BA

stichting
mathematisch
centrum

MC

BA

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BN 5/71 SEPTEMBER

H.C. TIJMS

EEN KWALITEITSCONTROLE PROBLEEM

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

1. Probleemstelling

Een machine levert in elke periode $t = 1, 2, \ldots$ een product met een varierende kwaliteit af. De produktiekwaliteiten $i = 1, \ldots, M$ worden onderscheiden. Als in een periode een produkt met kwaliteit i wordt geproduceerd, dan zijn de produktiekosten in die periode gelijk aan $p(i)$, $i = 1, \ldots, M$. De produktiekwaliteit kan men alleen te weten komen door een inspectie, waaraan kosten J verbonden zijn. De inspectie kan alleen plaatsvinden aan het begin van elke periode. Na de inspectie aan het begin van die periode weet men van welke kwaliteit het produkt is dat die komende week zal worden geproduceerd. Echter indien men deze kwaliteit (stel dat deze i is) niet acceptabel vindt, kan men besluiten tot een revisie, waarmee kosten $R(i)$ gepaard gaan. De tijd die de revisie in beslag neemt, wordt verwaarloosbaar verondersteld. Als aan het begin van een periode een revisie heeft plaatsgevonden, dan wordt die periode een produkt van de kwaliteit M geproduceerd.

Als de machine in periode $t = 1, 2, \ldots$ een produkt van de kwaliteit $i(1 \le i \le M)$ produceert, dan zal de machine in periode $t + 1$ met kans p_{ij} een produkt met kwaliteit j, $j = 1, \ldots, M$, produceren of de machine is defect aan het begin van periode $t + 1$, de kans hierop is p_{i0}. Wij nemen aan dat $p_{i0} < 1$ is en $p_{i0} + p_{i1} + \ldots + p_{iM} = 1$ voor alle $i = 1, \ldots, M$. Als de machine aan het begin van een periode defect is, dan wordt de machine gerepareerd, waarmee kosten $R(0)$ gepaard gaan. Wij nemen aan dat de reparatietijd verwaarloosbaar is. Als de machine aan het begin van een periode gerepareerd is, wordt die periode een produkt van de kwaliteit M geproduceerd. Voorts maken wij de aanname dat bij geen revisie de machine uiteindelijk defect raakt.

Gevraagd wordt te bepalen wanneer de kwaliteit van het produkt moet worden geïnspecteerd en wanneer de machine moet worden gereviseerd, opdat de gemiddelde kosten per tijdseenheid in de long-run minimaal zijn.

2. De toestandsruimte, het natuurlijk proces en de k- en t-funkties.

Eerst voeren wij enige notatie in. Naast de reeds gedefinieerde kansen p_{ij}, $i = 1, \ldots, M$, $j = 0, \ldots, M$, definiëren wij

$$p_{00} = 1 \quad \text{en} \quad p_{0j} = 0 \quad \text{voor} \quad j = 1, \ldots, M.$$

Laat $\mathcal{P} = (p_{ij})$, $i, j = 0, \ldots, M$. De toestand 0 is een absorberende toestand van de Markov-matrix $\mathcal{P}$. De aanname dat bij geen revisie de machine tenslotte stuk gaat, is equivalent met de aanname dat $1, \ldots, M$ doorgangstoestanden van de Markov-matrix $\mathcal{P}$ zijn.

Definieer de n-stapsovergangskansen $p_{ij}^{(n)}$ door

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij} \text{ voor } 0 \le i, j \le M, \quad p_{ij}^{(n)} = \sum_{h=0}^{M} p_{ih}\, p_{hj}^{(n-1)}, \text{ voor } 0 \le i,j \le M,\ n \ge 2.$$

Merk op $p_{00}^{(n)} = 1$ voor alle $n \ge 1$, en $p_{i0}^{(n)} < 1$ voor alle $i = 1, \ldots, M$, $n \ge 1$, omdat $p_{i0} < 1$ is voor alle $i = 1, \ldots, M$. Stel

$$(1) \qquad \tilde{p}_{ij}^{(n)} = \frac{p_{ij}^{(n)}}{1-p_{i0}^{(n)}} \qquad \text{voor } i, j = 1, \ldots, M; \quad n \ge 1,$$

en

$$(2) \qquad q(i,n) = \sum_{j=1}^{M} \tilde{p}_{ij}^{(n)} (1-p_{j0}) \qquad \text{voor } i = 1, \ldots, M; \quad n \ge 1.$$

De kansen $p_{ij}^{(t)}$, $\tilde{p}_{ij}^{(t)}$ en $q(i,t)$ kunnen als volgt worden geïnterpreteerd. Beschouw de situatie dat de machine noch geïnspecteerd noch gereviseerd noch gerepareerd wordt. Dan is $p_{i0}^{(t)}$ (resp. $p_{ij}^{(t)}$, $1 \le j \le M$) de kans dat de machine in periode $t + 1$ defect is (resp. een produkt van de kwaliteit j produceert), gegeven dat de machine in periode 1 een produkt van de kwaliteit i, $1 \le i \le M$, produceert. De kans $\tilde{p}_{ij}^{(t)}$, $i, j = 1, \ldots, M$; $t \ge 1$ is de kans dat de machine in periode $t + 1$ een produkt van de kwaliteit j produceert, gegeven dat de machine aan het begin van periode $t + 1$ niet defect is en gegeven dat de machine in periode 1 een produkt van de kwaliteit i produceert. Tenslotte is $q(i,t)$, $1 \le i \le M$; $t \ge 1$, de kans dat de machine aan het begin van periode $t + 2$ niet defect is, gegeven dat de machine in periode 1 een produkt van de kwaliteit i produceert en gegeven dat de machine aan het begin van periode $t + 1$ niet defect is.

Wij definieren de toestandsruimte $\mathcal{S}$ door

$$\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, M\} \cup \{(i,n) \mid i = 1, \ldots, M,\ n = 1, 2, \ldots\}.$$

De toestand van het systeem wordt alleen gemeten aan het begin van elke periode. De toestand 0 correspondeert met de situatie dat de machine defect is. De toestand j met $1 \leq j \leq M$ correspondeert met de situatie dat ingeval de machine niet gereviseerd wordt, de produktie in de huidige periode j zal zijn. De toestand (i,n) correspondeert met de situatie dat de machine niet defect is en n perioden terug voor het laatst de produktiekwaliteit bekend was en dat deze kwaliteit gelijk aan i was.

Vervolgens definiëren wij het natuurlijk proces. In het natuurlijk proces wordt de machine noch geïnspecteerd noch gereviseerd noch gerepareerd. Dus als het natuurlijk proces in toestand 0 is, dan blijft het daarin voor altijd. Als de begintoestand van het natuurlijk proces gelijk aan (i,n) is, dan is de volgende toestand gelijk aan 0 resp. (i,n+1) al naar gelang de machine defect raakt of niet. De kans hierop is $1 - q(i,n)$ resp. $q(i,n)$. Als de begintoestand van het natuurlijk proces gelijk aan $i \neq 0$ is, dan is de volgende toestand gelijk aan 0 resp. (i,1) al naar gelang de machine defect raakt of niet. De kans hierop is p_{i0} resp. $1 - p_{i0}$.

Tenslotte definiëren wij de toegelaten beslissingen. In toestand 0 moet de machine altijd gerepareerd worden. Door deze interventie, aan te geven met $X = 1$, gaat het systeem over in toestand M. In de toestanden $i = 1, \ldots, M - 1$ zijn zowel de nulbeslissing als de interventie "reviseren" toegelaten. Door de nulbeslissing in toestand i blijft het systeem in toestand i. De interventie "reviseren" geven wij aan met $X = 1$ en door deze interventie gaat het systeem over in toestand M. In de toestand M is alleen de nulbeslissing mogelijk. In de toestanden (i,n) zijn zowel de nulbeslissing als de interventie "inspecteren" toegelaten. Door de nulbeslissing in (i,n) blijft het systeem in (i,n). De interventie inspecteren in toestand (i,n) geven wij aan met $X = 1$ en deze interventie heeft een <u>stochastisch</u> effect. Door de interventie $X = 1$ in toestand (i,n) gaat het systeem over in één van de toestanden $1, \ldots, M$, de kans dat het systeem overgaat in toestand j is gelijk aan $\tilde{p}_{ij}^{(n)}$.

Om een eindige oplossingsmethode te verkrijgen, zullen wij de (reële) aanname maken dat voor elke $i = 1, \ldots, M$ een natuurlijk getal T_i gegeven is, zodat in de toestanden (i,n) met $n = T_i, T_i + 1, \ldots$

altijd de interventie "inspecteren" moet worden genomen. De getallen $T_1, \ldots, T_M$ mogen uiteraard willekeurig groot gekozen worden.

Uit bovenstaande beschrijving volgt

$$A_0 = \{0\} \cup \{(i,n) \mid n = T_i, T_{i+1}, \ldots, i = 1, \ldots, M\} .$$

Elke strategie z schrijft in de toestanden van A_0 de interventie X = 1 voor. Wij merken hierbij het volgende op. In de theorie zoals gegeven in deel 7c van de leergang besliskunde is aangenomen dat voor elke strategie z geldt dat een interventie met kans 1 tot een toestand buiten A_z leidt. Dit behoeft echter in dit probleem niet het geval te zijn, aangezien de interventie "inspecteren" kan leiden tot een toestand j waarin strategie z de interventie "reviseren" voorschrijft. Echter de algemene theorie gaat voor dit probleem ook op, omdat in dit probleem ook geldt dat het aantal interventies in een eindig tijdsinterval met kans 1 eindig is.

De verzamelingen A_{01} en A_{02} kiezen wij gelijk aan

$$A_{01} = A_{02} = \{0\}.$$

Merk op dat in het natuurlijk proces het systeem met kans 1 de toestand 0 bereikt.

Vervolgens zullen wij de k- en t-funkties berekenen. Beschouw eerst de wandeling $\underline{w}_0$ met toestand i = 0, ..., M als begintoestand.
Voor de verwachte kosten $k_0(i)$ te maken in $\underline{w}_0$ en de verwachte duur $t_0(i)$ van $\underline{w}_0$ gelden de volgende relaties:

$$k_0(0) = t_0(0) = 0, \tag{3}$$

$$k_0(i) = p(i) + \sum_{j=1}^{M} p_{ij}\, k_0(j) \qquad \text{voor} \quad i = 1, \ldots, M, \tag{4}$$

$$t_0(i) = 1 + \sum_{j=1}^{M} p_{ij}\, t_0(j) \qquad \text{voor} \quad i = 1, \ldots, M. \tag{5}$$

De stelsels lineaire vergelijkingen (4) en (5) bezitten een unieke oplossing, omdat de toestanden 1, ..., M doorgangstoestanden van de Markov-matrix $\mathcal{P}$ zijn.

Beschouw vervolgens de wandeling $\underline{w}_1$ met begintoestand $i = 0, \ldots, M-1$. Door de interventie $X = 1$ in toestand i gaat het systeem over in toestand M. Dus $k_1(i;1) = R(i) + k_0(M)$ en $t_1(i;1) = t_0(M)$. Hieruit volgt

(6) $\qquad k(i;1) = R(i) + k_0(M) - k_0(i) \qquad$ voor $i = 0, \ldots, M-1$,

en

(7) $\qquad t(i;1) = t_0(M) - t_0(i) \qquad$ voor $i = 0, \ldots, M-1$.

Beschouw vervolgens de wandeling $\underline{w}_0$ met begintoestand (i,n). De kans dat in de eerste periode van deze wandeling een produktiekwaliteit j wordt afgeleverd is gelijk aan $\tilde{p}_{ij}^{(n)}$. Dus voor alle $1 \leq i \leq M$ en $n \geq 1$ geldt

(8) $$k_0((i,n)) = \sum_{j=1}^{M} \tilde{p}_{ij}^{(n)}\, k_0(j) \quad \text{en} \quad t_0((i,n)) = \sum_{j=1}^{M} \tilde{p}_{ij}^{(n)}\, t_0(j)\ .$$

Beschouw tenslotte de wandeling $\underline{w}_1$ met begintoestand (i,n). Door de interventie $X = 1$ in (i,n), waarmee de inspectiekosten J gepaard gaan, neemt het systeem met kans $\tilde{p}_{ij}^{(n)}$ de toestand j, $1 \leq j \leq M$, aan, waarna het systeem aan het natuurlijk proces onderworpen is. Dus voor alle $i = 1, \ldots, M$ en $n \geq 1$ geldt

(9) $$k_1((i,n);1) = J + \sum_{j=1}^{M} \tilde{p}_{ij}^{(n)}\, k_0(j),\ t_1((i,n);1) = \sum_{j=1}^{M} \tilde{p}_{ij}^{(n)}\, t_0(j)\ .$$

Uit (8) en (9) volgt dat

(10) $\qquad k((i,n);1) = J \quad$ en $\quad t((i,n);1) = 0 \qquad$ voor $1 \leq i \leq M;\ \ n \geq 1$.

De k- en t-funkties kunnen dus uit (3) t.m. (7) en (10) worden berekend.

3. De funktionaalvergelijkingen voor de y- en v-waarden.

Elke strategie z wordt gekarakteriseerd door een verzameling $R_z \subseteq \{1,\ldots,M-1\}$ en een M-tal natuurlijke getallen $t_1(z), \ldots, t_M(z)$, zodat R_z bestaat uit de toestanden $j = 1, \ldots, M-1$ waarin strategie z een revisie voorschrijft, in de toestanden (i,n), waarbij

$1 \leq n < t_i^*(z)$, $1 \leq i \leq M$, geen inspectie plaatsvindt onder strategie z, terwijl strategie z in de toestanden $(i,t_i(z))$, $i = 1, \ldots, M$, wel een inspectie voorschrijft. Onder strategie z zijn de toestanden (i,n) met $n > t_i(z)$ toestanden waarin het systeem na verloop van een eindige tijd nimmer meer in terecht kan komen. Vandaar dat het geen beperking is om alleen strategieën z te beschouwen waarvoor geldt dat de toestanden (i,n) met $n > t_i(z)$ interventietoestanden van z zijn, als z wordt gekarakteriseerd door $t_1(z), \ldots, t_M(z)$.

Voorts merken wij het volgende op. Aangezien zowel een reparatie als een revisie tot toestand M leidt en aangezien 1, ..., M doorgangstoestanden van de Markov-matrix $\mathcal{P}$ zijn, geldt voor elke beslissingsproces dat toestand M bereikbaar is vanuit iedere toestand. Dus voor elke strategie z geldt dat y(S;z) constant is op $\mathcal{J}$, stel

(11) $$y(S;z) = y(z) .$$

Laat z een vaste doch willekeurig gekozen strategie zijn, waarbij z bepaald wordt door een verzameling R_z van revisietoestanden en de natuurlijk getallen $t_1(z), \ldots, t_M(z)$.
Om de unieke oplossing (y(z), v(S;z)) van het stelsel funktionaalvergelijkingen (12.76) en 12.77) uit deel 7c van de leergang besliskunde te verkrijgen*), stellen wij

(12) $$v(0;z) = 0 .$$

Aangezien $v(0;z) = k(0;1) - y(z)\ t(0;1) + v(M;z)$, volgt dat

(13) $$v(M;z) = -k(0;1) + y(z)\ t(0;1) .$$

De interventie X = 1 in toestand i leidt tot toestand M. Dus

*) Wij zullen hierbij gebruik maken van de volgende algemeen geldende relatie. Als $A \supseteq A_z$, dan geldt $v(S;z) = \mathcal{E}v(\underline{a};z)$ voor $S \notin A$, waarbij $\underline{a}$ de eerste toestand is die in de verzameling A wordt aangenomen als de begintoestand S is en het systeem onderworpen is aan het natuurlijk proces.

$$(14) \qquad v(i;z) = k(i;1) - y(z)\, t(i;1) + v(z;M) =$$

$$= k(i;1) - k(0;1) - y(z)\, \{t(i;1) - t(0;1)\} \quad \text{voor } i \in R_z.$$

Als de begintoestand gelijk aan i is, waarbij $i \notin R_z$, $1 \le i \le M$, dan is met kans $1 - p_{i0}^{(t_i(z))}$ resp. $p_{i0}^{(t_i(z))}$ de eerstvolgende interventietoestand gelijk aan toestand $(i,t_i(z))$ resp. toestand 0. Derhalve geldt

$$(15) \quad v(i;z) = \{1-p_{i0}^{(t_i(z))}\}\, v((i,t_i(z));z) + p_{i0}^{(t_i(z))}\, v(0;z) =$$

$$= \{1-p_{i0}^{(t_i(z))}\}\, v((i,t_i(z));z) \quad \text{voor } i \notin R_z,\ 1 \le i \le M.$$

Met behulp van (10) vinden wij

$$(16) \quad v((i,n);z) = J + \sum_{j=1}^{M} \tilde{p}_{ij}^{(n)}\, v(j;z) \quad \text{voor alle } n \ge t_i(z);\ 1 \le i \le M.$$

Relatie (16) geldt i.h.b. voor $n = t_i(z)$. Uit (16) met $n = t_i(z)$, (15), (14) en (2) volgt na enige berekeningen dat

$$(17) \quad v(i;z) = \{1-p_{i0}^{(t_i(z))}\}\, J + \sum_{j \in R_z} p_{ij}^{(t_i(z))}\{k(j;1) - k(0;1)\} +$$

$$-y(z) \sum_{j \in R_z} p_{ij}^{(t_i(z))}\{t(j;1) - t(0;1)\} +$$

$$+ \sum_{j \in \overline{R}_z} p_{ij}^{(t_i(z))}\, v(j;z) \qquad \text{voor } i \in \overline{R}_z,$$

waarbij

$$(18) \qquad \overline{R}_z = \{1, \ldots, M\} \setminus R_z$$

Merk op dat voor elke strategie z geldt dat toestand $M \in \overline{R}_z$.

Door (13) en (17) worden $y(z)$, $v(i;z)$ voor $i \in \overline{R}_z$ op ondubbelzinnige wijze vastgelegd. Als deze grootheden eenmaal berekend zijn, kunnen de overige v-waarden worden berekend uit (14), (16) en uit

$$(19) \quad v((i,n);\ z) = q(i,n)\ v\ ((i,n+1);\ z) + (1-q(i,n))\ v(0;z) =$$

$$= q(i,n)\ v((i,n+1);\ z) \quad \text{voor} \quad 1 \le n < t_i(z),\ 1 \le i \le M.$$

4. <u>Uitbreiden en afsnijden.</u>

Stel dat voor een strategie z_1 die gegeven wordt door R_{z_1} en $t_1(z_1), \ldots, t_M(z_1)$, de waarden voor $y(z_1)$ en $v(S;z_1)$, $S \in \mathfrak{S}$, berekend zijn op de wijze zoals beschreven in sectie 3.

Wij zullen nu de policy improvement operation specificeren, waarbij de gevonden waarden $y(z_1)$, $v(S;z_1)$, $S \in \mathfrak{S}$, gebruikt zullen worden om strategie z_1 uit te breiden tot een strategie z_1' .

De toestand (i,n), waarbij $1 \le n < t_i(z_1)$, $1 \le i \le M$, behoort alleen dan tot A_{z_1}', als

$$(20) \quad v((i,n);\ (1)z_1) = J + \sum_{j=1}^{M} \tilde{p}_{ij}^{(n)}\ v(j;z) < v((i,n);z).$$

De toestand i, waarbij $1 \le i \le M$ en $i \notin A_{z_1}$, behoort alleen dan tot de verzameling A_{z_1}' als

$$(21) \quad v(i;(1)z_1) = k(i;1) - y(z_1)\ t(i;1) + v\ (M;z_1) < v(i;z_1).$$

Mbv. (13), (20) en (21) volgt dat voor $S \in A_{z_1}'$ geldt

$$(22) \quad v(S;\ [z_1']z_1) = \begin{cases} v(S;z_1) & \text{voor } S \in A_{z_1}, \\ J + \sum_{j=1}^{M} \tilde{p}_{ij}^{(n)}\ v(j;z_1) & \text{voor } S = (i,n) \notin A_{z_1}, \\ k(i;1)-k(0;1)-y(z_1)\{t(i;1)-t(0;1)\}, & \\ & \text{voor } S = i \notin A_{z_1}. \end{cases}$$

Vervolgens zullen wij de afsnijprocedure specificeren voor dit probleem*). Vanwege het feit dat in het natuurlijk proces na toestand (i,n) de volgende toestand gelijk aan 0 of $(i,n+1)$ is en dat na toestand i de volgende toestand gelijk aan 0 of $(i,1)$ is, kan de verzameling $A'_{z'_1}$ stapsgewijs opgebouwd worden. Het zal na enig nadenken duidelijk zijn dat bij elke vaste i wij voor de toestanden $(i,n) \in A_{z'_1}$ onafhankelijk van de overige toestanden kunnen bepalen, welke van deze toestanden (i,n) ook tot $A'_{z'_1}$ behoren. Dit gaat als volgt. Kies i vast, $1 \le i \le M$. De toestanden 0 en (i,n) met $n \ge T_i$ behoren tot A_0 en dus ook tot $A'_{z'_1}$. Definieer de verzameling

$$(23) \qquad A_1 = \{0\} \cup \{(i,n) \mid n \ge T_i\}$$

Merk op $v((i,T_i);\ (A_1)\ [z'_1]z_1) = v((i,T_i);\ [z'_1]z_1)$. Wij zullen nu voor de toestanden $(i,n) \in A_{z'_1}$, $1 \le n \le T_i - 1$, nagaan welke van deze toestanden ook tot $A'_{z'_1}$ behoren. Daartoe gaan wij successievelijk de toestanden $(i,T_i-1), \ldots, (i,1)$ langs. Wij zullen steeds stilzwijgend gebruiken dat $v(0;[z'_1]z_1) = v(0;z_1) = 0$. Het onderzoek voor toestand (i,T_i-k), $k = 1, \ldots, T_i - 1$, verloopt als volgt. Als toestand (i,T_i-k) tot $A_{z'_1}$ behoort en als

$$(24) \quad v(i,T_i-k);\ (A_k)\ [z'_1]z_1) = q(i,T_i-k)\ v((i,T_i-k+1);\ (A_k)\ [z'_1]z_1) >$$

$$> v((i,T_i-k);\ [z'_1]z_1) \ ,$$

---

*) Wij zullen hierbij gebruik maken van de volgende algemeen geldende relatie. Als de verzameling $B \supseteq A$, dan geldt voor elke $S \notin B$ dat $v(S;(A)\ [z'_1]z_1) = \sum v(\underline{b};(A)\ [z_1]z'_1)$, waarbij $\underline{b}$ de eerste toestand is die in B wordt aangenomen, als de begintoestand S is en het systeem onderworpen is aan het natuurlijk proces.

dan behoort toestand (i,T_i-k) tot $A'_{z_1}{}'$ en definieren wij

(25) $$A_{k+1} = A_k \cup \{(i,T_i-k)\} .$$

Anders geldt dat toestand (i,T_i-k) niet tot $A'_{z_1}{}'$ behoort en definieren wij

(26) $$A_{k+1} = A_k .$$

Merk op dat uit deze definitie volgt

(27) $$v((i,T_i-k);\ (A_{k+1})\ [z_1']z_1) = \begin{cases} v((i,T_i-k);\ [z_1']z_1) & \text{als } A_{k+1} \neq A_k, \\ q(i,T_i-k)\ v((i,T_i-k+1);\ (A_k)\ [z_1']z_1) & \text{als } A_{k+1} = A_k . \end{cases}$$

Op deze wijze vinden wij tenslotte de verzameling A_{T_i}. Deze verzameling is de verzameling van al die toestanden (i,n) die tot $A'_{z_1}{}'$ behoren. Vervolgens gaan wij voor elke toestand $i \in A_{z_1}{}'$, $i \neq 0$, na of deze toestand tot $A'_{z_1}{}'$ behoort of niet. Toestand $i \in A_{z_i}{}'$, $i \neq 0$, behoort alleen dan tot $A'_{z_1}{}'$ als

(28) $$v(i;(A_{T_i})\ [z_1']z_1) = (1-p_{i0})\ v((i,1);\ (A_{T_i})\ [z_1']z_1) > v(i;[z_1']z_1) .$$

Hiermee is de bepaling van de verzameling $A'_{z_1}{}'$ voltooid.

Bij een nadere bestudering van de policy improvement operation en de afsnijprocedure blijkt dat deze twee procedures gecombineerd kunnen worden. Dit hebben wij dan ook gedaan in de iteratiemethode van dit probleem.Deze iteratiemethode wordt gegeven in de volgende sectie.

5. De iteratiemethode.

De eerste stap van de iteratiemethode beginnen wij met een willekeurige strategie z_1. De n^{de} stap verloopt als volgt.

n^{de} stap

I Laat z_n de strategie zijn verkregen aan het eind van de $(n-1)^{ste}$ stap. De strategie z_n wordt gegeven door een verzameling R_{z_n} en een M-tal natuurlijke getallen $t_1(z_n), \ldots, t_M(z_n)$.

Bepaal de unieke oplossing $(y(z_n), v(i;z_n)$, $i \in \bar{R}_{z_n})$ van het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} v(i;z_n) = \{1-p_{i0}^{(t_i(z_n))}\} J + \sum\limits_{j\in R_{z_n}} p_{ij}^{(t_i(z_n))} \{k(j;1) - k(0;1)\} + \\ \qquad -y(z_n) \sum\limits_{j\in R_{z_n}} p_{ij}^{(t_i(z_n))} \{t(j;1)-t(0;1)\} + \\ \qquad + \sum\limits_{j\in \bar{R}_{z_n}} p_{ij}^{(t_i(z_n))} v(j;z_n) \qquad \text{voor} \quad i \in \bar{R}_{z_n} \\ v(M;z_n) = -k(0;1) + y(z_n)\, t(0;1). \end{cases}$$

Bereken vervolgens

$$v(i;z_n) = k(i;1) - k(0;1) - y(z_n) \{t(i;1)-t(0;1)\} \text{ voor } i \in R_{z_n} .$$

II Om de $t_i(z_{n+1})$, $1 \le i \le M$, te bepalen, wordt voor elke vaste $i = 1, \ldots, M$ de volgende procedure uitgevoerd

Bereken $\alpha_i(T_i) = J + \sum\limits_{j=1}^{M} \tilde{p}_{ij}^{(T_i)} v(j;z_n)$ en stel $t_i(T_i) = T_i$.

Voor successievelijk $k = 1, \ldots, T_i - t_i(z_n)$: Bereken

$$a_{k1} = J + \sum_{j=1}^{M} \tilde{p}_{ij}^{(T_i-k)} \; v(j;z_n) \;,\; a_{k2} = q(i,T_i-k)\; \alpha_i(T_i-k+1) \;;$$

als $a_{k2} > a_{k1}$, definieer dan

$$\alpha_i(T_i-k) = a_{k1} \quad \text{en} \quad t_i(T_i-k) = T_i - k,$$

en als $a_{k2} \leq a_{k1}$, definieer dan

$$\alpha_i(T_i-k) = a_{k2} \quad \text{en} \quad t_i(T_i-k) = t_i(T_i-k+1).$$

Als deze stap voor $k = 1, \ldots, T_i-t_i(z_n)$ is uitgevoerd bereken dan

$$\beta_i(t_i(z_n)) = J + \sum_{j=1}^{M} \tilde{p}_{ij}^{(t_i(z_n))} \; v(j;z_n)$$

en doe successievelijk voor $k = T_i-t_i(z_n) + 1, \ldots, T_i - 1$ het volgende Bereken

$$b_{k1} = q(i,T_i-k)\; \beta_i(T_i-k+1),$$

$$b_{k2} = J + \sum_{j=1}^{M} \tilde{p}_{ij}^{(T_i-k)} \; v(j;z_n),$$

$$b_{k3} = q(i,T_i-k)\; \alpha_i(T_i-k+1) \;;$$

als $b_{k2} < b_{k1}$ en als $b_{k2} < b_{k3}$, definieer dan

$$\alpha_i(T_i-k) = b_{k2} \;, \qquad t_i(T_i-k) = T_i - k,$$

anders definieer

$$\alpha_i(T_i-k) = b_{k3} \;, \qquad t_i(T_i-k) = t_i(T_i-k+1),$$

voorts definieer voor alle gevallen

$$\beta_i(T_i-k) = b_{k1}$$

Het uiteindelijk gevonden natuurlijk getal $t_i(1)$ is gelijk aan het getal $t_i(z_{n+1})$ behorende bij strategie z_{n+1}.

Vervolgens bepalen wij de verzameling $R_{z_{n+1}}$. Daartoe wordt elke toestand i = 1, ..., M - 1 aan de volgende test onderworpen, waarbij wij onderscheid maken tussen $i \in R_{z_n}$ en $i \notin R_{z_n}$.

(a) $i \in R_{z_n}$ Als

$$(1-p_{i0})\ \alpha_i(1) > v(i;z_n)\ ,$$

dan bestaat toestand i tot $R_{z_{n+1}}$, anders niet.

(b) $i \notin R_{z_n}$, als

$$k(i;1) - k(0;1) - y(z_n)\ \{t(i;1)-t(0;1)\} < v(i;z_n)$$

en als

$$k(i;1) - k(0;1) - y(z_n)\ \{t(i;1)-t(0;1)\} < (1-p_{i0})\ \alpha_i(1),$$

dan behoort toestand i tot $R_{z_{n+1}}$, anders niet.

<u>Einde van de n^de^ stap.</u>

Numeriek voorbeeld*)

De volgende gegevens worden gebruikt:

$$M = 10 \ , \ T_i = 25 \ \text{voor} \ i = 1, \ldots, 10 \ , \ J = 30,$$

i	p(i)	R(i)	p_{ij}, j = 0, ..., 10										
0		130	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	10	40	.5	.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	9	40	.2	.2	.6	0	0	0	0	0	0	0	0
3	8	40	0	.2	.2	.6	0	0	0	0	0	0	0
4	7	40	0	0	.2	.2	.6	0	0	0	0	0	0
5	6	40	0	0	0	.2	.2	.6	0	0	0	0	0
6	5	35	0	0	0	0	.1	.2	.7	0	0	0	0
7	4	35	0	0	0	0	0	.1	.2	.7	0	0	0
8	3	35	0	0	0	0	0	0	.1	.2	.7	0	0
9	3	35	0	0	0	0	0	0	0	.1	.2	.7	0
10	3		0	0	0	0	0	0	0	0	0	.2	.8

1ste stap

Wij beginnen met strategie z_1 die gegeven wordt door

$$R_{z_1} = \{1,\ldots,9\} \ , \ t_i(z_1) = 25 \qquad \text{voor} \ i = 1, \ldots, 10 .$$

Voor deze strategie geldt $y(z_1) = 9{,}76$. De funktie $v(i;z_1)$ en de nieuwe strategie z_2 worden gegeven in tabel 1, waarbij met een (*) aangeduide toestanden tot R_{z_2} behoren.

*) Dit numeriek voorbeeld is opgelost met een Algol 60 programma geschreven door J.H. van Frankenhuysen.

i	$v(i;z_1)$	R_{z_2}	$t_i(z_2)$
1	-90.48	(*)	1
2	-88.34	(*)	1
3	-85.01	(*)	1
4	-79.78	(*)	1
5	-73.00	(*)	3
6	-64.39	(*)	5
7	-49.73	(*)	7
8	-32.08		9
9	-15.43		11
10	-16.64		16

Tabel 1

Einde 1ste stap

2de stap

Voor strategie z_2 geldt $y(z_2) = 8{,}96$. De funktie $v(i;z_2)$ en de nieuwe strategie z_3 worden gegeven in tabel 2.

i	$v(i;z_2)$	R_{z_3}	$t_i(z_3)$
1	-92.08	(*)	1
2	-91.14	(*)	1
3	-89.21	(*)	1
4	-85.28	(*)	1
5	-79.85	(*)	2
6	-73.46	(*)	4
7	-60.73	(*)	6
8	-44.03	(*)	8
9	-41.33		10
10	-35.65		15

Tabel 2

Einde 2de stap

3^{de} stap

Voor strategie z_3 geldt $y(z_3) = 8{,}93$. De funktie $v(i;z_3)$ en de nieuwe strategie z_4 worden gegeven in tabel 3.

i	$v(i;z_3)$	R_{z_4}	$t_i(z_4)$
1	-92.14	(*)	1
2	-91.25	(*)	1
3	-89.38	(*)	1
4	-85.50	(*)	1
5	-80.12	(*)	2
6	-73.82	(*)	4
7	-61.16	(*)	6
8	-45.62	(*)	8
9	-41.71		10
10	-36.40		15

Tabel 3

Einde 3^{de} stap

Aangezien $z_3 = z_4$, is de strategie z_4 optimaal.

Opmerking

Een bovengrens voor de zuivere rekentijd per iteratiestap is $\frac{1}{2}M^2T$ millisec. (aangenomen $T_i = T$ voor alle i). De convergentie van de iteratiemethode mag snel genoemd worden. Veelal wordt in minder dan 6 stappen de optimale strategie bereikt. De verbetering van de $y(z)$ waarden in de eerste 2, 3 stappen is groot t.o.v. de verbetering in de resterende stappen. Na 2, 3 stappen is veelal een strategie bereikt die zeer weinig van de optimale strategie verschilt.