{voor } x = 1, 2, \ldots \text{ en } i = 0, 1,$$

zodat er volgt

$$\mathcal{E}\underline{m}_i(x) = (x-1)\mathcal{E}\underline{t}_i + \mathcal{E}\underline{m}_i .$$

Met (3.5.1), (3.5.2), (3.7.4) en (3.7.5) vinden we

$$\text{(3.9.1)} \qquad \mathcal{E}\underline{m}_0(x) = \frac{x\mathcal{E}\underline{s}_0}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} + \frac{\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0^2}{2(1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0)^2}$$

en

$$\text{(3.9.2)} \qquad \mathcal{E}\underline{m}_1(x) = \frac{x\mathcal{E}\underline{s}_1}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} + \frac{\lambda\mathcal{E}\underline{s}_1^2+\lambda^2(\mathcal{E}\underline{s}_0^2\mathcal{E}\underline{s}_1-\mathcal{E}\underline{s}_0\mathcal{E}\underline{s}_1^2)}{2(1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0)^2},$$

voor $x = 1, 2, \ldots$.

3.10 De formules voor de k- en t-functies.

We definiëren ten slotte voor $i = 0, 1$ en $x = 1, 2, \ldots$ $\underline{t}_i(x)$ als de tijd die verstrijkt vanaf het moment, dat er met x wachtende klanten een nieuwe bediening volgens methode M_i begint, tot het moment waarop het loket daarna voor het eerst leegkomt, terwijl alle bedieningen, die op de eerste volgen, met methode M_0 gedaan worden; $\underline{t}_1(0)$ nemen we gelijk aan $\underline{\tau}_1 + \underline{t}_1(1)$, waarbij $\underline{\tau}_1$ de tijd is, die we moeten wachten tot de eerste klant binnenkomt vanaf het moment, waarop het systeem leeggekomen is, terwijl we $\underline{t}_0(0) = 0$ nemen.
Met $\underline{k}_i(x)$ geven we de kosten gedurende $\underline{t}_i(x)$ aan ($\underline{k}_0(0) = 0$).

Voor $x = 0, 1, 2, \ldots$ zijn de k- en t-functies nu gedefiniëerd door

$$k(x;1) = \mathcal{E}\underline{k}_1(x) - \mathcal{E}\underline{k}_0(x) \tag{3.10.1}$$

en

$$t(x;1) = \mathcal{E}\underline{t}_1(x) - \mathcal{E}\underline{t}_0(x). \tag{3.10.2}$$

Er zijn twee processen die steeds bekenen worden: een 1-proces en een 0-proces. Beide starten met x wachtende klanten. Bij het 1-proces wordt alleen de eerste bediening volgens methode M_1 gedaan en alle volgende volgens methode M_0, terwijl bij het 0-proces steeds met methode M_0 gewerkt wordt. Beide processen zijn afgelopen zodra er geen klanten meer voor het loket staan (zie 1.3 en 2.2). Daar beide processen "identiek" zijn, zodra er in beide processes nog slechts x-1 wachtende zijn, reduceren we (3.10.1) en (3.10.2) tot

$$\begin{aligned} k(x;1) &= b(\mathcal{E}\underline{m}_1(x)-\mathcal{E}\underline{m}_0(x)) + \mathcal{E}\underline{c}_1 - \mathcal{E}\underline{c}_0, \quad \text{voor } x = 1, 2, \ldots \\ k(0;1) &= b\mathcal{E}\underline{m}_1 + \mathcal{E}\underline{c}_1 \end{aligned} \tag{3.10.3}$$

en

$$\begin{aligned} t(x;1) &= \mathcal{E}\underline{t}_1 - \mathcal{E}\underline{t}_0, \quad \text{voor } x = 1, 2, \ldots \\ t(0;1) &= \mathcal{E}\underline{\tau}_1 + \mathcal{E}\underline{t}_1. \end{aligned} \tag{3.10.4}$$

Substitueren we in (3.10.3) en (3.10.4) de formules (3.5.1), (3.5.2), (3.6.1), (3.6.2), (3.7.5), (3.9.1) en (3.9.2), dan vinden we, daar $\mathcal{E}\underline{\tau}_1 = \frac{1}{\lambda}$,

$$k(0;1) = b\left[\frac{\mathcal{E}\underline{s}_1}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} + \frac{\lambda\mathcal{E}\underline{s}_1^2+\lambda^2(\mathcal{E}\underline{s}_0^2\mathcal{E}\underline{s}_1-\mathcal{E}\underline{s}_0\mathcal{E}\underline{s}_1^2)}{2(1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0)^2}\right] + c_1 + \frac{c_0\lambda\mathcal{E}\underline{s}_1}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0}$$

(3.10.5)

$$k(x;1) = b\left[x\frac{\mathcal{E}\underline{s}_1-\mathcal{E}\underline{s}_0}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} + \frac{\lambda(\mathcal{E}\underline{s}_1^2-\mathcal{E}\underline{s}_0^2)+\lambda^2(\mathcal{E}\underline{s}_0^2\mathcal{E}\underline{s}_1-\mathcal{E}\underline{s}_0\mathcal{E}\underline{s}_1^2)}{2(1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0)^2}\right] +$$

$$+ c_1 + c_0\frac{\lambda\mathcal{E}\underline{s}_1-1}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0}, \qquad x = 1, 2, \dots$$

$$t(0;1) = \frac{1}{\lambda} + \frac{\mathcal{E}\underline{s}_1}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} = \frac{\mathcal{E}\underline{s}_1-\mathcal{E}\underline{s}_0}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} + \frac{1}{\lambda(1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0)}$$

(3.10.6)

$$t(x;1) = \frac{\mathcal{E}\underline{s}_1-\mathcal{E}\underline{s}_0}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0}, \qquad x = 1, 2, \dots .$$

We merken tenslotte op dat voor $x = 1, 2, \dots$ $t(x;1)$ konstant is, dat geldt

$$\frac{k(x;1)}{t(x;1)} = bx + \beta,$$

met β een konstante, onafhankelijk van x, en b natuurlijk groter dan 0, en dat de functie

$$k(x;1) - r(z)t(x;1)$$

lineair en stijgend voor $x = 1, 2, \dots$ is, daar $r(z)$ konstant is.

Hoofdstuk 4. Berekening van de k- en t-functies voor het machineprobleem.

4.1 Inleiding.

Aansluitend aan het vorige hoofdstuk leiden we in dit hoofdstuk stelsels vergelijkingen af met behulp waarvan de k- en t-functies te bepalen zijn voor het machineprobleem met N machines en twee bedieningsmethoden. We zullen dezelfde weg bewandelen als in hoofdstuk 3 en eerst de voorkomende variabelen en enige van hun eigenschappen opsommen.

De situatie waarin we dus verkeren is die van een bedrijf met N machines waarvan de looptijden onderling onafhankelijk zijn en die elk een exponentiële verdeling hebben met dezelfde parameter $\mu > 0$. Zodra een machine stuk gaat wordt die, als de reparateur vrij is, gerepareerd, en als de reparateur met een reparatie bezig is, in een wachtrij gezet. De machines worden dan gerepareerd in volgorde van stuk gaan. Zodra de reparatie van een machine voltooid is, begint de machine onmiddellijk weer met zijn werk, waarvan de duur weer exponentiëel verdeeld is met dezelfde parameter.

4.2 De reparatietijd.

Zie 3.2 en vervang bedieningstijd door reparatietijd.

4.3 De tijdsintervallen tussen de momenten waarop machines defect raken.

Voor $x = 1, 2, \ldots, N-1$ geven we met $\underline{a}(x)$ de tijd aan die verstrijkt vanaf het moment waarop een machine stukgaat, waardoor het aantal defecte machines op x gekomen is, tot het moment waarop er daarna weer een machine stuk gaat, gegeven dat er tussentijds geen reparatie klaarkomt. Met $\underline{a}(0)$ geven we de tijd aan die verstrijkt sinds het moment dat er een reparatie voltooid is, waardoor alle N machines weer in bedrijf zijn tot het moment waarop de eerste machine defect raakt.

Voor we de verdeling van $\underline{a}(x)$ geven, noemen we nog even de volgende eigenschap van de exponentiële verdeling. Als $\underline{x}$ een stochastische variabele is die exponentiëel (μ) verdeeld is dan geldt voor $t, t_0 \geq 0$

$$P\{\underline{x} \leq t_0 + t \mid \underline{x} > t_0\} = \frac{P\{t_0 < \underline{x} \leq t + t_0\}}{P\{\underline{x} > t_0\}} = \frac{e^{-\mu t_0} - e^{-\mu(t_0+t)}}{e^{-\mu t_0}} =$$

$$= 1 - e^{-\mu t}.$$

Voor de looptijd van een machine kunnen we dit als volgt interpreteren: Gegeven dat de machine al een tijd t_0 heeft gelopen dan is de resterende looptijd ervan weer exponentiëel verdeeld met dezelfde parameter.

Met behulp van deze eigenschap is de verdeling van $\underline{a}(x)$ niet moeilijk meer. De eventualiteit $\{\underline{a}(x) > t\}$ treedt dan en slechts dan op, als de resterende looptijden van de N-x niet-defecte machines alle langer dan t zijn, zodat

(4.3.1) $$P\{\underline{a}(x) > t\} = (e^{-\mu t})^{N-x} = e^{-\mu t(N-x)},$$

voor $x = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, $t \geq 0$.

Uit (4.3.1) volgt dat voor $x = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

$$P\{\underline{a}(x) \leq t\} = \begin{cases} 0, & \text{voor } t < 0 \\ 1 - e^{-\mu(N-x)t}, & \text{voor } t \geq 0. \end{cases}$$

4.4 Het aantal machines dat in een reparatietijd defect raakt.

Het aantal machines dat in een tijdsinterval ter lengte t kapot gaat, terwijl er aan het begin van dat tijdsinterval x ($x=0,1,2,\ldots,N-1$) machines stuk zijn, gegeven dat er geen reparaties intussen voltooid worden, noemen we $\underline{k}(t,x)$. De kans dat een machine stukgaat in een tijdsinterval ter lengte t is $1 - e^{-\mu t}$, zó dat $\underline{k}(t,x)$ een binomiale verdeling heeft met parameters $N - x$ en $1 - e^{-\mu t}$. We vinden zo

(4.4.1) $$P\{\underline{k}(t,x) = k\} = \binom{N-x}{k}(1-e^{-\mu t})^k \, e^{-\mu(N-x)t},$$

voor $k = 0, 1, 2, \ldots, N-x$;
$x = 0, 1, 2, \ldots, N-1$;
$t > 0$.

$\underline{k}(t,N)$ definiëeren we identiek 0 voor alle $t > 0$.

Voor $x = 1, 2, \ldots, N-1$ is $\underline{k}_i(x)$ het aantal machines dat in een reparatietijd volgens methode M_i $(i=0,1)$ defect raakt. $\underline{k}_i(0)$ nemen we gelijk aan $\underline{k}_i(1)$.
Met (4.4.1) volgt de verdeling van $\underline{k}_i(x)$ onmiddellijk.

$$
(4.4.2)\quad \begin{cases}
p_k^{(i)}(x) \overset{\text{def}}{=} P\{\underline{k}_i(x) = k\} = \int_0^\infty \binom{N-x}{k}(1-e^{-\mu t})^k\, e^{-\mu t(N-x)} dB_i(t), \\
\qquad\qquad \text{voor } k = 0, 1, 2, \ldots, N-x; \\
\qquad\qquad\quad x = 1, 2, \ldots, N-1; \\
\qquad\qquad\quad i = 0, 1. \\
p_k^{(i)}(0) \overset{\text{def}}{=} P\{\underline{k}_i(x) = k\} = p_k^{(i)}(1), \\
\qquad\qquad \text{voor } k = 0, 1, 2, \ldots, N-1; \\
\qquad\qquad\quad i = 0, 1. \\
p_0^{(i)}(N) \overset{\text{def}}{=} P\{\underline{k}_i(N) = 0\} = 1, \\
\qquad\qquad \text{voor } i = 0, 1.
\end{cases}
$$

4.5 <u>Laplace-Stieltjes-getransformeerde.</u>

Van een verdelingsfunctie F met $F(0-) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \uparrow 0} F(h) = 0$ noteren we de Laplace-Stieltjes-getransformeerde met $\check{F}$. $\check{F}$ is voor komplexe τ met $\text{Re}\, \tau \geq 0$ gedefinieerd door

$$
(4.5.1)\quad \check{F}(\tau) = \int_0^\infty e^{-\tau x}\, dF(x).
$$

$\check{B}_i$ is dus netjes gedefinieerd $(i=0,1)$.

Zo volgt uit (4.4.2) bijvoorbeeld

$$
p_0^{(i)}(N-1) = \check{B}_i(\mu)
$$

en

$$
\mathcal{E}\underline{k}_i(x) = (N-x)(1-\check{B}_i(\mu)), \qquad \text{voor } x = 1, 2, \ldots, N \text{ en } i = 0, 1.
$$

Opmerking 4.1

Indien $\mu = \frac{\lambda}{N}$, voor een $\lambda > 0$, dan volgt met behulp van de stelling van Lebesgue over gemajoreerde konvergentie

$$\lim_{N\to\infty} p_k^{(i)}(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dB_i(t) = p_k^{(i)},$$

voor $x = 0, 1, 2, \ldots$

wat ons in de situatie van hoofdstuk 3 terugbrengt.

4.6 De werktijd tot een lege reparatielijn.

$\underline{t}_i(x)$ is de tijd van het moment, waarop een reparatie volgens methode M_i begint $(i=0,1)$, terwijl er x machines defect zijn, en terwijl alle volgende reparaties met methode M_0 worden gerepareerd, tot het moment waarop daarna alle machines weer in bedrijf zijn. We krijgen zo

$$\underline{t}_i(0) = 0$$

$$\underline{t}_i(x) = \underline{s}_i + \underline{t}_0\ (x+\underline{k}_i(x)-1), \text{ voor } x = 1, 2, \ldots, N \text{ en } i = 0, 1.$$

Voor de verwachting van $\underline{t}_i(x)$ vinden we dus

$$(4.6.1) \quad \begin{cases} \mathcal{E}\underline{t}_i(0) = 0 \\ \mathcal{E}\underline{t}_i(x) = \mathcal{E}\underline{s}_i + \sum_{k=0}^{N-x} p_k^{(i)}(x)\, \mathcal{E}\underline{t}_0\ (x+k-1), \end{cases}$$

voor $x = 1, 2, \ldots, N$ en $i = 0, 1$.

Schrijven we A voor de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1-p_1^{(0)}(1) & -p_2^{(0)}(1) & -p_3^{(0)}(1) & \cdot & \cdot & \cdot & -p_{N-1}^{(0)}(1) & 0 \\ 0 & -p_0^{(0)}(2) & 1-p_1^{(0)}(2) & -p_2^{(0)}(2) & \cdot & \cdot & \cdot & -p_{N-2}^{(0)}(2) & 0 \\ 0 & 0 & -p_0^{(0)}(3) & 1-p_1^{(0)}(3) & \cdot & \cdot & \cdot & -p_{N-3}^{(0)}(3) & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1-p_1^{(0)}(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

t voor de getransponeerde van de rijvektor $(\mathcal{E}\underline{t}_0(0), \mathcal{E}\underline{t}_0(1), \ldots, \mathcal{E}\underline{t}_0(N))$ en s voor de getransponeerde van de rijvektor $(0, \mathcal{E}\underline{s}_0, \mathcal{E}\underline{s}_0, \ldots, \mathcal{E}\underline{s}_0)$, dan luidt (4.6.1) in deze vektornotatie

(4.6.2) $\quad At = s.$

Een eenvoudige berekening geeft dat

$$\det A = \prod_{x=1}^{N-1} p_0^{(0)}(x) > 0,$$

zodat (4.6.2) en dus ook (4.6.1) voor $i = 0$ precies één oplossing heeft. Zie ook aanhangesel A.2. Is (4.6.1) voor $i = 0$ opgelost dan kunnen we met (4.6.1) voor $i = 1$ $\mathcal{E}\underline{t}_1(x)$ voor $x = 1, 2, \ldots, N$ berekenen.

4.7 De reparatiekosten gedurende $\underline{t}_i(x)$.

Definiëren we $\underline{c}_i(x)$ als de kosten voor de reparaties gedurende $\underline{t}_i(x)$, voor $x = 0, 1, 2, \ldots, N$ en $i = 0, 1$ dan vinden we analoog met 4.6

(4.7.1)
$$\begin{cases} \mathcal{E}\underline{c}_i(0) = 0 \\ \mathcal{E}\underline{c}_i(x) = c_i + \sum\limits_{k=0}^{N-x} p_k^{(i)}(x)\, \mathcal{E}\underline{c}_i(x+k-1), \end{cases}$$

voor $x = 1, 2, \ldots, N$ en $i = 0, 1$, waarbij c_i de kosten van een reparatie volgens methode M_i is. Voor i = 0 vinden we uit (4.6.1) en (4.7.1)

$$(4.7.2) \qquad \mathcal{E}\underline{c}_0(x) = \frac{c_0}{\mathcal{E}\underline{s}_0} \cdot \mathcal{E}\underline{t}_0(x), \qquad \text{voor } x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

en met behulp van (4.7.1) voor i = 1 is $\underline{c}_1(x)$ voor i = 0, 1, 2, ..., N te berekenen.

4.8 Kort intermezzo.

In dit paragraafje leiden we een resultaat af dat in paragraaf 4.9 gebruikt zal worden

Veronderstel dat $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ een rij o.o. stochastische variabelen is met de volgende kansverdeling

$$P\{\underline{x}_j \leq x\} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda_j x} & x \geq 0 \end{cases}, \quad \text{voor } \lambda_j > 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

We beschouwen hier alleen het geval $\lambda_i \neq \lambda_j$ voor $i \neq j$.
Definiëren we

$$\underline{s}_j = \sum_{i=1}^{j} \underline{x}_j, \qquad \text{voor } j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$$

dan is de simultane dichtheid van $(\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots, \underline{s}_k)$

$$(4.8.1) \qquad \lambda e^{-\lambda_k s_k} \prod_{j=1}^{k-1} e^{-(\lambda_j - \lambda_{j+1}) s_j}, \quad \text{voor } 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_k < \infty,$$

waarbij

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{k} \lambda_j.$$

De marginale dichtheid van $\underline{s}_k$ is dan

(4.8.2)

$$\int_0^{s_k}\int_0^{s_{k-1}}\cdots\int_0^{s_3}\int_0^{s_2} \lambda e^{-\lambda_k s_k} \prod_{j=1}^{k} e^{-(\lambda_j-\lambda_{j+1})s_j}\, ds_1 ds_2 \ldots ds_{k-2} ds_{k-1} =$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{k} \frac{e^{-\lambda_j s_k}}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} (\lambda_i-\lambda_j)}, \qquad \text{voor } 0 \leq s_k < \infty.$$

4.9 Het produktieverlies gedurende $\underline{s}_i$.

$\underline{v}_i(x)$ is de totale wachttijd gedurende $\underline{s}_i$ met x defecte machines bij het begin van $\underline{s}_i$, voor x = 1, 2, ..., N en i = 0, 1. Voor $\underline{v}_i(x)$ geldt nu de volgende formule

$$\text{(4.9.1)} \qquad \underline{v}_i(x) = x\underline{s}_i + \sum_{k=1}^{N-x} (\underline{s}_i - \underline{b}_k(x))^+,$$

waarbij

$$\underline{b}_k(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{k} \underline{a}(x+j-1), \qquad \text{voor } k = 1, 2, \ldots, N-x,$$

zodat $\underline{b}_k(x)$ het tijdstip na het begin van $\underline{s}_i$ is, waarop de k^{de} machine gedurende $\underline{s}_i$ defect raakt, met x defecte machines aan het begin van $\underline{s}_i$, gegeven $\underline{b}_k(x) \leq \underline{s}_i$.

We berekenen eerst de verwachting van de tweede term in het rechterlid van (4.9.1). Daartoe merken we op dat, als we in 4.8 $\lambda_j = \mu(N-x-j+1)$ nemen, dat dan $\underline{b}_k(x)$ en $\underline{s}_k$ dezelfde verdeling hebben. Laat $g_k(\tau,x)$ de dichtheid van $\underline{b}_k(x)$ zijn. Deze is dan, zoals met (4.8.2) volgt

$$g_k(\tau,x) = \mu^k \frac{(N-x)!}{(N-x-k)!} \sum_{j=1}^{k} \frac{e^{-\mu(N-x-j+1)\tau}}{\mu^{k-1} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} (j-i)} =$$

$$= k!\binom{N-x}{k} \mu e^{-\mu(N-x)\tau} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k-1}{j-1} \frac{1}{(k-1)!} e^{\mu\tau(j-1)} =$$

$$= (-1)^{k-1}(N-x)\binom{N-x-1}{k-1} \mu e^{-\mu(N-x)\tau} (1-e^{\mu\tau})^{k-1}.$$

We vinden zo, met definitie (4.5.1)

(4.9.2)

$$\mathcal{E}\sum_{k=1}^{N-x}(\underline{s}_i-\underline{b}_k(x))^+ = \int_0^\infty\int_0^s\sum_{k=1}^{N-x}(s-\tau)g_k(\tau,x)d\tau dB_i(s) =$$

$$= (N-x)\int_0^\infty\int_0^s (s-\tau)\ \mu e^{-\mu(N-x)\tau}\sum_{k=0}^{N-x-1}(-1)^k\binom{N-x-1}{k}(1-e^{\mu\tau})^k\ d\tau dB_i(s) =$$

$$= (N-x)\int_0^\infty\int_0^s (s-\tau)\ \mu e^{-\mu(N-x)\tau}\ e^{\mu\tau(N-x-1)}d\tau dB_i(s) =$$

$$= (N-x)\int_0^\infty\int_0^s (s-\tau)\ \mu e^{-\mu\tau}\ d\tau dB_i(s) = (N-x)\int_0^\infty (s-\frac{1-e^{-\mu s}}{\mu})\ dB_i(s) =$$

$$= (N-x)\ (\mathcal{E}\underline{s}_i - \frac{1-\check{B}_i(\mu)}{\mu}).$$

Nemen we nu in (4.9.1) de verwachting en substitueren (4.9.2), dan vinden we

(4.9.3) $$\mathcal{E}\underline{v}_i(x) = x\mathcal{E}\underline{s}_i + (N-x)(\mathcal{E}\underline{s}_i - \frac{1-\check{B}_i(\mu)}{\mu}),$$

voor $x = 1, 2, \ldots, N$ en $i = 0, 1$.

We merken nog op dat, als $\mu = \frac{\lambda}{N}$, met Lebesgue's stelling over gemajoreerde konvergentie volgt

$$\lim_{N\to\infty}\mathcal{E}\underline{v}_i(x) = x\mathcal{E}\underline{s}_i + \frac{\lambda}{2}\mathcal{E}\underline{s}_i^2, \qquad \text{voor alle natuurlijke } x,$$

wat in overeenstemming is met het resultaat van 3.8.

4.10 Het produktieverlies gedurende $\underline{t}_i(x)$.

Tenslotte definiëren we $\underline{m}_i(x)$ als het totale produktieverlies gedurende $\underline{t}_i(x)$, voor $x = 0, 1, \ldots, N$ en $i = 0, 1$.

Ten duidelijkste geldt nu voor $\underline{m}_i(x)$

$$\underline{m}_i(0) = 0$$

$$\underline{m}_i(x) = \underline{v}_i(x) + \underline{m}_0(x+\underline{k}_i(x)-1),$$

voor $x = 1, 2, \ldots, N$ en $i = 0, 1$.

Voor de verwachting van $\underline{m}_i(x)$ vinden we dan met (4.9.3)

$$(4.10.1)\quad \begin{cases} \mathcal{E}\underline{m}_i(0) = 0 \\ \mathcal{E}\underline{m}_i(x) = N\left(\mathcal{E}\underline{s}_i - \dfrac{1-\check{B}_i(\mu)}{\mu}\right) + x\,\dfrac{1-\check{B}_i(\mu)}{\mu} + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{k=0}^{N-x} p_k^{(i)}(x)\,\mathcal{E}\underline{m}_0(x+k-1), \end{cases}$$

voor $x = 1, 2, \ldots, N$ en $i = 0, 1$.

Voor $i = 0$ geeft (4.10.1) een stelsel vergelijkingen, dat precies één oplossing heeft, daar de matrix A weer optreedt (zie 4.6). Vervolgens kunnen we dan met (4.10.1) voor $i = 1$ $\mathcal{E}\underline{m}_1(x)$ berekenen.

4.11 De "formules" voor de k- en t-functies.

Op analoge wijze als in paragraaf 3.10 is gebeurt, met dezelfde overwegingen als daar zijn gegeven, kunnen we nu, de bovenberekende verwachtingen gebruikend, de volgende formules opschrijven, met behulp waarvan de k- en t-functies kunnen worden berekend.
Er geldt namelijk (vgl. (3.10.3) en (3.10.4))

$$(4.11.1)\quad \begin{aligned} k(0;1) &= b\mathcal{E}\underline{m}_1(1) + \mathcal{E}\underline{c}_1(1) \\ k(x;1) &= b(\mathcal{E}\underline{m}_1(x)-\mathcal{E}\underline{m}_0(x)) + \mathcal{E}\underline{c}_1(x) - \mathcal{E}\underline{c}_0(x), \end{aligned}$$

voor $x = 1, 2, \ldots, N$

en

$$
(4.11.2) \qquad \begin{aligned} t(0;1) &= \mathcal{E}\underline{a}(0) + \mathcal{E}\underline{t}_1(1) \\ t(x;1) &= \mathcal{E}\underline{t}_1(x) - \mathcal{E}\underline{t}_0(x), \qquad \text{voor } x = 1, 2, \ldots, N, \end{aligned}
$$

waarbij $\mathcal{E}\underline{a}(0) = \frac{1}{\mu N}$.

Hoofdstuk 5. Enige numerieke resultaten.

Op Honeywell-Bull-timesharing werd voor enkele gevallen de optimale strategie berekend.

5.1 Een loketprobleem met twee bedieningsmethoden.

De volgende gegevens werden gekozen:

$\lambda = 1$ (parameter van het Poisson-input-proces)

$b = 0{,}1$ (wachttijdkosten per man per uur)

$c_0 = 5$ (kosten van één bediening volgens M_0)

$c_1 = 2$ (idem volgens M_1)

$\underline{s}_0$: Homogeen verdeeld over $[0.5, 1]$ (tijdsduur M_0)

$\underline{s}_1$: Homogeen verdeeld over $[0.5, 1.5]$ (idem M_1).

Gevonden werd:

x	k(x;1)	t(x;1)
0	23.0833	5
1	2.3167	1
2	2.4167	1
3	2.5167	1

(verder is k(x;1) lineair en t(x;1) constant).

We beschrijven verder schematisch het verloop van de iteratieprocedure (zie schema 1). Opgemerkt kan worden dat inderdaad tweemaal niet is afgekapt nadat er echt is uitgebreid. Daar door kon het aantal iteratieslagen beperkt blijven tot 4, anders zou de verbeterde strategie $z_1^{(1)}$ in stappen van 1 naar de optimale zijn gewandeld (zie opmerking in 2.6). Schema 2 geeft voor de volledigheid en ter illustratie de c-functie bij elke stap.

Schema 1.

iteratie	$z(x) =$	$r(z) =$	uitbreiden $z_1(x) =$	afkappen $z'(x) =$
1	$\begin{cases} 1 & x \leq 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$	3.49223	$\begin{cases} 1 & x \leq 12 \\ 0 & x > 12 \end{cases}$	niet af-gekapt
2	$\begin{cases} 1 & x \leq 12 \\ 0 & x > 12 \end{cases}$	3.19810	$z(x)$	$\begin{cases} 1 & x \leq 7 \\ 0 & x > 7 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 1 & x \leq 7 \\ 0 & x > 7 \end{cases}$	3.18838	$\begin{cases} 1 & x \leq 9 \\ 0 & x > 9 \end{cases}$	niet af-gekapt
4	$\begin{cases} 1 & x \leq 9 \\ 0 & x > 9 \end{cases}$	3.16731	$z(x)$	$z(x)$

Schema 2.

x	$c(z^{(1)};x)$	$c(z^{(2)};x)$	$c(z^{(3)};x)$	$c(z^{(4)};x)$
0	13.9038	24.2015	27.2760	29.2899
1	7.10608	16.2272	19.2628	21.1924
2	2.54450	9.95123	12.9300	14.7364
3	0	5.18889	8.09293	9.73722
4	0	1.75560	4.56695	6.01021
5	0	- 0.53328	2.16738	3.37077
6	0	- 1.86234	0.70870	1.63429
7	0	- 2.41621	0	0.61617
8	0	- 2.37951	0	0.13209
9	0	- 1.93687	0	0
10	0	- 1.27278	0	0
11	0	- 0.57007	0	0
12	0	0	0	0

5.2 Een loketprobleem met vier methoden.

Gekozen werden de volgende gegevens:

$\lambda = 1$

$b = 0.4.$

De bedieningsmethoden zijn alle homogeen verdeeld: het volgende lijstje geeft de grenzen van de verdelingen en de kosten per bediening.

methode	ondergrens	bovengrens	kosten
0	0.35	0.85	10
1	0.5	1	6
2	0.7	1.2	3
3	0.9	1.4	2

We vinden dan voor de grootheden k(x;i) en t(x;i)

x	k(x;1)	k(x;2)	k(x;3)
0	26.1487	28.6139	33.1191
1	0.072656	2.53786	7.04307
2	0.222656	2.88786	7.59307
3	0.372656	3.23786	8.14307

(verder is k(x;i) lineair i = 1, 2, 3)

x	t(x;1)	t(x;2)	t(x;3)
0	2.875	3.375	3.875
1	0.375	0.875	1.375
2	0.375	0.875	1.375
3	0.375	0.875	1.375

(verder is t(x;i) constant i = 1, 2, 3).

Het volgende schema toont de iteratie.

iteratie	$z(x) =$	$r(z) =$	uitbreiden $z_1(x) =$	afkappen $z'(x) =$
1	$\begin{cases} 1 & x\leq 5 \\ 0 & x>5 \end{cases}$	6.85532	$\begin{cases} 3 & x\leq 2 \\ 2 & 3\leq x\leq 5 \\ 1 & 6\leq x\leq 17 \\ 0 & x>17 \end{cases}$	niet afgekapt
2	$\begin{cases} 3 & x\leq 2 \\ 2 & 3\leq x\leq 5 \\ 1 & 6\leq x\leq 17 \\ 0 & x>17 \end{cases}$	5.17042	$\begin{cases} 3 & x\leq 1 \\ 2 & 2\leq x\leq 5 \\ 1 & 6\leq x\leq 17 \\ 0 & x>17 \end{cases}$	$\begin{cases} 3 & x\leq 1 \\ 2 & 2\leq x\leq 5 \\ 1 & 6\leq x\leq 12 \\ 0 & x>12 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3 & x\leq 1 \\ 2 & 2\leq x\leq 5 \\ 1 & 6\leq x\leq 12 \\ 0 & x>12 \end{cases}$	5.08632	$\begin{cases} 3 & x\leq 1 \\ 2 & 2\leq x\leq 5 \\ 1 & 6\leq x\leq 13 \\ 0 & x>13 \end{cases}$	niet afgekapt
4	$\begin{cases} 3 & x\leq 1 \\ 2 & 2\leq x\leq 5 \\ 1 & 6\leq x\leq 13 \\ 0 & x>13 \end{cases}$	5.08623	$z(x)$	$z(x)$

5.3 Een machineprobleem met twee reparatiemethoden.

Gekozen werden de volgende gegevens:

$N = 12$	(aantal machines)
$\mu = 0.3$	(parameter van de exponentiële looptijd)
$b = 2$	(productieverlieskosten per machine per uur)
$c_0 = 4$	(kosten van één reparatie volgens methode M_0)
$c_1 = 1$	(idem volgens M_1).

Om numeriek klippen te omzeilen zijn de reparatieduren vast genomen. We nemen steeds de snelle reparatietijd $s_0 = 0.25$. Onderstaande tabel geeft de optimale strategie voor enige reparatietijden s_1, en de gemiddelde verwachte kosten.

s_1	$z_{opt}(x) =$		$r(z) =$
0.54	1	$1 \le x \le 12$	12.5992
0.56	1	$1 \le x \le 7$	12.9362
	0	$8 \le x \le 12$	
0.58	1	$1 \le x \le 3$	13.1735
	0	$4 \le x \le 12$	
0.63	1	$1 \le x \le 2$	13.5558
	0	$3 \le x \le 12$	
1	1	$x=1$	14.5938
	0	$2 \le x \le 12$	
3	0	$1 \le x \le 12$	15.3509

Voor het geval $s_1 = 0.58$ geven we $k(x;1)$ en $t(x;1)$ en het verloop van de iteratieprocedure in de volgende tabellen. Opgemerkt kan nog worden dat aan de veronderstelling dat $k(x;1) - r(z)t(x;1)$ steeds een monotoon stijgende functie is in alle gevallen voldaan was behalve in het geval $s_1 = 0.54$. In dit laatste geval werd een monotoon dalend gedrag gevonden. De iteratieprocedure levert dan dat methode M_1 overheerst.

De rekentijden van de 5.1, 5.2 en 5.3 besproken problemen liggen alle rond 15 seconden. Hierbij is inbegrepen de tijd nodig voor compilatie en controle van het programma.

x	k(x;1)	t(x;1)
0	19.2775	1.25579
1	14.3261	1.09531
2	12.0639	0.919871
3	10.3735	0.788774
4	9.07370	0.687973
5	8.04961	0.608552
6	7.22566	0.544652
7	6.55066	0.492303
8	5.98896	0.448742
9	5.51514	0.411995
10	5.11066	0.380626
11	4.76171	0.353564
12	4.45786	0.33

	iteratieslag 1; r(z) = 13.2210		iteratieslag 2; r(z) = 13.1735	
	$z(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq 6 \\ 0 & 7 \leq x \leq 12 \end{cases}$		$z(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & 4 \leq x \leq 12 \end{cases}$	
x	c(z;x)	k(x;1)-r(z)t(x;1)	c(z;x)	k(x;1)-r(z)t(x;1)
0	3.10346	2.6747	3.4621	2.73439
1	0.273726	-0.155056	0.624715	-0.102991
2	-0.214555	-0.097751	0.083469	-0.054026
3	-0.235091	-0.054929	0	-0.017435
4	-0.157801	-0.022003	0	0.010699
5	-0.070479	0.003939	0	0.032866
6	0	0.024812	0	0.050702
7	0	0.041911	0	0.065313
8	0	0.056140	0	0.077471
9	0	0.068143	0	0.087727
10	0	0.078390	0	0.096483
11	0	0.087230	0	0.104036
12	0	0.094927	0	0.110613

Hoofdstuk 6. Een andere aanpak.

6.1 Uitgangspunten, toestandsruimte en het natuurlijk proces.

Een andere keuze van wat we een interventie noemen dan gedaan is in hoofdstuk 2 levert een andere toestandsruimte en daarom ook een andere iteratieprocedure. In plaats van (2.1.2) kiezen we nu (2.1.1): we zeggen dat alleen het veranderen van bedienings- of reparatiemethode een interventie is. We behandelen deze aanpak voor $k = 2$ (twee methoden) en we veronderstellen als in 2.3 dat $\mathcal{E}\underline{s}_0 < \mathcal{E}\underline{s}_1$.

Definieer de volgende verzamelingen voor $i = 0, 1$.

$$L^i = \{(x,i) \mid x \geq 0 \text{ en } x \text{ geheel getal}\}$$

$$L_i = \{(x,i,t) \mid x \geq 0,\ x \text{ geheel};\ t \geq 0,\ t \text{ reëel}\}.$$

De verzamelingen L_i zijn hetzelfde als in (2.2.2) en L^i zijn twee copieen van L uit (2.2.1). Neem als toestandsruimte

$$X = L^0 \cup L^1 \cup L_0 \cup L_1.$$

De betekenis die we aan de punten van X toekennen is de volgende:

(6.1.1) We zeggen dat het systeem zich in punt $(x,i) \in L^i$ bevindt als zojuist een bediening beeindigd is, de wachtrij nog x klanten bevat (de zojuist afgehandelde klant niet meegeteld) en de afgelopen bediening geschied is volgend methode M_i.

(6.1.2) We zeggen dat het systeem zich in punt $(x,i,t) \in L_i$ bevindt als er x klanten aanwezig zijn en er een tijd t verlopen is sinds de bediening van één van hen begonnen is en deze bediening geschiedt volgens methode M_i.

Merk op dat (6.1.2) hetzelfde is als (2.2.5). Alleen wanneer het systeem zich in $L^0 \cup L^1$ bevindt kan worden ingegrepen en omdat $k = 2$ genomen is, is er slechts één niet-nulbeslissing mogelijk, namelijk: wissel van methode. We zullen deze beslissing aangeven met d. De nulbeslissing in de punten van $L^0 \cup L^1$ wil zeggen: gebruik de methode van de vorige bediening. In $L_0 \cup L_1$ is alleen de nulbeslissing mogelijk; deze verzamelingen spelen daarom geen rol in de iteratieprocedure, maar dienen ter beschrijving van het natuurlijk proces en het beslissingsproces. We hebben dus

$$D(x,i) = \{0,d\} \qquad \text{voor } (x,i) \in L^0 \cup L^1$$

$$D(x,i,t) = \{0\} \qquad \text{voor } (x,i,t) \in L_0 \cup L_1.$$

Evenals in 2.2 geven we met $\underline{k}(t)$ het aantal klanten aan dat in een tijdsinterval ter lengte t binnenkomt. Wegens de exponentiële verdeling van de aankomsttussentijden doet het begintijdstip van dit interval niet ter zake. Bepalingen (6.1.1) en (6.1.2) geven nu dat het natuurlijk proces als volgt verloopt.

Stel dat het systeem zich in $(x,i) \in L^i$ bevindt met $x > 0$. Dan start een bediening volgens methode M_i en het systeem verschuift naar $(x,i,0) \in L_i$. Na een tijd $t < \underline{s}_i$ is het systeem in $(x+\underline{k}(t),i,t) \in L_i$ gekomen en na verloop van $\underline{s}_i$ schuift het systeem van $(x+\underline{k}(\underline{s}_i),i,\underline{s}_i) \in L_i$ naar $(x+\underline{k}(\underline{s}_i)-1,i) \in L^i$. Hierna herhaalt zich dit verhaal. Als $x = 0$ wordt gewacht tot de eerste klant zich aandient. Het systeem verschuift dan naar $(1,i) \in L^i$.

Bovenstaande alinea dient te worden gelezen met $i = 0$ en met $i = 1$.

6.2 Het beslissingsproces en de keuze van A_0.

Een strategie z is een functie $z: L^0 \cup L^1 \to \{0,d\}$. Wij beschouwen slechts aaneengesloten strategieën, d.w.z. strategieën waarvoor getallen x_0 en x_1 bestaan zó dat

$$z(x,0) = d \text{ voor } x \leq x_0 \quad \text{en} \quad z(x,0) = 0 \text{ voor } x > x_0$$

(6.2.1)

$$z(x,1) = d \text{ voor } x \geq x_1 \quad \text{en} \quad z(x,1) = 0 \text{ voor } x < x_1.$$

Deze beperking is gerechtvaardigd in 2.7. Wanneer beslissing d wordt genomen in het punt $(x,i) \in L^i$, dan verspringt het systeem naar het punt $(x,1-i) \in L^{1-i}$.

Neem voor een geschikt gekozen natuurlijk getal M

$$A_0 = \{(0,0)\} \cup \{(n,1) \mid n \geq M, \text{ n geheel}\}.$$

Noem $A_0 \cap L^i = B_i$.

In alle punten van A_0 wordt steeds beslissing d genomen. We controleren voorwaarde (1.2b). Als het systeem start in $(x,0) \in L^0$ voor zekere $x > 0$, dan geeft de redenering in 2.3 dat het systeem met kans 1 in eindige tijd in B_0 terugkeert. Stel nu dat het systeem start in $(x,1) \in L^1$. De toestanden in L^1 vormen nu een irreducibele Markovkeren. Als we van de verzameling toestanden $B_1 \subset L^1$ één absorberende toestand maken, zijn alle andere toestanden doorgangstoestanden, dus is de terugkeertijd tot B_1 met kans 1 eindig.

6.3 De k- en t-functies.

We bepalen nu voor alle $(x,i) \in L^0 \cup L^1$ de fucnties $k(x,i;d)$ en $t(x,i;d)$. We dienen het verschil te nemen van verwachtingen van kosten resp. tijdsduren van de wandelingen (1.3a) en (1.3b), dus voor elke $(x,i) \in L^0 \cup L^1$ hebben we

$$k(x,i;d) = k_{1-i}(x) - k_i(x)$$

(6.3.1)

$$t(x,i;d) = t_{1-i}(x) - t_i(x).$$

Hierin is voor $i = 0, 1$ $k_i(x)$ resp. $t_i(x)$ de verwachting van de kosten resp. de tijd vanaf toestand (x,i) totdat het systeem via het natuurlijk proces een toestand in B_i heeft bereikt. Verder hebben we

$$(6.3.2)\qquad \begin{aligned} &k_0(0) = t_0(0) = 0 \\ &k_1(x) = t_1(x) = 0 \qquad\qquad \text{voor } x \geq M. \end{aligned}$$

Merk op dat

$$(6.3.3)\qquad \begin{aligned} &k(x,1;d) = -k(x,0;d) \\ &t(x,1;d) = -t(x,0;d). \end{aligned}$$

We zullen eerst $k_0(x)$ en $t_0(x)$ bepalen. Daartoe moeten we onderscheid maken tussen het loketprobleem en het machineprobleem. Voor het loketprobleem definieren we de grootheden $\underline{t}_0$, $\underline{c}_0$ en $\underline{m}_0(x)$ zoals gebeurd is in 3.5, 3.6 en 3.9. Dan geldt voor $x \geq 1$

$$k_0(x) = x\mathcal{E}\underline{c}_0 + n \sum_{y=1}^{x} \mathcal{E}\underline{m}_0(y)$$

$$t_0(x) = x\mathcal{E}\underline{t}_0,$$

zodat we na invullen van (3.5.1), (3.6.1) en (3.9.1) krijgen

$$k_0(x) = \frac{xc_0}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} + \frac{b\lambda x\mathcal{E}\underline{s}_0^2}{2(1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0)^2} + \frac{bx(x+1)}{2}\,\frac{\mathcal{E}\underline{s}_0}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0}$$

$$t_0(x) = \frac{x\mathcal{E}\underline{s}_0}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0}\,.$$

Voor het machineprobleem definieren we $\underline{t}_0(x)$, $\underline{c}_0(x)$ en $m_0(x)$ zoals gedaan is in 4.6, 4.7 en 4.10. Er geldt dan

$$k_0(x) = \mathcal{E}\underline{c}_0(x) + b\mathcal{E}\underline{m}_0(x)$$

$$t_0(x) = \mathcal{E}\underline{t}_0(x).$$

In 4.6 tot en met 4.10 worden de berekeningen gegeven van deze grootheden, die neerkomen op het oplossen van enige Hessenbergstelsels.

Vervolgens berekenen we $k_1(x)$ en $t_1(x)$. Dit kan voor het loketprobleem en het machineprobleem op dezelfde manier. Zoals in (2.3.1) definieren we

$$p_j^{(1)}(x) = P\{\text{in bedieningsperiode volgens } M_1 \text{ die aanvangt terwijl de rijlengte } x \text{ is komen precies } j \text{ klanten binnen}\}.$$

Deze definitie kan ook worden gelezen met machines i.p.v. klanten en reparatie i.p.v. bediening. Definieer verder $v_1(x)$ zoals gebeurd is in 3.8 en 4.9 namelijk de totale wachttijd van de rij gedurende één bediening volgens methode M_1, die aanvangt terwijl de rijlengte x is (analoog voor machineprobleem). Dan geldt voor x = 1, 2, ..., M-1

$$\text{(6.3.4)} \quad \begin{aligned} k_1(x) &= c_1 + b\mathcal{E}\underline{v}_1(x) + \sum_{j=0}^{M-x} p_j^{(1)}(x)\; k_1(x+j-1) \\ t_1(x) &= \mathcal{E}\underline{s}_1 + \sum_{j=0}^{M-x} p_j^{(1)}(x)\; t_1(x+j-1). \end{aligned}$$

Hierin is de tweede regel van (6.3.2) gebruikt. Voorts geldt

$$\text{(6.3.5)} \quad \begin{aligned} k_1(0) &= k_1(1) \\ t_1(0) &= t_1(1) + \mathcal{E}\underline{a}(0), \end{aligned}$$

waarin $\underline{a}(0)$ de tijd is dat de bediende (reparateur) moet wachten vanaf het moment dat zijn loket (werkplaats) leeg raakt, totdat een nieuwe klant (machine) zich aandient. De waarde van $\mathcal{E}\underline{a}(0)$ is λ^{-1} bij het loketprobleem of $(\mu N)^{-1}$ bij het machineprobleem. Verder staan $p_j^{(1)}(x)$ vermeld in (2.3.2) resp. (2.3.3) en wordt $\mathcal{E}\underline{v}_i(x)$ gegeven in (3.8.1) resp. (4.9.3). Nu vormen (6.3.4) en (6.3.5) twee Hessenbergstelsels namelijk één in de onbekenden $k_1(x)$ $(x=0,1,\ldots,M-1)$ en één in de grootheden $t_1(x)$ $(x=0,1,\ldots,M-1)$. Na oplossen van deze stelsels krijgen we de gevraagde k- en t-functies uit (6.3.1) met behulp van (6.3.2).

6.4 De iteratie.

Neem een aaneengesloten strategie z, zoals omschreven in (6.2.1). Dan volgt uit (1.4.2) en (1.4.3) (waarin we $e_1 = (x_0,0)$ genomen hebben) dat

$$(6.4.1) \qquad c(z;x,0) = 0 \qquad \text{voor } x \geq x_0.$$

Hier is dezelfde redenering gehouden als in 2.4 om tot (2.4.4) te concluderen. Tevens volgen uit (1.4.2)

$$(6.4.2) \qquad c(z;x,0) = k(x,0;d) - r(z)t(x,0;d) + c(z;x,1) \quad \text{voor } x < x_0$$

$$(6.4.3) \qquad c(z;x,1) = k(x,1;d) - r(z)t(x,1;d) \qquad \text{voor } x \geq x_1.$$

In (6.4.3) is (6.4.1) verwerkt. Voor $x = 1, 2, \ldots, x_1-1$ is nu uit (1.4.2) en (6.4.3) af te leiden

$$(6.4.4) \qquad c(z;x,1) = \sum_{j=0}^{x_1-x} p_j^{(1)}(x)\, c(z;x+j-1,1) + \sum_{j=x_1-x+1}^{\infty} p_j^{(1)}(x)\, [k(x+j-1,1;d)-r(z)t(x+j-1,1;d)].$$

Ook gelden

$$(6.4.5) \qquad c(z;0,1) = c(z;1,1)$$

$$(6.4.6)\qquad c(z;x_0,1) = k(x_0,1;d) - r(z)t(x_0,1;d).$$

Formule (6.4.6) is (6.4.3) met $x = x_0$. Herschrijven van (6.4.4), (6.4.5) en (6.4.6) leert ons dat deze vergelijkingen een Hessenbergstelsel vormen met als onbekenden $r(z)$ en $c(z;x,1)$ voor $x = 0, 1, \ldots, x_1-1$. Na oplossen van dit stelsel worden de c-waarden in de overige punten gevonden uit (6.4.2) en (6.4.3).

6.5 Uitbreiden.

Voor $x_0 < x < x_1$ geeft (1.5.1)

$$c(d\cdot z;x,0) = k(x,0;d) - r(z)t(x,0;d) + c(z;x,1)$$

terwijl anderzijds voor deze punten

$$c(0\cdot z;x,0) = c(z;x,0) = 0.$$

Overeenkomstig 1.5 kiezen we dus

$$(6.5.1)\qquad z_1(x,0) = d \quad \text{als } k(x,0;d) - r(z)t(x,0;d) + c(z;x,1) < 0.$$

Nu het uitbreiden op L^1. Hier geldt voor $x_0 < x < x_1$

$$c(d\cdot z;x,1) = k(x,1;d) - r(z)t(x,1;d)$$

terwijl

$$c(0\cdot z;x,1) = c(z;x,1).$$

Neem hier dus

$$(6.5.2)\qquad z_1(x,1) = d \quad \text{als } k(x,1;d) - r(z)t(x,1;d) - c(z;x,1) < 0.$$

Gezien formules (6.3.3) kan aan (6.5.1) en (6.5.2) niet tegelijk worden voldaan door eenzelfde x.

6.6 Afkappen.

Stel (6.5.1), (6.5.2) en (1.5.3) geven

(6.6.1) er bestaat een getal x_e zo, dat

$$\begin{aligned}
c(\hat{z};x,1) &= c(z;x,1) && \text{voor } x < x_e\\
c(\hat{z};x,1) &= k(x,1;d) - r(z)t(x,1;d) && \text{voor } x \geq x_e\\
c(\hat{z};x,0) &= k(x,1;d) - r(z)t(x,1;d) + c(z;x,1) && \text{voor } x \leq x_e\\
c(\hat{z};x,0) &= 0 && \text{voor } x > x_e.
\end{aligned}$$

Als nu

$$A = \{(x,0)|\ 0 \leq x \leq x_a\} \cup \{(x,1)|\ x \geq x_b\},$$

voor zekere x_a en x_b, met $0 \leq x_a \leq x_e \leq x_b < M$, dan voldoet de verzameling A aan (1.6.1). Nu volgt uit (1.6.2) dat

$$A \cap L^0 \in X(\hat{z}) \cap L^0 \qquad \text{als voor alle } x_a < x \leq x_e$$

$$c(\hat{z};x_a,0) \leq c(\hat{z};x,0).$$

Deze eis betekent dat we op L^0 afkappen tot aan het punt $\tilde{x}_0$, dat voldoet aan

(6.6.2) $$c(z;\tilde{x}_0,1) + k(\tilde{x}_0,0;d) - r(z)t(\tilde{x}_0,0;d) =$$

$$= \min_{0 \leq x < x_e} [c(z;x,1) + k(x,0;d) - r(z)t(x,0;d)].$$

Wanneer meer getallen aan (6.6.2) voldoen, kiezen we het kleinste.

Op L^1 werkt het afkapmechanisme wat moeilijker, al kan men zich gedurende de iteratie rekenwerk besparen door wat grover te werk te gaan. Eerst geven we echter de exacte procedure, die in ieder geval moet worden uitgevoerd om te bewijzen dat een gevonden strategie optimaal is.

Uit (6.6.1) volgt

$$A_{\hat{z}} \cap L^1 = \{(x,1) \mid x \geq x_e\}.$$

Laat nu $A_a = \{(x,1) \mid x \geq x_a\}$, voor zekere x_a met $x_e \leq x_a < M$. We kunnen dat $c(A_a \cdot \hat{z}; x,1)$ voor $x_e \leq x < x_a$ bepalen door het volgende Hessenberg-stelsel op te lossen:

$$(6.6.3) \qquad c(A_a \cdot \hat{z}; x,1) = \sum_{j=0}^{x_a - x} p_j^{(1)}(x)\; c(A_a \cdot \hat{z}; x+j-1,1) +$$

$$+ \sum_{j=x_a-x+1}^{\infty} p_j^{(1)}(x)\; [k(x+j-1,1;d) - r(z)t(x+j-1,1;d)]$$

voor $x = 1, 2, \ldots, x_a - 1$.

$$(6.6.4) \qquad c(A_a \cdot \hat{z}; 0,1) = c(A_a \cdot \hat{z}; 1,1).$$

In dit geval zijn $c(A_a \cdot \hat{z}; x,1)$ voor $x = 0, 1, \ldots, x_a - 1$ de onbekenden. Na (6.6.3) en (6.6.4) te hebben opgelost controleren we of voor alle x met $x_1 \leq x \leq x_a - 1$ geldt

$$(6.6.5) \qquad c(A_a \cdot \hat{z}; x,1) \leq k(x,1;d) - r(z)t(x,1;d).$$

Indien dit zo is dan geldt

$$(6.6.6) \qquad A_a \cap L^1 \in X(\hat{z}) \cap L^1.$$

Kap nu af tot het grootste punt $x_a < M$ waarvoor (6.6.6) geldt. Laat deze x_a x_{max} zijn. Als $x_{max} = x_e$, op L^0 niet is afgekapt en bovendien niet is uitgebreid, dan is de optimale strategie gevonden.

De hier geschetste methode vraagt vrij veel rekentijd: voor elke keer dat er moet worden afgekapt moet x_{max} worden bepaald, bijvoorbeeld door insluiting, waarbij voor elke stap van deze insluiting een Hessenbergstelsel moet worden opgelost.

We beschrijven nu een methode om op L^1 af te kappen, die minder rekenwerk geeft, maar minder scherp is. We nemen namelijk niet zoals in (1.6.3) geëist wordt de doorsnede over alle verzamelingen die voldoen aan (1.6.1) en (1.6.2), maar over een deelklasse hiervan. Laten we weer in de situatie van (6.6.1) verkeren. Zij

$$(6.6.7) \qquad B_a = \{(x,1) \mid x \geq x_e,\ x \neq x_a\} \qquad \text{voor zekere } x_a > x_e.$$

We beschouwen dus verzamelingen, die op L^1 de gehele $A_{\hat{z}}$ omvatten op één punt na. Nu geldt

$$(6.6.8) \qquad B_a \in X(\hat{z}) \quad \text{als } c(B_a \cdot \hat{z}; x_a, 1) \leq c(\hat{z}; x_a, 1).$$

Het rechterlid van de ongelijkheid in (6.6.8) is $k(x_a,1;d) - r(z)t(x_a,1;d)$, (zie (6.6.1)), terwijl we het linkerlid vinden uit

$$(6.6.9) \qquad c(B_a \cdot \hat{z}; x_a, 1) = p_0^{(1)}(x_a)\ c(\hat{z}; x_a-1, 1) + p_1^{(1)}(x_a)\ c(B_a \cdot \hat{z}; x_a, 1) + $$

$$+ \sum_{j=2}^{\infty} p_j^{(1)}(x_a)\ c(\hat{z}; x_a+j-1, 1).$$

Na invullen van (6.6.1) in (6.6.9) leert enig rekenwerk dat (6.6.8) nu wordt

$$B_a \in X(\hat{z})$$

als

$$(6.6.10) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} p_j^{(1)}(x_a)\ [k(x_a+j-1,1;d) - r(z)t(x_a+j-1,1;d)] \leq$$

$$\leq k(x_a,1;d) - r(z)t(x_a,1;d).$$

Neem het grootste punt x_a dat aan (6.6.10) voldoet: laat dit punt x_{max} zijn. Kap dan op L^1 af tot aan x_{max}. De bepaling van het punt x_{max} kan eventueel geschieden door insluiting, want omdat de optimale strategie onder bepaalde voorwaarden aaneengesloten is zal wanneer x_a aan (6.6.10) voldoet ook x_b voldoen als $x_e < x_b < x_a$.

Deze methode is zwakker dan de eerst beschreven methode omdat het punt x_e zelf niet afgekapt wordt. Dit punt wordt weggelaten omdat we een aaneengesloten strategie willen houden. Het is dan ook nodig om bij de volgende iteratieslag te controleren of r(z) is vermidnerd. Is dit niet het geval dan moet de exacte afkapprocedure worden toegepast.

6.7 Enige opmerkingen.

Mocht bij de gevonden optimale strategie in de notatie van (6.2.1) gelden dat x_1 = M, dan was M te klein gekozen, en moeten we opnieuw beginnen bij het bepalen van k- en t-functies met een grotere waarde.

Onder de voorwaarde genoemd in 2.7 is de optimale strategie een aaneengesloten strategie. In dat geval kan aan de veronderstelling in (6.6.1) steeds voldaan worden. De gehele aanpak in dit hoofdstuk (evenals die in hoofdstuk 2) kan echter worden toegepast op niet-aaneengesloten strategieën. Het rekenwerk wordt daardoor echter omvangrijker.

Een voordeel van de hier beschreven aanpak is dat omschakelkosten van de ene methode naar de andere gemakkelijk in de k- en t-functies worden opgenomen. Dit is in de eerstgegeven aanpak in hoofdstuk 2 niet zonder meer mogelijk (zie 2.9). Indien we zonder omschakelkosten ons ertoe kunnen beperken alleen aaneengesloten strategieën te beschouwen, dan kan dat zeker bij hetzelfde probleem met omschakelkosten. De iteratieprocedure zal namelijk die strategieën selecteren die omschakelkosten zoveel mogelijk beperken.

Tenslotte merken we nog op dat ook deze aanpak met wat meer moeite te generaliseren is tot een iteratieprocedure voor problemen met meer dan twee bedieningsmethoden.

Appendix.

A.1 Stochastische ordening.

In 2.7 hebben we verondersteld dat de snelle bedieningstijd $\underline{s}_0$ stochastisch kleiner is dan de langzame $\underline{s}_1$. We leiden nu de daar gebruikte stelling af.

Definitie Een stochastische variabele $\underline{x}$ heet stochastisch kleiner dan een stochastische variabele $\underline{y}$ (notatie: $\underline{x} \subset \underline{y}$), als geldt:

(A.1.1) $P\{\underline{x} \leq x\} \geq P\{\underline{y} \leq x\}$ voor elk reëel getal x.

Als F resp. G de verdelingsfuncties zijn bij $\underline{x}$ resp. $\underline{y}$, dan schrijven we in plaats van $\underline{x} \subset \underline{y}$ ook wel $F \subset G$.
Formule (A.1.1) zegt dat de verdelingsfunctie van $\underline{x}$ geheel links (althans niet rechts) ligt van de verdelingsfunctie van $\underline{y}$.
Dit is bijvoorbeeld het geval wanneer de verdelingen van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ hetzelfde zijn behoudens een locatieparameter.

Lemma 1. Als $\underline{x} \subset \underline{y}$ dan is $\mathcal{E}\underline{x} \subset \mathcal{E}\underline{y}$.

Bewijs: Met partiële integratie en gebruik makend van (A.1.1) vinden we

$$\mathcal{E}\underline{x} = -\int_{-\infty}^{0} F(x)dx + \int_{0}^{\infty} 1 - F(x)dx \leq$$

$$\leq -\int_{-\infty}^{0} G(x)dx + \int_{0}^{\infty} 1 - G(x)dx = \mathcal{E}\underline{y}.$$

Lemma 2. Als $\underline{x} \subset \underline{y}$ en h is een monotoon niet-dalende functie op $\mathbb{R}$ dan is $h(\underline{x}) \subset h(\underline{y})$.

Bewijs: Neem voor h eerst een monotoon niet-dalende trapfunctie t. Schrijf:

$$t(u) = \sum_{k=1}^{n} a_k \,\iota(u-s_k), \qquad \text{met } a_k \geq 0,\ s_k \in \mathbb{R},$$

$s_1 < s_1 < \ldots < s_n$ en ι de functie gedefinieerd door

$$\iota(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ 1 & \text{als } x \geq 0. \end{cases}$$

Dan geldt voor die u waarvoor $\sum_{j=1}^{k-1} a_j \leq u < \sum_{j=1}^{k} a_j$ dat

$$\text{(A.1.2)} \quad P\{\sum_{j=1}^{n} a_j\ \iota(\underline{x}-s_j) \leq u\} = P\{\underline{x} < s_k\} \geq P\{\underline{y} < s_k\} =$$

$$= P\{\sum_{j=1}^{n} a_j\ \iota(\underline{y}-s_j) \leq u\}.$$

Verder geldt voor $u < 0$ en voor $u > \sum_{j=1}^{n} a_j$ dat

$$\text{(A.1.3)} \quad P\{t(\underline{x}) \leq u\} = P\{t(\underline{y}) \leq u\}.$$

Formules (A.1.2) en (A.1.3) geven dat voor elke reële u geldt

$$P\{t(\underline{x}) \leq u\} \geq P\{t(\underline{y}) \leq u\} \quad \text{ofwel} \quad t(\underline{x}) \subset t(\underline{y}).$$

Duidelijk is dat voor willekeurige $\beta \in \mathbb{R}$ $t(\underline{x}) + \beta \subset t(\underline{y}) + \beta$.

Zij nu h een willekeurige monotoon niet-dalende functie. Kies een rij trapfuncties $(t_n)_{n=1}^{\infty}$, van de vorm

$$t_n(u) = \sum_{k=1}^{m_n} a_{k,n}\ \iota(u-s_{k,n}) + \beta_n$$

en zó, dat $\lim_{n\to\infty} t_n(u) = h(u)$ voor elke reële u.

Dan geldt

$$P\{h(\underline{x}) \leq u\} = \lim_{n\to\infty} P\{t_n(\underline{x}) < u\} \geq \lim_{n\to\infty} P\{t_n(\underline{y}) < u\} =$$

$$= P\{h(\underline{y}) \leq u\}.$$

Hiermee is dit lemma bewezen. We komen nu aan

Stelling 1. Zij $\underline{k}_i(j)$ het aantal klanten (machines), dat binnenkomt gedurende een bedieningstijd $\underline{s}_i$ volgens methode M_i, die begint terwijl de rijlengte j is. Dan geldt uit $\underline{s}_0 \subset \underline{s}_i$ volgt $\underline{k}_0(j) \subset \underline{k}_1(j)$.

Bewijs: Laat B_i de verdelingsfunctie zijn bij $\underline{s}_i$ en laat B_i^* de verdelingsfinctie zijn bij $\underline{k}_i(j)$ voor i = 0, 1. Dan is te bewijzen

(A.1.4) $B_0^*(x) \geq B_1^*(x)$ voor elke reële x.

$$B_i^*(x) = \sum_{k=0}^{[x]} \int_0^\infty P\{\text{precies } k \text{ aankomsten in } [0,s]\}\, dB_i(s) =$$

$$= \int_0^\infty P\{\text{hoogstens } [x] \text{ aankomsten in } [0,s]\}\, dB_i(s).$$

Eenvoudig is in te zien dat de integrand in het laatste lid een monotoon niet stijgende functie is in s. Noem deze functie h(s). Dan is

$$B_i^*(x) = \int_0^\infty h(s)\, dB_i(s) = \mathcal{E}h(\underline{s}_i).$$

Uit $\underline{s}_0 \subset \underline{s}_1$, lemma 2 en lemma 1 volgt nu formule (A.1.4).

We merken nog op dat in het loketgeval $\underline{k}_i(j)$ niet van j afhangt, in het machinegeval wel (zie 3.4 en 4.4).

A.2 Hessenbergstelsels.

Definitie. Een n × n matrix H met elementen h_{ij} heet een Hessenbergmatrix als

$$h_{ij} = 0 \text{ voor alle } (i,j) \text{ met } 1 \leq j \leq i-2 \text{ en } 3 \leq i \leq n.$$

Deze voorwaarde wil zeggen dat onder de onderste nevendiagonaal alleen nullen voorkomen. Een stelsel lineaire vergelijkingen

$$(\text{A.2.1}) \qquad \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\, x_j = u_i \qquad \text{voor } i = 1, 2, \ldots, n,$$

waarbij h_{ij} elementen zijn van een Hessenbergmatrix H, noemen we een Hessenbergstelsel. Wanneer det H $\neq$ 0 is dan is zo'n stelsel numeriek eenvoudig op te lossen.

Veronderstel namelijk eerst dat alle elementen van de onderste nevendiagonaal niet nul zijn. Los achtereenvolgens voor $k = n-1, n-2, \ldots, 2$ en 1 uit de (k+1)-ste regel van (A.2.1) x_k op als lineaire uitdrukking in x_n, met behulp van de al eerder verkregen lineaire uitdrukkingen voor $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{n-1}$.

Bij de eerste regel aangekomen hebben we dan twee lineaire vergelijkingen met als onbekenden x_1 en x_n. Na oplossing hiervan vinden we de waarden van $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ door substitutie van x_n.

Als onder de elementen van de onderste nevendiagonaal nullen voorkomen, valt het stelsel uiteen in een aantal Hessenbergstelsels die we van onder af achtereenvolgens kunnen oplossen. Deze situatie doet zich bij ons niet voor. We leiden nu een stelling af over het gedrag van de oplossing van een Hessenbergstelsel met bepaalde coëfficiënten.

<u>Stelling 2</u>. Laat voor $x = 1, 2, \ldots, n$ een kansverdeling $(p_k^{(x)})_{k=0}^{\infty}$ gegeven zijn met $p_0^{(x)} > 0$. Laat verder $(c_x)_{x=0}^{\infty}$ voldoen aan het stelsel lineaire vergelijkingen

$$(\text{A.2.2}) \qquad \begin{cases} c_x = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(x)}\, c_{x+k-1} + u_x & \text{voor } x = 1, 2, \ldots, n \\ c_x = 0 & \text{voor } x \geq n. \end{cases}$$

Dan geldt

(a) als er een geheel getal $n_1 \geq 1$ bestaat met $u_x \leq 0$ voor $n_1 \leq x \leq n$ dan is $c_x \leq c_{x-1}$ voor $n_1 \leq x \leq n$

(b) als er een geheel getal $n_1 \geq 1$ bestaat met $u_x \geq 0$ voor $n_1 \leq x \leq n$ dan is $c_x \geq c_{x-1}$ voor $n_1 \leq x \leq n$

(c) in het bijzonder heeft c_{n-1} het tegengestelde teken van u_n.

Opmerking: Als voor $x = 1, 2, \dots, n$ $u_x = v_x + rw_x$ met v_x en w_x bekende grootheden en r onbekend dan vormen de vergelijkingen (A.2.2) een Hessenbergstelsel. De stelling wordt gebruikt met

(A.2.3) $u_x = k(x;z(x)) - r(z)t(x;z(x))$ voor $x = 1, 2, \dots, n$.

Bewijs: Uit de eerste regel van (A.2.2) volgt

(A.2.4) $p_0^{(x)}(c_x - c_{x-1}) = -(1-p_0^{(x)}-p_1^{(x)})\, c_x + \sum_{k=2}^{\infty} p_k^{(x)}\, c_{x+k-1} + u_x.$

Als we hierin $x = n$ nemen en de tweede regel van (A.2.2) invullen krijgen we

(A.2.5) $p_0^{(n)}\, c_{n-1} = -u_n.$

Hieruit volgt (c).

We gaan nu verder met inductie. Stel gegeven is (a) en we hebben voor zekere m met $n_1 \leq m \leq n-1$ bewezen

(A.2.6) $c_m \geq c_{m+1} \geq \dots \geq c_{n-1} \geq c_n = 0.$

Laat nu $\alpha = 1 - p_0^{(m)} - p_1^{(m)}$. Als $\alpha = 0$ dan volgt meteen dat het rechterlid van (A.2.4) niet negatief is, zodat (A.2.6) is aangetoond met $m - 1$ in plaats van m.
Als $\alpha > 0$ is stel dan

(A.2.7) $\beta_k = \alpha^{-1}\, p_{k+1}^{(m)}$, voor $k = 1, 2, \dots$.

We kunnen nu (A.2.4) voor $x = m$ schrijven als

(A.2.8) $p_0^{(n)}(c_m - c_{m-1}) = -\alpha c_m + \alpha \mathcal{E} c_{m+\underline{k}} + u_m,$

waarin $\underline{k}$ een stochastische variabele is met $P\{\underline{k} = k\} = \beta_k$ voor $k = 1, 2, \dots$. Duidelijk geldt nu $\underline{k} \supset 0$ (de ontaarde stochastische variabele 0). In (A.2.6) zien we dat de functie c_{m+k} monotoon niet stijgend is in k, zodat met lemma A.1.2 volgt $c_m \supset c_{m+\underline{k}}$. Hierop passen we lemma A.1.1 toe en daar $u_m \leq 0$ is vinden we dat het rechterlid van

(A.2.8) niet positief is. Dit levert wederom formule (A.2.6) met $m - 1$ in plaats van m. Hiermee is een stap van de inductie gedaan. Als (b) gegeven is volgt de stelling met een analoge redenering.

A.3 Kanstheoretische benadering.

Over het loketprobleem met twee bedieningsmethoden zullen we in dit aanhangsel enige kanstheoretische opmerkingen maken. Er wordt steeds een vaste strategie toegepast. Voor de gebruikte stochastische variabelen verwijzen we naar hoofdstuk 3.

We definiëren eerst de volgende rij stochastische variabelen: $\underline{z}_0$ is het aantal wachtende klanten voor het loket aan het begin van de werktijd van het loket; $\underline{z}_n$ is voor $n = 1, 2, \ldots$ het aantal klanten dat na afloop van de n^{de} bediening voor het loket achterblijft. De strategie die steeds wordt toegepast bestaat hierin, dat als $\underline{z}_{n-1} = 0, 1, 2, \ldots, z$, de n^{de} bediening volgens methode M_1 gebeurt, en als $\underline{z}_{n-1} = z+1, z+2, \ldots$, de n^{de} bediening volgens methode M_0 gebeurt. (Er geldt weer $\mathcal{E}\underline{s}_0 < \mathcal{E}\underline{s}_1$ en $0 < \lambda\mathcal{E}\underline{s}_0 < 1$.)

De verzameling $M = \{\underline{z}_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ vormt een irreducibele aperiodieke Markov-keten, waarvan de overgangskansen $(p_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ gegeven worden door, voor $n = 1, 2, \ldots$,

$$p_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} P\{\underline{z}_n = j \mid \underline{z}_{n-1} = i\} = \begin{cases} p_j^{(1)}, & \text{voor } i = 0;\ j \geq 0, \\ p_{j-i+1}^{(1)}, & \text{voor } 1 \leq i \leq z;\ j \geq i-1 \\ p_{j-i+1}^{(0)}, & \text{voor } i \geq z+1;\ j \geq i-1 \\ 0 & \text{anders,} \end{cases} \tag{A.3.1}$$

waarbij (zie 3.4)

$p_j^{(k)}$ = de kans dat in een bediening volgens methode M_k precies j klanten bij het loket arriveren =

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^j}{j!}\, dB_k(s), \quad \text{voor } k = 0, 1 \text{ en } j = 0, 1, 2, \ldots .$$

De Markov-keten M heeft louter ergodische toestanden. Dit volgt uit een kriterium van Foster, aangevuld door Moustafa, Zie [5] en [6]. Dit kriterium luidt:

Een irreducibele aperiodieke Markov-keten heeft louter ergodische toestanden als er een niet-negatieve oplossing bestaat voor de volgende ongelijkheden

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}y_j < \infty, \qquad \text{voor } 0 \leq i \leq i_0.$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}y_j \leq y_i - \varepsilon, \qquad \text{voor } i \geq i_0+1 \text{ en een } \varepsilon \text{ met } 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Zoals men gemakkelijk nagaat is in ons geval aan de ongelijkheden voldaan met de keuze

$$i_0 = z,\ \varepsilon = 1,\ y_j = \rho j, \qquad \text{voor } j \geq 0,$$

waarbij

$$\rho = \frac{1}{1-\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0} > 0.$$

Het feit dat M louter ergodische toestanden heeft, geeft dat er een unieke invariante kansverdeling $(\pi_j)_{j=0}^{\infty}$ bestaat met $\pi_j > 0$ en $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1$, die voldoet aan

$$\text{(A.3.2)} \qquad \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, \qquad \text{voor } j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Voor $(\pi_j)_{j=0}^{\infty}$ geldt

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P\{\underline{z}_n = j \mid \underline{z}_0 = i\}, \text{ voor } j \geq 0, \text{ ongeacht wat } i \text{ is.}$$

We definiëren nu de volgende kansengenererende functies

$$P(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j s^j, \qquad \text{voor } |s| \leq 1$$

$$A_i(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j^{(i)} s^j, \qquad \text{voor } i = 0,\ 1 \text{ en } |s| \leq 1.$$

Vermenigvuldigen we (A.3.2) beide leden met s^j en sommeren vervolgens over j met gebruikmaking van (A.3.1) dan vinden we

$$P(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j s^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i s^j = \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} p_j^{(1)} s^j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{z} \pi_i \sum_{j=i-1}^{\infty} p_{j-i+1}^{(1)} s^j + \sum_{i=z+1}^{\infty} \pi_i \sum_{j=i-1}^{\infty} p_{j-i+1}^{(0)} s^j =$$

$$= \pi_0 A_1(s) + \sum_{i=1}^{z} \pi_i s^{i-1} A_1(s) + \sum_{i=z+1}^{\infty} \pi_i s^{i-1} A_0(s),$$

$$\text{voor } |s| \leq 1,$$

zodat

$$\text{(A.3.3)} \qquad sP(s) = (s-1)\pi_0 A_1(s) + \sum_{i=0}^{z} \pi_i s^i A_1(s) + \sum_{i=z+1}^{\infty} \pi_i s^i A_0(s),$$

$$\text{voor } |s| \leq 1.$$

Laat $\underline{s}^{(n)}$ voor n = 1, 2, ... de n^{de} bediening zijn, terwijl $\underline{c}^{(n)}$ de bedieningskosten van $\underline{s}^{(n)}$ zijn (dus, als $0 \leq \underline{z}_{n-1} \leq z$, dan is $\underline{s}^{(n)}$ verdeeld als $\underline{s}_1$ en $\underline{c}^{(n)} = c_1$, en als $\underline{z}_{n-1} > z$, dan is $\underline{s}^{(n)}$ verdeeld als $\underline{s}_0$ en $\underline{c}^{(n)} = c_0$). We definiëren dan voor n = 1, 2, ... $\underline{t}_n$ als de tijd die verstrijkt tussen het einde van de $(n-1)^{ste}$ bediening en het einde van de n^{de} bediening, en $\underline{k}_n$ als de totale kosten gedurende $\underline{t}_n$, dus

$$\underline{k}_n = \begin{cases} \underline{c}^{(n)} + b(\underline{s}^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} (\underline{s}^{(n)} - \underline{\tau}_k^{(n)})^+) & , \underline{z}_{n-1} = 0 \\ \underline{c}^{(n)} + b(\underline{s}^{(n)} \circ \underline{z}_{n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (\underline{s}^{(n)} - \underline{\tau}_k^{(n)})^+), & \underline{z}_{n-1} \geq 1 \end{cases}$$

en

$$\underline{t}_n = \begin{cases} \underline{\tau}_0^{(n)} + \underline{s}^{(n)} & , \underline{z}_{n-1} = 0 \\ \underline{s}^{(n)} & , \underline{z}_{n-1} \geq 1, \end{cases}$$

waarbij $\underline{\tau}_0^{(n)}$ het tijdsinterval vanaf het eind van de $(n-1)^{ste}$ bediening is tot het moment waarop de eerst klant binnenkomt, en $\underline{\tau}_k^{(n)}$, voor $k = 1, 2, \dots,$ het moment is, waarop de k^{de} klant na het begin van $\underline{s}^{(n)}$ binnenkomt.

We merken nog op dat met kans 1 in $\sum_{k=1}^{\infty} (\underline{s}^{(n)}-\underline{\tau}_k^{(n)})^+$ slechts eindig veel termen ongelijk 0 zijn.

Vervolgens definiëren we $\underline{r}_n(z)$ als volgt

$$\underline{r}_n(z) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \underline{k}_j}{\sum_{j=1}^{n} \underline{t}_j}, \qquad \text{voor } n = 1, 2, \dots .$$

Er geldt nu met een stelling van Chung (waarvan we een iets aangepast gebruik maken), dat

$$\text{(A.3.4)} \qquad \lim_{n\to\infty} \underline{r}_n(z) = r, \quad \text{met kans 1, voor een reëel getal } r.$$

Deze stelling van Chung luidt (zie [7]):

Als $\{\underline{x}_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ een irreducibele, aperiodieke Markovketen is met louter ergodische toestanden, de invariante kansverdeling $(\pi_j)_{j=1}^{\infty}$, f en g reëelwaardige funkties zijn, gedefinieerd op de toestandsruimte (gemakshalve de natuurlijke getallen verondersteld), dan geldt, ongeacht de begintoestand

$$\text{(A.3.5)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} f(\underline{x}_j)}{\sum_{j=1}^{n} g(\underline{x}_j)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\pi_n}{\sum_{n=1}^{\infty} g(n)\pi_n}, \qquad \text{met kans 1,}$$

aangenomen, dat de beide reeksen in het rechterlid absoluut konvergent zijn en niet beide 0.

Passen we nu (A.3.5) toe voor $\underline{r}_n(z)$ (er geldt immers

$$\underline{r}_n(z) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \underline{k}_j}{\sum_{j=1}^{n} \underline{t}_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n} f(\underline{z}_{j-1})}{\sum_{j=1}^{n} g(\underline{z}_{j-1})}),$$

dan vinden we met (A.3.5), na (A.3.3) tweemaal te differentiëren en s van onder af naar 1 te laten gaan,

$$\lim \underline{r}_n(z) = b \sum_{j=1}^{\infty} j\pi_j + \lambda c_1 \sum_{j=0}^{z} \pi_j + \lambda c_0 \sum_{j=z+1}^{\infty} \pi_j,$$

met kans 1.

We merken nog op, dat de π_j van z afhangen.
Bovenstaande berekening gaat als volgt.
Eerst differentiëren we in (A.3.3) beide leden, en vinden dan

$$P(s) + sP'(s) = \pi_0 A_1(s) + (s-1)\pi_0 A_1'(s) + A_1'(s) \sum_{j=0}^{z} \pi_j s^j + A_1(s) \sum_{j=1}^{z} j\pi_j s^{j-1} +$$

$$+ A_0'(s) \sum_{j=z+1}^{\infty} \pi_j s^j + A_0(s) \sum_{j=z+1}^{\infty} j\pi_j s^{j-1}.$$

Laten we nu s van onder af aan naar 1 gaan, dan volgt

(A.3.6) $$\pi_0 + \lambda \mathcal{E}\underline{s}_1 \sum_{j=0}^{z} \pi_j + \lambda \mathcal{E}\underline{s}_0 \sum_{j=z+1}^{\infty} \pi_j = 1.$$

Nog éénmaal differentiëren geeft

$$2P'(s) + sP''(s) = 2\pi_0 A_1'(s) + (s-1)\pi_0 A_1''(s) + A_1''(s) \sum_{j=0}^{z} \pi_j s^j + 2A_1'(s) \sum_{j=1}^{z} j\pi_j s^{j-1} +$$

$$+ A_1(s) \sum_{j=2}^{z} j(j-1)\pi_j s^{j-2} +$$

$$+ A_0''(s) \sum_{j=z+1}^{\infty} \pi_j s^j + 2A_0'(s) \sum_{j=z+1}^{\infty} j\pi_j s^{j-1} +$$

$$+ A_0(s) \sum_{j=z+1}^{\infty} j(j-1)\pi_j s^{j-2}.$$

Nemen we weer de limiet voor $s \uparrow 1$, dan vinden we

$$(A.3.7) \quad 2\pi_0\lambda\mathcal{E}\underline{s}_1 + \lambda^2\mathcal{E}\underline{s}_1^2 \sum_{j=0}^{z} \pi_j + \lambda^2\mathcal{E}\underline{s}_0^2 \sum_{j=z+1}^{\infty} \pi_j +$$

$$+ 2\lambda\mathcal{E}\underline{s}_1 \sum_{j=1}^{z} j\pi_j + 2\lambda\mathcal{E}\underline{s}_0 \sum_{j=z+1}^{\infty} j\pi_j = 2 \sum_{j=1}^{\infty} j\pi_j.$$

Definiëren we tenslotte $r(z)$ als de verwachte gemiddelde kosten per tijdseenheid dan vinden we dus

$$r(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E} \lim_{n\to\infty} \underline{r}_n(z) = \frac{\pi_0\{c_1+b(\mathcal{E}\underline{s}_1+\mathcal{E}\sum_{k=1}^{\infty}(\underline{s}_1-\underline{\tau}_k)^+)\}+}{}$$

$$\frac{+\sum_{j=1}^{z}\pi_j\{c_1+b(\mathcal{E}\underline{s}_1 j+\mathcal{E}\sum_{k=1}^{\infty}(\underline{s}_1-\underline{\tau}_k)^+\}+\sum_{j=z+1}^{\infty}\pi_j\{c_0+b(\mathcal{E}\underline{s}_0+\mathcal{E}\sum_{k=1}^{\infty}(\underline{s}_0-\underline{\tau}_k)^+)\}}{\pi_0(\mathcal{E}\underline{\tau}_0+\mathcal{E}\underline{s}_1)+\sum_{j=1}^{z}\pi_j\mathcal{E}\underline{s}_1+\sum_{j=z+1}^{\infty}\pi_j\mathcal{E}\underline{s}_0} =$$

$$= \lambda c_1 \sum_{j=0}^{z} \pi_j + \lambda c_0 \sum_{j=z+1}^{\infty} \pi_j + b \sum_{j=1}^{\infty} j\pi_j.$$

Met behulp van (A.3.1) en (A.3.2) zijn π_j numeriek te bepalen wat ons in staat stelt voor gegeven z de $r(z)$ te berekenen.

Tot slot kunnen we nog opmerken dat bovenstaande afleiding op voor de hand liggende wijze uit te breiden is tot het geval met k ($k \geq 2$) methoden van bediening, terwijl ook voor het machineprobleem analoog is aan te pakken.

Referenties

[1] G. de Leve, Generalised Markovian Decision Processes, Part I: Model and Method, Mathematical Centre Tract no. 3, Amsterdam, 1964.

[2] G. de Leve, Generalised Markovian Decision Processes, Part II: Probabilistic Background, Mathematical Centre Tract no. 4, Amsterdam, 1964.

[3] G. de Leve , H.C. Tijms, P.J. Weeda, Generalised Markovian Decision Processes, Part III: Applications, Mathematical Centre Tract no. 5, Amsterdam, 1970.

[4] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. I, 3rd ed. en vol. II, 1st ed., John Wiley and Sons, New York, 1966.

[5] F.G. Foster, On the stochastic matrices associated with certain queuing processes, Annals of Mathematical Statistics, 24(1953), 355-360.

[6] M.D. Moustafa, Infinite matrix-products associated with Markov-Chains, Indagationes Mathematicae 17(1955), 234-242.

[7] Kai Lai Chung, Markov-Chains with stationary transitions Probabilities, Springer Verlag, Berlin, 1960.