BA

stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BN 8/71 OKTOBER

J.G. BAAIJ

VOORSPELLEN EN BESTELLEN

Een methode ten behoeve van het voorraadbeheer
van autoönderdelen bij de A.R.M.

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Inhoud

Inleiding

In deze scriptie worden methoden voor het voorspellen van de vraag naar en het bestellen van onderdelen van Vauxhall-Bedford automobielen beschreven die toegepast kunnen worden door de Amsterdamse Rijtuig Maatschappij.

Vooraf gaande aan het onderzoek was er het idee dat de voorraden vaak te hoog waren doordat de vraag te hoog geschat werd als gevolg van een eerst stijgende en daarna dalende trend.
Om deze reden zijn mijn gedachten uitgegaan naar voorspellen met behulp van exponentiële effening van de derde orde.
In praktijk echter bleek dat de trend van de vraag zeer flauw is voor bijna alle onderdelen en dat voorspellen m.b.v. exponentiële effening van de eerste orde veel beter werkt.

De bedoeling is dat deze scriptie voor een groot gedeelte leesbaar is voor niet-wiskundigen. Sommige stukken zoals bijvoorbeeld de wiskundige afleidingen kunnen daarom eventueel worden overgeslagen door de lezer.
Enige kennis van het begrip stochastische variabele kan hij echter niet ontberen. Daarom volgt hier een wat vereenvoudigde beschrijving ervan.

Onder de stochastische variabele $\underline{x}$ verstaan we een getal dat bepaald wordt door een of meer niet precies te voorspellen gebeurtenissen in de toekomst.
De vraag naar een bepaald onderdeel in de komende week bijvoorbeeld.
Zodra deze gebeurtenissen plaats gevonden hebben is $\underline{x}$ bepaald, we schrijven dan x (zonder streep) en zeggen dat $\underline{x}$ zich gerealiseerd heeft.
In de statistiek probeert men het gedrag van zo'n stochastische variabele te beschrijven d.m.v. een kansverdeling.

Wij onderscheiden 2 soorten kansverdelingen:

1e. Een (discrete) kansverdeling is een voorschrift (functie) P dat aan elke mogelijke waarde x van $\underline{x}$ een getal tussen 0 en 1, de kans op x, toekent.
We schrijven hiervoor $P\{\underline{x} = x\}$. Er zijn slechts eindig of aftelbaar veel mogelijke waarden van $\underline{x}$: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en er geldt
$$\sum_{i=1}^{\infty} P\{\underline{x} = x_i\} = 1.$$

2e. Een continue kansverdeling is een voorschrift (functie) P dat aan elk interval (a,b] een getal tussen 0 en 1, de kans dat $\underline{x}$ tussen a en b ligt, toekent. We schrijven $P\{a < \underline{x} \leq b\}$.
Bij een continue kansverdeling bestaat een dichtheid; dit is een functie $f(x)$ met $f(x) \geq 0$ en $\int_{\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.
De functie P voldoet nu aan $P\{a < \underline{x} \leq b\} = \int_a^b f(x)\, dx$.

I. De A.R.M. en de auto-onderdelen

De Amsterdamse Rijtuig Maatschappij oefent een aantal activiteiten uit waaronder het Whole-sale dealerschap voor Vauxhall-Bedford-auto-onderdelen.
Deze functie deelt zij in Nederland met vier collega dealers.

Om Whole-sale dealer (groothandel) te zijn moet men aan zekere door General Motors bepaalde voorwaarden voldoen.
De Whole-sale dealer kan onderdelen leveren tegen door General Motors vastgestelde prijzen.

De Amsterdamse Rijtuig Maatschappij levert onderdelen aan:
dealers, garages, fleetowners, particulieren en aan eigen werkplaatsen.
In deze scriptie zullen wij geen onderscheid maken tussen deze verschillende soorten cliënten.
Wij beschouwen alleen de magazijnmutaties.
Aangezien dealers die een eigen voorraad houden een andere afname veroorzaken dan bijvoorbeeld garages die alleen dan onderdelen kopen als ze deze direct nodig hebben, kunnen we de afname beschrijven met behulp van een mengsel van twee of meer verdelingen.
Het zou te ver voeren dit statistisch te analyseren: het voorspelsysteeem zou te ingewikkeld (en dus te duur) worden.

Een der door General Motors vastgestelde voorwaarden voor het Whole-sale dealerschap is de leveringsplicht, dat wil zeggen dat de Whole-sale dealer zich verplicht elk onderdeel binnen 24 uur te kunnen leveren.
Uiteraard kan hieraan in de praktijk niet altijd worden voldaan. In het geval dat de A.R.M. niet uit voorraad kan leveren zijn er verschillende mogelijkheden.

1. Het gevraagde onderdeel is ergens in de buurt te koop (niet specifiek aan Vauxhall gebonden onderdelen bijvoorbeeld, zoals snelheidsmeters).
2. De cliënt wordt "op Backorder gezet", d.w.z. dat hij moet wachten.
3. Het onderdeel wordt bij een van de vier andere nederlandse Whole-sale dealers gekocht.

4. Het onderdeel kan bij een van de dealer cliënten die ook een voorraad houden worden teruggekocht of "geleend".

5. Het artikel wordt uit Antwerpen (hoofddepôt voor Europa) gehaald.

De mogelijkheden 1, 2 en 3 komen bijna dagelijks voor terwijl 4 en 5 zelden voorkomen.
Elke mogelijkheid brengt extra kosten met zich mee.
In geval 1. moet men iemand er op uit sturen, in geval 2 kweekt men goodwillverlies hetgeen men als (subjectieve) kosten kan waarderen, in geval 3 is de inkoopprijs hoger enzovoort.
Het is duidelijk dat de kosten per geval verschillen en vaak ook per geval moeilijk te bepalen zijn (subjectieve kosten zoals in geval 2 bijvoorbeeld).
In deze scriptie zullen wij deze gevallen echter niet onderscheiden. We zullen de kosten van een nee-verkoop beschouwen als een constante plus een percentage van de inkoopprijs.
De A.R.M. bestelt normaliter bij het hoofddepôt van de onderdelen in Antwerpen.
Per drie maanden zijn er zes bestelperioden namelijk vijf perioden van twee weken en één periode van drie weken. Een gewone bestelling (stock order) kan alleen geplaatst worden aan het begin van een bestelperiode.
Behalve de normale stockorders is het mogelijk om dagelijks een spoedorder (emergency order) te plaatsen.
Op normaal bestelde artikelen (d.w.z. via een stockorder) wordt 10-15% korting op de verrekenprijs gegeven terwijl op artikelen die via een emergency order besteld zijn een toeslag van 20% op de verrekenprijs wordt gelegd.
Een derde bestelmogelijkheid is de priority-order.
Op artikelen via een priority-order besteld is de korting zoals bij gewone stockorders van kracht.
Het is echter aan General Motors voorbehouden om het predicaat priority toe te kennen.
Een priority-order is globaal gezegd mogelijk als het hoofdfdepôt in

Antwerpen er zelf de oorzaak van is dat er een achterstand in de voorraad is doordat zij zelf niet kan (of heeft kunnen) leveren. Emergency orders en stockorders kunnen priority-orders worden als Antwerpen zelf niet binnen bepaalde tijd kan leveren.
De mogelijkheid van emergency orders en priority orders zullen niet in het model voorkomen: we zullen er van uitgaan dat de optimale bestelpolitiek een (s.S) strategie ') is waarbij in "noodgevallen" ingegrepen kan worden door het plaatsen van een emergency order.
We spreken van noodgevallen omdat we er van uit gaan dat bij een gezonde voorraadpolitiek de emergency orders zoveel mogelijk vermeden dienen te worden.
Het lijkt ons het beste dat deze noodgevallen (die zowel door een onjuist bestelpolitiek van de A.R.M. als door externe oorzaken zoals havenstakingen in Engeland veroorzaakt kunnen worden) door de A.R.M. zelf worden gesignaleerd en niet door de bestelstrategie.

Statistische beschrijving van het materiaal

De Vauxhall/Bedford inventarislijst van de A.R.M. bevatte begin 1970 ongeveer 7950 soorten onderdelen. Van elke soort worden de gegevens bijgehouden op een kaart.
Op zo'n kaart worden de magazijnmutaties en de bestellingen bijgehouden. Verder bevat de kaart gegevens als gemiddelde verkoop over de laatste drie maanden, bestelpunt, prijs en verder gegevens als serienummer, magazijnlocatie e.d..
Er zijn behalve de in het kaartsysteem voorkomen soorten nog circa 14000 soorten waarvan geen kaart wordt bijgehouden. Deze onderdelen hebben i.h.a. weinig waarde.
Zij vormen ongeveer 30% van de bestellingen en 3 à 4% van de omzet.
In de statistische analyse zijn deze onderdelen niet betrokken:
Er is alleen gebruik gemaakt van het kaartsysteem.

Om een indruk te krijgen van de prijzen van de onderdelen, de afname

') Zie Hoofdstuk III.

de levertijd hebben wij 166 kaarten uit het kaartsysteem getrokken. Het kiezen van de kaarten is gebeurd met behulp van een inventarislijst. (De soorten die in deze lijst voorkomen zijn dezelfde als die in het kaartsysteem).
In de inventarislijst staan de onderdelen in volgorde van hun code. De code is volkomen willekeurig.
Per bladzijde komen 48 soorten voor en de inventarislijst bevat 166 bladzijden. Door nu per bladzijde het n^{de} onderdeel te kiezen wordt (wegens de willekeur der volgorde) een aselecte steekproef verkregen. n is hierin een door ons aselect getrokken getal uit de verzameling $\{1,2,3,\ldots, 48\}$. (Het lot wees 38 aan).
Als een kaart uit het kaartsysteem vol is worden belangrijke gegevens zoals bestelpunt, laatste schatting van de vraag e.d. op een nieuwe kaart overgenomen. De rest der gegevens wordt uiteraard niet overgenomen.
Een aantal kaarten bevatte daardoor te weinig informatie over levertijd en afname.
De leeftijd der kaarten verschilt zeer: kaarten van "slow-movers" (onderdelen met weinig afname) kunnen soms informatie verschaffen vanaf 1962 terwijl kaarten van "fast-movers" nooit ouder zijn dan 2 jaar. Mede om deze reden zijn alleen gegevens van na 1 januari 1968 in het onderzoek betrokken.
Om de verdeling van de levertijd goed te schatten zijn nog een aantal extra kaarten getrokken (volgens dezelfde methode als boven beschreven).

Hieronder volgen de resultaten van de steekproef.

Tabel 1 is een frequentietabel van de nettoprijs (inkoopsprijs) van de onderdelen.
Tabel 2 is een frequentietabel van de afname.
Tabel 3 geeft de aantallen en de percentages van de bestelwijzen.
Tabel 4 is de frequentietabel van de levertijd.

In figuur 1 en 2 is de verdeling van de levertijd getekend.

Tabel 1: frequentie van de netto prijs.

waarde int in fl.	aantal	percentage
[0 1]	32	19.3
(1 2]	11	6.6
(2 3]	10	6.0
(3 4]	5	3.0
(4 5]	12	7.2
(5 6]	6	3.6
(6 7]	5	3.0
(7 8]	3	1.8
(8 9]	3	1.8
(9 10]	3	1.8
(10 15]	11	6.6
(15 20]	9	5.4
(20 25]	5	3.0
(25 30]	7	4.2
(30 35]	6	3.6
(35 40]	2	1.2
(40 45]	2	1.2
(45 50]	6	3.6

waarde int in fl.	aantal	percentage
(50 60]	3	1.8
(60 70]	5	3.0
(70 80]	4	2.4
(80 90]	1	0.6
(90 100]	2	1.2
(100 150]	6	3.6
(150 200]	1	0.6
(200 250]	2	1.2
(250 300]	0	0.0
(300 ∞)	4	2.4
Totaal	166	100.

De prijzen van de onderdelen uit het interval (300,00) waren achtereenvolgens ƒ 433.-, ƒ 468.-, ƒ 600.-, ƒ 726.-.

We zien dat ongeveer 20% der artikelen minder dan 1 gulden kost en dat bijna de helft van de onderdelen minder dan vijf gulden kost. Volgens de inventarisatielijst had de A.R.M. in januari 1970 een bedrag van fl. 1 800 000.- in onderdelen geïnvesteerd.

Tabel 2: frequentie van de afname

verkoop per 2 weken	aantal	percentage
[0 0.2]	20	22.98
(0.2 0.4]	15	17.24
(0.4 0.6]	9	10.34
(0.6 0.8]	9	10.34
(0.8 1]	4	4.60
(1 1.2]	1	1.15
(1.2 1.4]	3	3.45
(1.4 1.6]	3	3.45
(1.6 1.8]	0	0
(1.8 2]	1	1.15
(2 2.2]	0	0
(2.2 2.4]	2	2.30
(2.4 2.6]	2	2.30
(2.6 2.8]	0	0
(2.8 3]	2	2.30
(3 3.2]	0	0
(3.2 3.4]	1	1.15
(3.4 3.6]	1	1.15
(3.6 3.8]	0	0
(3.8 4]	0	0

verkoop per 2 weken	aantal	percentage
(4 4.2]	0	0
(4.2 4.4]	0	0
(4.4 4.6]	0	0
(4.6 4.8]	1	1.15
(4.8 5]	0	0
(5 5.2]	0	0
(5.2 5.4]	0	0
(5.4 5.6]	0	0
(5.6 5.8]	0	0
(5.8 6]	1	1.15
(6 6.2]	1	1.15
(6.2 6.4]	1	1.15
(6.4 6.6]	0	0
(6.6 6.8]	0	0
(6.8 7]	0	0
(7 ∞)	10	11.49
Totaal	87	100.

De afname in de bovenstaande tabel is de gemiddelde afname over de jaren 1968 en 1969 of over de periode waar de betreffende kaart informatie over kon verschaffen.
Als deze periode korter dan 1 maand was werd de kaart buiten de steekproef gelaten.
We zien dat 65.5% der onderdelen minder dan één keer per twee weken (d.i. één bestelperiode) wordt afgenomen; 20% werd zelfs minder dan één keer per 10 weken afgenomen. Vooral bij deze z.g. "slow movers" is een juiste bestelpolitiek belangrijk omdat na te grote bestellingen moeilijk gecorrigeerd kan worden. (men blijft er mee zitten).

Tabel 3: frequentie van de bestelmogelijkheden

besteld volgens	aantal	percentage
Stock-order	408	94.38
Emergency-order	1	0.23
Priority-order	0	0
Niet bij General Motors	22	5.39
Totaal	431	100.

De fracties Emergency-order en Priority-order zijn zeer klein. Hierbij merken wij op dat het mogelijk is dat bestellingen die later een priority werden niet als zodanig in het kaartsysteem genoteerd staan (omdat zij eerst als stock-order of emergency-order geplaatst waren).

De A.R.M. bestelt per periode ongeveer voor 900 soorten. Het gemiddeld aantal emergency-orders per bestel periode schatten wij daarom op 2. Van de 408 gewone stock-orders waren er 27 (d.i. 6.9%) "op back-order gezet" hetgeen betekent dat op het moment van bestellen de voorraad negatief was (wel vraag maar geen voorraad). Verder waren er 15 bestellingen (3.2%) die niet in een keer afgeleverd werden.

De onderstaande tabel geeft de frequentieverdeling van de levertijd. Deze is gemeten in kalenderdagen en niet in werkdagen.

Tabel 4: frequentieverdeling van de levertijd.

levertijd in dagen	aantal	percentage	levertijd in dagen	aantal	percentage
(0 5]	7	1.88	(50 75]	3	0.80
(5 10]	27	7.24	(75 100]	4	1.07
(10 15]	133	35.64	(100 125]	4	1.07
(15 20]	114	30.55	(125 150]	1	0.27
(20 25]	48	12.86	(150 175]	1	0.27
(25 30]	7	1.88	(175 200]	1	0.27
(30 35]	8	2.14			
(35 40]	6	1.61	(200 250]	0	0
(40 45]	3	0.80	(250 300]	0	0
(45 50]	2	0.54	(300 350]	0	0
			(350 400]	4	1.07
subtotaal	355	95.14	Totaal	373	100

De levertijden uit het interval (350-400] zijn het gevolg van bijzondere omstandigheden.

Havenstakingen in Engeland kunnen er bijvoorbeeld de oorzaak van zijn dat het depôt in Antwerpen leegraakt.

Wij zullen deze waarnemingen als uitbijters beschouwen.

Hetzelfde doen we met alle waarnemingen groter dan 50 dagen. (Deze levertijden beschouwen we als een gevolg van het falen van de leverancier).

De uitbijters vormen 4.8% van de steekproef.

In figuur 1 ziet men drie verdelingen van de levertijd getekend:

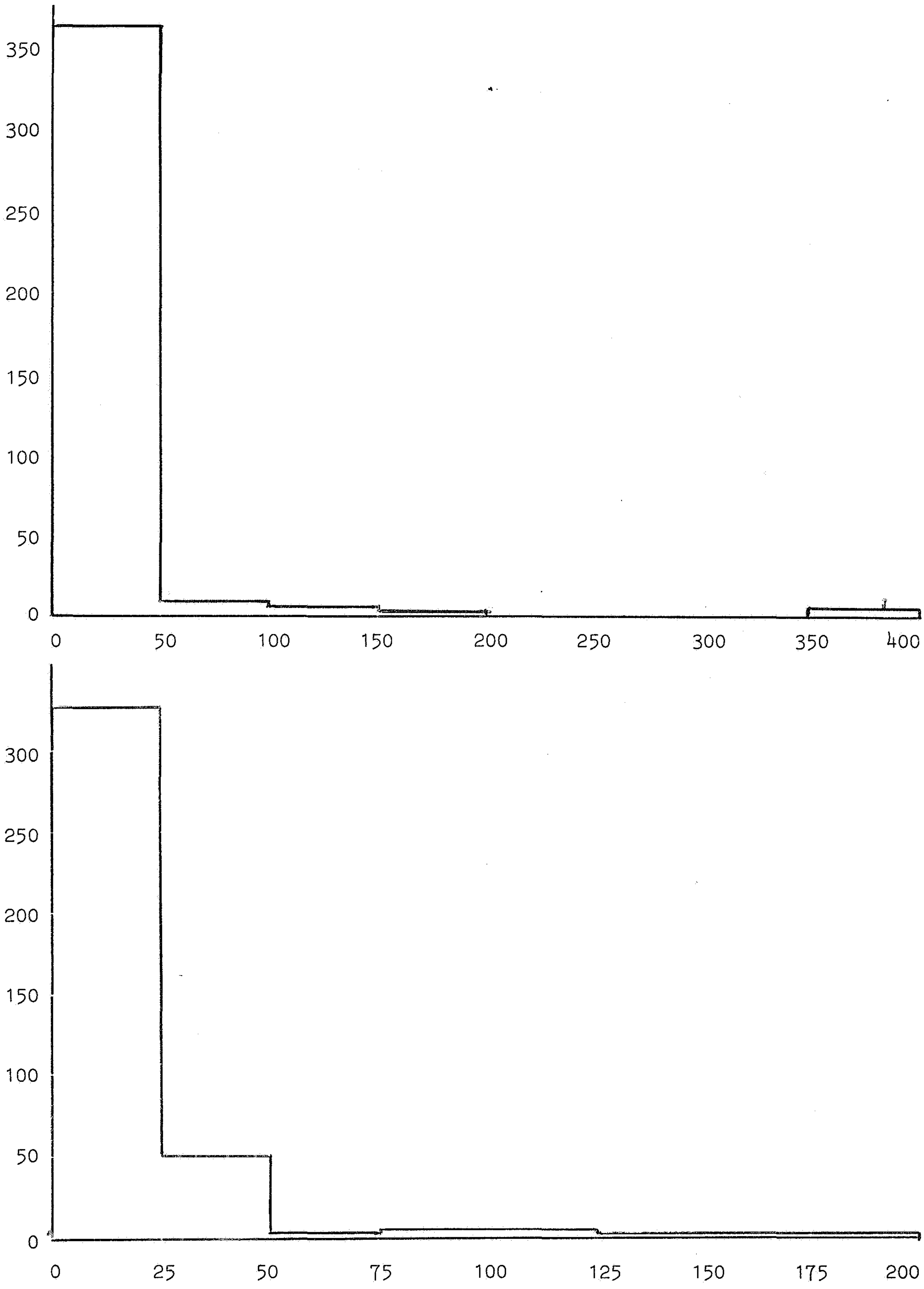
a) voor alle waarnemingen.

b) alle waarnemingen $\leq$ 200 dagen.

c) alle waarnemingen $\leq$ 50 dagen.

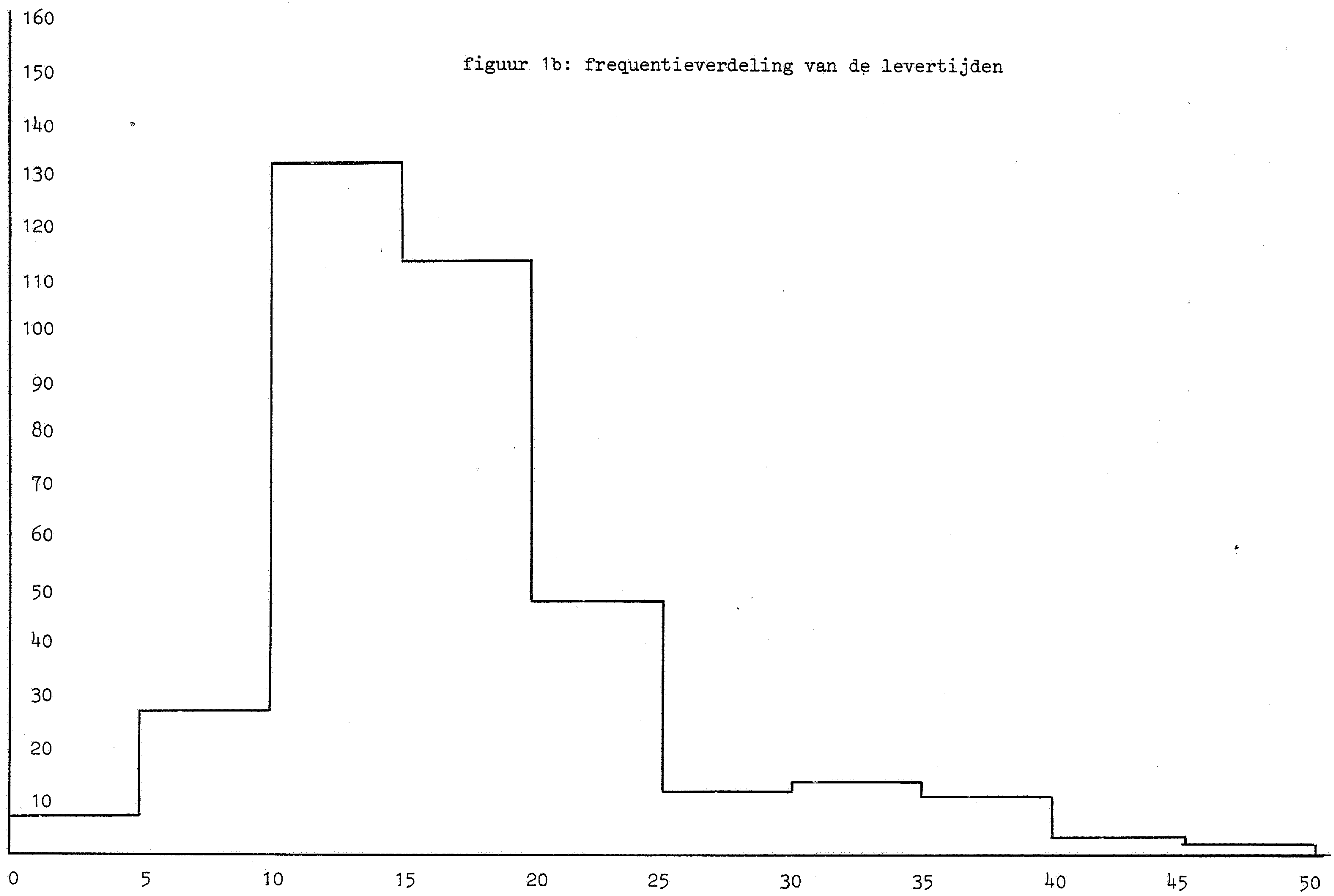
Aan de verdeling getekend in fig. 1.c. probeerden we in eerste instantie een lognormale verdeling aan te passen.

Een χ^2-toets voor aanpassing verwierp echter de hypothese dat de steekproef uit een (de best passende) lognormale verdeling getrokken was.



figuur 1: frequentieverdeling van de levertijd

figuur 1b: frequentieverdeling van de levertijden



In tweede instantie hebben we geprobeerd een Γ-verdeling aan te passen.

De dichtheid van de Γ-verdeling is: $f(x;\alpha,\sigma) = \dfrac{x^{\alpha-1} e^{-x/\sigma}}{\sigma^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}$

waarin $\alpha,\sigma > 0$.

De parameters α en σ hebben we op drie manieren geschat.

1) Momenten methode.

Verwachting en variantie van de $\Gamma(\alpha,\sigma)$ verdeling zijn resp. $\alpha\sigma$ en $\alpha\sigma^2$.
Zij $\bar{x}$ het steekproefgemiddelde en $s^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$ de steekproef-variantie dan zijn de momentenschattingen $\hat{\alpha},\hat{\sigma}_1$:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\bar{x}^2}{s^2} \quad \text{en} \quad \hat{\sigma}_1 = \frac{s^2}{\bar{x}} .$$

2) Zelfde methode als boven met de Sheppard-correctie voor de variantie:

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{\bar{x}^2}{s^2-sh} \qquad \text{en} \quad \hat{\sigma}_2 = \frac{s^2-sh}{\bar{x}}$$

waarin $sh = \frac{1}{12}$ b en b de klassebreedte is.

3) Benadering van de meeste aannemelijke schatters.

Uit de aannemelijkheidsvergelijkingen volgt dat de m.a. schatters $\hat{\alpha}_3$ en $\hat{\sigma}_3$ moeten voldoen aan: 1) $\hat{\sigma}_3 = \dfrac{\bar{x}}{\hat{\alpha}_3}$

en

$$2)\ \ln \hat{\alpha}_3 - \frac{\Gamma(\hat{\alpha}_3)}{\Gamma'(\hat{\alpha}_3)} = \ln \bar{x} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln x_i}{n}$$

Een benadering voor $\hat{\alpha}_3$ is:

$$\hat{\alpha}_3 = 2(\ln \bar{x} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \bar{x}_i).$$

We vonden $\bar{x} = 16.5$; $s^2 = 48.75$ en $sh = 2{,}08$.

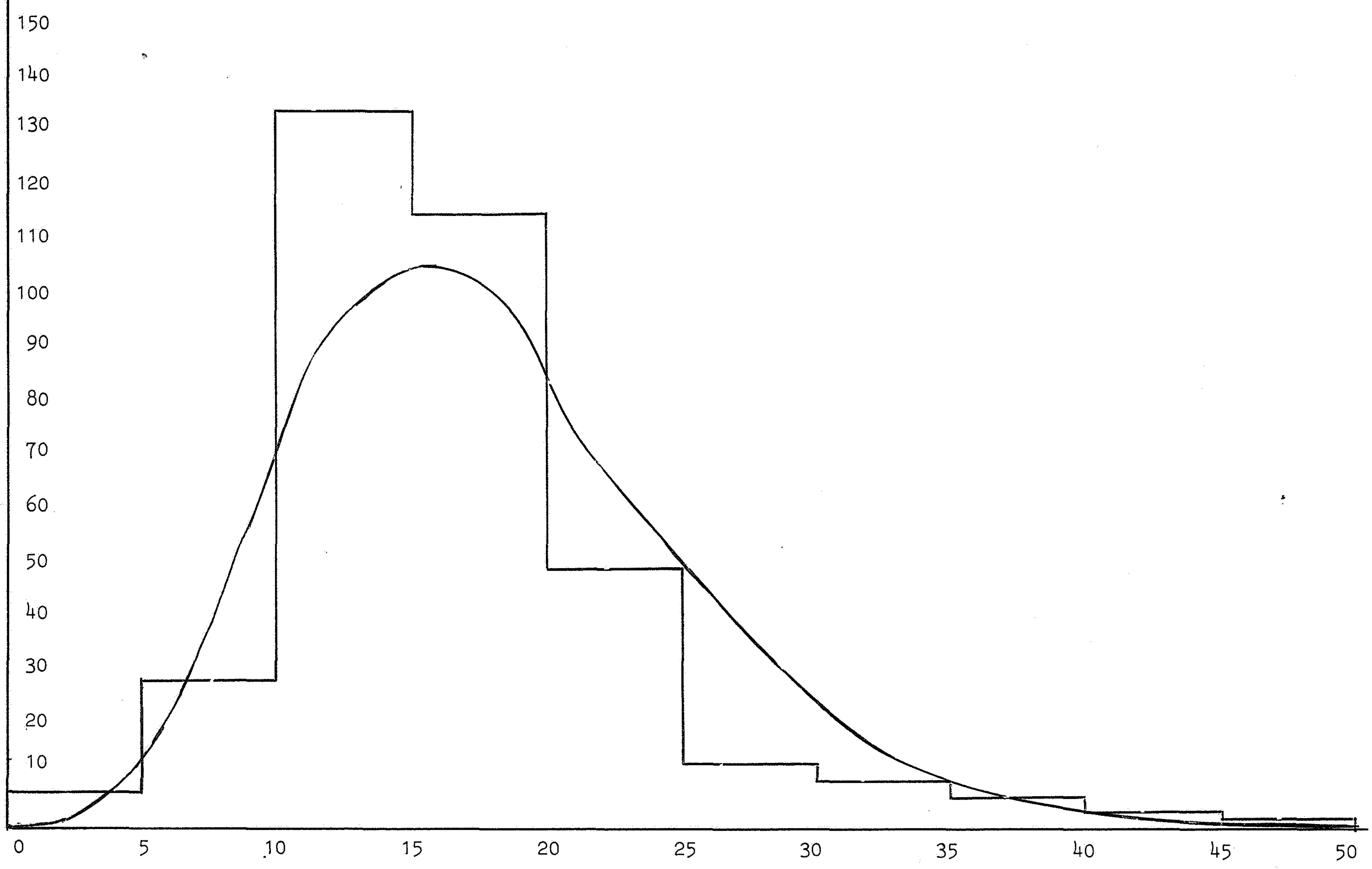
In onderstaande tabel staan de gevonden schattingen voor α en β.

methoden	α	σ
1	5.5	3.0
2	5.8	2.83
3	5.7	2.88

Alle drie de gamma-verdelingen worden bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van .05 verworpen.

In fig.2. is fig. 1.c getekend met de dichtheid van de best passende der bovenstaande geschatte gammaverdelingen.
Ook hieruit blijkt duidelijk dat deze gammaverdeling niet past.
In hoofdstuk III komen we op dit probleem terug.

figuur 2: best passende Γ-verdeling van de levertijd



II. Voorspellen met behulp van exponentiële effening.

Tijdreeksen

Een tijdreeks is een verzameling stochastische variabelen $\{\underline{x}_t \mid t \in T\}$ waarin T een deelverzameling van de reële getallen is.
De ordening van de reële getallen induceert een ordening op de tijdreeks: als $t_1 > t_2$ dan zeggen we dat $\underline{x}_{t_1}$ zich later realiseert dan $\underline{x}_{t_2}$.
Veel processen in het dagelijks leven kunnen beschouwd worden als de realisering van een tijdreeks: De temperatuur op een vaste plaats bijvoorbeeld; vanaf een zeker tijdstip $t = 0$ kan men op elk willekeurig tijdstip t de temperatuur x_t meten.
Temperatuur is een voorbeeld van een continue tijdreeks, d.w.z. T is de verzameling van de reële getallen.
Wij zullen alleen discrete tijdreeksen beschouwen; in ons geval is T altijd de verzameling der gehele getallen: $T = \{\ldots -2,-1,0,1,2\ldots\}$.

De omzet per maand van een bepaald autoonderdeel kunnen we opvatten als een tijdreeks:
Op een zeker tijdstip zeg $t = 0$ komt een nieuw onderdeel op de markt.
De omzet in de 1^e maand na tijdstip $t = 0$ noemen we x_1, de omzet in de 2^e maand x_2 enz.
De rij getallen $x_1\ x_2\ x_3 \ldots$ beschouwen we als een realisatie van een tijdreeks $\{\underline{x}_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ waarin $\mathbb{N}$ de verzameling der natuurlijke getallen is.
In theoretische beschouwingen zullen we er van uitgaan dat het proces al oneindig lang aan de gang is, m.a.w. we beschouwen $x_1\ x_2\ x_3 \ldots$ als realisatie van een tijdreeks $\{\underline{x}_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$ met $\mathbb{Z} = \{\ldots -1,0,1,2\ldots\}$.

Modellen

Om een of ander fysisch proces duidelijk weer te geven proberen we een beschrijving van dat proces te geven in mathematische taal: het model.
We denken ons daartoe zo'n proces als de combinatie van een deterministisch 'waar' proces en een storingsfactor, die een stochastisch karakter heeft en meestal ruis genoemd wordt.

We gaan er van uit dat de toestanden van het proces waar het om gaat in reële getallen kunnen worden uitgedrukt.
We geven het deterministische proces weer als een functie van de tijd naar de reële getallen: f(t).
Het model wordt dan: $\underline{x}_t = f(t) + \underline{\delta}_t$ waarin $\underline{\delta}_t$ de ruis op het tijdstip t voorstelt.
Wij zullen er naar streven on f(t) zodanig te kiezen dat $E\underline{\delta}_t = 0$. Omdat we geen al te gecompliceerde functies voor f(t) willen beschouwen zal dit doel i.h.a. niet bereikt worden. Wij zullen echter wel doen alsof $E\underline{\delta}_t = 0$.

Economische processen kunnen vaak beschreven worden met behulp van een functie f(t) die de som is van een regressiefunctie r(t) en een periodieke functie s(t) : f(t) = r(t) + s(t).
r(t) drukt de niet periodieke verandering in de tijd uit (regressie) en is meestal een polynoom $r(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$.

s(t) drukt de periodieke verandering uit in de tijd (vaak noemt men dit ook regressie) en is meestal het gevolg van de seizoenswisselingen.

De omzet van autoonderdelen blijkt nauwelijks beïnvloed te worden door de wisseling der seizoenen, op enkele artikelen zoals antivries na.
(Deze wetenschap ontlenen wij aan de ervaring van de Heer Aandewiel die hiet voorraadbeheer van de A.R.M. reeds vele jaren leidt).
De functie s(t) zullen wij daarom verder buiten beschouwing laten: f(t) =r(t).

Als regressiefunctie is elke functie mogelijk.
Wij zullen ons beperken tot polynomen: $f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$.

(Een stelling uit de wiskunde leert ons dat elke continue functie op een eindig interval door een polynoom benaderd kan worden i.e. het verschil tussem een polynoom en de functie kan begrensd worden door een willekeurig klein getal).
Voor het bepalen van de graad (n) van f(t) zijn verschillende methoden bekent. Zie [1].

In de praktijk kiest men n meestal niet groter dan twee.
Op intuïtieve gronden kiezen ook wij alleen maar modellen van de orde kleiner dan of gelijk aan twee:

Een onderdeel komt gelijktijdig op de markt met het type auto waarin het onderdeel voorkomt. (We nemen eerst even aan dat zo'n onderdeel slechts in één type auto voorkomt).
Als we nu aannemen dat de kans op het defect van het onderdeel in een bepaalde doch willekeurige maand (dus onafhankelijk van de leeftijd van het onderdeel) een constante is, dan is de gemiddelde vraag naar dit onderdeel evenredig met het aantal in gebruik zijnde auto's.
Stel $v(t)$ is het aantal auto's verkocht in de t^{de} maand na het verschijnen van het betreffende type en $c(t)$ het aantal auto's dat in dezelfde maand naar het autokerkhof gaat.
Dan is het aantal in gebruik zijnde auto's/aan het begin van de t^{de} maand: $a(t) = \sum_{i=1}^{t-1} [v(i) - c(i)]$.

De verkoop van auto's zal i.h.a. een zodanig lichte trend vertonen dat we $v(t)$ met een lineaire functie kunnen benaderen. Omdezelfde reden zullen we aannemen dat $c(t)$ (die een afspiegeling van $v(t)$ is) met lineaire functie beschreven kan worden.

$a[t] = \sum_{i=1}^{t-1} [v(i) - c(i)]$ kunnen we dan met een kwadratische functie benaderen en dus ook de (daarmee evenredige) vraag naar het betreffende onderdeel.

Wanneer een onderdeel in meerdere typen auto's voorkomt blijft de orde van het model dezelfde:
Stel de vraag naar een onderdeel uit auto type A is $f_A(t) = a_0+a_1t+a_2t^2$; op tijdstip t_0 komt auto type B (met hetzelfde onderdeel) op de markt en veroorzaakt een vraag $f_B(t) = b_0+b_1(t-t_0)+b_2(t-t_0)^2$ dan is de totale vraag:

$$f(t) = \begin{cases} a_0+a_1t+a_2t^2 & \text{als } 0 \leq t < t_0 \\ f_A(t)+f_B(t) = (a_0+b_0-b_1t_0+b_2t_0^2) + (a_1+b_1-2t_0b_2)t + (a_2+b_2)t^2 & \text{als } t_0 \leq t \end{cases}$$

We zien dat op tijdstip t_0 alleen de coëfficiënten van het model veranderen maar niet de orde. (behalve als $a_2+b_2 = 0$).
We zullen laten zien dat voorspelmethoden met behulp van exponentiële effening een zekre flexibiliteit (aanpassingsmogelijkheid) hebben t.o.v. deze soort veranderingen in het model.

Voorspellen

Het voorspellingsprobleem in ruime zin houdt zich bezig met het schatten van de kansverdelingen van de stoch. variabelen $\underline{x}_t$ met $t > t_0$ op grond van de realisatie van de reeks $\{\underline{x}_t \mid t \leq t_0, t \in T\}$.
Wij zullen ons beperken tot het schatten van de verwachting van $\underline{x}_{t_0+1}$ op het tijdstip t_0 (dus op grond van $\{x_t \mid t \leq t_0\}$).
Later zullen we zien dat $\underline{x}_t$ voor $t \in T$ een Poissonverdeling heeft zodat we de verdeling kennen als we de verwachting weten.
Ons probleem is dus een schatter $\underline{V}_{t_0+1} = V_{t_0+1}(\ldots \underline{x}_{t_0-2}, \underline{x}_{t_0-1}, \underline{x}_{t_0})$ voor $E\underline{x}_{t_0+1}$ te vinden voor elk tijdstip $t_0 \in T$.

Een voorbeeld van zo'n schatter is het voortschrijdend gemiddelde:

$$\underline{V}_{t_0+1}(\underline{x}_{t_0-n+1}, x_{t_0-n+2}, \ldots, \underline{x}_{t_0}) = \frac{1}{n}[\underline{x}_{t_0-n+1} + \underline{x}_{t_0-n+2} + \ldots + \underline{x}_{t_0}]$$

Bij de A.R.M. schat men de vraag momenteel met het voortschrijdend gemiddelde van de laatste drie maanden.
Een algemeen voorbeeld van zo'n schatter is:

$$\underline{V}_{t_0+1} = V_{t_0+1}(\ldots \underline{x}_{t_0-2}, \underline{x}_{t_0-1}, \underline{x}_{t_0}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \, \underline{x}_{t_0-i}$$

We noemen dit een lineaire schatter. Het voortschrijdend gemiddelde is een voorbeeld van een lineaire schatter: kies $a_i = 0$ als $i \geq n$ en $a_i = \frac{1}{n}$ voor $0 \leq i < n$.
We zullen alleen lineaire schatters beschouwen.

De verzameling van schatters $\{V_t \mid t \in T\}$ noemen we een voorspellingssysteem. Drie belangrijke eigenschappen van een voorspellingssysteem zijn de volgende:

1. De juistheid. Dit is een eigenschap van elke schatter apart. De mate van juistheid zullen wij nagaan m.b.v. de verliesfunctie $(V_t - x_t)^2$ hetgeen een schatting is voor $E(\underline{V}_t - E\underline{x}_t)^2$.
Ter vergelijking zullen wij een gewogen gemiddelde van dit verlies van een aantal voorspellingen beschouwen.

2. Flexibiliteit. Dit is een eigenschap van het voorspellingssysteem als geheel. We bedoelen hiermee een aanpassing van het systeem aan veranderingen van de parameters van het model.

3. Eenvoud. Het is van belang dat de noodzakelijke berekeningen snel en gemakkelijk berekend kunnen worden. We zullen zien dat de manier van verwerken (manuaal of electronisch) een belangrijke invloed heeft op de keuze van de voorspelmethode.

<u>Exponentiële Effening</u>

Zij gegeven een rij getallen $\ldots x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2 \ldots$;
Exponentiële effening verkrijgen we door de volgende recurrente betrekking $S_1[t] = \alpha_1\, x_t + (1-\alpha_1)\, S_1[t-1]$, waarin α_1 een constante met $0 \leq \alpha_1 \leq 2$. Onder exponentiële effeninf van de n^{de} orde verstaan wij exponentiële effening toegepast op de rij getallen verkregen bij exponentiële affening van de (n-1)ste orde met een nieuwe constante $\alpha_n \in [0,2]$:

$$S_1[t] = \alpha_1\, x_t + (1-\alpha_1)\, S_1[t-1]$$
$$S_2[t] = \alpha_2\, S_1[t] + (1-\alpha_2)\, S_2[t-1]$$
$$S_n[t] = \alpha_n\, S_{n-1}[t] + (1-\alpha_n)\, S_n[t-1] \qquad \text{waarin } \alpha_i \in [0,2] \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Wij beschouwen alleen gevallen waarin $n \leq 3$ en voor de eenvoud $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. De door ons te beschouwen schatters voor $E\underline{x}_{t_0+1}$ zijn lineaire combinaties van $\underline{S}_1[t_0]$, $\underline{S}_2[t_0]$ en $\underline{S}_3[t_0]$, waarin $\underline{S}_1[t_0]$, $\underline{S}_2[t_0]$ en $\underline{S}_3[t_0]$ verkregen worden met behulp van exponentiële effening uit de door ons te beschouwen tijdreeks $\{\underline{x}_t \mid t \in Z\}$.
$\underline{S}_i[t_0]$ is voor i = 1,2,3 een functie van $\underline{x}_{t_0}, x_{t_0-1}$, zodat op tijdstip t_0 $S_i[t_0]$ bekend is.

We veronderstellen $\underline{x}_t = f(t) + \underline{\delta}_t$ met $E\underline{\delta}_t = 0$ en $f(t) = a_0+a_1t+a_2t^2$.
De schatter $\underline{V}_{t_0+1}$ voor $E\underline{x}_{t_0+1}$ vinden we als volgt:
We schatten de parameters $\underline{a}_i$ $(i = 0,1,2)$ van het model met behulp van gewogen kleinste kwadratenschatters $\underline{\hat{a}}_{0,t_0+1}$, $\underline{\hat{a}}_{1,t_0+1}$ en $\underline{\hat{a}}_{2,t_0+1}$. Onze schatter is $\underline{V}_{t_0+1} = \underline{\hat{a}}_{0,t_0+1} + \underline{\hat{a}}_{1,t_0+1}(t_0+1) + \underline{\hat{a}}_{2,t_0+1}(t_0+1)^2$.

Bij een algemeen regressiemodel met onbekende parameters $\theta_1,\theta_2,\ldots\theta_n$: $\underline{x}_t = f(t;\theta_1,\theta_2,\ldots\theta_n) + \underline{u}_t$ waarin $E\underline{u}_t = 0$, en waarvan een aantal stochasten zeg $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \ldots \underline{x}_k$ zich gerealiseerd hebben zijn de kleinste kwadratenschattingen $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots \hat{\theta}_k$ bepaald door de voorwaarde

$$\min_{\substack{\theta_i \in \mathbb{R}\\ i=1\ldots k}} \sum_{j=1}^{k} (x_j - f(j;\theta_1,\theta_2,\ldots\theta_n))^2 = \sum_{j=1}^{k} (x_j-f(j;\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots\hat{\theta}_n))^2.$$

Wij zullen echter de "gewogen" kleinste kwadratenschatters beschouwen:
Op tijdstip t_0 zijn x_{t_0}, x_{t_0-1}, x_{t_0-2},.... bekend.

De door ons te beschouwen schattingen $\hat{a}_{0,t_0+1}$, $\hat{a}_{1,t_0+1}$, $\hat{a}_{2,t_0+1}$ zijn bepaald door de voorwaarde

$$\min_{a_1,a_2,a_3} \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j\{x_{t_0-j} - [a_0+a_1(t_0-j) + a_2(t_0-j)^2]\}^2 =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j\{x_{t_0-j} - [\hat{a}_{0,t_0+1} + \hat{a}_{1,t_0+1}(t_0-j) + \hat{a}_{2,t_0+1}(t_0-j)^2]\}^2.$$

Hierin is α een constante met $\alpha \in (0,1]$.
We schatten dus het model zodanig dat de <u>gewogen</u> gemiddelde kwadratische afwijking van de waarnemingen minimaal is.
Door de wegingsfactoren wordt de afwijking van oudere waarnemingen minder zwaar meegeteld. Hierdoor verkrijgt het bestellingssysteem een zekere flexibiliteit.
Voor de convergentie van bovenstaande reeks is noodzakelijk dat $0 \leq \alpha \leq 2$. We zullen alleen waarden uit het interval $(0\ 1]$ beschouwen.

We vinden $\hat{a}_{i,t_0+1}$ $i=0,1,2$ dus als oplossing van het probleem.

Minimaliseer $Q(\hat{a}_{0,t_0+1},\hat{a}_{1,t_0+1},\hat{a}_{2,t_0+1} =$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j \{x_j - (\hat{a}_{0,t_0+1}+\hat{a}_{1,t_0+1}(t_0-j)+\hat{a}_{2,t_0+1}(t_0-j)^2)\}^2.$$

Hieruit volgt dat $\hat{a}_{i,t_0+1}$ $i=0,1,2$ aan de volgende drie vergelijkingen moet voldoen:

1) $\delta Q/\delta\hat{a}_{0,t_0+1} =$

$$= -2 \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j [x_{t_0-j}-\hat{a}_{0,t_0+1}-\hat{a}_{1,t_0+1}(t_0-j)-a_{2,t_0+1}(t_0-j)^2] = 0.$$

2) $\delta Q/\delta\hat{a}_{1,t_0+1} =$

$$= -2 \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j [x_{t_0-j}-\hat{a}_{0,t_0+1}-\hat{a}_{1,t_0+1}(t_0-j)-\hat{a}_{2,t_0+1}(t_0-j)^2](t_0-j) = 0.$$

3) $\delta Q/\delta\hat{a}_{2,t_0+1} =$

$$= -2 \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j [x_{t_0-j}-\hat{a}_{0,t_0+1}-\hat{a}_{1,t_0+1}(t_0-j)-a_{2,t_0+1}(t_0-j)^2](t_0-j)^2 = 0.$$

Bij het oplossen maken we gebruik van de volgende formules:

Zij $x_{t_0}, x_{t_0-1}, x_{t_0-2}$, een rij getallen en $S_1[t_0]$, $S_2[t_0]$, $S_k[t_0]$ bepaald m.b.v. exponentiële effening (van de k^{de} orde) dan geldt:

$$S_{k+1}[t_0] = \alpha^{k+1} \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i \binom{i+k}{k} x_{t_0-i} \qquad k = 0,1,2,\ldots .$$

Hieruit volgt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i x_{t_0-i} = \frac{1}{\alpha} S_1[t_0]$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i \, i x_{t_0-i} = \frac{1}{\alpha^2} \{S_2[t_0] - \alpha S_1[t_0]\}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i \, i^2 x_{t_0-i} = \frac{1}{\alpha^3} \{2S_3[t_0]-3\alpha S_2[t_0]+\alpha^2 S_1[t_2]\}.$$

Als oplossing van de drie bovenstaande vergelijkingen vinden we na stug rekenwerk:

$$\hat{a}_{2,t_0+1} = \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2} \{S_1[t_0]-2S_2[t_0]+S_3[t_0]\}$$

$$\hat{a}_{1,t_0+1} = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} \{(6-5\alpha)S_1[t_0]-(10-8\alpha)S_2[t_0]+ (4-3\alpha)S_3[t_0]\} - 2\hat{a}_{2,t_0+1}t_0$$

$$\hat{a}_{0,t_0+1} = 3S_1[t_0] - 3S_2[t_0] + S_3[t_0] - \hat{a}_{1,t_0+1}t_0 - \hat{a}_{2,t_0+1}t_0^2$$

Onze schatter wordt dus $\underline{V}_{t_0+1} = \underline{\hat{a}}_{0,t_0+1} + \underline{\hat{a}}_{1,t_0+1}(t_0+1) + \underline{\hat{a}}_{2,t_0+1}(t_0+1)^2$.
Om dit uit te rekenen beschouwen we de rij $\{\underline{y}_t \mid t \in Z\}$ met
$\underline{y}_{i-t_0} = \underline{x}_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \underline{\delta}_i = b_0 + b_1(i-t_0) + b_2(i-t_0)^2 + \underline{\delta}_i$
waarin $b_0 = a_0 + a_1 t_0 + a_2 t_0^2$, $b_1 = a_1 + 2a_2 t_0$ en $b_2 = a_2$.
Op tijdstip t_0 zijn dezelfde gewogen kleinste kwadratenschatters als boven voor b_0, b_1 en b_2:

$$\underline{\hat{b}}_0 = 3\underline{S}_1[t_0] - 3\underline{S}_2[t_0] + \underline{S}_3[t_0]$$

$$\underline{\hat{b}}_1 = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} \{(6-5\alpha)\underline{S}_1[t_0]-(10-8\alpha)\underline{S}_2[t_0]+(4-3\alpha)\underline{S}_3[t_0]\}$$

$$\underline{\hat{b}}_2 = \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2} \{\underline{S}_1[t_0]-2\underline{S}_2[t_0]+\underline{S}_3[t_0]\}$$

Aangezien $E\underline{x}_0 = E\underline{x}_{t_0}$ is

$$\underline{V}_{t_0+1} = \underline{\hat{b}}_0 + \underline{\hat{b}}_1 + \underline{\hat{b}}_2 = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \{(\alpha^2+3\alpha+3)\underline{S}_1[t_0]+(\alpha-3)\underline{S}_2[t_0]+\underline{S}_3[t_0]\}.$$

We zien nu het voordeel van deze schattingsmethode.
Als op tijdstip t_0 de schattingen $S_i[t_0]$ $i = 1,2,3$ bekend zijn dan kan $S_i[t_0+1]$ voor $i = 1,2$ en 3 dus V_{t_0+2} berekend worden als x_{t_0+1} bekend is. Slechts de waarden $S_1[t_0]$, $S_2[t_0]$ en $S_3[t_0]$ moeten onthouden worden. We komen hier nog op terug.

We hebben op intuitieve gronden aangenomen dat we de vraag per tijdseenheid met een kwadratisch model kunnen beschrijven. Aangezien de verandering in de vraag zeer gering is met betrekking tot de bestelperiode (2 weken) willen wij ook modellen van lagere orde beschouwen.

a) In het geval $\underline{x}_t = a_0 + a_1 t + \underline{\delta}_t$ vinden we op tijdstip t_0:

$$\underline{\hat{a}}_{1,t_0+1} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\{\underline{S}_1[t_0]-\underline{S}_2[t_0]\}$$

$$\underline{\hat{a}}_{0,t_0+1} = 2\underline{S}_1[t_0] - \underline{S}_2[t_0] - \hat{a}_{1,t_0+1}t_0$$

waaruit volgt:

$$\underline{V}^{(2)}_{t_0+1} = \frac{1}{1-\alpha}\{(2-\alpha)\underline{S}_1[t_0]-\underline{S}_2[t_0]\}.$$

b) In het geval $\underline{x}_t = a_0 + \underline{\delta}_t$ vinden we op tijdstip t_0:

$$\underline{\hat{a}}_{0,t_0+1} = \underline{S}_1[t_0] \Longrightarrow \underline{V}^{(1)}_{t_0+1} = \underline{S}_1[t_0].$$

Wat betreft de juistheid van deze schatters kunnen we zeggen dat ze allen asymptotisch zuiver zijn, d.w.z. als $\underline{x}_t = f_i(t) + \underline{\delta}_t$ met $E\underline{\delta}_t = 0$ dan geldt:

$$E\underline{V}^{(i)}_{t_0+1} = f_i(t_0+1) \qquad \text{voor } i = 1,2 \text{ en } 3 \text{ en waarin}$$

$f_1(t) = a_0$, $f_2(t) = a_0 + a_1 t$ en $f_3(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$.

(Asymptotische) zuiverheid alleen is niet voldoende voor de juistheid van een schatter: grote variantie van de schatter impliceert een grote onnauwkeurigheid. Bij de keuze van de voorspelmethode zullen we ons door de mate van nauwkeurigheid laten leiden.

Keuze van de voorspelmethode

We hebben de keus uit drie voorspelmethoden namelijk de hierboven beschreven voorspellingen m.b.v. exponentiële effening van resp. de eerste, de tweede en de derde orde.
Per methode moeten we nog een keuze maken voor de waarde van de effeningsconstante α.
De effeningsconstante bepaalt de flexibiliteit: hoe groter de waarde van α (in het interval $(0,1)$) hoe groter de flexibiliteit.
Voor grotere waarden van α zijn de schattingen echter onnauwkeuriger, vooral wanneer de spreiding van de ruis niet zo klein is.
Bij tijdreeksen met mooie eigenschappen kan men langs theoretische weg een optimale waarde van α bepalen.
We zullen ons beperken tot de volgende waarden van α:
0.1, 0.2, 0.3, 0.4 en 0.5.

De A.R.M. verschafte ons informatie over de omzet per maand van 32 artikelen over een periode van 20 maanden.
Op deze 32 tijdreeksen (van 20 waarnemingen) werden 17 voorspelmethoden ter vergelijking toegepast:
Exp. effening van de 1e, 2e en 3e orde met de 5 bovengenoemde waarden van de effeningsconstante, het voortschrijdend gemiddelde over 6 maanden en het voortschrijdend gemiddelde over drie maanden.
Ter vergelijking van deze 17 methoden beschouwden we het kwadratisch verschil tussen omzet en voorspelling.
Van deze kwadratische verschillen beschouwden we per artikel een gewogen gemiddelde over alle maanden behalve de eerste zes. Dit laatste in verband met het 6 maandelijks gemiddelde en de aanpassing van de effeningsmethode: immers op tijdstip 0 zijn $S_1[0]$, $S_2[0]$ en $S_3[0]$ niet bekend en moeten we deze een startwaarde geven. We kozen steeds $S_1[0] = W[1]$, $S_2[0] = S_3[0] = 0$. (Hierin is $W[1]$ de eerste waarneming.) We namen een gewogen gemiddelde omdat een voorspelling van 101 bij een omzet van 100 "minder erg" is als een voorspelling van 2 bij een omzet van 1.
Als weginsfactor werden twee mogelijkheden beschouwd:
Zij $W_i[t]$ de omzet van artikel i in maand t en $V_i[t]$ de voorspelling daarvoor. De wegingsfactoren waren:

Tabel 2.1.

exp. effening van de orde 1					exp. effening van de orde 2				
1.729	1.084	.996	1.038	1.133	2.308	1.359	1.535	1.991	2.843
.981	.838	1.012	1.173	1.312	1.532	1.772	1.923	2.126	2.584
1.179	1.159	1.133	1.035	.930	1.526	1.423	1.165	.979	.896
1.341	1.324	1.356	1.409	1.478	1.088	1.381	1.566	1.778	2.057
1.628	1.585	1.604	1.659	1.733	1.074	1.395	1.720	2.038	2.377
12.375	13.621	14.183	14.454	14.804	11.622	14.753	19.441	32.338	43.763
1.413	1.265	1.213	1.174	1.146	1.208	1.168	1.172	1.298	1.627
1.436	1.594	1.780	1.983	2.232	1.186	1.720	2.281	3.099	3.822
5.424	5.908	6.511	7.217	8.029	4.501	5.508	7.715	11.005	15.956
2.324	1.476	1.239	1.085	.983	3.120	2.168	1.951	1.633	1.715
2.330	2.923	3.555	4.455	5.606	1.885	2.990	5.794	7.495	9.265
11.016	10.091	10.303	10.566	10.761	17.123	14.109	18.378	24.500	32.060
44.175	31.680	27.852	26.049	24.876	21.998	23.658	25.924	29.066	45.732
1.821	2.150	2.474	2.796	3.142	2.157	2.815	4.265	5.702	6.328
3.151	1.956	1.605	1.558	1.639	1.690	1.275	1.509	2.052	2.372
1.923	2.019	2.153	2.193	2.240	1.477	2.025	2.293	2.669	3.122
7.504	8.823	10.234	11.540	12.741	11.084	14.353	18.064	20.726	22.809
3.580	2.803	2.849	3.154	3.628	2.105	2.648	3.788	6.004	7.550
3.712	2.094	1.659	1.510	1.465	1.249	1.212	1.332	1.510	1.774
2.849	3.063	3.344	3.569	3.770	5.207	3.631	4.135	4.870	5.749
2.028	1.887	1.914	1.933	1.936	3.936	2.343	2.311	2.581	3.678
.531	.527	.553	.593	.641	.551	.586	.694	.833	.982
2.428	1.614	1.457	1.518	1.664	1.331	1.244	1.655	2.147	2.778
.998	.968	.980	1.006	1.043	.963	1.009	1.097	1.231	1.400
2.028	2.710	3.279	3.786	4.457	2.071	3.161	4.730	6.419	8.793
10.332	7.391	6.416	6.246	6.554	6.589	4.959	5.597	7.430	9.941
5.978	5.030	5.125	5.468	5.941	3.961	4.775	6.052	8.309	11.925
1.412	1.508	1.650	1.779	1.904	1.437	1.817	2.120	2.402	2.699
.940	1.078	1.121	1.143	1.157	1.007	1.183	1.284	1.342	1.377
.766	.740	.789	.828	.862	.843	.801	.943	1.037	1.125
1.052	1.001	1.081	1.124	1.153	1.384	1.118	1.228	1.358	1.602
.972	.990	1.040	1.102	1.178	1.624	1.232	1.330	1.563	1.950
4.417	3.841	<u>3.827</u>	3.942	4.129	3.776	3.925	4.844	6.235	8.208

exp. effening van de orde 3					6m.gem.	3m.gem.
2.378	2.628	3.234	3.801	5.125	.939	1.078
2.301	2.323	2.587	3.772	11.109	1.176	1.400
1.827	1.658	1.204	1.186	1.409	1.724	1.140
1.233	1.626	1.958	2.447	3.104	1.418	1.237
1.190	1.833	2.436	3.022	4.021	1.652	1.762
14.328	28.307	44.793	60.684	75.418	17.042	20.990
1.258	1.258	1.656	2.383	3.262	1.332	1.377
1.464	2.383	3.496	4.792	6.498	1.701	1.985
4.550	7.968	17.927	47.603	87.604	5.671	8.475
3.388	4.783	3.901	3.282	3.103	1.911	1.127
2.153	6.069	9.437	12.976	17.395	3.802	4.908
17.399	82.464	94.899	166.260	174.417	13.108	13.666
21.975	29.055	49.343	347.099	483.816	35.164	31.971
2.638	5.993	7.066	7.760	9.109	2.426	3.820
1.280	1.403	2.243	2.867	3.552	1.547	2.031
1.835	2.418	3.169	4.078	5.466	2.336	2.421
15.572	25.399	28.066	29.514	31.856	9.745	12.998
2.172	3.839	7.015	9.843	13.024	2.454	2.797
1.097	1.341	1.711	2.334	3.957	1.776	1.447
5.657	5.097	6.648	8.438	10.949	3.823	4.003
4.299	3.401	4.616	10.988	17.371	2.268	2.569
.566	.698	.929	1.184	1.436	.463	.591
1.115	1.644	2.541	3.728	4.917	1.267	1.275
.981	1.101	1.339	1.653	2.002	1.036	1.027
2.400	5.798	7.921	10.409	13.745	3.848	4.014
4.941	5.202	8.707	15.731	20.954	5.734	4.363
4.143	6.191	10.590	21.429	31.678	4.445	6.500
1.606	2.200	2.664	3.094	3.744	1.683	1.509
1.148	1.425	1.553	1.599	1.649	1.152	1.322
.777	1.010	1.193	1.337	1.546	.792	.905
1.323	1.765	1.794	2.108	2.995	1.281	1.168
1.722	1.692	2.339	3.162	5.773	1.071	.960
4.085	7.812	10.593	25.018	33.188	4.243	4.589

Tabel 2.2

exp. effening van de orde 1					exp. effening van de orde 2				
7.049	3.618	2.800	2.638	2.703	11.853	3.582	2.772	3.104	3.778
1.033	1.229	1.568	1.871	2.120	2.826	3.102	3.374	3.645	3.869
2.246	1.587	1.344	1.226	1.154	3.928	1.775	1.493	1.489	1.539
.823	.924	1.010	1.085	1.161	1.225	1.251	1.365	1.556	1.862
.735	.809	.920	1.037	1.156	1.113	1.193	1.451	1.758	2.138
30.390	30.050	30.880	31.498	31.724	52.442	38.890	37.688	37.766	37.938
1.543	1.891	2.068	2.182	2.261	2.834	2.622	2.744	2.967	3.219
1.365	1.493	1.644	1.802	1.967	2.043	1.954	2.261	2.688	3.194
7.825	8.929	9.634	10.077	10.408	15.063	12.746	12.549	12.999	14.283
11.443	4.659	2.871	2.271	2.013	19.119	3.545	2.305	2.090	1.977
3.305	3.689	4.403	5.282	6.273	5.747	5.587	7.435	9.971	12.983
45.155	32.614	28.102	25.874	24.530	79.873	34.635	26.912	24.910	25.050
22.802	24.744	26.512	27.101	27.025	31.217	35.653	35.774	35.909	37.329
3.645	3.276	3.176	3.164	3.175	7.210	4.067	3.662	3.863	4.293
.939	.775	.846	.945	1.041	.796	1.169	1.422	1.621	1.875
1.878	2.183	2.440	2.642	2.794	3.151	3.198	3.524	3.823	4.117
7.360	7.462	7.328	7.331	7.558	18.031	11.165	9.952	10.873	13.200
1.970	2.490	2.957	3.396	3.855	3.196	4.070	4.788	5.763	7.053
1.683	1.326	1.344	1.444	1.562	1.211	1.642	1.986	2.294	2.603
3.876	3.355	3.426	3.620	3.849	10.998	4.814	4.582	5.239	6.160
6.824	5.605	5.345	5.269	5.189	16.173	7.608	6.115	5.719	5.473
.385	.410	.437	.466	.502	.484	.522	.565	.662	.813
1.232	1.431	1.626	1.797	1.968	1.670	2.117	2.384	2.733	3.237
.574	.625	.669	.708	.749	.714	.799	.872	.996	1.166
3.687	3.158	3.378	3.806	4.349	6.478	4.337	5.044	6.446	8.451
2.723	3.483	4.127	4.623	5.100	4.286	5.879	6.457	7.166	8.480
6.656	9.480	11.685	13.649	15.000	12.466	15.995	19.187	23.332	28.749
.607	.813	.969	1.101	1.238	.998	1.328	1.561	1.909	2.414
.953	.819	.828	.877	.941	1.504	1.001	1.105	1.318	1.586
.906	.693	.684	.729	.798	1.498	.867	.924	1.125	1.405
2.384	1.416	1.425	1.575	1.764	3.835	1.597	2.014	2.603	3.302
2.787	2.595	2.663	2.785	2.924	5.218	3.223	3.222	3.520	3.905
5.837	5.238	5.285	5.434	5.608	10.288	6.935	6.797	7.245	8.045

exp. effening van de orde 3					6m.gem.	3m.gem.
9.937	2.547	2.943	4.261	6.142	2.208	2.736
4.270	3.838	4.252	4.731	5.225	1.691	2.547
3.608	1.742	1.935	2.100	2.345	1.821	1.518
1.395	1.378	1.692	2.292	3.290	1.084	1.122
1.348	1.450	1.991	2.710	3.745	.882	1.075
51.136	36.484	39.484	42.064	45.571	33.489	42.172
2.946	2.721	3.330	3.977	4.987	2.199	2.841
2.125	2.165	2.934	3.873	5.021	1.510	2.147
16.209	12.639	13.441	16.200	22.013	9.606	11.617
14.619	3.437	3.299	2.460	2.353	3.395	1.866
5.939	6.790	11.050	16.391	22.934	3.465	4.604
68.093	26.965	26.119	26.736	32.775	36.594	26.143
39.536	38.635	40.752	46.739	56.564	31.706	39.012
6.832	3.374	4.103	5.329	7.230	3.130	4.030
1.079	1.586	1.859	2.315	3.127	.834	1.254
3.545	3.620	4.228	4.900	5.853	2.477	3.416
19.210	10.520	11.741	16.544	24.313	8.256	7.549
4.162	4.854	6.239	8.485	11.551	2.577	3.422
1.546	2.069	2.576	3.128	3.828	1.247	1.507
10.797	4.376	5.713	7.709	10.165	3.530	4.342
15.950	5.720	5.384	5.681	5.897	6.087	6.458
.561	.577	.716	1.000	1.433	.403	.460
2.132	2.475	2.952	3.823	5.280	1.495	1.647
.825	.889	1.102	1.450	1.908	.739	.824
6.304	4.533	6.706	10.321	15.843	2.915	4.270
5.990	6.935	7.554	9.619	14.133	4.553	4.118
16.033	19.375	25.613	35.460	48.321	9.760	14.928
1.331	1.634	2.183	3.134	4.522	1.024	1.021
1.486	1.117	1.513	2.029	2.723	.808	.959
1.455	.923	1.222	1.749	2.498	.614	.810
2.682	1.802	2.999	4.192	5.805	1.512	1.394
4.789	3.114	3.830	4.525	5.313	2.714	2.271
10.246	6.884	7.872	9.560	12.272	5.760	6.377

1) $\frac{1}{V_i[t]}$. Hierdoor werd een (in de statistiek veelgebruikte) χ^2-grootheid verkregen. Daar het soms voorkwam dat $V_i(t) \leq 0$ namen we als wegingsfactor $\frac{1}{\max(1,V_i(t))}$.

2) $\frac{1}{\max(1,W_i(t])}$. Juist omdat bij kleine omzetten een afwijkende (te hoge) voorspelling ongunstig is hebben wij ook deze wegingsfactor beschouwd.

In de tabellen 2.1 en 2.2 staat het berekende verlies per methode en per artikel in tabel 2.1 volgens de verliesfunctie

$$\frac{1}{14}\sum_{t=7}^{20}\frac{(W_i[t]-V_i[t])^2}{\max(1,V_i[t])}$$

en in tabel 2.2 volgens de verliesfunctie

$$\frac{1}{14}\sum_{t=7}^{20}\frac{(W_i[t]-V_i[t])^2}{\max(1,W_i[t])} .$$

In de onderste rij van beide tabellen staat het gemiddelde verlies over de 32 onderdelen per methode volgens bovenstaande verliesfuncties.

Het valt ons onmiddellijk op dat de voorspelmethode m.b.v. exp. effening van de eerste orde de beste is.
Vermoedelijk is de verandering van de vraag per maand zo gering dat het constante model: $\underline{x}_t = a_0 + \underline{\delta}_t$ het beste past.
Bovendien zijn hogere orde modellen gevoeliger voor de stochastiek in het model.

Wat betreft de waarde van α wijst de eerste verliesfunctie 0.3 als de beste aan terwijl de tweede 0.2 aanwijst.
De voorspellingsmethoden werden toegepast op omzetten per maand omdat deze gegevens beschikbaar waren. De bedoeling is echter dat ze worden toegepast op omzetten per bestelperiode (d.w.z. 2 weken). Bij kleinere perioden hoort i.h.a. een kleinere optimale waarde van de effeningsconstante. Om deze reden zouden wij willen kiezen voor de waarde <u>0.2</u>.

Het voorspellen met behulp van exp. effening van de eerste orde vergt weinig rekenwerk: op tijdstip t_0 is $V_{t_0+1} = S_1[t_0]$ bekend als $\underline{x}_{t_0+1}$ bekend is wordt $V_{t_0+2} = S[t_0+1] = \alpha x_{t_0+1} + (1-\alpha)S_1[t_0]$.

De methode heeft echter een nadeel:

Zij vereist dat voor elk artikel in elke periode de nieuwe schatting wordt berekend. Bij electronische verwerking is dit geen bezwaar, maar bij verwerking met de band is het ondoenlijk om elke twee weken alle 30.000 kaarten uit het systeem lichten en de nieuwe schatting te berekenen.

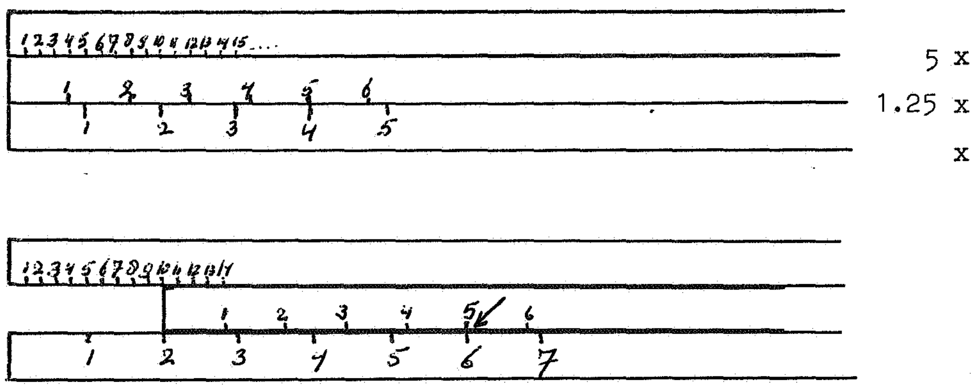
We stellen daarom de volgende methode voor:

Aan het eind van elke bestelperiode worden de nieuwe schattingen berekend voor alleen die artikelen die in de afgelopen periode verkocht zijn. Dit kan geschieden m.b.v. een speciale rekenlineaal

stel op tijdstip t_0 is $S\ t_0$ bekend,

in periode t_0+1 werden x_{t_0+1} stuks verkocht.

Voor de berekening $V_{t_0+2} = S[t_0+1] = 0.2x_{t_0+1} + 0.8S[t_0]$ gebruiken we de rekenlineaal uit fig. 2.1



figuur 2.1

Wanneer in een aantal perioden na tijdstip t_0 (waarop $S[t_0]$ bekend is) geen artikelen verkocht worden, kan men in de n-de periode hierna $S[t_0+n]$ m.b.v. de bovenstaande rekenlineaal en een hulpstuk als in fig. 2.2 onmiddellijk $S[t_0+n]$ berekenen:

$$S[t_0+n] = 0.2\times 0 + 0.8S[t_0+n-1] =$$

$$= 0.2\times 0 + 0.8(0.2\times 0+(0.8)^2 S[t_0+n.2]) = (0.8)^n S[t_0]$$

als in de perioden t_0+1, t_0+2, ..., t_0+n geen artikelen worden verkocht.

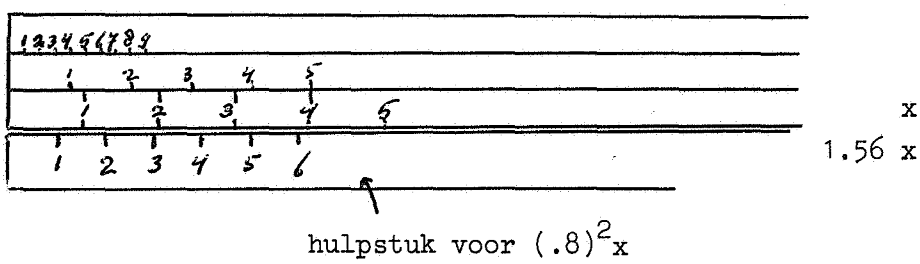


fig. 2.2. berekening van 0.64 × 3 = 1.98.

Voor elke n is een apart hulpstuk nodig.

Verdeling van $\underline{x}_t$

Vroeger merkten we al op dat $\underline{x}_t$ een Poisson-verdeling bezit. Dit kunnen we op intuïtieve gronden als volgt inzien:
Op een zeker tijdstip zijn er een zeker aantal auto's, zeg n in gebruik, waarin een bepaald onderdeel voorkomt.
We nemen aan dat de kans op het stuk gaan van zo'n onderdeel in de volgende bestelperiode voor elk onderdeel gelijk is, stel gelijk aan p. ')
Het aantal onderdelen dat in deze periode stuk gaat heeft nu een binomiale

') Natuurlijk is dit niet altijd het geval, daar deze kans afhankelijk is van de leeftijd van het onderdeel.

verdeling met parameters n en p, waarbij n "zeer groot" en p "zeer klein".
In dit geval kunnen we de binomiale verdeling benaderen met een Poisson-verdeling met parameter $\mu = np$.
Daar de vraag een afspiegeling is van het aantal onderdelen dat stuk gaat, passen wij een Poissonverdeling aan.

In tabel 3.3 staan van een 4-tal onderdelen een frequentietabel van de omzetten per 2 weken, de schatting van de verwachting $\mu = \bar{\underline{x}}$ en de verwachte aantallen gegeven dat $\underline{x}_t$ een Poisson (μ) verdeling bezit. Per onderdeel wordt de overschrijdingskans van de chi-kwadraat toets voor aanpassing gegeven.

De hypothese dat de omzet Poisson verdeeld is wordt in geen van deze gevallen verworpen (bij onbetrouwbaarheid van 10%).
Hieruit mag men niet concluderen dat de hypothese waar is. Dit zullen we in het vervolg echter wel doen.

Tabel 3.3. Frequentie van de omzet
Aanpassing van de geschatte Poissonverdeling

artikel	verkocht/ periode	waargenomen	verwacht	gemiddelde vraag	χ^2-toets
I	0	37	33,70		$\chi_1^2=1.918$
klep-	1	8	11,93	0.3542	
veer a)	≥ 2	3	2,19		$P\{\chi_1^2 \geq 1.918\}=\underline{0.18}$
II	0	16	16,50		
klep-	1	7	6,20	0.3750	$\chi_2^2=0.368$
veer b)	2	1	1,20		
	≥ 3	0	0,20		$P\{\chi_2^2 \geq 0.368\}=\underline{0.25}$
III	0	11	8,2		$\chi_3^2=4.341$
koppak-	1	6	10,6	1.30	
kingset	2	9	6,9		
	3	2	3,0		$P\{\chi_3^2 \geq 4.341\}=\underline{0.25}$
	≥ 4	2	1,3		
IV	0	15	11,90		$\chi_2^2=2.738$
portier	1	8	12,49	1.06	
L.H.	2	8	6,56		
	≥ 3	3	3,05		$P\{\chi_2^2>2.738\}=\underline{0.3}$

III. Bestellen.

Voorraadkosten

De Amsterdamse Rijtuigmaatschappij verplicht zich als Whole Sale dealer van Vauxhall Bedford tot het (snel) leveren van auto-onderdelen van dit merk. Hiertoe houdt zij een groot aantal onderdelen in voorraad. Dit brengt kosten met zich mee.
Deze kosten onderscheiden wij in drie soorten.

1) Bestelkosten.
   Hieronder verstaan wij de kosten van
   a) het plaatsen van de bestelling
   b) het in ontvangst nemen van de goederen.

2) Voorraadkosten.
   Hieronder verstaan we
   a) kosten van de opslagruimte
   b) rentabiliteitsverlies van het geïnvesteerde kapitaal

3) Boetekosten.
   Als een artikel waarom gevraagd wordt op een bepaald moment niet voorradig is, zijn er twee mogelijkheden:
   a) het artikel wordt toch verkocht d.m.v. een der 5 mogelijkheden beschreven op blz. 3 en 4, hoofdstuk I.
      Dit brengt extra kosten met zich mee.
   b) Het artikel wordt niet verkocht omdat bijvoorbeeld de klant niet wachten kan. In ons model beschouwen we dit alsof het artikel wel verkocht wordt gepaard gaande met zekere kosten, namelijk de winstderving en een eventueel (moeilijk in geld uit te drukken) goodwill verlies.

Gezien de laatste opmerking in 3b) en bovengenoemde verplichting tot leveren gaan we ervan uit dat elk artikel waarom gevraagd wordt ook verkocht wordt. Het verkrijgen van een zo groot mogelijke winst is - in dit geval dus equivalent met het toepassen van een voorraadbeheer dat de som der drie bovengenoemde soorten kosten minimaliseert.

Enkele notaties en begrippen

Onder de technische voorraad op een bepaald tijdstip verstaan we de voorraad die op dat moment in het magazijn aanwezig is; de economische voorraad S op dat moment is de technische voorraad plus de in bestelling zijnde voorraad.
Het bestelniveau B is een mogelijke waarde van S die aangeeft wanneer we moeten bestellen: zodra $s > B$ dan bestellen we en in het geval $s \leq B$ bestellen we niet.
Onder de bestelserie Q verstaan we de hoeveelheid die we per keer bestellen.

Strategiën

Onder een strategie zullen we een voorschrift verstaan dat bij elke stand van de (economische) voorraad aangeeft of er wel of niet besteld moet worden en indien er wel besteld moet worden, hoeveel er dan besteld moet worden.
Onder een optimale strategie verstaan we een strategie waarbij de verwachting van de gemiddelde kosten per tijdseenheid minimaal zijn.

Een voorbeeld van zo'n strategie is het z.g. (B.Q)-systeem: Op het moment dat de economische voorraad S (door een verkoop) kleiner dan of gelijk aan B wordt bestellen wij Q stuks. De optimale B^* en Q^* worden bepaald op grond van de vraag naar het betreffende artikel, de levertijd, voorraad-, bestel- en boetekosten. In het algemeen kunnen S^* en Q^* niet onafhankelijk aan elkaar bepaald worden.
Wij kunnen deze strategie niet toepassen daar de A.R.M. slechts één keer per twee weken kan bestellen.
Wij zullen echter hier toch de optimale Q^* (onafhankelijk van B) bepalen in het eenvoudige geval dat de afname constant is, daar we deze als benadering later zullen gebruiken.

Stel de voorraadkosten per stuk per periode zijn C_1, de bestelkosten per keer bedragen F en de vraag per periode is μ.

Als we nu per keer Q stuks bestellen dan bestellen we één keer per Q/μ perioden en is de gemiddelde voorraad Q/2.
Per periode zijn de kosten K(Q) nu:

$$K(Q) = \frac{Q}{2} C_1 + F/(Q/\mu) = \tfrac{1}{2} C_1 Q + \mu F \frac{1}{Q} .$$

We bepalen het minimum m.b.v. differentiaalrekening:

$$\frac{\delta K}{\delta Q} = \tfrac{1}{2} C_1 - \mu F \frac{1}{Q^2} = 0 \Longrightarrow Q = \sqrt{\frac{2\mu F}{C_1}}$$

Dit is de bekende formule van Camp.

Als de vraag een stochastisch karakter draagt dan kan men van te voren de vraag over de volgende perioden niet bepalen. Men doet dan een schatting. Wij zijn geïnteresseerd in de invloed die dit op de kosten heeft:
Zij μ de schatting van de vraag op het moment van beslissen en zij a de werkelijke vraag in de periode waarin de bestelde voorraad aan de vraag voldoet.

De optimale bestelserie zou zijn $Q^{(a)} = \sqrt{\frac{2aF}{C_1}}$.

De minimale kosten per perioden zijn derhalve:

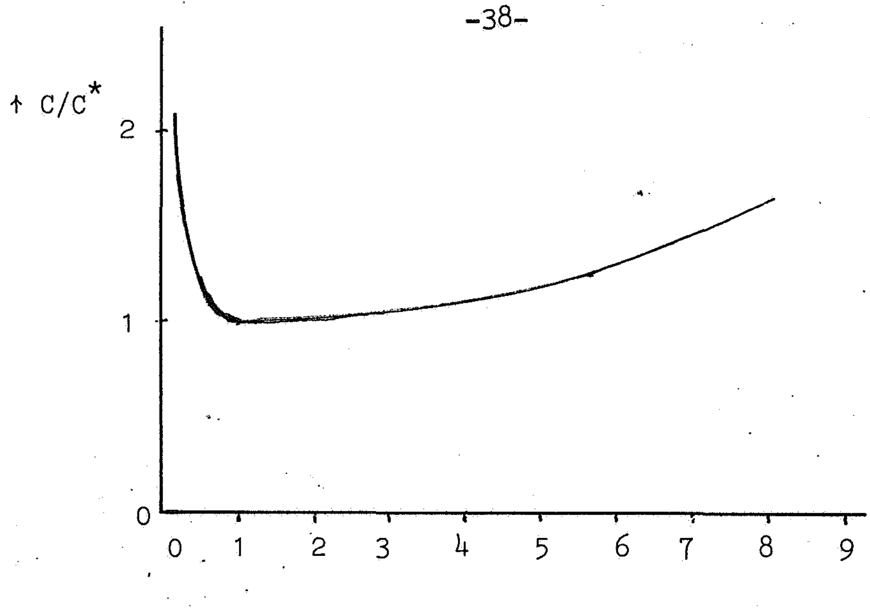
$$C^* = \tfrac{1}{2} C_1 \sqrt{\frac{2aF}{C_1}} + aF/\sqrt{\frac{2aF}{C_1}} = \sqrt{2aFC_1} .$$

Op grond van onze schatting zouden we bestellen $Q^{(\mu)} = \sqrt{\frac{2\mu F}{C_1}}$.
Dit brengt per periode de volgende kosten met zich mee:

$$C = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{2\mu F}{C_1}} C_1 + aF/\sqrt{\frac{2\mu F}{C_1}} = (\tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\mu}} + \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}}) \sqrt{2aFC_1} .$$

In fig. 3.1 is het quotient van de (m.b.v. μ) berekende kosten en de minimale kosten C/C^* uitgezet als functie van het quotiënt van de geschatte vraag en de werkelijke vraag:

$$C/C^* = \tfrac{1}{2}(\sqrt{\frac{a}{\mu}} + \sqrt{\frac{\mu}{a}}).$$



Figuur 3.1

Wanneer men de vraag nu 2 keer te groot (of twee keer te klein) schat dan zijn de kosten 1.09 keer hoger dan de minimale kosten.

Zoals we al eerder opmerkten kunnen wij het (B,Q) systeem niet toepassen omdat we niet op elk moment kunnen bestellen.
De strategie die in ons geval meestal wordt toegepast is de z.g. (s_-,S^+)-strategie.
Aan het begin van elke bestelperiode (wanneer we dus kunnen bestellen) nemen we de volgende beslissing:
Als $S \leq s_-$ dan bestelt men tot S^+.
Als $S > s_-$ dan bestelt men niet.
Een optimale (s_-,S^+)-strategie kunnen we vinden m.b.v. dynamische programmering.

Dynamische programmering

Onder dynamische programmering wordt een aantal technieken verstaan die men kan toepassen op situaties waarin op een (hoogstens aftelbaar) aantal tijdstippen een beslissing moet worden genomen die afhangt van de toestand op het tijdstip van beslissen, maar onafhankelijk van dit tijdstip zelf is.

Met behulp van dynamische programmering is het mogelijk om t.b.v. een juist voorraadbeheer voor een aantal gevallen (wel of geen levertijd e.d.) een optimale (s_-,S^+)-politiek te bepalen.
Hoe dit in zijn werk gaat vindt men in [2].
Wij zullen hier verder niet op ingaan; wij zullen slechts gebruik maken van de resultaten.

Een optimale bestelperiode hoeft niet altijd een (s_-,S^+)-politiek te zijn.
H. Scarf en D.L. Iglehart [3] toonden aan dat er een optimale bestelpolitiek bestaat die een (s_-,S^+)-politiek is als voldaan is aan de volgende voorwaarden:

1) De bestelkosten zijn een lineaire functie van de bestelserie als deze groter is dan nul; als er niet besteld wordt zijn deze kosten nul.
   Zij de bestelserie q dan zijn de bestelkosten

$$F(q) = \begin{cases} 0 & \text{als } q = 0 \\ K+C_3q & \text{als } q > 0 \, . \end{cases}$$

2) De kosten die het gevolg zijn van de toestand S van de voorraad (d.w.z. alle kosten behalve de bestelkosten) zijn een convexe functie van S.
   Stel voorraad en boetekosten worden gegeven door h(S), dan geldt:

$$S_1 < S_2 \Longrightarrow h\left(\frac{S_1+S_2}{2}\right) \leq \tfrac{1}{2}(h(S_1) + h(S_2)).$$

<u>Veronderstellingen</u>.

Wij nemen aan:

1) De bestelkosten F zijn constant per keer bestellen:

$$F(Q) = \begin{cases} 0 & \text{als } Q = 0 \\ K & \text{als } Q > 0 \, . \end{cases}$$

De meeste handelingen die nodig zijn voor een bestelling zijn onafhankelijk van de grootte van die bestelling.

2) De voorraadkosten stellen wij gelijk aan de rentabiliteit van het geïnvesteerde kapitaal.
De kosten van de opslagruimte rekenen wij niet omdat deze onafhankelijk zijn van de voorraad, zolang deze nog in het magazijn kan.
Stellen wij de inkoopsprijs van het artikel p en de rentabiliteit van het bedrijf δ dan zijn de voorraadkosten per periode (14 dagen) gelijk aan

$$\begin{cases} \frac{2}{52}\,\delta pS & \text{als } S > 0 \\ 0 & \text{als } S \leq 0. \end{cases}$$

3) De boetekosten zijn afhankelijk van wat men doet in geval van een nee-verkoop. (zie blz. 2, Hoofdstuk I). In de meeste gevallen zijn deze een percentage van de inkoopprijs: bijvoorbeeld 35% bij een emergency order.
Wij zullen aannemen dat de boete van nee-verkoop een nog nader te bepalen percentage π van de inkoopsprijs p plus een constant L is.

Onder al deze aannamen is voldaan aan de bovenstaande voorwaarden van Scarf & Iglehart:

1) $$\text{bestelkosten } F(q) = \begin{cases} K & \text{als } q > 0 \\ 0 & \text{als } q = 0 \end{cases} = \begin{cases} K+c_3q & \text{als } q > 0 \\ 0 & \text{als } q = 0 \end{cases} \quad \text{waarin } c_3=0.$$

2) $$h(S) = \begin{cases} \frac{2}{52}\,\delta pS & \text{als } S \geq 0 \\ -\pi pS+L & \text{als } S \leq 0 . \end{cases}$$

Dit is een convexe functie van S.

Benadering van de optimale strategie

Onder de veronderstelling dat $s_-^* \geq 0$ is heeft D.M. Roberts [4] benaderingsformules gevonden voor de optimale s_-^* en S^{+*}. Deze formules zijn afgeleid uitgaande van het naleveringsmodel (d.w.z. dat de client wacht als er niets meer in voorraad is).

In tabel 3 van Hoofdstuk I zien we dat 5.6% van de bestelorders geen gewone stockorders waren. Dit zijn z.g. noodinkopen.

We hebben dus eigenlijk niet met een naleveringsmodel te maken.

Aangezien er ook nageleverd wordt is een noodinkoopmodel ook geen juiste beschrijving van de werkelijkheid.

Voor modellen waarin zowel noodinkopen als naleveringen toegelaten zijn is het moeilijk een optimale strategie te vinden.

Hetzelfde geldt voor noodinkoopmodellen met een positieve levertijd.

Omdat er zeker een positieve levertijd in ons geval bestaat hebben wij voor de strategie van Roberts gekozen.

Voor een discreet verdeelde vraag (in de levertijd) luiden de formules

$$(1) \qquad S^{+*} - s_-^* = \sqrt{\frac{2F\mu}{c_1}}$$

$$(2) \qquad c_2 \sum_{k=s^*+1}^{\infty} (k-s^*)\, p_{L+1}(k) < \sqrt{2F\mu c_1} \leq c_2 \sum_{k=s}^{\infty} (k-s^*+1)\, p_{L+1}(k)$$

hierin is c_1 = voorraadkosten per stuk per periode

c_2 = boete van een nee-verkoop

F = bestelkosten per keer

L = levertijd

$p_{L+1}(i) = P\{\underline{a}_{L+1}=i\}$ waarin $\underline{a}_{L+1}$ de vraag in L+1 perioden is.

Deze formules zijn getest door H.M. Wagner, M.O.Hagan en B. Lundh, en hierbij bleek de juistheid van de benadering sterk afhankelijk te zijn van de beschouwde verdeling van de vraag.

240 voorbeelden met een Poissonverdeling en 240 voorbeelden met een negatief binomiale verdeling werden getest.
In onderstaande tabel staan de percentages van de voorbeelden waarvan de gemiddelde kosten per tijdseenheid behorende bij de benadering van Roberts de echte minimale gemiddelde kosten per tijdseenheid met minder dan 1, 5, 10, 25% overschrijden.

afwijking	Poisson	neg. binomiaal
< 1%	46%	33%
< 5%	68%	69%
< 10%	77%	84%
< 25%	88%	95%

Verdeling van de vraag in de levertijd

Aangezien de empirische verdeling van de levertijd teveel massa aan een klein interval toekent om er een passende Γ-verdeling bij te vinden nemen wij ten behoeve van de eenvoud aan dat zij constant is.
Daar we in de formules van Roberts de levertijd in hele periodes willen invullen hebben wij op grond van onze steekproef (Hoofdstuk I) gekozen voor een levertijd van 3 perioden (42 dagen).

Bepaling van de kosten

De volgende gegevens werden via de accountant (van Dien & Co.) van de A.R.M. verkregen:

1) Rentabiliteit: 18%
d.w.z. de voorraadkosten per periode zijn $C_1 = \frac{2}{52} \times \frac{18}{100} \times \frac{85}{100}\,p =$
$= \underline{0.005885}\,p$, waarin $\frac{85}{100}\,p$ de inkoopsprijs van het artikel en p de verrekenprijs.

2) Bestelkosten: ƒ 2.10 per keer per artikel

Zij zijn als volgt samengesteld:

a) signaleren	ƒ -.30
b) bestelling boeken	-.15
c) verwerking van geretourneerde inkoopnota op ponskaarten	-.15
d) ontvangst boeken	-.20
e) administratief inklaren + controle factuur	-.30
f) goederen in magazijn opbergen	1.--
	ƒ 2.10

Al deze kosten behalve die onder f zijn onafhankelijk van de seriegrootte. De kosten onder f hangen alleen dan van de seriegrootte af als de hele serie niet in een keer naar het magazijn gebracht kan worden. De extra kosten om voor één artikel meerdere keren heen en weer te lopen zullen wij niet in rekening brengen omdat deze gemiddeld over een lange periode toch onafhankelijk van de bestelstrategie zijn.

3) Boetekosten: $L + \pi p$ waarin p de verrekenprijs van het artikel is.

Een echte nee-verkoop geeft een winstderving van 15% op de verrekenprijs. Toch leveren d.m.v.

1) emergency-order → 35% op de verrekenprijs,

2) een collegedealer → 30% op de verrekenprijs.

Ten behoeve van de eenvoud der berekening hebben wij in eerste instantie L gelijk aan 5 gekozen.

Voor π kozen wij 15% (De keuze hiervan blijft natuurlijk altijd arbitrair).

In de keuze van π en L zien wij een goede mogelijkheid om het bestelniveau s_- en daarmee de voorraad bij te sturen.

Bestellen

De hierboven bepaalde (s_-, S^+)-strategie is bepaald onder de voorwaarden dat de afname een vaste verdeling heeft die in de tijd niet verandert. In praktijk is dit niet het geval. Het idee is nu dat de A.R.M. als volgt bestelt:

Op een tijdstip t_0 bepaalt men de optimale strategie $(s_-,S^+)_{t_0}$ op grond van de vraag op dat moment. Pas wanneer, zeg op tijdstip t_j, de voorraad $s < s_-$ uit $(s_-,S^+)_{t_0}$ is, bepaalt men de optimale strategie $(s_-,S^+)_{t_j}$ voor dat tijdstip en beslist op grond hiervan of men bestelt of niet.

Deze berekening van S^+ en vooral s_- is te ingewikkeld om met de hand te geschieden.

Daarom stelden wij een besteltabel samen.

De boetekosten en voorraadkosten zijn bekend als de (verreken) prijs van het artikel bekend is. Bestelkosten zijn constant.

s_- en S^+ kunnen dus berekend worden als de prijs p en de vraag μ bekend is.

Onze tabel heeft dan ook 2 ingangen: prijs en vraag.

De vraag kan geschat worden als in hoofdstuk II.

Elke plaats (bepaald door een prijs en een vraag) in de tabel bevat 2 getallen: s_- en S^+_-.

We stellen $Q = S^+ - s_-$.

De bepaling van Q is eenvoudig:

$$Q = \sqrt{\frac{2F\mu}{c_1}} = \sqrt{\frac{2F\mu}{0.005885p}} = k_2\sqrt{\frac{\mu}{p}} \qquad \text{met } k_2 = 84.48$$

s_- is gelijk aan de grootste x zodanig dat geldt:

$$c_2 \sum_{k=x}^{\infty} (k-x+1)\, e^{-2\mu} \frac{(2\mu)^k}{k!} \geq \sqrt{2F\mu c_1} \qquad \text{ofwel}$$

$$\sum_{k=x}^{\infty} (k-x+1) \frac{(2\mu)^k}{k!} \geq k_1 \frac{e^{2\mu}\sqrt{\mu p}}{5+.15p} \qquad \text{waarin } k_1 = .1507$$

Uitwerking:

$$\sum_{k=x}^{\infty} (k-x+1) \frac{(2\mu)^k}{k!} = \sum_{k=x}^{\infty} (k \frac{(2\mu)^k}{k!}) + (1-x) \sum_{k=x}^{\infty} \frac{(2\mu)^k}{k!} =$$

$$= x \frac{(2\mu)^x}{x!} + (2\mu) \sum_{k=x}^{\infty} \frac{(2\mu)^k}{k!} + (1-x) \sum_{k=x}^{\infty} \frac{(2\mu)^k}{k!} =$$

$$= \frac{(2\mu)^x}{(x-1)!} + (2\mu+1-x) \sum_{k=x}^{\infty} \frac{(2\mu)^k}{k!} =$$

$$= (2\mu+1-x) [e^{2\mu} - \sum_{k=0}^{x-1} \frac{(2\mu)^k}{k!}] + \frac{(2\mu)^x}{(x-1)!} .$$

We vinden dus s_-^* door de grootste x te zoeken waarvoor

$$(2\mu+1-x) [e^{2\mu} - \sum_{k=0}^{x-1} \frac{(2\mu)^k}{k!}] + \frac{(2\mu)^x}{(x-1)!} \geq k_1 \frac{e^{2\mu}\sqrt{\mu p}}{5+.15p} .$$

Dit is m.b.v. een rekenautomaat een eenvoudige zaak.

Literatuur:

[1] J.Chr. van Dalen - Korte termijnvoorspellingen met behulp van exponentieel effenen ten behoeve van voorraadplanning (1968).

[2] G. de Leve & H.C. Tijms - Leergang besliskunde, deel 7b, dynamische programmering. (M.C. 1970)

[3] D.L. Iglehart - Optimality of (S,s) policies in the infinite horizon dynamic inventory problem. Management Science 9 (1963), p.259-268.

[4] K.J. Arrow, S. Karlin & H. Scarf - Studies in applied probability and management science. (Stanford University Press, 1962).