BA

stichting
mathematisch
centrum

BA

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BN 6/71 SEPTEMBER

B.J. LAGEWEG

EEN REPARATIEPROBLEEM, ITERATIEF OPGELOST
MET DE ALGEMENE MARKOV-PROGRAMMERINGSMETHODE

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Een reparatieprobleem, iteratief opgelost met
de algemene Markov-programmeringsmethode.

1. Probleem

Bij een reparatiebedrijf van scheepskettingen komen de te repareren kettingen binnen volgens een Poisson-proces met parameter λ. De reparatieduur per ketting volgt een kansverdeling met kansdichtheid f.
Als een ketting binnenkomt heeft het bedrijf de keuze uit twee handelswijze:

1) een nieuwe ketting leveren (kosten K per ketting);
2) de ketting repareren; bij reparatie betaalt het bedrijf aan de eigenaar van de ketting een vergoeding c per tijdseenheid, zolang de ketting nog niet hersteld is.

De kettingen worden gerepareerd in volgorde van binnenkomst. Het bedrijf kan 1 ketting tegelijk repareren.

Het bedrijf vraagt zich af, wanneer te repareren, wanneer nieuw te leveren, om de gemiddelde kosten per tijdseenheid in de longrun te minimaliseren.

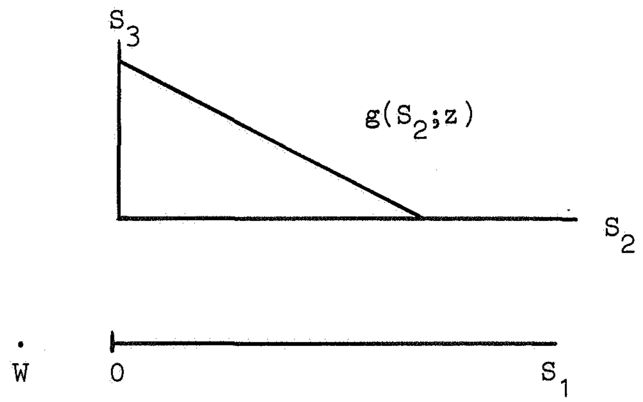
2. De toestand- en beslissingsruimte

We onderscheiden 3 soorten toestanden:

1) Er komt geen ketting binnen en de totale resterende reparatietijd, d.i. de tijd die nodig is om de reparaties te voltooien van alle aanwezige kettingen, bedraagt S_1 (toestand S_1);

2) De totale resterende reparatietijd is S_2 en er komt een ketting binnen met reparatieduur S_3 (toestand (S_2,S_3));

3) De toestand W. Dit is een hulptoestand waarvan de betekenis hieronder duidelijk zal worden gemaakt.



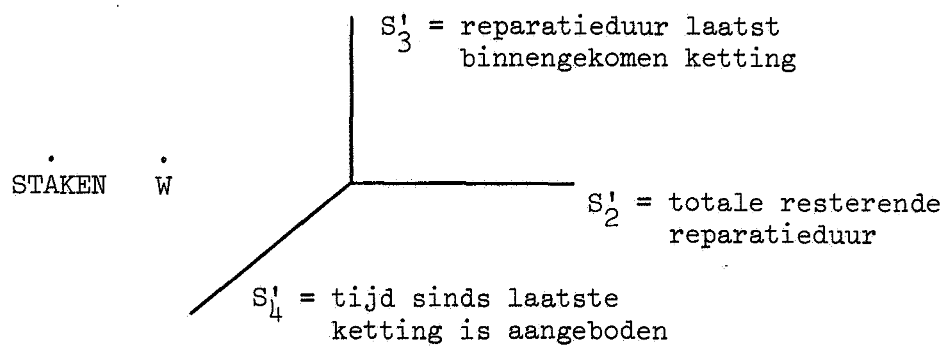
Het natuurlijk proces definiëren we als volgt. In het natuurlijk proces wordt voor elke ter reparatie aangeboden ketting een nieuwe geleverd. Van toestand (S_2,S_3) gaan we over naar toestand $S_1 = S_2$. In het natuurlijk proces bevinden we ons, uitgaande van (S_2,S_3) na een tijdsverloop S_2 in toestand $S_1 = 0$. Eenmaal gearriveerd in deze toestand, heft het natuurlijk proces zelfs de mogelijkheid om kettingen aan te bieden op: het bedrijf wordt gestaakt en het systeem blijft in toestand $S_1 = 0$.
Als het natuurlijk proces in W begint dan blijft het daarin tot de eerstvolgende ketting wordt aangeboden; heeft deze een reparatieduur S_3 dan gaat het systeem over in toestand $(0,S_3)$.
In het beslissingsproces kan de beslisser in toestanden (S_2,S_3) ingrijpen door tot reparatie te besluiten. Deze interventie brengt het systeem van toestand (S_2,S_3) naar toestand $S_1 = S_2 + S_3$. In toestand

$S_1 = 0$ intervenieert de beslisser altijd door het bedrijf niet te staken, maar te wachten op nieuwe reparaties in toestand W.
Samengevat de toestandsruimte $\mathcal{S}$ is

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_{23} \cup \{W\}, \tag{1}$$

met $\mathcal{S}_1 \overset{\text{def}}{=} \{S_1 \mid S_1 \geq 0\}$ en $\mathcal{S}_{23} \overset{\text{def}}{=} \{(S_2,S_3) \mid S_2 \geq 0,\ S_3 \geq 0\}$.

<u>Opmerking</u>: De boven beschreven toestandsruimte is eigenlijk een vereenvoudigde uitgave van de volgende "meer exakte" toestandsruimte.



Alle toestanden $\{(S_2',S_3',S_4') \mid S_2' > 0,\ S_3' \geq 0,\ S_4' > 0\}$, zijn samengeperst in toestand $S_1 = S_2'$. Het punt $S_1 = 0$ vervult de functies van de toestanden STAKEN en $\{(0,S_3',S_4') \mid S_3' \geq 0,\ S_4' > 0\}$ in het tweede model. Omwille van de eenvoud is gekozen voor het eerste model.

In het beslissingsproces definiëren we als

$$\text{Interventie } (X=1): \begin{cases} \text{ketting repareren,} & \text{als } S \in \mathcal{S}_{23}, \\ \text{wachten op werk,} & \text{als } S = 0. \end{cases}$$

$$\text{Nulbeslissing } (X=0): \begin{cases} \text{nieuwlevering,} & \text{als } S \in \mathcal{S}_{23} \\ \text{in dezelfde toestand blijven,} & \text{als } S \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}_{23}. \end{cases}$$

De verzameling van toegelaten beslissingen $\mathcal{X}(S)$ wordt gegeven door:

$$(2) \qquad \chi(S) = \begin{cases} \{0,1\} & , \text{ als } S \in \mathfrak{S}_{23} \\ \{1\} & , \text{ als } S = 0 \\ \{0\} & , \text{ voor de overige } S \end{cases}$$

De invoering van de toestand W en de interventie in toestand 0 - die nodig zijn om het beslissingsproces een realistisch karakter te geven in tegenstelling tot het natuurlijk proces -, heeft geen invloed op kosten en tijd in het beslissingsproces. Door deze kunstgreep echter zijn wij in staat een keuze voor A_0 te doen, die tot een bijzonder eenvoudige berekening van de k- en t-functies leidt.

3. De kosten- en tijdsfuncties.

De keuze $A_0 = \{0\}$ voldoet aan de eisen gesteld ten aanzien van A_0. Noodzakelijkerwijze volgt dan $A_{01} = A_{02} = \{0\}$, $\underline{w}_{01} = \underline{w}_{02} = \underline{w}_0$ en $\underline{w}_{11} = \underline{w}_{12} = \underline{w}_1$.
Het verschil in tijdsduur tussen $\underline{w}_1$ en $\underline{w}_0$ bij interventie in toestand (S_2,S_3) is gelijk aan de reparatietijd S_3. Het kostenverschil bestaat uit de tijdsvergoeding $c(S_2+S_3)$, de besparing op nieuwlevering - K en de kosten in de tijd dat $\underline{w}_1$ langer duurt dan $\underline{w}_0$. Deze laatste kosten zijn de verwachte kosten voor nieuwleveringen in de tijd S_3, en dus $K\lambda S_3$.
In toestand 0 springen we door de interventie X = 1 naar W; we blijven in W totdat een reparatie wordt aangeboden (verwachte tijdsduur $\frac{1}{\lambda}$); de nieuwlevering (kosten K) brengt ons weer in 0.
Samenvattend:

$$(3) \qquad k(S;X) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{voor } X = 0 \\ c(S_2+S_3) - K + K\lambda S_3, & \quad \text{voor } X = 1 \text{ en } S \in \mathfrak{S}_{23} \\ K & , \quad \text{voor } X = 1 \text{ en } S = 0 \end{cases}$$

$$(4) \qquad t(S;X) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{voor } X = 0 \\ S_3 & , \quad \text{voor } X = 1 \text{ en } S \in \mathfrak{S}_{23} \\ 1/\lambda & , \quad \text{voor } X = 1 \text{ en } S = 0 \end{cases}$$

Opmerking: Omdat alleen het verschil tussen de wandelingen $\underline{w}_1$ en $\underline{w}_0$ telt, speelt het aantal kettingen dat op een beslissingstijdstip op reparatie wacht, geen rol. Dit gegeven behoeft niet in de toestand te worden opgenomen.

4. Bepaling van de y- en v-waarden.

Een strategie z wordt gekarakteriseerd door een functie $g(S_2;z)$: in toestanden (S_2,S_3) met $0 \leq S_3 \leq g(S_2;z)$ schrijft z reparatie voor; in de overige toestanden $S \in \mathfrak{S}_{23}$ nieuwlevering: De verzameling A_z van interventietoestanden voor strategie z is:

(5) $$A_z = \{0\} \cup \{(S_2,S_3) \mid S_2 \geq 0,\ 0 \leq S_3 \leq g(S_2;z)\}.$$

Voor elke in aanmerking komende strategie z is $g(S_2;z)$ uniform begrensd: uit kostenoogpunt zijn alleen strategieën met $g(S_2;z) \leq \max\{0,K/c-S_2\}$ van belang. We definiëren: $S_z^* \overset{\text{def}}{=} \inf\{S_2 \mid g(S_2;z) = 0\}$. We beperken ons tot strategieën, waarvoor $A_z\backslash\{0\}$ samenhangend is en $g(S_2;z)$ monotoon niet-stijgend. Gezien de structuur van het probleem lijken dit geen wezenlijke beperkingen.

Onder deze veronderstellingen zijn er geen disjuncte fuiken en geldt voor de gemiddelde opbrengst per tijdseenheid

$$y(S;z) = y(z) \qquad \text{voor alle } S \in \mathfrak{S}.$$

Voor de bepaling van de y- en v-waarden nemen we aan dat een strategie z met grens $g(S_2;z)$ gegeven is. We gaan een relatie afleiden voor de relatieve waarde $v(S_1;z)$ in toestand S_1, die voldoet aan:

(6) $$v(S_1;z) = \mathcal{E}\, v(\underline{I}_{S_1};z),$$

waarbij $\underline{I}_{S_1}$ de interventietoestand is die vanuit S_1 het eerst wordt aangenomen onder strategie z. Als $\underline{a}$ het aantal binnenkomsten in een tijdje ΔT is en $p(\underline{a}=a)$ de kans op a binnenkomsten, dan geldt:

$$v(S_1+\Delta T;z) = \mathcal{E}\, v(\underline{I}_{(S_1+\Delta T)};z \mid \underline{a}=0)\; p(\underline{a}=0) +$$

$$+ \mathcal{E}\, v(\underline{I}_{(S_1+\Delta T)};z \mid \underline{a}=1)\; p(\underline{a}=1) + O(\Delta T^2) =$$

$$= (1-\lambda\Delta T)\; v(S_1;z) +$$

$$+ \lambda\Delta T \left[\int_0^{g(S_1;z)} v((S_1,S_3);z)\; f(S_3)\; dS_3 + \right.$$

$$\left. + \int_{g(S_1;z)}^{\infty} v(S_1;z)\; f(S_3)\; dS_3 \right] + O(\Delta T^2)$$

Deze relatie gaat over, voor $\Delta T \to 0$, in:

(7) $$\frac{1}{\lambda}\, v'(S_1;z) = \int_0^{g(S_1;z)} \{v((S_1,S_3);z) - v(S_1;z)\}\; f(S_3)\; dS_3$$

voor alle $S_1 \geq 0$.

We zien dat voor toestanden S_1 met $g(S_1;z) = 0$ geldt

(8) $$v'(S_1;z) = 0.$$

Voor $S_1 = 0$ kunnen we de volgende randvoorwaarde afleiden:

$$v(0;z) = k(0;1) - y(z)\; t(0;1) + v(W;z)$$

ofwel:

$$v(0;z) = K - \frac{1}{\lambda}\, y(z) + \int_0^{g(0;z)} v((0,S_3);z)\; f(S_3)\; dS_3 +$$

$$+ \int_{g(0;z)}^{\infty} v(0;z)\; f(S_3)\; dS_3.$$

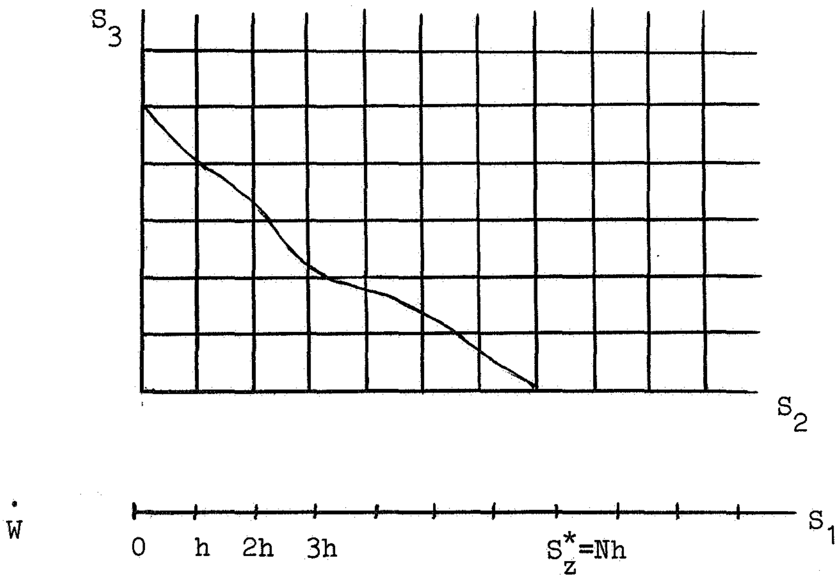
M.b.v. (7) gaat deze randvoorwaarde over in:

(9) $$\frac{1}{\lambda} v'(0;z) = -K + \frac{1}{\lambda} y(z).$$

We stellen bovendien:

(10) $$v(S_z^*;z) = 0$$

Het stelsel (7), (9), (10) kan opgelost worden door een rooster aan te brengen in de toestandsruimte.



We kiezen de roosterwijdte h zo dat $S_z^* = Nh$, met N groot. Voor het gemak zullen we veronderstellen dat de functie $g(lh;z)$ voldoet aan:

$$g(lh;z) = m_l(z).h \;, \quad \text{met } m_l(z) \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ voor } l = 0,1,\ldots,N.$$

We definiëren:

(11) $$v_l \overset{\text{def}}{=} v(lh;z) \;, \qquad l = 0,1,\ldots\;.$$

Uit (8) en (10) volgt:

(12) $$v_l = 0 \qquad \text{voor } l \geq N.$$

Keren we terug naar (7). Uit

$$v(S;z) = k(S;z(S)) - y(z)\ t(S;z(S)) + \mathcal{E}\, v(\underline{I}_S;z) \qquad \text{voor } S \in A_z$$

en (3) en (4) volgt dat

$$(13)\quad \frac{1}{\lambda}\, v'(lh;z) = \int_0^{g(lh;z)} k((lh,S_3);z)\, f(S_3)\, dS_3 -$$

$$- y(z) \int_0^{g(lh;z)} t((lh,S_3);z)\, f(S_3)\, dS_3$$

$$+ \int_0^{g(lh;z)} \{v(lh+S_3;z) - v(lh;z)\}\, f(S_3)\, dS_3 .$$

De laatste term van het rechterlid benaderen we met

$$(14)\quad \int_0^{g(lh;z)} \{v(lh+S_3;z) - v(lh;z)\}\, f(S_3)\, dS_3 =$$

$$= \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{m_l(z)} [\{v(lh+kh-h;z) - v(lh;z)\}\, f(kh-h) +$$

$$+ \{v(lh+kh;z) - v(lh;z)\}\, f(kh)] =$$

$$= -\{\sum_{k=1}^{m_l(z)} hf_k - \tfrac{1}{2}hf_{m_l(z)}\}\, v_l + \sum_{k=1}^{m_l(z)-1} hf_k v_{l+k} + \tfrac{1}{2}hf_{m_l(z)} v_{l+m_l(z)},$$

$$\text{met } f_k \overset{\text{def}}{=} f(kh)$$

M.b.v. (12) en (14) kan (13) nu geschreven worden als:

$$(15)\quad \frac{1}{\lambda}\, v'(lh;z) = \chi_l - y(z)\, \phi_l + \sum_{k=1}^{N-1} p_{lk}\, v_k, \qquad \text{voor } l = 0,1,\dots,N-1,$$

waarbij χ_l, ϕ_l resp. p_{lk} bepaald worden uit (13), resp. (14).

Tussen de relatieve waarden op de roosterpunten geldt de betrekking:

$$(16)\qquad v_{l+1} = v_l + \int_{lh}^{lh+h} v'(u;z)\, du.$$

Wanneer h voldoende klein is, kan (16) b.v. benaderd worden door

$$(17)\qquad v_{l+1} - v_l = \tfrac{1}{2}h\{v'(lh;z) + v'(lh+h;z)\}.$$

Het stelsel (19, (9), (7) is nu m.b.v. (17), (15), (12) en (11) herschreven als:

$$(18)\quad \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{N-1} p_{0k}v_k & & & -(\phi_0+\frac{1}{\lambda})y(z) & = -\chi_0-K \\ \sum\limits_{k=0}^{N-1} p_{0k}v_k & +\sum\limits_{k=1}^{N-1} p_{1k}v_k & +\frac{2}{\lambda h}(v_0-v_1) & -(\phi_0+\phi_1)y(z) & = -\chi_0-\chi_1 \\ \vdots & & & & \\ \sum\limits_{k=N-2}^{N-1} p_{N-2,k}v_k & +\sum\limits_{k=N-1}^{N-1} p_{N-1,k}v_k & +\frac{2}{\lambda h}(v_{N-2}-v_{N-1}) & -(\phi_{N-2}+\phi_{N-1})y(z) & = -\chi_{N-2}-\chi_{N-1} \\ \sum\limits_{k=N-1}^{N-1} p_{N-1,k}v_k & & +\frac{2}{\lambda h}v_{N-1} & -\phi_{N-1}\,y(z) & = -\chi_{N-1} \end{cases}$$

De oplossing van dit stelsel van N+1 vergelijkingen in N+1 onbekenden verschaft de waarden van $v_0,v_1,\ldots,v_{N-1}$ en $\phi(z)$. De relatieve waarden op de roosterpunten zijn nu:

$$(19)\quad v((lh,mh);z) = \begin{cases} 0 & , l \geq N \\ v_l & , mh > g(lh;z) \\ k((lh,mh);1)-y(z)t((lh,mh);1)+v(lh+mh;z), & \\ & \text{als } (lh,mh) \in A_z \end{cases}$$

5. Strategieverbetering

a) Uitbreiden

Voor een gemengde strategie (X)z) worden de v-waarden op het rooster gevonden uit

$$(20)\qquad v((lh,mh);(X)z) = \begin{cases} v_l & , X=0 \\ c(lh+mh)-K+K\lambda mh-y(z)mh+v_{l+m}, & X=1 \end{cases}$$

Voor de verzameling van interventietoestanden $A_{z'}$ geldt

$$(21)\qquad A_z \subseteq A_{z'} \subseteq \mathcal{S}_{23} \cup \{0\}.$$

Omdat volgens (2) voor $S \in A_{z'}$ slechts één interventie mogelijk is, ligt de strategie z' vast door de bepaling van $A_{z'}$. Uit (20) en (21) volgt dat een toestand $(lh,mh) \in \mathcal{S}_{23}\backslash A_z$ in $A_{z'}$ wordt opgenomen, als

$$(22)\qquad v_l \geq c(lh+mh) - K + K\lambda mh - y(z)mh + v_{l+m}.$$

Zodra voor (l_0h,m_0h), $m_0 > m_{l_0}(z)$, niet voldaan wordt aan (22), stoppen we de uitbreiding voor $l = l_0$. We stellen $m_{l_0}([z']z) = m_0-1$ en $g(l_0h;[z']z) = (m_0-1)h \geq g(l_0h;z)$.

b) Afsnijden

We zoeken de kleinste verzameling A, $A_0 \subseteq A \subseteq A_{z'}$, waarvoor

$$(23)\qquad v(S;(A)[z']z) \leq v(S;[z']z) \qquad \text{voor alle } S \in A_{z'}$$

(M.C. syllabus 1.7c, stelling 12.8 en (12.46)).
Stel we beschikken over een dergelijke verzameling A, die bovendien de gewenste vorm heeft, dwz. A legt ondubbelzinnig een monotoon niet-stijgende grensfunctie $g(S_2;A)$ vast. Op het rooster houdt dat in, dat

$(lh,m_0h) \in A$ impliceert $(lh,mh) \in A$ voor alle m, $0 \leq m \leq m_0$, en dat $(lh,m_0h) \notin A$ impliceert $(lh,mh) \notin A$ voor alle $m \geq m_0$.

Voor de relatieve waarde $v(S_1;(A)[z']z)$ kunnen we dan analoog aan (7) afleiden:

$$(25)\quad v(S_1+\Delta T;(A)[z']z) = \mathcal{E}\, v(\underline{a}_{S_1+\Delta T};[z']z) =$$

$$= \{1-\lambda\Delta T \int_0^{g(S_1;A)} f(S_3)dS_3\}\, v(S_1;(A)[z']z) +$$

$$+ \lambda\Delta T \int_0^{g(S_1;A)} v((S_2,S_3);(1)z)f(S_3)dS_3 + O(\Delta T^2),$$

waarbij $\underline{a}_S$ de eerst aangenomen toestand in A is onder het natuurlijk proces, bij begintoestand S. We voeren de afkortingen in:

$$(26)\quad \begin{cases} v_l(A) = v(lh;(A)[z']z) \\ g_l(A) = g(lh;A) \\ m_l(A) = g_l(A)/h \qquad , \qquad l = 0,1,\dots . \end{cases}$$

Voor $S_1 = lh$ en $\Delta T \to 0$ vinden we na enig rekenwerk uit (25), (26), (21), (20) en (14):

$$(27)\quad v'(lh;(A)[z']z) = -v_l(A)\lambda \int_0^{g_l(A)} f(S_3)dS_3 + \lambda\psi_l(A) + \lambda \sum_{k=1}^{m_l(A)} p_{lk}v_k$$

$$\text{met}\quad \psi_l(A) \overset{\text{def}}{=} \int_0^{g_l(A)} \{k((lh,S_3);1)-y(z)t((lh,S_3);1)\}\, f(S_3)dS_3$$

$$p_{lk} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \tfrac{1}{2}hf(lh+kh) & , k = 1,\ k = m_l(A) \\ hf(lh+kh) & , \text{anders.} \end{cases}$$

Uit (27) volgt een recursieve relatie voor $v_l(A)$ door een aan (17) analoge formule voor $v_l(A)-v_{l-1}(A)$ te gebruiken:

(28) $v_l(A) =$

$$= \frac{v_{l-1}(A)\{1-\frac{1}{2}h\lambda\int_0^{g_{l-1}(A)} f(S_3)dS_3\} + \frac{1}{2}h\lambda\{\psi_l(A)+\sum\limits_{k=l-1}^{m_{l-1}(A)} p_{l-1,k}v_k + \sum\limits_{k=1}^{m_l(A)} p_{lk}v_k\}}{1+\frac{1}{2}h\lambda\int_0^{g_l(A)} f(S_3)dS_3},$$

$$l = 1,2,\ldots .$$

Met deze relatie kunnen we A op het rooster als volgt opbouwen. We starten met $A = A_0 = \{0\}$. Het kriterium of $S \in A_{z'}$ al dan niet in A opgenomen moet worden, wordt gevonden uit:

$$v(S;(A)[z']z) = \begin{cases} v(S;(1)z) & , \quad S \in A, \\ \mathcal{E}v(\underline{a}_S;[z']z) & , \quad S \notin A. \end{cases}$$

Stel A is uitgebreid met de punten (0,0),(0,h),...,(0,mh-h). Als

$$v((0,mh;(1)z) < \mathcal{E}\, v(\underline{a}_{(0,mh)};[z']z) =$$

$$= v(0;(1)z) = v(0;z) =$$

$$= v_0 = v_0(A),$$

wordt A uitgebreid met (0,mh).
In het algemeen gaan we voor (lh,mh) als volgt te werk. Stel voor $i = 0,1,\ldots,l-1$ is $g_i(A)$ bepaald en voor $i = l$ zijn (lh,0),...,(lh,mh-h) aan A toegevoegd. We berekenen voor $(lh,mh) \in A_{z'}$:

1) $v(lh,mh);(1)z)$ volgens (19) en (20);

2) $\mathcal{E}v(\underline{a}_{(lh,mh)};[z']z) = \mathcal{E}v(\underline{a}_{(lh,0)};[z']z) = v_l(A)$, waarbij $v_l(A)$ volgens (28) berekend wordt met $g_l(A) = mh-h$. Als $v((lh,mh);(1)z) < v_l(A)$ wordt (lh,mh) in A opgenomen.

c) <u>Uitbreiden en afsnijden</u>

De tests bij het uitbreiden en afsnijden kunnen eenvoudig gecombineerd worden. Voor l achtereenvolgens 0,1,2,... bepalen we de grens van de verbeteringsstrategie z_1 als volgt:

Stel $(lh,0),(lh,h),\dots,(lh,mh-h)$ zijn in A opgenomen. We berekenen $v_l(A)$ uit (28) en $v((lh,mh);(1)z)$ uit (19) en (20).
Als:

$$m > m_l(z) \quad \text{én} \quad v_l < v((lh,mh);(1)z)$$

(dwz.: niet uitbreiden).

of

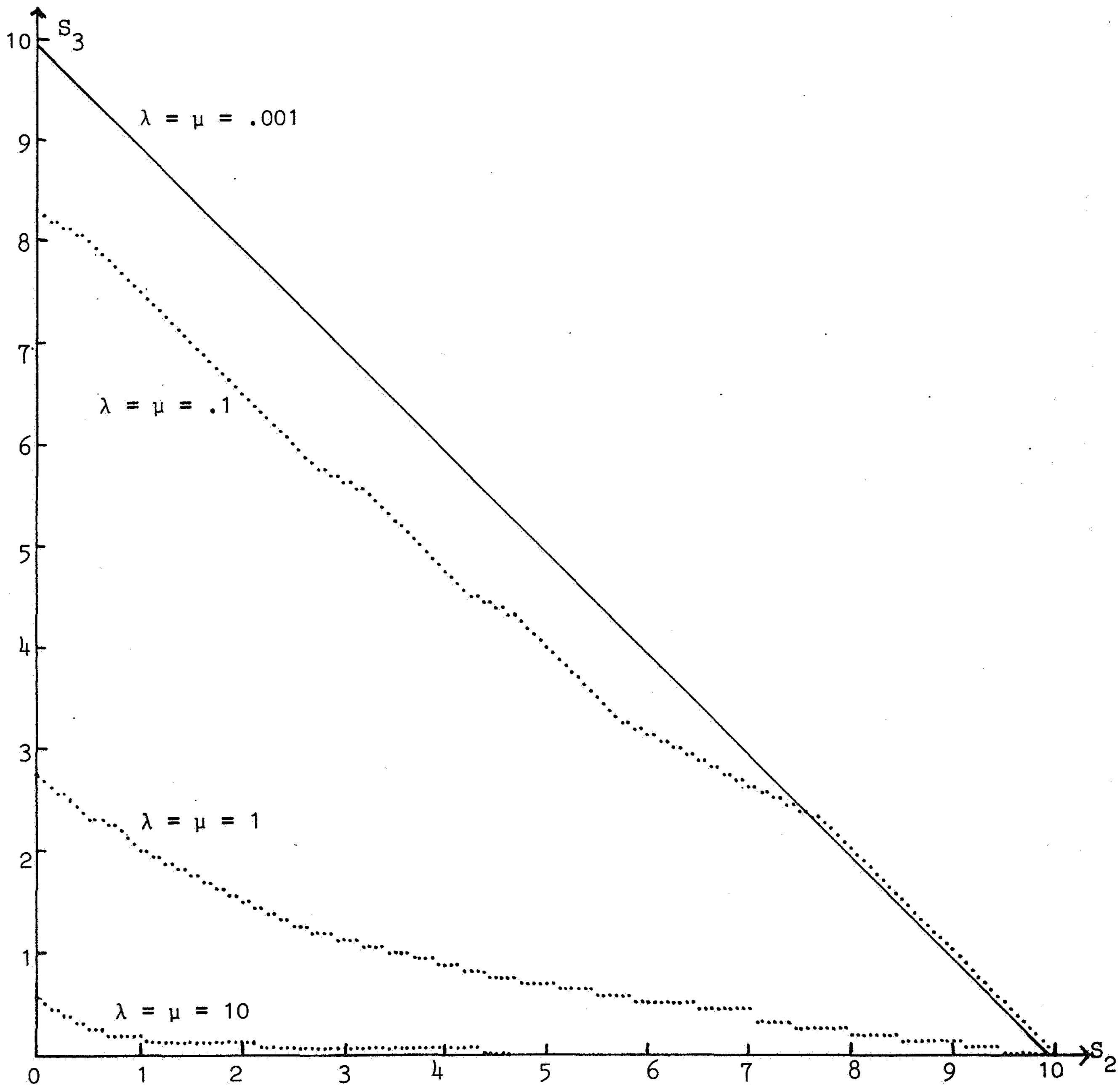
$$v_l(A) \leq v((lh,mh);(1)z)$$

(dwz.: afsnijden)

wordt (lh,mh) niet in A opgenomen. De nieuwe grens wordt $g(lh;z_1) =$ $= g_l(A) = mh-h$. In het andere geval wordt (lh,mh) aan A toegevoegd. Zodra $g(lh;z_1) = 0$ optreedt, wordt gestopt: $S^*_{z_1} = lh$.

6. Getallenvoorbeeld

In fig. 1 wordt de optimale strategie gegeven voor $c = 1$, $K = 10$, $f(S_3) = \mu e^{-\mu S_3}$ en een aantal verschillende waarden van λ en μ, bij gebruik van 160 roosterpunten.



Figuur 1