BA

stichting
mathematisch
centrum

MC

BA

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BN 7/71 SEPTEMBER

P.J. WEEDA

EEN BESLISSINGSPROBLEEM UIT HET TAXIBEDRIJF

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Een beslissingsprobleem uit het taxibedrijf.

1. Het algemene model.

Een taxichauffeur heeft in zijn district een aantal (N) steden. In iedere stad i, i = 1,..., N heeft hij een aantal keuze mogelijkheden om passagiers te vinden, waaronder bijvoorbeeld: wachten bij een standplaats, rondrijden, of stoppen en wachten op een oproep per mobilofoon. Op elk tijdstip gedurende het etmaal kan hij binnen de stad waarin hij zich bevindt van keuzemogelijkheid veranderen. In deze opzet is verondersteld dat aflossing wel plaatsvindt maar niet het beslissingsproces onderbreekt. Het aantal keuzemogelijkheden in stad i bedraagt M(i).

De aanmeldingen van passagiers gedurende het etmaal in stad i en bij keuzemogelijkheid j worden voortgebracht door een Poisson-proces met tijdsafhankelijke parameter $\lambda_{ij}(u) > 0$ voor i = 1,..., N; j = 1,..., M(i) en $0 \leq u < 24$. Iedere aanmelding wordt geaccepteerd. Indien een aanmelding plaatsvindt in stad i bij keuzemogelijkheid j en op tijdstip u dan bedraagt de kans dat de stad van bestemming k is, $P_{ijk}(u) > 0$. De ritduur van deze passagier met bestemming k is een stochastische variabele met een continue verdelingsfunctie $F_{ijk}(r;u)$ waarvan de grenzen zowel als de parameters van i,j,k en u mogen afhangen.

Het tarief voor een rit van stad i naar stad k bestaat uit een vast bedrag $a_{ijk}(u)$ en een bedrag $e_{ijk}(u)$ per tijdseenheid indien de aanmelding op tijdstip u plaatsvindt, alsdus rekening houdend met meer dan een tarief gedurende het etmaal. De wachtkosten per tijdseenheid in stad i en onder keuzemogelijkheid j bedragen c_{ij}. Indien er in stad i van keuzemogelijkheid wordt veranderd bijvoorbeeld van keuzemogelijkheid j naar l dan gaan hiermee de kosten s_{ijl} gepaard.*)

Hoe moet de taxichauffeur handelen opdat zijn gemiddelde netto-inkomsten per tijdseenheid in de long run maximaal zijn.

2. Wiskundige uitwerking met Markov-programmering.

2.1. De toestandsruimte.

De toestand van het systeem wordt vastgelegd door drie toestandsvariabelen i, j en u, waarin i de stad, j de keuzemogelijkheid en u

*) met $s_{ijj} = 0$ voor j = 1, ..., M(i), i = 1, ..., N.

het tijdstip op de dag.
De toestanden waarin de taxichauffeur zich, vlak na het afleveren van een passagier doch voor de keuze kan bevinden, worden aangegeven met $(i,0,u)$, $i = 1,\dots, N$ en $0 \leq u < 24$. De toestandsruimte is dan als volgt gedefinieerd

$$(1) \qquad \mathcal{S} = \{S = (i,j,u) \mid i = 1,\dots,N;\ j = 0,1,\dots, M(i);\ 0 \leq u < 24\}$$

2.2. Het natuurlijk proces.

Het natuurlijk proces vanuit toestand $S = (i,j,u)$ met $j = 0$ is zeer eenvoudig, het blijft voor altijd in deze toestand. Indien we vanuit een toestand $S = (i,j,u)$ met $j > 0$ het natuurlijk proces volgen dan worden achtereenvolgens de toestanden (i,j,v) doorlopen met $u < v < 24$ indien zich voor 24.00 uur geen passagier aanmeldt. Om 24.00 uur vindt de overgang naar toestand $(i,j,0)$ plaats. Vanuit deze toestand worden de toestanden (i,j,v) doorlopen met $0 \leq v < 24$ indien zich geen passagier aanmeldt gedurende die dag, enz. Indien zich een passagier aanmeldt in toestand (i,j,v) met bestemming stad k en bedraagt de ritduur $\underline{r}_k(i,j,v)$ dan ondergaat het systeem een transformatie naar toestand $(k,o,v + \underline{r}_k(i,j,o))$. Vervolgens blijft het systeem voor altijd in die toestand.

We zullen nu in het kort de voornaamste eigenschappen van het tijdsafhankelijke Poisson-proces behandelen. Dit proces gebaseerd op de volgende aannamen omtrent de aankomstintensiteit $\lambda_{ij}(v)$ in een infinitesimaal interval $(v,v+h]$:

a De kans dat geen aanmelding plaatsvindt in $(v, v+h]$ bedraagt $1 - \lambda_{ij}(v)h + o(h)$.

b De kans dat precies een aanmelding plaatsvindt bedraagt $\lambda_{ij}(v)h + o(h)$.

c De kans dat meer dan één aanmelding plaatsvindt bedraagt $o(h)$.

Laat $P_{ij}(w;u)$ de kans voorstellen dat geen aankomst plaatsvindt in het interval $(u,w]$. Beschouw het interval $(u, w+h]$. Voor $P_{ij}(w+h;u)$ volgt dan uit veronderstelling a dat

$$(2) \qquad P_{ij}(w+h;u) = P_{ij}(w;u)(1 - \lambda_{ij}(w)h + o(h)).$$

Dit geeft na enige herleiding

$$(3) \qquad \frac{P_{ij}(w+h;u) - P_{ij}(w;u)}{h} = - \lambda_{ij}(w)\, P_{ij}(w;u) + \frac{o(h)}{h} \,.$$

Uit de definitie van o(h) volgt $\lim\limits_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$, zodat de limietovergang in (3) levert

$$(4) \qquad \frac{\partial P_{ij}(w;u)}{\partial w} = - \lambda_{ij}(w)\, P_{ij}(w;u)$$

Deze differentiaalvergelijking heeft de algemene oplossing

$$(5) \qquad P_{ij}(w;u) = C(u)\, e^{-L_{ij}(w)}$$

waarin $L_{ij}(w) = \int \lambda_{ij}(w)dw$. We definiëren

$$(6) \qquad P_{ij}(u;u) = 1$$

Uit (5) en (6) volgt dan

$$(7) \qquad C(u) = e^{L_{ij}(u)} \,.$$

Voor de kans $P_{ij}(w;u)$ volgt uit (5) en (8)

$$(8) \qquad P_{ij}(w;u) = e^{-L_{ij}(w) + L_{ij}(u)} = \frac{P_{ij}(w;o)}{P_{ij}(u;o)} \,.$$

Behalve de funktie $P_{ij}(w;u)$ voeren we nog de funktie $h_{ijk}(w;v)$ in. Deze funktie is de samengestelde kansdichtheid van de stochastische variabelen $\underline{k}$ en $\underline{w}$ welke de toestand $(\underline{k},o,\underline{w})$ bepalen die het systeem aanneemt nadat een aanmelding plaatsvindt in toestand (i,j,v). Indien de dichtheidsfunktie van de ritduur bij gegeven i,j,k en v niet-negatief is op het interval $(m_{ijk}(v),\, n_{ijk}(v)) < 24$ en identiek nul daarbuiten dan definiëren we $h_{ijk}(w;v)$ door

$$(9)\qquad h_{ijk}(w;v) = \begin{cases} P_{ijk}(v)\ f_{ijk}(w+24\delta-v;v) & \text{voor } m_{ijk}(v) < w+24\delta-v < n_{ijk}(v) \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

waarin

$$(10)\qquad \delta = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \leq w + 24 - v < 24 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Indien de dichtheidsfunktie van de ritduur niet-negatief is op het interval $(0,\infty)$ en identiek nul daarbuiten dan behoudt (9) zijn geldigheid indien $m_{ijk}(v) \stackrel{def}{=} 0$, $n_{ijk}(v) \stackrel{def}{=} 24$ en we voor $f_{ijk}(r;v)$ substitueren $\sum_{n=0}^{\infty} f_{ijk}(r+24n;v)$.

2.3. De toegelaten beslissingen

De beslissingen in dit probleem houden deterministische transformaties in. Zonder bezwaar kunnen we de beslissing X weergeven door de toestand waarin het systeem zich na deze transformatie bevindt. Uit de probleemstelling volgt gemakkelijk dat

$$(11)\qquad \mathcal{X}(S) = \mathcal{X}(i,j,u) = \{X = (i',j',u') \mid i' = i;\ j' = 1,\ldots, M(i);\ u' = u\}$$

voor alle $(i,j,u) \in \mathcal{S}$.

2.4. De verzameling A_0.

De verzameling A_0 bestaat volgens zijn definitie (zie [1], blz. 64) uit de toestanden waarin iedere strategie een beslissing voorschrijft. In dit probleem zijn dit de toestanden (i,j,u) met $j = 0$, dus

$$(12)\qquad A_0 = \{S = (i,j,u) \mid i = 1,\ldots, N;\ j = 0;\ 0 \leq u < 24\}$$

2.5. De funkties k(S;X) en t(S;X)**)

In dit probleem wordt geen vereenvoudiging bereikt indien we $A_{0,1}$ en $A_{0,2}$ *) verschillend van elkaar en van A_0 definiëren, dus stellen wij

(13) $$A_{0,1} = A_{0,2} = A_0.$$

De wandelingen $\underline{w}_{i0}$, i = 1,2 en $\underline{w}_{i1}$, i = 1,2 zijn dan paarsgewijs identiek. We laten daarom de index i weg en geven de twee overblijvende stochastische wandelingen aan met $\underline{w}_0$ en $\underline{w}_1$. De wandeling $\underline{w}_0$ vanuit een toestand S = (i,j,u) (zie ook [1], blz. 71) volgt het natuurlijk proces en eindigt in de eerstvolgende toestand aangenomen in de verzameling A_0. Hieruit volgt direkt dat voor $S \in A_0$ geldt

(14) $$t_0(S) = k_0(S) = 0.$$

Voor S = (i,j,u) met j > 0 is de verwachte duur $t_0(S)$ van $\underline{w}_0$ gelijk aan de som van de verwachte duur van het tijdsinterval lopend van het tijdstip u tot de aanmelding van de eerstvolgende passagier en de verwachte ritduur van deze passagier. Het eerste tijdsinterval geven we aan met $\underline{\tau}(i,j,u)$ en leiden eerst een uitdrukking af voor $E\underline{\tau}(i,j,o)$. Laat de stochastische variabele $\underline{n}$ de dag aangeven waarop, vanuit toestand (i,j,o) gezien, de eerstvolgende aanmelding plaatsvindt. $\underline{n}$ kan de waarden 0,1,2,... aannemen, waarbij $\underline{n}$ = 0 indien de aanmelding dezelfde dag plaatsvindt. $\underline{n}$ = 1 op de volgende dag, enz. Uit de definitie van voorwaardelijke verwachting volgt

(15) $$E\,\underline{\tau}(i,j,o) = E\{\underline{\tau}(i,j,o)\,|\,\underline{n} = 0\}\,P\{\underline{n} = 0\}$$
$$+ E\{\underline{\tau}(i,j,o)\,|\,n > 0\}\,P\{\underline{n} > 0\}$$

Uit de definities van $\underline{n}$ en van $P_{ij}(w;u)$ volgt

(16) $$P\{\underline{n} > 0\} = 1 - P\{\underline{n} = 0\} = P_{ij}(24;0)$$

terwijl uit de eigenschappen van het Poisson-proces volgt

*) zie [1] blz.71.

**) Tijdens het gereedkomen van dit rapport bleek mij dat een iets gewijzigde formulering tot eenvoudiger uitdrukkingen voor k(S;X) en t(S;X) aanleiding gaf. (zie sectie 3.5)

(17) $$E\{\underline{\tau}(i,j,o)|\underline{n} > 0\} = E\,\underline{\tau}(i,j,o) + 24$$

en uit de definitie van voorwaardelijke verwachting

(18) $$E\{\underline{\tau}(i,j,o)|\underline{n} = 0\} = \frac{\int_0^{24} \lambda_{ij}(v)\, P_{ij}(v;0)v\, dv}{1 - P_{ij}(24;0)}$$

De relaties (16), (17) en (18) substitueren we in (15) en lossen E _(i,j,o) hieruit op, met als resultaat

(19) $$E\,\underline{\tau}(i,j,0) = \frac{\int_0^{24} \lambda_{ij}(v)\, P_{ij}(v;0)v\, dv + 24\, P_{ij}(24;0)}{1 - P_{ij}(24;0)}$$

Voor $E\,\underline{\tau}(i,j,u)$ volgt op dezelfde wijze als bij $E\,\underline{\tau}(i,j,o)$ de betrekking

(20) $$E\,\underline{\tau}(i,j,u) = P\{\underline{n} = 0\}\, E\{\underline{\tau}(i,j,u)|\underline{n} = 0\}$$

$$+ P\{\underline{n} > 0\}\, E\{\underline{\tau}(i,j,u)|\underline{n} > 0\}$$

waarin nu echter $P\{\underline{n} > 0\}$gegeven wordt door

(21) $$P\{\underline{n} > 0\} = 1 - P\{\underline{n} = 0\} = P_{ij}(24;u)$$

en $E\{\underline{\tau}(i,j,u)|\underline{n} > 0\}$ door

(22) $$E\{\underline{\tau}(i,j,o)|\underline{n} > 0\} = E\,\underline{\tau}(i,j,o) + 24 - u.$$

Voor $E\{\underline{\tau}(i,j,u)|\underline{n} = 0\}$ volgt gemakkelijk

(23) $$E\{\underline{\tau}(i,j,u)|\underline{n} = 0\} = \{1 - P_{ij}(24;u)\}^{-1}.$$

$$\cdot \int_u^{24} \lambda_{ij}(v)\, P_{ij}(v;u)(v-u)dv$$

zodat met (21), (22) en (23) betrekking (20) overgaat in

$$(24) \qquad E\,\underline{\tau}(i,j,u) = \int_u^{24} \lambda_{ij}(v)\, P_{ij}(v;u)(v-u)dv + P_{ij}(24;u)(24-u + E\,\underline{\tau}(i,j,o)).$$

We merken op dat het niet noodzakelijk is $E\,\underline{\tau}(i,j,u)$ in $E\,\underline{\tau}(i,j,o)$ uit te drukken. Vanuit rekentechnisch standpunt wordt echter aan (24) de voorkeur gegeven, (zie sectie 3.1).

Vervolgens bepalen we de verwachte ritduur van de eerstvolgende aanmelding na toestand (i,j,u). Deze ritduur is de stochastische variabele $\underline{r}^*(i,j,u)$ en moet vanzelfsprekend onderscheiden worden van $\underline{r}(i,j,v)$ welke de ritduur voorstelt indien de passagier zich in toestand (i,j,v) aanmeldt. Op dezelfde wijze als voor $E\,\underline{\tau}(i,j,u)$ kunnen we een tweetal uitdrukkingen afleiden voor $E\,\underline{r}^*(i,j,u)$.

Voor $E\,\underline{r}^*(i,j,o)$ volgt

$$(25) \qquad E\,\underline{r}^*(i,j,o) = P\{\underline{n} = 0\}\, E\{\underline{r}^*(i,j,o)|\underline{n} = 0\} + P\{\underline{n} > 0\}\, E\{\underline{r}^*(i,j,o)|\underline{n} > 0\}.$$

Hierin worden de twee voorwaardelijke verwachtingen gegeven door

$$(26) \qquad E\{\underline{r}^*(i,j,o)|\underline{n} = 0\} = + \frac{\int_0^{24} \lambda_{ij}(v)\, P_{ij}(v;o)\, E\{\underline{r}(i,j,v)\}dv}{1 - P_{ij}(24;0)}$$

en

$$(27) \qquad E\{\underline{r}^*(i,j,o)|\underline{n} > 0\} = E\,\underline{r}^*(i,j,o).$$

Substitutie van (26) en (27) in (25) levert uiteindelijk

$$(28) \qquad E\,\underline{r}^*(i,j,o) = \frac{\int_0^{24} \lambda_{ij}(v)\, P_{ij}(v;o)\, E\{\underline{r}(i,j,v)\}dv}{1 - P_{ij}(24;0)}$$

Voor $E\,\underline{r}\,(i,j,u)$ volgt langs dezelfde weg

$$(29) \qquad E\,\underline{r}^*(i,j,u) = \int_u^{24} \lambda_{ij}(v)\, P_{ij}(v;u)\, E\{\underline{r}(i,j,v)\}dv$$

$$+ P_{ij}(24;u)\, E\,\underline{r}^*(i,j,o).$$

Resumerend vinden wij voor $t_0(i,j,u)$ met $j > 0$.

$$(30) \qquad t_0(i,j,u) = E\,\underline{\tau}(i,j,u) + E\,\underline{r}^*(i,j,u)$$

waarin beide verwachtingen volgen uit (19), (24), (28) en (29) en $E\,\underline{r}(i,j,v)$ uit

$$(31) \qquad E\,\underline{r}(i,j,v) = \sum_{k=1}^{N} P_{ijk}(v) \int_{m_{ijk}(v)}^{n_{ijk}(v)} r \cdot f_{ijk}(r;v)dr.$$

Teneinde de verwachte opbrengst $k_0(S)$ voor $S \in \bar{A}_0$ van de wandeling $\underline{w}_0$ te vinden definiëren we de verwachte opbrengst van een rit die begint in toestand (i,j,v) als $E\,\underline{q}(i,j,v)$.
Uit de gegevens van het probleem volgt

$$(32) \qquad E\,\underline{q}(i,j,v) =$$

$$\sum_{k=1}^{N} P_{ijk}(v)(a_{ijk}(v) + e_{ijk}(v) \int_{m_{ijk}(v)}^{n_{ijk}(v)} r\, f_{ijk}(r;v)dr)$$

De verwachte opbrengst van de rit van de eerstvolgende passagier die zich aanmeldt na toestand (i,j,u) geven we aan met $E\,\underline{q}^*(i,j,u)$.
Op dezelfde wijze als voor $E\,\underline{r}^*(i,j,u)$ en $E\,\underline{\tau}(i,j,u)$ kunnen expliciete uitdrukkingen voor $E\,\underline{q}^*(i,j,o)$ en $E\,\underline{q}^*(i,j,u)$ worden gevonden. Deze uitdrukkingen zijn respectievelijk

(33) $$E\,\underline{q}^*(i,j,o) = \frac{\int_0^{24} \lambda_{ij}(v)\, P_{ij}(v;o)\, E\{\underline{q}(i,j,v)\}dv}{1 - P_{ij}(24;o)}$$

en

(34) $$E\,\underline{q}^*(i,j,u) = \int_u^{24} \lambda_{ij}(v)\, P_{ij}(v;u)\, E\{\underline{q}(i,j,v)\}dv + $$
$$+ P_{ij}(24;u)\, E\,\underline{q}^*(i,j,o).$$

De verwachte wachtkosten bedragen vanuit toestand (i,j,u): $c_{ij}\ E\ \underline{\tau}(i,j,u)$ zodat we voor $k_0(i,j,u)$ met $j > 0$ vinden

(35) $$k_0(i,j,u) = -\, c_{ij}\, E\,\underline{\tau}(i,j,u) + E\,\underline{q}^*(i,j,u).$$

Met (19), (24), (32), (33), (34) en (35) kan de funktie $k_0(S)$ voor $S \in \bar{A}_0$ worden berekend.

Gedurende de wandeling $\underline{w}_1$ vanuit toestand S = (i,j,u) wordt in toestand S de beslissing X = (i,l,u) genomen. Dit betekent een transformatie naar de toestand (i,l,u) welke geen tijd in beslag neemt maar wel de kosten s_{ijl} met zich meebrengt. Voor de funkties $k_1(S;X)$ en $t_1(S;X)$ volgt nu gemakkelijk

(36) $$k_1((i,j,u);(i,l,u)) = -\, s_{ijl} + k_0(i,l,u)$$

en

(37) $$t_1((i,j,u);(i,l,u)) = t_0(i,l,u).$$

Voor de funkties k(S;X) en t(S;X) voor $S = (i,o,u) \in A_0$ en beslissing X = (i,l,u) volgt nu uit (36), (37) en (14)

(38) $$k((i,o,u);(i,l,u)) = -\, s_{ijl} + k_0(i,l,u)$$

en

(39) $$t((i,o,u);(i,l,u)) = t_0(i,l,u).$$

Voor $S = (i,j,u) \notin A_0'$ en beslissing $X = (i,l,u)$ volgt

(40) $$k((i,j,u);(i,l,u)) = - s_{ijl} + k_0(i,l,u) - k_0(i,j,u)$$

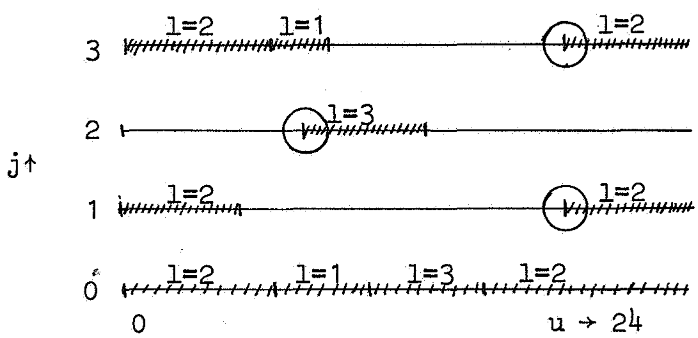
en

(41) $$t((i,j,u);(i,l,u)) = t_0(i,l,u) - t_0(i,j,u).$$

Voor de berekening van de funkties $k(S;X)$ en $t(S;X)$ wordt verwezen naar sectie 3.1.

2.6. De funktionaalvergelijking in v(S;z).

Indien we veronderstellen dat $\lambda_{ij}(v) > 0$ en $P_{ijk}(v) > 0$ voor alle i,j,k en v dan bevat het beslissingsproces in A_z geen disjuncte fuiken. We zullen van nu af aannemen dat aan deze positiviteitsveronderstelling is voldaan. Het gedeelte van de iteratie dat betrekking heeft op de funktie $y(S;z)$ kan dan vervallen.
Bovendien hangt $y(S;z)$ dan niet meer van de toestand S af en verkorten wij de notatie door $y(z)$ te schrijven. Teneinde de precieze vorm van de funktionaalvergelijking in $v(S;z)$ te kunnen opschrijven is het noodzakelijk de structuur van de in de iteratie optredende strategieën nader te kennen. We zullen hier de algemene structuur geven en in sectie 2.9 nader ingaan op de voorwaarden die vervuld moeten zijn opdat deze structuur wordt verwezenlijkt. In figuur 1 is een strategie welke representatief is getekend voor een probleem met 1 stad en 3 keuzemogelijkheden. De verzameling A_z is hierin gearceerd aangegeven en de interventies $X = (i,l,u)$ in ieder van de deelintervallen van A_z door de bij ieder deelinterval behorende waarde van l.



Figuur 1 : Een representatieve strategie.

We merken op dat per deelinterval één keuzemogelijkheid l wordt voorgeschreven voor alle toestanden in dat deelinterval. Aangezien in dit probleem de beslissingen door deterministische transformaties worden beschreven volgt uit (12.1) in [1] dat voor een toestand S, waarin door strategie z de interventie z(S) wordt voorgeschreven, geldt

$$(42) \qquad v(S;z) = k(S;z(S)) - y(z)\, t(S;z(S)) + v(z(S);z)$$

Voor $S = (i,o,u) \in A_0$ en $z(S) = (i,l,u)$ volgt dan uit (38), (39) en (42) dat

$$(43) \qquad v((i,o,u);z) = -s_{iol} + k_0(i,l,u) - y(z)\, t_0(i,j,u) + v((i,l,u);z).$$

Voor $S = (i,j,u) \in \bar{A}_0 \cap A_z$ verkrijgen we volgens (40), (41) en (42)

$$(44) \qquad v((i,j,u);z) = -s_{ijl} + k_0(i,l,u) - k_0(i,j,u) - y(z)(t_0(i,l,u) - t_0(i,j,u)) + v((i,l,u);z).$$

Vervolgens beschouwen we de gedaante van de funktionaalvergelijking voor een niet-interventie toestand $S = (i,j,u)$.
Bevindt zich op het lijnstuk behorende bij een vaste i en j minstens een interval met interventietoestanden, dan is bij iedere niet-interventietoestand (i,j,u) een interventietoestand (i,j,b(u)) aan te wijzen, die het systeem aanneemt indien gedurende het beslissingsproces vanuit (i,j,u) geen aanmelding plaatsvindt. Uit de structuur van de strtegie volgt dat de toestand (i,j,b(u)) een extreem punt is van de verzameling A_z. Ieder aaneengesloten deelinterval behorende tot de verzameling $A_z \cap \bar{A}_0$ bevat afgezien van de toestanden met $u = 0$ precies een zo een toestand (zie de omcirkelde toestanden in figuur 1). Deze toestanden zijn positieve terugkeertoestanden en definiëren een eindige Markov-keten welke is ingebed in het beslissingsproces. We merken verder op dat de overige interventietoestanden behorende tot de

verzameling $A_z \cap \bar{A}_0$ doorgangstoestanden zijn met betrekking tot het beslissingsproces van de beschouwde strategie z. Voor een niet-interventietoestand (i,j,u) is de eerstvolgende interventietoestand $\underline{I}$, welke in het beslissingsproces wordt aangenomen, de toestand (i,j,b(u)) of een toestand $(\underline{k},o,\underline{w}) \in A_0$. De kansverdeling van $\underline{I}$, is gemengd; toestand (i,j,b(u)) wordt indien $u < b(u) < 24$ met de positieve kans $P_{ij}(b(u);u)$ aangenomen terwijl het continue deel van de dichtheidsfunktie dat betrekking heeft op $(\underline{k},o,\underline{w}) \in A_0$ gegeven wordt door

$$(45) \qquad \int_u^{b(u)} \lambda_{ij}(x)\; P_{ij}(x;u)\; h_{ijk}(w;x)dx \qquad \text{voor } 0 \leq w < 24 \text{ en } k = 1,\dots,N$$

Indien $0 \leq b(u) < u$ dan moet $P_{ij}(b(u);u)$ vervangen worden door $P_{ij}(24;u)P_{ij}(b(u);o)$ en in (45) $P_{ij}(x;u)$ door $P_{ij}(24;u)\; P_{ij}(x;o)$, terwijl de integratie in (45) dan moet worden uitgevoerd over de intervallen (u,24) en [0,b(u)).

Voor $v((i,j,u);z)$, $(i,j,u) \notin A_z$ volgt nu indien $u < b(u) < 24$

$$(46) \qquad v((i,j,u);z = v((i,j,b(u));z)\; P_{ij}(b(u);u) + \\ + \int_u^{b(u)} \lambda_{ij}(x)\; P_{ij}(x;u)[\sum_{k=1}^{N} \int_0^{24} h_{ijk}(w;x)\; v((k,o,w);z)\; dw]dx.$$

en indien $0 \leq b(u) < u$ door

$$(47) \qquad v((i,j,u);z) = v((i,j,b(u));z)\; P_{ij}(24;u)\; P_{ij}(b(u);o) + \\ + \int_u^{24} \lambda_{ij}(x)\; P_{ij}(x;u)[\sum_{k=1}^{N} \quad h_{ijk}(w;x)v((k,o,w);z)\; dw]dx + \\ + \int_0^{b(u)} P_{ij}(24;u)\lambda_{ij}(x)\; P_{ij}(x;o)[\sum_{k=1}^{N} \int_0^{24} h_{ijk}(w;x)v((k,o,w);z)\; dw]dx.$$

Indien zich op een lijnstuk met vaste i en j geen interval van interventietoestanden bevindt, dan geldt met zekerheid dat $\underline{I} \in A_0$. De uitdrukking voor $v((i,j,u);z)$ welke in dat geval van toepassing is kunnen we het gemakkelijkste afleiden door in (47) $b(u) = u$ te stellen. We vinden dan

$$(48) \qquad v((i,j,u);z) = v((i,j,u);z)\, P_{ij}(24;u)\, P_{ij}(u;o)$$

$$+ \int_u^{24} \lambda_{ij}(x)\, P_{ij}(x;u)[\sum_{k=1}^{N} \int_0^{24} h_{ijk}(w;x)v((k,o,w);z)\, dw]dx$$

$$+ \int_0^{u} P_{ij}(24;u)\lambda_{ij}(x)\, P_{ij}(x;o)[\sum_{k=1}^{N} \int_0^{24} h_{ijk}(w;x)v((k,o,w);z)\, dw]dx.$$

Uit (48) kan $v((i,j,u);z)$ worden opgelost. Indien we nog gebruikmaken van (8) dan volgt na enige herleiding

$$(49) \qquad v((i,j,u);z) = \frac{1}{(1 - P_{ij}(24;o))\, P_{ij}(u,o)}$$

$$[\int_u^{24} \lambda_{ij}(x)\, P_{ij}(x;o) \sum_{k=1}^{N} \int_0^{24} h_{ijk}(w;x)v((k,o,w);z)\, dw\, dx +$$

$$+ P_{ij}(24;o) \int_0^{u} \lambda_{ij}(x)\, P_{ij}(x;o) \sum_{k=1}^{N} \int_0^{24} h_{ijk}(w;x)v((k,o,w);z)\, dw,dx].$$

De funktionaalvergelijking in $v(S;z)$ in dit probleem wordt dus gegeven door (43), (44) en (46), (47) of (49). Voor de berekening van $v(S;z)$ wordt verwezen naar sectie 3.2. Dit stelsel heeft een eenduidige oplossing (zie [1] stelling 12.1) indien we in een willekeurige toestand S_0 stellen

$$(50) \qquad v(S_0;z) = 0.$$

Veronderstel nu dat $v(S;z_n)$ in de n^e stap van de iteratie is verkregen, dan wordt strategie z_{n+1} verkregen door eerst de strategie z'_n en vervolgens de verzameling $A'_{z'_n}$ te bepalen (zie [1], blz. 114 e.v.). Ter afkorting van de notatie laten we de index n verder weg.

2.7. <u>Bepaling van de strategie z' bij gegeven z.</u>

Daar het beslissingsproces in A_z geen meerdere disjunkte fuiken bevat volgt door $S \in \mathcal{S}$

(51) $\mathcal{X}_1(S) = \mathcal{X}(S)$.

Vervolgens specificeren we de funktie $v(S;(X)z)$. Voor $S = (i,o,u) \in A_0$, $\underline{S}_X = X = (i,l,u)$ volgt uit de definitie van $v(S;(X)z)$, (zie [1], blz. 103), (38) en (39)

(52) $$v((i,o,u);(i,l,u)z) =$$

$$- s_{iol} + k_0(i,l,u) - y(z)\ t_0(i,l,u) + v((i,l,u);z)$$

voor $l = 1,\ldots, M(i)$.
Voor $S = (i,j,u) \notin A_0$ en $X = (i,l,u)$ volgt uit (40) en (41)

(53) $$v((i,j,u);(i,l,u)z) =$$

$$- s_{ijl} + k_0(i,l,u) - k_0(i,j,u) +$$

$$- y(z)\{t_0(i,l,u) - t_0(i,j,u)\} + v((i,l,u);z).$$

De beslissing $z'(S)$ voor $S = (i,j,u)$ wordt verkregen door het volgende maximaliseringsprobleem op te lossen

(54) $$\max_{l=1,\ldots,\ M(i)} [v((i,j,u);(i,l,u)z)]$$

en de keuzeregel gegeven in [1] op blz. 104 te hanteren. Daar de funktie $v(S;(X)z)$ volgens zijn definitie voor $X = z(S)$ en X = nulbeslissing dezelfde waarde aanneemt kan in (54) geen onderscheid gemaakt worden tussen deze twee beslissingen indien $S \in A_z$. In de verzameling A_0 zijn per definitie geen nulbeslissingen toegelaten zodat we in (45) voor $S \in A_z \cap \bar{A}_0$ $l = j$ kunnen uitsluiten.

2.8. Bepaling van de verzameling $A'_{z'}$.

De verzameling $A'_{z'}$ *) is de kleinste gesloten verzameling A, die voldoet aan $A_0 \subseteq A \subseteq A_{z'}$ en waarbij voor iedere $S \in A_{z'}$ geldt

*) zie ook [1] blz. 105 e.v.

(55) $$v(S;(A)[z']z) \geq v(S;[z']z).$$

Zoals bekend is de toestandsruimte opgebouwd uit een eindig aantal lijnstukken ieder corresponderend met een getallenpaar (i,j) waarbij $i \in \{1,\ldots, N\}$ en $j \in \{0,\ldots, M(i)\}$. Indien er geen deelverzameling van $A_{z'}$ op zo een lijnstuk is gelegen, dan geldt dit ook voor $A'_{z'}$ en behoeft de afsnijprocedure op dit lijnstuk niet te worden toegepast. We beschouwen vervolgens een lijnstuk met $j > 0$ waarop zich wel een deelverzameling van $A_{z'}$ bevindt. We beschouwen dan een deelklasse van verzamelingen A waarvan zich een deelverzameling op het betrokken lijnstuk bevindt. De eerstvolgende toestand welke in een aldus omschreven verzameling A wordt aangenomen in het natuurlijk proces vanuit toestand (i,j,u) geven we aan met $\underline{a}$. Indien $(i,j,u) \in A$ dan definieren we $\underline{a} = (i,j,u)$. Bij iedere toestand (i,j,u) wordt nu eenduidig een toestand $(i,j,a(u)) \in A$ gedefinieerd. Indien $(i,j,u) \in A$ dan is dit de toestand (i,j,u) zelf dus $a(u) = u$. Indien $(i,j,u) \notin A$ dan is de toestand (i,j,a(u)) de toestand in A welke zeker wordt aangenomen indien geen aanmelding plaatsvindt. (Vergelijk de definitie van (i,j,b(u)) in sectie 2.6.). We geven nu de uitdrukking voor $v((i,j,u);(A)[z']z)$ voor $(i,j,u) \notin A$ en $u < a(u) < 24$. Deze luidt

(56)
$$\begin{aligned} v((i,j,u);(A)[z']z) = \\ &+ P_{ij}(a(u);u)\ v((i,j,a(u));[z']z) + \\ &+ \int_u^{a(u)} \lambda_{ij}(x)\ P_{ij}(x;u)[\sum_{k=1}^{N}\int_0^{24} h_{ijk}(w;x)\ v((k,o,w);[z']z)dw]dx. \end{aligned}$$

Voor $0 \leq a(u) < u$ volgt

(57)
$$\begin{aligned} v((i,j,u);(A)[z']z) = \\ &+ P_{ij}(24;u)\ P_{ij}(a(u);0)\ v((i,j,a(u));[z']z) + \\ &+ \int_u^{24} \lambda_{ij}(x)\ P_{ij}(x;u)[\sum_{k=1}^{N}\int_0^{24} h_{ijk}(w;x)\ v((k,o,w);[z']z)dw]dx + \\ &+ P_{ij}(24;u) \int_0^{a(u)} \lambda_{ij}(x)\ P_{ij}(x;o)[\sum_{k=1}^{N}\int_0^{24} h_{ijk}(w;x)\ v((k,o,w);[z']z)dw]dx. \end{aligned}$$

We zullen nu laten zien dat de afsnijprocedure in dit probleem een vereenvoudigde vorm aanneemt. Ter afkorting definiëren we de funktie $g_{ij}(x)$ als volgt

$$(58)\qquad g_{ij}(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{N} \int_0^{24} h_{ijk}(w;x)\ v((k,o,w);[z']z)dw$$

Uitdrukking (56) is dan volgens (8) en (58) te schrijven als

$$(59)\qquad v((i,j,u);(A)[z']z) =$$

$$+ \frac{P_{ij}(a(u);o)}{P_{ij}(u;o)}\ v((i,j,a(u));[z']z) +$$

$$+ \int_0^{a(u)} \lambda_{ij}(x) \frac{P_{ij}(x;o)}{P_{ij}(u;o)}\ g_{ij}(x)dx - \int_0^{u} \lambda_{ij}(x) \frac{P_{ij}(x;o)}{P_{ij}(u;o)}\ g_{ij}(x)dx.$$

Substitutie van (59) in (55) geeft na enige herleiding

$$(60)\qquad P_{ij}(a(u);o)\ v((i,j,a(u));[z']z) + \int_0^{a(u)} \lambda_{ij}(x)\ P_{ij}(x;o)\ g_{ij}(x)dx$$

$$\geq P_{ij}(u;o)\ v((i,j,u);[z']z) + \int_0^{u} \lambda_{ij}(x)\ P_{ij}(x;o)\ g_{ij}(x)dx.$$

Definiëren we de funktie $v^*((i,j,u);[z']z)$ voor $o \leq u \leq 24$ als volgt

$$(61)\qquad v^*((i,j,u);[z']z) \overset{\text{def}}{=} P_{ij}(u;o)\ v((i,j,u);[z']z) +$$

$$+ \int_0^{u} \lambda_{ij}(x)\ P_{ij}(x;o)\ g_{ij}(x)dx$$

dan is (60) equivalent met

$$(62)\qquad v^*((i,j,a(u));[z']z) \geq v^*((i,j,u);[z']z)$$

Voor het geval dat $0 \leq a(u) < u$ volgt

(63) $v((i,j,u);(A)[z']z) =$

$$+ P_{ij}(24;u)\ P_{ij}(a(u);o)\ v((i,j,a(u));[z']z) +$$

$$+ \int_u^{24} \lambda_{ij}(x)\ P_{ij}(x;u)\ g_{ij}(x)dx + \int_0^{a(u)} \lambda_{ij}(x)\ P_{ij}(x;o)\ P_{ij}(24;u)\ g_{ij}(x)dx.$$

Na enige herleiding volgt uit (63) dat (55) voor $0 \leq a(u) < u$ equivalent is met

(64) $$P_{ij}(24;o)\ v^*((i,j,a(u));[z']z) +$$

$$+ \int_0^{24} \lambda_{ij}(x)\ P_{ij}(x;o)\ g_{ij}(x)dx \geq v^*((i,j,u);[z']z).$$

We merken op dat slechts de functie $v^*((i,j,u);[z']z)$ en de constanten

$P_{ij}(24,o)$ en $\int_0^{24} \lambda_{ij}(x)\ P_{ij}(x;o)\ g_{ij}(x)dx$ bekend moeten zijn om de afsnijprocedure te kunnen uitvoeren.

We definiëren $(i,j,a'(u))$ als de eerstvolgende toestand in $A'_{z'}$, aangenomen, indien vanuit toestand (i,j,u) geen aanmelding plaatsvindt. Voor $(i,j,u) \in A'_{z'}$, definiëren we $a'(u) = u$. Uit de definitie van $a'(u)$ volgt dat, indien de toestand $(i,j,a'(u))$ bekend is voor iedere toestand $(i,j,u) \notin A_0$, de verzameling $A'_{z'}$ volledig is vastgelegd. Uit de ongelijkheden (62) en (64) volgt nu verder dat $a'(u)$ de waarde van x is waarvoor

(65) $$\max[\max_{\substack{u \leq x \leq 24 \\ (i,j,x)\in A_{z'}}} [v^*((i,j,x);[z']z),\ \max_{\substack{0 \leq x \leq u \\ (i,j,x)\in A_{z'}}} [P_{ij}(24;o)\ v^*((i,j,x);[z']z) + \int_0^{24} \lambda_{ij}(x)\ P_{ij}(x;o)\ g_{ij}(x)dx]]$$

wordt bereikt, met dien verstande dat indien het maximum in (65) niet uniek is de waarde van x genomen wordt welke in absolute tijd gerekend het verst van u af ligt.

Tot nu toe hebben we nog niet de mogelijkheid bezien dat op een lijnstuk geen deelverzameling van $A'_{z'}$ aanwezig is. Uit de definitie van

A_z', en (65) volgt dat dit het geval is indien er een u is aan te wijzen, waarvoor het maximum in (65) bereikt wordt voor x = u in de tweede term van (65). Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde die hanteerbaarder is vanuit rekentechnisch standpunt dan de zojuist gestelde zal afgeleid worden in sectie 3.4.

2.9. De structuur van de bij de iteratie voorkomende strategieën.

Zoals in sectie 2.6 werd opgemerkt kunnen we ons gedurende de iteratie beperken tot strategieën met de in figuur 1 weergegeven structuur. Voor een interventietoestand $(i,j,u) \in A_z$ wordt de bijbehorende interventie $z(i,j,u)$ gegeven door (i,l,u). De verzameling A_z is dan opgebouwd uit disjuncte deelintervallen waarbij aan alle toestanden in zo een interval dezelfde l is toegevoegd. Deze structuur is af te leiden uit de eigenschappen van de funktie $v(S;(X)z_n)$. Indien deze funktie intervalsgewijs continu en oneindig differentieerbaar is, dan volgt uit (54) dat de strategie z_n' de hierboven beschreven struktuur heeft. Daar de afsnijprocedure deze structuur niet wezenlijk verandert, volgt dat de volgende strategie z_{n+1} ook deze structuur heeft. Indien deze structuur weer leidt tot een funktie $v(S;(X)z_{n+1})$ met dezelfde eigenschap en ook $v(S;(X)z_1)$ deze eigenschap heeft dan volgt dat we ons gedurende de iteratie tot strategieën van dit type kunnen beperken. Ook de optimale strategie heeft dan deze structuur.*)

Uit (11) volgt dat er slechts interventies toegelaten zijn die een rechtstreekse transformatie $(i,j,u) \rightarrow (i,l,u)$ inhouden en niet via een derde toestand (i,m,u) verlopen. Dit is niet vanzelfsprekend. Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde kan afgeleid worden door (53) uit te schrijven voor $(i,j,u) \rightarrow (i,l,u)$ en $(i,j,u) \rightarrow (i,m,u) \rightarrow (i,l,u)$. Deze voorwaarde is

$$(66) \qquad s_{ijl} \leq s_{ijm} + s_{iml}$$

Verder volgt uit (53) en (54) dat voor $S \notin A_0$

$$(67) \qquad \max_{l=1,\dots,M(i)} [v((i,j,u);(i,l,u)z)] =$$
$$\max_{l=1,\dots,M(i)} [- s_{ijl} \cdot k_0(i,l,u) - y(z)\, t_0(i,l,u) + v(i.l.u);z)]$$
$$- (k_0(i,j,u) - y(z)\, t_0(i,j,u)).$$

*) indien van de existentieproblematiek wordt afgezien.

en voor $S \in A_0$ uit (52) en (54)

$$(68) \qquad \max_{l=1,\dots,M(i)} [v((i,o,u);(i,l,u)z] = \max_{l=1,\dots,M(i)} [-s_{iol} + k_0(i,l,u) - y(z)\, t_0(i,l,u) + v((i,l,u);z)].$$

Uit (67) en (68) concluderen we nu dat indien $s_{iol} = s_{ijl}$ voor $j = 1,\dots, M(i)$ en vaste i dat het maximum in (54) voor $j = 0,\dots, M(i)$ voor dezelfde l wordt bereikt. We kunnen dan volstaan met (54) voor $j = 0$ te berekenen om strategie z' te vinden. De beslissingen z'(i,j,u) zijn dan onafhankelijk van j. Het gevolg is dat alle strategieën z'_n $n = 1,2,\dots$ deze structuur hebben.

3. Rekenprocedures

3.1. Berekening van de funkties t(S;X) en k(S;X).

Bij alle nu volgende berekeningen wordt verondersteld dat de funkties $\lambda_{ij}(u)$, $P_{ijk}(u)$, $m_{ijk}(u)$ en de parameters van de verdelingsfunktie $F_{ijk}(r;u)$ gegeven zijn als eindige polynomen in u voor alle i,j en k.

Uit het besprokene in sectie 2.5 volgt dat de funkties t(S;X) en k(S;X) gemakkelijk zijn te berekenen indien de verwachtingen $E\,\underline{\tau}(i,j,u)$, $E\,\underline{r}^*(i,j,u)$ en $E\,\underline{q}^*(i,j,u)$ bekend zijn. Ter afkorting laten we de toestandsvariabelen i en j weg, daar de berekeningen voor iedere combinatie van i en j analoog verlopen. De drie verwachtingen worden berekend in een eindig aantal punten u_i $i = 0,\dots,K-1$ waarin $u_0 = 0 < u_1 < \dots < u_K = 24$. We gaan uit van de volgende drie relaties die resp. uit (24), (29) en (34) na enige herleiding volgen.

$$(69) \qquad E\,\underline{\tau}(u_i) = \frac{\int_{u_i}^{24} \lambda(v)\, P(v;o)\, dv + P(24;o)(24 + E\,\underline{\tau}(o))}{P(u_i;o)} - u_i$$

$$(70) \qquad E\,\underline{r}^*(u_i) = \frac{\int_{u_i}^{24} \lambda(v)\, P(v;o)\, E\,\underline{r}(v)dv + P(24;o)\, E\,\underline{r}^*(o)}{P(u_i;o)}$$

$$(71) \qquad E\,\underline{q}^*(u_i) = \frac{\int_{u_i}^{24} \lambda(v)\, P(v;o)\, E\,\underline{q}(v)dv + P(24;o)\, E\,\underline{q}^*(o)}{P(u_i;o)}$$

waarin

(72) $$P(u_i;o) = e^{-L(u_i)}.$$

De noodzakelijke berekeningen zullen nu in volgorde puntsgewijs worden omschreven.

1. Bereken de funkties $P(u;o)$, $E\,\underline{r}(v)$ en $E\,\underline{q}(v)$ uit (72), (31) en (32). De funktie $P(u;o)$ heeft een polynoom in de exponent waarvan de coefficienten rechtstreeks uit die van $\lambda(u)$ volgen. De funkties $E\,\underline{r}(v)$ en $E\,\underline{q}(v)$ kunnen expliciet worden geschreven als funkties van de polynomen waarin $P_{ijk}(v)$, $m_{ijk}(v)$, $n_{ijk}(v)$ en de paramters van $F_{ijk}(r;v)$ zijn gegeven.

2. Bereken voor $u = u_i$, $i = K-1, K-2, \ldots, 0$

$$a_i = \int_{u_i}^{u_{i-1}} v\,\lambda(v)\,P(v;o)dv \text{ en } \sum_{j=1}^{K-1} a_j = \sum_{j=i+1}^{K-1} a_j + a_i$$

$$b_i = \int_{u_i}^{u_{i+1}} E\,\underline{r}(v)\,\lambda(v)\,P(v;o)dv \text{ en } \sum_{j=1}^{K-1} b_j = \sum_{j=i+1}^{K-1} b_j + b_i$$

$$c_i = \int_{u_i}^{u_{i-1}} E\,\underline{q}(v)\,\lambda(v)\,P(v;o)dv \text{ en } \sum_{j=1}^{K-1} c_j = \sum_{j=i+1}^{K-1} c_j + c_i$$

met behulp van numerieke integratie.

3. Bereken:

$$E\,\underline{\tau}(o) = \frac{\sum_{j=0}^{K-1} a_k + 24\,P(24;o)}{1 - P(24;o)}$$

$$E\,\underline{r}^*(o) = \frac{\sum_{j=o}^{K-1} b_k}{1 - P(24;o)}$$

$$E\,\underline{q}^*(o) = \frac{\sum_{j=o}^{K-1} c_k}{1 - P(24;o)}$$

4. Bereken voor k = K-1, K-2,..., 1

$$E\,\underline{\tau}(u_i) = \frac{\sum_{j=1}^{K-1} a_j + P(24;o)(24 + E\,\underline{\tau}(0))}{P(u_i;o)} - u_i$$

$$E\,\underline{r}^*(u_i) = \frac{\sum_{j=1}^{K-1} b_j + P(24;o)\;E\,\underline{r}^*(o)}{P(u_i;o)}$$

$$E\,\underline{q}^*(u_i) = \frac{\sum_{j=1}^{K-1} c_j + P(24;o)\;E\,\underline{q}^*(o)}{P(u_i;o)}$$

3.2. Berekening van de funktie v(S;z).

Ter vereenvoudiging van de notatie schrijven we v(i,j,u) en y in plaats van v(i,j,u);z) en y(z). De berekeningen kunnen worden verminderd door in plaats van v(i,j,u) de funktie $\bar{v}$ (i,j,u) uit te rekenen welke als volgt is gedefinieerd voor (i,j,u) $\in \mathcal{J}$.

$$(74) \qquad \bar{v}(i,j,u) \overset{\text{def}}{=} v(i,j,u) + k_0(i,j,u) - y\ t_0(i,j,u).$$

Evenzo levert het rekentechnisch voordeel op in plaats van (46) te werken met de volgende betrekking tussen twee niet-interventietoestanden (i,j,u) en (i,j,x) met x > u op hetzelfde lijnstuk (i,j), welke slechts geldig is indien zich geen interventietoestanden in het interval (u,x) bevinden.

$$(75) \qquad v(i,j,u) = P_{ij}(x;u)\ v(i,j,x) + \\ + \int_u^x \lambda_{ij}(v)\ P_{ij}(v;u)\ [\sum_{k=1}^{N} \int_0^{24} h_{ijk}(w;x)\ v(k,0,w)\ dw]dx.$$

Door toepassing van (43), (74) en (75) verkrijgen we een betrekking in de funktie $\bar{v}$ uitsluitend in toestanden (i,j,u) $\in \bar{A}_z$. Deze luidt:

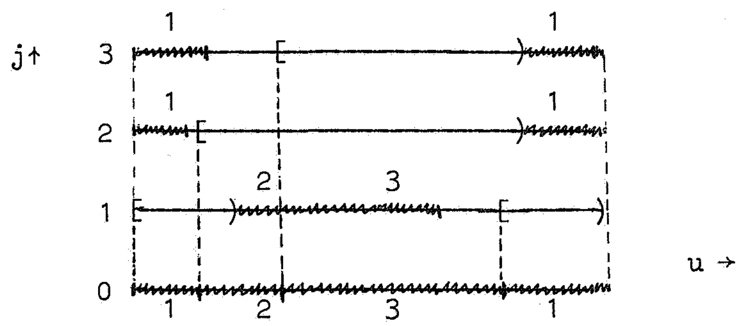
$$(76) \qquad \bar{v}(i,j,u) = k_0(i,j,u) - y\ t_0(i,j,u) + \\ + P_{ij}(x;u)\{\bar{v}(i,j,x) - k_0(i,j,x) + y\ t_0(i,j,x)\} + \\ + \int_u^x \lambda_{ij}(v)\ P_{ij}(v;u)\ [\sum_{k=1}^{N} \int_0^{24} h_{ijk}(w;u)\{s_{k01} + \bar{v}(k,1,w)\}dw]dv.$$

waarin (k,l,w) = z(k,0,w). Van deze betrekking wordt in de volgende berekeningen gebruik gemaakt.

Voor het gemak zullen we met transformatietoestand een niet-interventietoestand aanduiden waarin men vanuit een interventietoestand door middel van de bijbehorende transformatie rechtstreeks terecht kan komen. Bij iedere toestand in A_z behoort dus precies één transformatietoestand.

Met interventieinterval duiden we een aaneengesloten interval van toestanden in A_z aan waarvan de bijbehorende transformatietoestanden op hetzelfde lijnstuk zijn gelegen.

De $\bar{v}$-funktie wordt nu het eerst uitgerekend in de niet-interventie-toestanden welke transformatietoestand en/of terugkeer toestand zijn. In fuguur 2. is een willekeurige strategie voor een probleem met één stad weergegeven. De verzameling A_z is hierin gearceerd aangegeven. De intervallen met de genoemde toestanden zijn op de gebruikelijke wijze met rechte en ronde haken aangegeven.

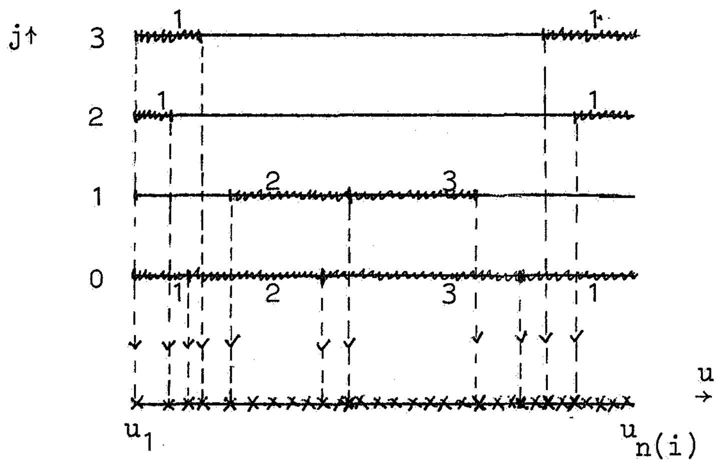


Figuur 2: De intervallen waarop de funktie $\bar{v}(i,j,u)$ het eerst wordt berekend.

In de nu te beschrijven rekenmethode wordt de funktie $\bar{v}(i,j,u)$ benaderd door een stuksgewijs lineaire funktie met funktiewaarden $\bar{v}\ (i,j,u_m)$ in een eindig aantal K toestanden (i,j,u_m), met $m = 1,\ldots, n(i)$ en $\sum_{i=1}^{N} (M(i)+1)n(i)= K$. Voor de tussenliggende toestanden wordt $\bar{v}(i,j,u)$, $u_m < u < u_{m+i}$ dan gegeven door

$$\bar{v}(i,j,u) = \frac{u-u_m}{u_{m+1}-u_m}\,\bar{v}(i,j,u_{m+1}) + \frac{u_{m+1}-u}{u_{m+1}-u_m}\,\bar{v}(i,j,u_m). \tag{77}$$

Vervolgens bespreken we hoe de toestanden (i,j,u_m) worden verkregen. Deze toestanden vormen een gediscretiseerde toestandsruimte welke we aangeven met $\mathcal{J}'_z$ om de afhankelijkheid van z tot uiting te doen komen. De punten u_m $m = 1,\ldots, n(i)$ met $u_1 = 0 < u_2 < \ldots < u_{n(i)} < 24$ worden verkregen door op een lijnstuk met lengte 24 de randpunten van alle interventieintervallen per stad te "projecteren". Tussen deze punten worden nog enige andere punten gekozen, wier aantal en tussenruimte afhangt van de gewenste nauwkeurigheid. In figuur 3 is het tot standkomen van de punten u_m getekend.



Figuur 3: Het tot stand komen van de punten u_m, m = 1,..., n(i).

De gediscretiseerde toestandsruimte $\mathcal{S}'_z$ wordt nu als volgt gedefinieerd.

$$(78) \qquad \mathcal{S}'_z = \{(i,j,u_m) \,|\, (i,j,u_m) \in \mathcal{S},\ i = 1,\ldots,N,\ j = 0,1,\ldots, M(i),\ m = 1,\ldots, n(i)\}$$

Laat B' de verzameling van toestanden in $\mathcal{S}'_z$ zijn welke gelegen zijn in de in figuur 2 aangegeven intervallen. Het is nu mogelijk een lineair stelsel vergelijkingen af te leiden waarin naast y als onbekenden slechts de $\bar{v}$-waarden in de toestanden $(i,j,u_m) \in B'$ voorkomen. Dit stelsel vergelijkingen is gebaseerd op (76) en bevat evenveel vergelijkingen als er toestanden in B' zijn. Voor genoemde toestanden geldt

$$(79) \qquad \bar{v}(i,j,u_m) = k_0(i,j,u_m) - y\, t_0(i,j,u_m) + P_{ij}(u_{m+1};u_m)\{\bar{v}(i,j,u_{m+1}) - k_0(i,j,u_{m+1}) + y\, t_0(i,j,u_{m+1})\} + \int_{u_m}^{u_{m+1}} \lambda_{ij}(x)\, P_{ij}(x;u)\Big[\sum_{k=1}^{N} \int_0^{24} h_{ijk}(u;x)\{\bar{v}(k,l,u)+s_{k0l}\}dw\Big]dx$$

waarin $(k,l,u) = z(k,0,u)$. Deze betrekking kan echter niet in de vorm (79) gebruikt worden indien $(i,j,u_m) \in B'$ terwijl $(i,j,u_{m+1}) \notin B'$.

Uit (76) volgt dan voor $x = u_{m+1}$

(80) $$\lim_{u \uparrow u_{m+1}} \bar{v}(i,j,u) = \bar{v}(i,j,u_{m+1}),$$

terwijl uit (44) en (74) volgt

(81) $$\bar{v}(i,j,u_{m+1}) = - s_{ijk} + \bar{v}(i,l,u_{m+1}).$$

Uit (80) en (81) volgt dat (79) ook in dit geval gebruikt mag worden mits voor $\bar{v}(i,j,u_{m+1})$ (81) wordt gesubstitueerd.

Vervolgens schrijven we nu de integraal over u in (79) als een lineaire combinatie van de $\bar{v}(k,l,u_n)$ in het interval waarin $h_{ijk}(u;x)$ niet identiek nul is. Dit interval is $x + m_{ijk}(x) < u < x + n_{ijk}(x)$ indien we even afzien van het geval $\delta = 1$ in (10). Stel dat p en q de indices van u_n zijn, zodat $u_{p-1} \leq x + m_{ijk}(x) \leq u_p$ en $u_q \leq x + n_{ijk} \leq u_{q+1}$. Met behulp van de z.g. trapeziumregel wordt nu de integraal

(82) $$\int_0^{24} h_{ijk}(u;x)\ \bar{v}(k,l,u)du$$

benaderd door de som

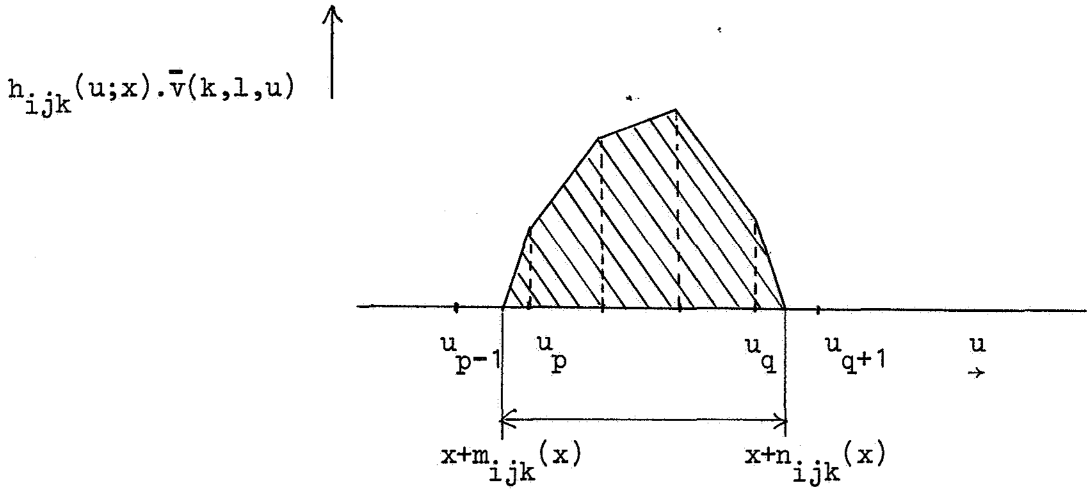
(83) $$\frac{1}{2} \sum_{n=p}^{n=q} \beta_n\ h_{ijk}(u_n;x)\ \bar{v}(k,l,u_n)$$

waarin $\beta_p = u_{p+1} - x - m_{ijk}(x)$

$\beta_n = u_{n+1} - u_{n-1}$ $\qquad n = p+1,\ldots,q-1$

$\beta_q = x + n_{ijk}(x) - u_{q-1}$

Het met (83) corresponderende oppervlak is gearceerd weergegeven in figuur 4.



Figuur 4: een benadering van (82).

Passen we deze lineaire benadering ook toe op de integraal over x in (79) dan verkrijgen we

(84) $$\frac{1}{4}\,[\lambda_{ij}(u_m)\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=p_m}^{n=q_m}\beta_n\, h_{ijk}(u_n;u_m)\,\bar{v}(k,l,u_n)$$

$$+\,P_{ij}(u_{m+1};u_m)\,\lambda_{ij}(u_{m+1})\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=p_{m+1}}^{n=q_{m+1}}\beta_n\, h_{ijk}(u_n;u_m)\,\bar{v}(k,l,u_n)]$$

waarin p_m en q_m behoren bij u_m en p_{m+1} en q_{m+1} bij u_{m+1}.

Betrekking (79), met (81) voor de daarvoor in aanmerking komende toestanden en (84) daarin gesubstitueerd, vertegenwoordigt een stelsel lineaire vergelijkingen in $\bar{v}(i,j,u_m)$ voor $(i,j,u_m) \in B'$ en y. Zoals gemakkelijk is na te gaan bestaat er voor elke toestand in B' een vergelijking van type (79). Indien in een willekeurige toestand $S_0 \in B'$, $\bar{v}(S_0) = 0$ wordt gesteld dan heeft het stelsel een unieke oplossing. Indien dit stelsel is opgelost dan zijn de $\bar{v}(i,j,u_m)$ voor $(i,j,u_m) \in B'$ bekend.

Er resten nu nog de toestanden $(i,j,u_m) \in \mathcal{J}'_z$ welke tevens behoren tot

1. de verzameling A_0
2. de verzameling van doorgangstoestanden

De $\bar{v}(i,0,u_m)$ met $(i,0,u_m) \in A_0$ worden berekend met de betrekking

(85) $$\bar{v}(i,0,u_m) = -s_{i0j} + \bar{v}(i,j,u_m),$$

welke rechtstreeks volgt uit (74) en (43) en waarin $z(i,0,u_m) = (i,j,u_m) \in B'$.

De $\bar{v}(i,j,u_m)$ met (i,j,u_m) doorgangstoestand tevens interventietoestand volgen uit de betrekking

(86) $$\bar{v}(i,j,u_m) = - s_{ijk} + \bar{v}(i,l,u_m)$$

welke rechtstreeks volgt uit (74) en (44) en waarin $z(i,j,u_m) = (i,l,u_m) \in B'$.

Tenslotte volgen de $\bar{v}(i,j,u_m)$, met (i,j,u_m) een doorgangstoestand tevens niet-interventietoestand, uit betrekking (79), welke zo gebruikt kan worden dat $\bar{v}(i,j,u_{m+1})$ hierin steeds bekend is.

3.3. De berekening van de strategie z'.

De berekening van de strategie z' wordt uitgevoerd door (54) op te lossen voor iedere toestand. Deze berekening kan direkt worden uitgevoerd met de funktie $\bar{v}((i,j,u);z)$ welke in sectie 3.2 werd berekend. Indien we de funktie $\bar{v}(S;(x)z)$ invoeren, gedefinieerd door

(87) $$\bar{v}(S;(x)z) = v(S;(x)z) + k_0(S) - y(z)\ t_0(S)$$

dan kan met behulp van (74), (52) en (53) worden nagegaan dat in (54) het maximum voor dezelfde l wordt bereikt als in

(88) $$\max_{l=1,\dots,M(i)} [-s_{ijl} + \bar{v}((i,j,l);z)]$$

Deze betrekking kan worden gebruikt mits twee gevallen worden uitgesloten. Zo volgt uit het besprokene in sectie 2.9 dat indien (66) geldt, waaraan in praktische gevallen bijna altijd is voldaan, alleen die beslissingen (i,l,u) in toestand (i,j,u) in beschouwing behoeven te worden genomen waarvoor $(i,l,u) \notin A_z$. Bovendien werd in sectie 2.7 reeds opgemerkt dat de beslissing $X = (i,j,u)$ kon worden uitgesloten voor $(i,j,u) \in A_z \cap \bar{A}_0$. Stellen we

(89) $$\bar{v}((i,j,u);(i,l,u)z) = -G$$

voor $\{(i,j,u) \in A_z \cap \bar{A}_0\} \cup \{(i,l,u) \in A_z\}$ waarin G voldoende groot en positief dan kan (88) ongewijzigd voor alle $(i,j,u) \in \mathcal{S}$ worden gebruikt.

De berekening van (88) wordt eerst uitgevoerd op de gediscretiseerde toestandsruimte $\mathcal{J}_z'$. Indien voor twee opeenvolgende toestanden (i,j,u_m) en (i,j,u_{m+1}) geldt dat $z'(i,j,u_m) \neq z'(i,j,u_{m+1})$ dan bevindt zich tussen (i,j,u_m) en (i,j,u_{m+1}) een randpunt van een interventieinterval van de strategie z'. Met behulp van de reeds toegepaste stuksgewijs lineaire benadering wordt de ligging van dit punt nauwkeuriger vastgesteld.

3.4. Berekening van de verzameling $A'_{z'}$

Zoals in sectie 2.8 werd gesteld bevindt zich op een lijnstuk geen deelverzameling van $A'_{z'}$ indien voor een toestand (i,j,u) het maximum in (65), onder toepassing van de in sectie 2.8 genoemde keuzeregel, voor $x = u$ in de tweede term tussen vierkante haken wordt bereikt. We zullen nu laten zien dat dit equivalent is met de voorwaarde

$$(90) \qquad \max_{\substack{0 \le x \le 24 \\ (i,j,x) \in A_{z'}}} [v^*((i,j,x);[z']z] \le \frac{C_{ij}}{1-P_{ij}(24;0)}$$

waarin

$$(91) \qquad C_{ij} \overset{\text{def}}{=} \int_0^{24} \lambda_{ij}(x)\ P_{ij}(x;0)\ g_{ij}(x)dx$$

en $g_{ij}(x)$ gegeven wordt door (58). Bij dit bewijs verkorten we de notatie en laten de indices i en j en de strategie [z']z weg. We veronderstellen zonder verlies van algemeenheid dat $\{0 \le u < 24\} \subset A_{z'}$, zodat de voorwaarde $(i,j,x) \in A_{z'}$ kan worden weggelaten.

Indien het maximum in (65) onder toepassing van genoemde keuzeregel voor $x = u$ in de tweede term wordt bereikt dan volgt

$$(92) \qquad v^*(u) \le \max [\max_{u \le x \le 24} [v^*(x)],\ \max_{0 \le x \le u} [C + P(24;0)\ v^*(x)]]$$
$$\le C + P(24;0)\ v^*(u)$$

Uit (92) volgen

$$(93) \qquad v^*(u) \le \max_{u \le x \le 24} [v^*(x)] \le C + P(24;0)\ v^*(u)$$

en

$$(94)\qquad v^*(u) \le \max_{0\le x\le u} [C + P(24;0)\, v^*(x)] = C + P(24;0)\, v^*(u).$$

Uit (93) volgt

$$(95)\qquad \max_{u\le x\le 24} [v^*(x)] \le C + P(24;0)\, v^*(u) \le C + P(24;0) \max_{u\le x\le 24} [v^*(x)]$$

en uit (94) volgt

$$(96)\qquad C + P(24;0) \max_{0\le x\le u} [v^*(x)] = C + P(24;0)\, v^*(u)$$

$$\le P(24;0)\{C + P(24;0) \max_{0\le x\le u} [v^*(x)]\} + C.$$

Uit (95) volgt

$$(97)\qquad \max_{u\le x\le 24} [v^*(x)] \le \frac{C}{1-P(24;0)} ,$$

terwijl uit (96) volgt

$$(98)\qquad \max_{0\le x\le u} [v^*(x)] \le \frac{C}{1-P(24;0)} .$$

Uit (97) en (98) volgt tenslotte (90).

Omgekeerd veronderstellen we dat (90) geldt en bewijzen dat er een waarde van u is waarvoor (92) geldt. Stel dat $\max_{0\le x\le 24} [v^*(x)]$ bereikt wordt voor $x = x^*$ dan volgen uit (89)

$$(99)\qquad \max_{0\le x\le x^*} [v^*(x)] \le \frac{C}{1-P(24;0)} .$$

en

$$(100)\qquad \max_{x^*\le x\le 24} [v^*(x)] \le \frac{C}{1-P(24;0)} .$$

Uit (99) volgt

$$(101)\qquad v^*(x^*) = \max_{0\le x\le x^*} [v^*(x)] \le C + P(24;0) \max_{0\le x\le x^*} [v^*(x)] = C + P(24;0) v^*(x^*)$$

en uit (99) volgt

$$(102) \qquad v^*(x^*) \leq \max_{x^* \leq x \leq 24} [v^*(x)] \leq C + P(24;0) \max_{x^* \leq x \leq 24} [v^*(x)] =$$

$$= C + P(24;0)\, v^*(x^*)$$

Uit (101) en (102) volgt nu dat aan (92) voor $u = x$ voldaan.

Voodat het afsnijden op een lijnstuk (i,j) begint wordt aan de hand van (90) nagegaan of zich nog toestanden van $A'_{z'}$ op dat lijnstuk bevinden. Indien aan (90) is voldaan is dit niet het geval. Indien niet aan (90) is voldaan dan weten we dat

$$(103) \qquad \max_{\substack{0 \leq x \leq 24 \\ (\bar{i},\bar{j},x) \in A_{z'}}} [v^*((i,j,x);[z']z)] > \frac{C_{ij}}{1-P_{ij}(24;0)}$$

Uit (103) volgt dan dat (65) equivalent is met

$$(104) \qquad \max\,[\max_{\substack{u \leq x \leq 24 \\ (\bar{i},\bar{j},x) \in A_{z'}}} [v^*((i,j,x);[z']z)],\ M_{ij}]$$

waarin

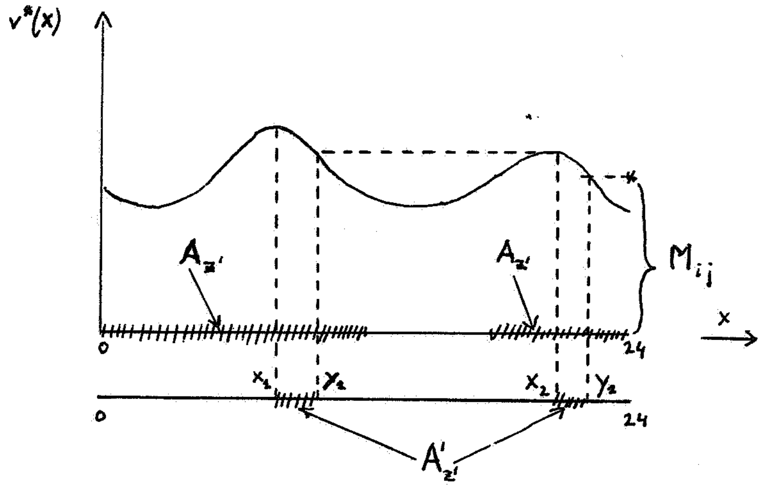
$$(105) \qquad M_{ij} \overset{\text{def}}{=} \max_{\substack{0 \leq x \leq 24 \\ (\bar{i},\bar{j},x) \in A_{z'}}} [v^*((i,j,x);[z']z)].$$

De bij toestand (i,j,u) behorende toestand $(i,j,a'(u)) \in A'_{z'}$ volgt nu uit

$$(106) \qquad a'(u) = \begin{cases} x^* & \text{als } u \leq x^* \leq 24 \\ & \\ a'(0) & \text{als } M_{ij} \geq \max\limits_{\substack{u \leq x \leq 24 \\ (\bar{i},\bar{j},x) \in A_{z'}}} [v^*((i,j,x);[z']z)] \end{cases}$$

waarin x^* de grootste waarde van x is waarvoor het maximum op $\{u \leq x \leq 24\} \cap A_{z'}$ wordt bereikt.

De toepassing van de afsnijprocedure is grafisch weergegeven in figuur 5 voor een lijnstuk (i,j). De deelverzamelingen van $A_{z'}$ en $A'_{z'}$ op dat lijnstuk zijn gearceerd aangegeven.



Figuur 5: de afsnijprocedure op een lijnstuk.

We zullen nu een rekenprocedure beschrijven die de gewenste afsnijding tengevolge heeft. Deze rekenprocedure is gebaseerd op (104). Om het principe duidelijker uit te doen komen, wordt wederom de notatie verkort. Daar het afsnijden per lijnstuk met vaste i en j en $0 \leq u \leq 24$ geschiedt, worden de indices i en j weggelaten. Ook wordt een strategie $[z']z$ weggelaten.

Veronderstel dat de funktie $v^*(x)$ van te voren is berekend in de toestanden $x = u_p$, $p = 1,\dots, q$. Deze toestanden bevinden zich in de verzameling $A_{z'}$ en tevens op het beschouwde lijnstuk. We definiëren nog

$$(107) \qquad v^*(u_{q+1}) \overset{\text{def}}{=} C + P(24;0) \max_{0 \leq x \leq 24} [v^*(x)]$$

waarin C gegeven wordt door (91) op het beschouwde lijnstuk. De resultaten van deze rekenprocedure zijn dan de interventieintervallen $[x_k, y_k]$, $k = 1,2, \dots$ van $A'_{z'}$ op het beschouwde lijnstuk, (zie ook figuur 5).

De rekenprocedure is nu als volgt:

1. Bepaal

$$\max_{x=u_1,\dots,u_q} [v^*(x)]$$

De hoogste waarde van x waarvoor dit bereikt wordt is $x = u_m$. Trek een parabool door de funktiewaarden in de punten u_{m-1}, u_m en u_{m+1} en bepaal hiermee een nauwkeuriger ligging van het maximum.

Dit is dan x_1. Indien $v^*(x_1) \leq C.\{1-P(24;0)\}^{-1}$ dan bevindt zich geen deelverzameling van $A'_{z'}$ op het beschouwde lijnstuk. Indien dit wel het geval is definiëren we p zodanig dat $u_{p-1} \leq x_1 \leq u_p$ en $y_0 \overset{def}{=} 0$. We beschrijven nu hoe y_n en x_{n+1} worden verkregen, indien $x_1,\ldots, x_n$ en $y_1,\ldots, y_{n-1}$ bekend zijn en p is vastgesteld.

2. Bepaal

$$\max_{x=u_p,\ldots,u_{q+1}} [v^*(x)].$$

De hoogste waarde van x, waarvoor dit maximum wordt bereikt is $x = u_m$. Onderscheid nu 3 gevallen

<u>a</u>. $u_m = u_p$, ga dan naar 3;

<u>b</u>. $u_p < u_m < u_{q+1}$, ga dan naar 4;

<u>c</u>. $u_m = u_{q+1}$, ga dan naar 5.

3. Er volgt nu dat $\{x_n \leq x \leq u_p\} \subset A'_{z'}$. Indien p = q ga dan naar 6. We geven p de waarde m+1 en gaan naar 2.

4. Bepaal een nauwkeuriger ligging van het maximum met de parabolische benadering, dit geeft x_{n+1} en $v^*(x_{n+1})$. Bepaal de kleinste waarde van x waarvoor $v^*(x) = v^*(x_{n+1})$ d.m.v. lineaire interpolatie; dit geeft y_n. Herdefinieer p zodanig dat $u_{p-1} \leq x_{n+1} \leq u_p$.
   Er volgt nu dat $\{x_n \leq x \leq y_n\} \subset A'_{z'}$ en $\{y_n < x < x_{n+1}\} \subset \bar{A}'_{z'}$.
   Ga naar 2.

5. Bepaal de kleinste waarde van x, waarvoor $v^*(x) = v^*(u_{q+1})$; dit is dan y_n. Er volgt nu dat $\{x_n \leq x \leq y_n\} \subset A'_{z'}$ en $\{y_n < x < 24\} \subset \bar{A}'_{z'}$.

6. Ga verder met het volgende lijnstuk.

3.5. <u>Een effectievere formulering</u>.

We voegen aan de in sectie 2.1 gedefinieerde toestandsruimte de toestanden (i,j,24) i = 1,..., N, j = 1,..., M(i) toe.

Gedurende het natuurlijk proces vanuit (i,j,24) blijft men voor altijd in die toestand. De nulbeslissing in deze toestanden kan worden geïnterpreteerd als het stopzetten van het bedrijf. De toegelaten interventies in deze toestanden worden gegeven door $X = (i',j',0)$, waarin $i' = i$ en $j' \in \{1,\ldots, M(i)\}$. Deze interventies kunnen worden geïnterpreteerd als voortgaan met het bedrijf en met de op dat moment gewenste keuzemogelijkheid. We beschouwen nu alleen strategieën welke voortgaan met het bedrijfvoorschrijven in deze toestanden. De verzameling A_0 kan nu worden uitgebreid met deze toestanden, zodat geldt

$$(108)\qquad t_0(i,j,24) = k_0(i,j,24) = 0$$

voor $i = 1,\ldots, N$ en $j = 1,\ldots, M(i)$. Men gaat gemakkelijk na dat de uitdrukkingen voor $t_0(i,j,u)$ en $k_0(i,j,u)$ met $(i,j,u) \notin A_0$ vereenvoudigd worden tot

$$(109)\qquad t_0(i,j,u) = (24-u)\, P_{ij}(24;u) + \int_u^{24} \lambda_{ij}(v)\, P_{ij}(v;u)[v-u+E\{\underline{r}(i,j,v\}]dv$$

en

$$(110)\qquad k_0(i,j,u) = -c_{ij}(24-u)\, P_{ij}(24;u) + \int_u^{24} \lambda_{ij}(v)\, P_{ij}(v;u)[-c_{ij}(v-u) + E\{\underline{q}(i,j,v)\}]dv$$

De v-waarden in deze toestanden zijn hetzelfde als in de toestanden $(i,j,24^-)$, zodat deze niet extra behoeven te worden berekend. Het behandelde in de secties 2.6, 2.7, 2.9, 3.2 en 3.3 blijft nagenoeg onveranderd geldig. De afsnijoperatie beschreven in de secties 2.8 en 3.4 leidt echter in plaats van (65) direkt tot

$$(111)\qquad \max_{u \leq x \leq 24} [v^*((i,j,x);[z']z)],$$

waarin vergeleken met (104) de term M_{ij} ontbreekt. De voorwaarde (90) luidt in deze formulering

$$\max_{0 \leq x \leq 24} [v^*((i,j,x);[z']z)] \leq v^*((i,j,24);[z']z). \tag{112}$$

Referentie

[1] G. de Leve en H.C. Tijms, Dynamische programmering 3 Leergang besliskunde, deel 7C, MC Syllabus 1.7C, Mathematische Centrum, Amsterdam, 1971.