stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BN 11/71 DECEMBER

B. DORHOUT
EEN MINIMAX-INKOOPPROBLEEM

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Inhoud

1. Inleiding

Onderwerp van dit rapport is o.a. het volgende probleem. Iemand handelt in een goed, dat slechts gedurende korte tijd verkoopbaar is (kerstbomen, dagbladen). Er is slechts eenmaal gelegenheid om in te kopen. De inkoopsprijs van het goed is a gulden per eenheid, de verkoopsprijs bedraagt in de normale verkoop b gulden per eenheid. Onverkochte restanten hebben nog een waarde van de gulden per eenheid ($d<a<b$). Gevraagd wordt de optimale kwantiteit van de inkoop.

Stel, dat de vraag naar het goed weergegeven kan worden door een stochastische variabele $\underline{t}$ met een verdelingsfunctie $F(t)$. De verkoopwaarde bedraagt dan bij een inkoop van x eenheden

$$(1.1) \qquad \begin{cases} b\underline{t} + d(x-\underline{t}) & \text{als } \underline{t} \leq x, \\ bx & \text{als } \underline{t} > x, \end{cases}$$

mits men er van uitgaat, dat x geheel wordt gekozen, indien $\underline{t}$ slechts gehele waarden kan aannemen. Deze aanname is gerechtvaardigd, omdat voor $\underline{t}$ geheeltallig en x niet geheel op de laatste $x - [x]$ ingekochte eenheden altijd een verlies wordt geleden van $(a-d)$ gulden per eenheid.

Kiest men als criterium voor een optimale inkoop de verwachte brutowinst, dan zal men x zo moeten bepalen, dat

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} &-ax + \int_0^x \{bt + d(x-t)\}\, dF(t) + \int_{x+}^{\infty} bx dF(t) = \\ &= (d-a)x + (b-d)\int_0^x t dF(t) + (b-d)x \int_{x+}^{\infty} dF(t) \end{aligned}$$

maximaal wordt. Noemt men $\frac{a-d}{b-d} = c$, dan moet men dus berekenen

$$(1.3) \qquad \max_{x \geqq 0} \{-cx + \int_0^{\infty} \min(t,x)\, dF(t)\},$$

waarbij

$$(1.4) \qquad 0 < c < 1.$$

Eenvoudig is na te gaan, dat $x = \bar{x}$ optimaal is, als

$$(1.5) \qquad \bar{x} \in \{x \mid F(x) = \min(F(t) \mid F(t) \geq 1-c)\}.$$

Een moeilijkheid bij deze formulering van het probleem is, dat de verdelingsfunctie $F(t)$ dikwijls slecht bekend is. Om dit bezwaar te omzeilen zullen wij het probleem oplossen door toepassing van het minimaxcriterium, dat als bijkomend voordeel heeft tot een minder riskante inkooppolitiek te leiden. Wij nemen in het vervolg aan, dat van F slechts bekend is, dat zij behoort tot de klasse $\mathcal{F}(\mu,\sigma)$ van rechts continue verdelingsfuncties van niet-negatieve stochastische variabelen met verwachting μ en standaardafwijking σ. Volgens het minimaxcriterium wordt nu voor elke waarde van x bepaald, voor welke $F \in \mathcal{F}(\mu,\sigma)$ de verwachting van de opbrengst minimaal is en wordt vervolgens die waarde van x gekozen, waarvoor het verschil tussen de gevonden minimale opbrengst en de inkoopkosten maximaal is. Omdat wij nog niet weten, of deze minima en maxima bestaan, formuleren wij ons probleem als de berekening van

$$(1.6) \qquad r = \sup_{x \geq 0} \{-cx + \inf_{F \in \mathcal{F}(\mu,\sigma)} \mathcal{E} \min(\underline{t},x)\}.$$

In paragraaf 2 wordt de oplossing van dit probleem besproken voor het geval, dat de vraag discreet is, terwijl in paragraaf 3 het continue geval behandeld wordt. In paragraaf 4 zal op een enigszins gewijzigd probleem worden ingegaan.

2. <u>Discrete vraag</u>

Worden slechts gehele aantallen eenheden gevraagd, dan kan $F(t)$ worden vastgelegd door de kansen p_t op een vraag van t eenheden ($t=0,1,\ldots$). Voor (1.6) kan men dan schrijven

$$(2.1) \qquad r = \sup_{x \geq 0} \{-cx + \inf_{p \in \mathcal{P}(\mu,\sigma)} \sum_{t=0}^{\infty} \min(t,x)\, p_t\},$$

waarbij $P(\mu,\sigma)$ de klasse van vectoren p voorstelt, waarvan de componenten p_t, $t = 0,1,\ldots$ voldoen aan

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t = 1$$

(2.2) $$\sum_{t=0}^{\infty} t \; p_t = \mu$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} t^2 \, p_t = \mu^2 + \sigma^2$$

$$p_t \geqq 0, \qquad\qquad t = 0,1,\ldots \; .$$

Wegens

(2.3) $$\sum_{t=0}^{\infty} \min(t,x) \; p_t \leqq \sum_{t=0}^{\infty} t \; p_t = \mu, \qquad x = 0,1,\ldots$$

wordt de criteriumfunctie in (2.1) negatief voor $x > \frac{\mu}{c}$, terwijl $x = 0$ de waarde nul oplevert. Men mag in (2.1) dus $x \geqq 0$ vervangen door $x = 0,\ldots,N_0$, met

(2.4) $$N_0 = [\tfrac{\mu}{c}] \; ,$$

de entier van $\frac{\mu}{c}$.

Bij het onderzoek naar de waarde van r zullen wij voorlopig aannemen, dat $p_t = 0$ is voor $t > N$, waarbij N een groot natuurlijk getal voorstelt met $N \geqq N_0$. Het door deze extra aanname gewijzigd rechterlid van (2.1) kan men bepalen door achtereenvolgens voor $x = 0,\ldots,N_0$

(2.5) $$\min \sum_{t=0}^{N} \min(t,x) \; p_t$$

te berekenen onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{t=0}^{N} p_t = 1$$

(2.6) $$\sum_{t=0}^{N} t \; p_t = \mu$$

$$\sum_{t=0}^{N} t^2 \; p_t = \mu^2 + \sigma^2$$

$$p_t \geqq 0 \qquad\qquad t = 0,\ldots,N.$$

(2.5), (2.6) is een lineair programmeringsprobleem. Het ermee corresponderende duale lineaire progra-meringsprobleem kan worden geformuleerd als de berekening van

(2.7) $$\max\{u + \mu v + (\mu^2+\sigma^2)w\}$$

onder de bijvoorwaarden

(2.8) $$u + tv + t^2 w \leqq \min(t,x), \qquad t = 0,\ldots,N.$$

In de oplossing van (2.5), (2.6) hebben volgens de theorie der lineaire programmering ten hoogste drie basisvariabelen p_t een positieve waarde, terwijl alle andere variabelen nul zijn. Zijn t_l, t_m en t_r de indices van de basisvariabelen in de optimale oplossing, met

(2.9) $$t_l < t_m < t_r$$

en zijn $\bar{u}$, $\bar{v}$ en $\bar{w}$ de optimale waarden van (2.7), (2.8), dan geldt

(2.10) $$\bar{u} + t\bar{v} + t^2\bar{w} = \min(t,x), \qquad t = t_l, t_m, t_r.$$

Wij zullen drie gevallen voor de ligging van t_l, t_m en t_r ten opzichte van x onderscheiden.

1. $x \leqq t_l$

Volgens (2.10) moet in dit geval gelden: $\bar{u} = x$, $\bar{v} = \bar{w} = 0$. Daar $x \geqq 0$ en $\bar{u} \leqq 0$, volgens (2.8), kan dit geval slechts optreden voor $x = 0$.

2. $x \geqq t_r$

In dit geval volgt uit (2.10), dat $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = 1$ en $\bar{w} = 0$ moet zijn, zodat volgens (2.8) voor alle t moet gelden: $t \leqq x$. Dit geval kan dus slechts optreden, als $x = N$. Wij nemen nu

(2.11) $N > N_0$.

Dan treedt dit geval niet op.

3. $t_1 < x < t_r$

Stel $t_m \leqq x$. Dan is volgens (2.10)

$$\begin{aligned} &\bar{u} + t_1\bar{v} + t_1^2\bar{w} = t_1 \\ (2.12)\qquad &\bar{u} + t_m\bar{v} + t_m^2\bar{w} = t_m \\ &\bar{u} + t_r\bar{v} + t_r^2\bar{w} = x, \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned} &\bar{v} + (t_1+t_m)\bar{w} = 1 \\ (2.13)\qquad & \\ &\bar{v} + (t_m+t_r)\bar{w} = \frac{w - t_m}{t_r - t_m} < 1, \end{aligned}$$

zodat

(2.14) $\bar{w} < 0, \quad \bar{v} > 1, \quad \bar{u} \leqq 0.$

De functie

(2.15) $h(t) = \bar{u} + t\bar{v} + t^2\bar{w}$

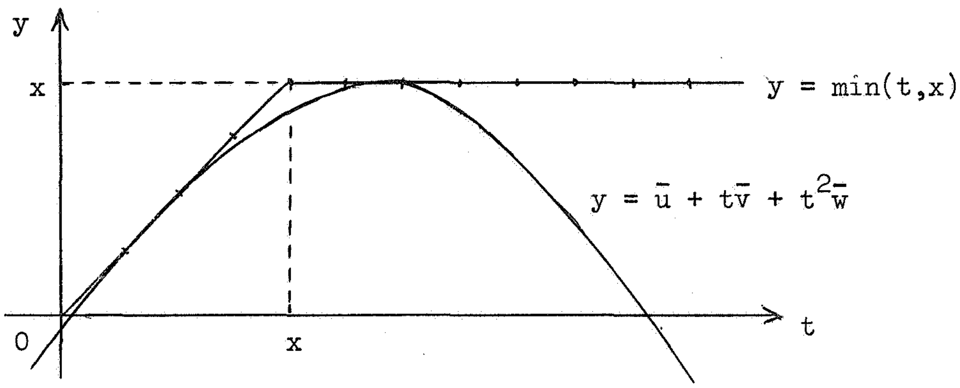
is dus concaaf. De parabool $y = h(t)$ heeft in het (t,y)-vlak volgens (2.12) snijpunten met de rechte $y = t$ in $t = t_1$ en in $t = t_m$. Daar $h(t) > t$ voor $t \in (t_1,t_m)$ en $h(t) \leqq t$ voor alle gehele waarden van t, volgens (2.8), is

(2.16) $t_m = t_1 + 1.$

Voor $t_m \geqq x$ vindt men op dezelfde wijze, dat wederom (2.14) moet gelden. Nu is $h(t) > x$ voor $t \in (t_m, t_r)$, zodat

$$(2.17) \qquad t_m = t_r - 1.$$

Ter illustratie zijn de functies $y = \min(t,x)$ en $y = h(x)$ in figuur 2.1 weergegeven. In deze figuur is $t_l = 1$, $t_m = 2$, $t_r = 6$.



Figuur 2.1

Met behulp van (2.10) kunnen $\bar{u}$, $\bar{v}$ en $\bar{w}$ expliciet in t_l en t_r worden uitgedrukt. Vult men het resultaat in in (2.8), dan volgen daaruit betrekkingen, waaraan t_l en t_r moeten voldoen. Als $t_m = t_l + 1$ vindt men uit (2.8) voor $t = t_r - 1$, resp. $t_r + 1$

$$(2.18) \qquad x - \bar{u} - (t_r - 1)\bar{v} - (t_r - 1)^2\bar{w} =$$

$$= -1 + 2\,\frac{x - t_l}{t_r - t_l} \geqq 0$$

resp.

$$(2.19) \qquad x - \bar{u} - (t_r + 1)\bar{v} - (t_r + 1)^2\bar{w} =$$

$$= 1 - 2\,\frac{x - t_l - 1}{t_r - t_l - 1} \geqq 0$$

zodat moet gelden

(2.20) $$t_l + t_r \leqq 2x \leqq t_l + t_r + 1.$$

Op dezelfde wijze vindt men voor $t_m = t_r - 1$ uit (2.8) met $t = t_l - 1$, resp. $t = t_l + 1$

(2.21) $$t_l + t_r - 1 \leqq 2x \leqq t_l + t_r.$$

De linker ongelijkheid behoeft hierbij slechts dan te gelden, als $t_l \geqq 1$. Uit (2.20) en (2.21) volgt, dat t_r dan moet voldoen aan

(2.22) $$t_r \leqq 2x+1 \leqq 2N_0+1.$$

Voor $t_l = 0$, $t_m = t_r - 1$ is volgens (2.6)

(2.23) $$\begin{aligned} (t_r-1)\, p_{t_m} + t_r\, p_{t_r} &= \mu \\ (t_r-1)^2 p_{t_m} + t_r^2\, p_{t_r} &= \mu^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

dus

(2.24) $$\frac{(t_r-1)^2}{t_r} \leqq \frac{\mu^2 + \sigma^2}{\mu},$$

zodat

(2.25) $$t_r < \frac{\mu^2 + \sigma^2}{\mu} + 2.$$

Uit (2.22) en (2.25) volgt, dat voor elke N, die voldoet aan

(2.26) $$N \geqq \max\left(\frac{\mu^2+\sigma^2}{\mu} + 2,\ 2N_0+1\right)$$

zal gelden:

(2.27) $$r = \max_{x=0,\dots,N_0} \{-cx + \min_{p\in P^N(\mu,\sigma)} \sum_{t=0}^{N} \min(t,x)\, p_t\},$$

met

$$(2.28) \qquad \mathcal{P}^N(\mu,\sigma) = \mathcal{P}(\mu,\sigma) \cap \{p \mid p_{N+j}=0,\ j=1,2,\ldots\}.$$

Immers, de kansen p_t, die door verdere verhoging van N kunnen optreden, zullen volgens (2.9), (2.22) en (2.25) nooit positieve waarden kunnen aannemen.

Bij de berekening van r volgens (2.27) behoeft men de lineaire programmeringsproblemen (2.5), (2.6) niet op te lossen voor alle $x = 0,\ldots,N_0$. Wij zullen namelijk aantonen, dat de functie van x, die in (2.27) tussen accoladen staat, concaaf, dus eentoppig is, zodat men bij het zoeken naar de optimale x-waarde gebruik kan maken van een Fibonacci procedure. Gaat men hierbij uit van de optimale x-waarde voor het continue probleem, die volgens paragraaf 3 gemakkelijk te berekenen is, dan kan r zeer snel worden gevonden.

Dat in (2.27) de functie tussen accoladen concaaf is, is als volgt in te zien:

$f_1(t,x) \equiv t$ is constant in x, dus concaaf in x voor alle t.

$f_2(x) \equiv x$ is lineair, dus concaaf in x, zodat

$f_3(t,x) \equiv \min(t,x)$ concaaf is in x voor alle t.

$f_4(p_t,t,x) \equiv \min(t,x)p_t$ is concaaf in x voor alle t en alle $p_t \geqq 0$, dus

$f_5(p,x) \equiv \sum_{t=0}^{N} \min(t,x)p_t$ is concaaf in x voor alle $p \geqq 0$, dus in het bijzonder ook voor alle $p \in \mathcal{P}^N(\mu,\sigma)$.

$f_6(x) \equiv \min_{p\in\mathcal{P}^N(\mu,\sigma)} \sum_{t=0}^{N} \min(t,x)p_t$ is concaaf in x, dus

$f_7(x) \equiv -cx + \min_{p\in\mathcal{P}^N(\mu,\sigma)} \sum_{t=0}^{N} \min(t,x)p_t$ is concaaf in x.

3. Continue vraag

Wij beginnen met het bepalen van

$$(3.1) \qquad \inf_{F \in \mathcal{F}(\mu,\sigma)} \mathcal{E} \min(\underline{t},x)$$

voor een willekeurige reële niet negatieve x. Hierbij gaan wij uit van hetgeen wij gevonden hebben in paragraaf 2 bij de oplossing van (2.5), (2.6). Daar bij de bespreking van dit probleem nergens gebruik gemaakt is van het feit, dat x discreet moest zijn, blijven alle conclusies betreffende dit probleem geldig.

(2.5), (2.6) was de formulering van (3.1) voor het geval, dat $\underline{t}$ slechts gehele waarden kon aannemen. Wij staan nu achtereenvolgens toe, dat de mogelijke waarden van $\underline{t}$ beschreven kunnen worden door $n.2^{-k}$, $n = 0,1,\ldots$ voor $k = 0,1,\ldots$, zodat wij voor $k = 0,1,\ldots$ telkens een probleem P_k moeten onderzoeken, dat luidt: bereken

$$(3.2) \qquad z^{(k)} = \min \sum_{t=2^{-k}}^{N} \min(t,x)\, p_t$$

onder de bijvoorwaarden

$$(3.3) \qquad \begin{aligned} &\sum_{t=0}^{N} p_t = 1 \\ &\sum_{t=2^{-k}}^{N} t\, p_t = \mu \\ &\sum_{t=2^{-k}}^{N} t^2 p_t = \mu^2 + \sigma^2 \\ &p_t \geq 0, \qquad\qquad t = 0, 2^{-k}, \ldots, N. \end{aligned}$$

Geeft men de klasse van de verdelingsfuncties, corresponderend met (3.3), weer door $\mathcal{F}^{(k)}(\mu,\sigma)$, dan kan men ook schrijven

$$(3.4) \qquad z^{(k)} = \min_{F \in \mathcal{F}^{(k)}(\mu,\sigma)} \mathcal{E} \min(\underline{t},x)$$

Daar het aantal variabelen in P_k bij toenemende k steeds groter wordt, vormen de getallen $z^{(k)}$ een monotoon niet stijgende getallenrij. Wegens

$$(3.5)\qquad z^{(k)} \geqq 0, \qquad\qquad k = 0,1,\ldots$$

is deze getallenrij convergent met een limiet

$$(3.6)\qquad z = \lim_{k\to\infty} z^{(k)}.$$

Wij zullen laten zien, dat de achtereenvolgende problemen P_k optimale verdelingsfuncties opleveren, die convergeren naar een verdelingsfunctie $\bar{F} \in \mathcal{F}(\mu,\sigma)$, waarvoor geldt

$$(3.7)\qquad z = \int_0^\infty \min(t,x)\, d\bar{F}(t).$$

$\bar{F}$ moet dan een optimale verdeling voor (3.1) zijn, zodat inf door min vervangen mag worden. Dat er geen andere verdelingsfunctie $\tilde{F} \in \mathcal{F}(\mu,\sigma)$ bestaat met

$$(3.8)\qquad \tilde{z} = \int_0^\infty \min(t,x)\, d\tilde{F}(t) < z$$

is als volgt in te zien. Voor het linker lid van (3.8) geldt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \min(t,x)\, d\tilde{F}(t) &= \int_0^x t\,d\tilde{F}(t) + x\int_{x+}^\infty d\tilde{F}(t) \\
(3.9)\qquad &= x\tilde{F}(x) - \int_0^x \tilde{F}(t)\, dt + x - x\tilde{F}(x) \\
&= x - \int_0^x \tilde{F}(t)\, dt.
\end{aligned}$$

De laatste integraal in het rechter lid is voor voldoend hoge k willekeurig dicht te benaderen door integralen van het type $\int_0^x F^{(k)}(t)dt$ met $F^{(k)} \in \mathcal{F}^{(k)}(\mu,\sigma)$. Daar voor alle $F^{(k)}$ moet gelden

$$(3.10) \qquad \int_0^\infty \min(t,x)\ dF^{(k)}(t) \geq z^{(k)} \geq z$$

is ook

$$(3.11) \qquad \tilde{z} \geq z.$$

Er bestaat dus geen $\tilde{F} \in F(\mu,\sigma)$, die voldoet aan (3.8), zodat

$$(3.12) \qquad z = \min_{F \in F(\mu,\sigma)} \int_0^\infty \min(t,x)\ dF(t).$$

Wij keren nu terug naar het onderzoek van de problemen P_k. In de vorige paragraaf is P_0 reeds besproken. In aansluiting op de daarbij gebruikte notatie geven wij de indices van de basisvariabelen in de optimale oplossing van P_k weer door $t_l^{(k)}$, $t_m^{(k)}$ en $t_r^{(k)}$ met

$$(3.13) \qquad t_l^{(k)} < t_m^{(k)} < t_r^{(k)}, \qquad\qquad k = 0,1,\dots .$$

Op precies dezelfde wijze als in paragraaf 2 werd afgeleid, dat (2.16) of (2.17) moest gelden, kan voor P_k worden geconcludeerd, dat aan

$$(3.14) \qquad t_m^{(k)} = t_l^{(k)} + 2^{-k} \text{ óf } t_m^{(k)} = t_r^{(k)} - 2^{-k}, \qquad k = 0,1,\dots$$

moet zijn voldaan.

Is P_k opgelost d.m.v. de simplexmethode, dan kent men de basismatrix

$$(3.15) \qquad B^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_l^{(k)} & t_m^{(k)} & t_r^{(k)} \\ t_l^{(k)2} & t_m^{(k)2} & t_r^{(k)2} \end{bmatrix} \qquad\qquad k = 0,1,\dots$$

en zijn inverse

$$(3.16) \qquad (B^{(k)})^{-1} = \begin{bmatrix} u_1^{(k)} & v_1^{(k)} & w_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} & v_2^{(k)} & w_2^{(k)} \\ u_3^{(k)} & v_3^{(k)} & w_3^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k = 0,1,\ldots$$

De getallen $\bar{a}_{it}^{(k)}$ in rij i van het optimale simplextableau van P_k kan men berekenen volgens

$$(3.17) \qquad \bar{a}_{it}^{(k)} = u_i^{(k)} + tv_i^{(k)} + t^2 w_i^{(k)},$$

$$i = 1,2,3;\ t = 0,2^{-k},\ldots,N;\ k = 0,1,\ldots .$$

Wil men na probleem P_k probleem P_{k+1} oplossen, dan kan men uitgaan van het optimale tableau van P_k en daaraan de kolommen, gedefinieerd door (3.16) maar met $t = 2^{-(k+1)}, 3.2^{-(k+1)},\ldots,N-2^{-(k+1)}$ toevoegen. Mede door gebruik te maken van (3.16) en (3.17) zijn nu de volgende eigenschappen eenvoudig af te leiden.

a. Is $t_m^{(k)} = t_l^{(k)} + 2^{-k}$, resp. $t_m^{(k)} = t_r^{(k)} - 2^{-k}$, dan behoort $t_l^{(k)} + 2^{-(k+1)}$, resp. $t_r^{(k)} - 2^{-(k+1)}$ tot de verzameling van de basisindices in de optimale oplossing van P_{k+1}.

b. Begint men met het opnemen van $t_l^{(k)} + 2^{-(k+1)}$, resp. $t_r^{(k)} - 2^{-(k+1)}$ in de verzameling van basisindices van P_{k+1}, dan is het mogelijk de optimale oplossing van P_{k+1} vervolgens in ten hoogste één simplex-stap te bereiken.

Uit deze eigenschappen en (3.14) volgt

$$(3.18) \qquad |t_j^{(k)} - t_j^{(k+1)}| \leq 2^{-(k+1)} \qquad j = l,r;\ k = 0,1,\ldots .$$

Daar voor elke willekeurige gehele $n \geq 0$ geldt

$$(3.19)\qquad |t_j^{(k)} - t_j^{(k+n)}| \leqq 2^{-(k+1)} + 2^{-(k+2)} + \ldots + 2^{-(k+n)}$$
$$< 2^{-(k+1)} + 2^{-(k+2)} + \ldots$$
$$= 2^{-k} \qquad j = l,r;\ k = 0,1,\ldots$$

vormen de getallen $t_l^{(k)}$ en $t_r^{(k)}$ geconcentreerde getallenrijen. Men kan dus definiëren

$$(3.20)\qquad t_j = \lim_{k\to\infty} t_j^{(k)} \qquad j = l,r.$$

Voor $t_j^{(k)}$ geldt dan

$$(3.21)\qquad |t_j^{(k)} - t_j| \leqq 2^{-k} \qquad j = l,r;\ k = 0,1,\ldots$$

Bij de optimale oplossing van P_k definiëren wij

$$(3.22)\qquad q_l^{(k)} = \begin{cases} p_{t_l^{(k)}} + p_{t_m^{(k)}} & \text{als } t_m^{(k)} = t_l^{(k)} + 2^{-k} \\ p_{t_l^{(k)}} & \text{als } t_m^{(k)} = t_r^{(k)} - 2^{-k} \end{cases} \qquad k = 0,1,\ldots$$

$$(3.23)\qquad q_r^{(k)} = \begin{cases} p_{t_r^{(k)}} & \text{als } t_m^{(k)} = t_l^{(k)} + 2^{-k} \\ p_{t_m^{(k)}} + p_{t_r^{(k)}} & \text{als } t_m^{(k)} = t_r^{(k)} - 2^{-k} \end{cases} \qquad k = 0,1,\ldots .$$

Uit

$$(3.24)\qquad \begin{aligned} &p_{t_l^{(k)}} + p_{t_m^{(k)}} + p_{t_r^{(k)}} = 1 \\ &t_l^{(k)}\, p_{t_l^{(k)}} + t_m^{(k)}\, p_{t_m^{(k)}} + t_r^{(k)}\, p_{t_r^{(k)}} = \mu \end{aligned} \qquad k = 0,1,\ldots$$

volgt dan, dat $q_l^{(k)}$ en $q_r^{(k)}$ moeten voldoen aan

$$q_l^{(k)} + q_r^{(k)} = 1$$

(3.25) $$k = 0,1,\ldots$$

$$t_l^{(k)} q_l^{(k)} + t_r^{(k)} q_r^{(k)} = \mu + O(2^{-k})$$

zodat

(3.26) $$q_l^{(k)} = \frac{t_r - \mu}{t_r - t_l} + O(2^{-k}),$$

(3.27) $$q_r^{(k)} = \frac{\mu - t_l}{t_r - t_l} + O(2^{-k}).$$

De rijen $q_l^{(k)}$ en $q_r^{(k)}$ zijn dus convergent, zodat men kan definiëren

(3.28) $$q_l = \lim_{k\to\infty} q_l^{(k)} = \frac{t_r - \mu}{t_r - t_l},$$

(3.29) $$q_r = \lim_{k\to\infty} q_r^{(k)} = \frac{\mu - t_l}{t_r - t_l}.$$

Uit

(3.30) $$(t_l^{(k)})^2 \, p_{t_l^{(k)}} + (t_m^{(k)})^2 \, p_{t_m^{(k)}} + (t_r^{(k)})^2 \, p_{t_r^{(k)}} = \mu^2 + \sigma^2$$

en

(3.31) $$t_l^{(k)} \, p_{t_l^{(k)}} + \min(x, t_m^{(k)}) \, p_{t_m^{(k)}} + x \, p_{t_r^{(k)}} = z^{(k)}$$

volgt wegens (3.21), (3.22) en (3.23):

(3.32) $$(t_l^{(k)})^2 q_l^{(k)} + (t_r^{(k)})^2 q_r^{(k)} = \mu^2 + \sigma^2 + O(2^{-k})$$

resp.

$$(3.33) \qquad t_l^{(k)} q_l^{(k)} + x\, q_r^{(k)} = z^{(k)} + O(2^{-k}).$$

t_l, t_r, q_l en q_r voldoen dus volgens (3.21), (3.26), (3.27), (3.28), (3,29), (3,32) aan het stelsel

$$(3.34) \qquad \begin{aligned} q_l + \quad q_r &= 1 \\ t_l\, q_l + t_r\, q_r &= \mu \\ t_l^2\, q_l + t_r^2\, q_r &= \mu^2 + \sigma^2, \end{aligned}$$

terwijl volgens (3.6) en (3.33) bovendien geldt

$$(3.35) \qquad t_l\, q_l + x\, q_r = z.$$

De door ons gezochte functie $\bar{F}(t)$, die voldoet aan (3.7), heeft dus de gedaante

$$(3.36) \qquad \bar{F}(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, t_l) \\ q_l & t \in [t_l, t_r) \\ 1 & t \in [t_r, \infty). \end{cases}$$

Voor de berekening van t_l en t_r kan men gebruik maken van de aan het eind van paragraaf 2 afgeleide betrekkingen, aangepast aan de range voor $\underline{t}$ in probleem P_k, $k = 0,1,\dots$. Wij zullen de gevallen $t_l > 0$ en $t_l = 0$ apart behandelen.

1. $t_l > 0$.

In dit geval geldt, dat een getal k_0 bestaat zodanig , dat $t_l^{(k)} > 0$ voor $k \geqq k_0$. Naar analogie van (2.20), (2.21) geldt dan

$$(3.37) \qquad \begin{aligned} &t_l^{(k)} + t_r^{(k)} \leqq 2x \leqq t_l^{(k)} + t_r^{(k)} + 2^{-k}, \quad \text{als } t_m^{(k)} = t_l^{(k)} + 2^{-k}, \\ &t_l^{(k)} + t_r^{(k)} - 2^{-k} \leqq 2x \leqq t_l^{(k)} + t_r^{(k)}, \quad \text{als } t_m^{(k)} = t_r^{(k)} - 2^{-k}, \end{aligned}$$

zodat

(3.37) $\qquad t_l + t_r = 2x.$

Oplossing van (3.34), (3.37) geeft

$$t_l = x - \sqrt{(x-\mu)^2 + \sigma^2}$$

$$t_r = x + \sqrt{(x-\mu)^2 + \sigma^2}$$

(3.38)
$$q_l = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{x-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + \sigma^2}}$$

$$q_r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{x-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + \sigma^2}}$$

$$z = \frac{1}{2}(\mu+x) - \frac{1}{2}\sqrt{(x-\mu)^2 + \sigma^2}.$$

2. $t_l = 0$

Uit (3.34) volgt in dit geval

$$t_l = 0$$

$$t_r = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{\mu}$$

(3.39)
$$q_l = \frac{\sigma^2}{\mu^2 + \sigma^2}$$

$$q_r = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2}$$

$$z = \frac{\mu^2 x}{\mu^2 + \sigma^2}.$$

Volgens (3.38) moet voor $x - \sqrt{(x-\mu)^2 + \sigma^2} \leqq 0$ gelden: $t_l = 0$, ofwel

(3.40) $\qquad x \leqq \dfrac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu} \Longrightarrow t_l = 0.$

Het is nog de vraag, of ook geldt:

(3.41) $$x > \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu} \Longrightarrow t_1 > 0.$$

Wij zullen aan de hand van figuur 3.1 bewijzen, dat (3.41) waar is. In deze figuur zijn in het (x,z)-vlak de grafische voorstellingen getekend van

(3.42) $$z = g_1(x) = \frac{1}{2}(\mu+x) - \frac{1}{2}\sqrt{(x-\mu)^2 + \sigma^2}$$

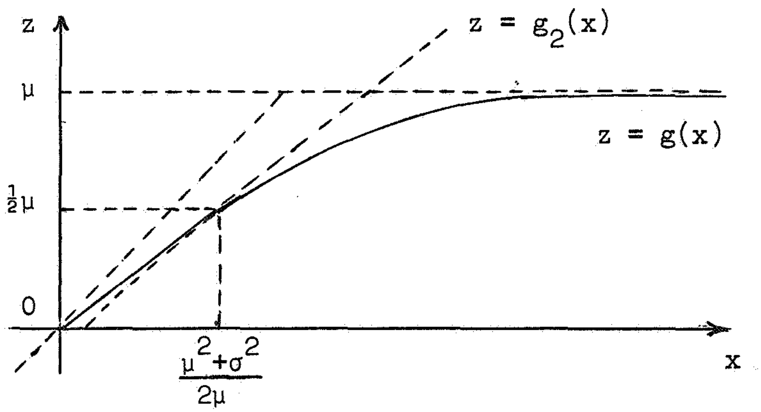
volgens (3.38) en van

(3.43) $$z = g_2(x) = \frac{\mu^2 x}{\mu^2 + \sigma^2}$$

volgens (3.39). De kromme $z = g_1(x)$ is een hyperbool met asymptoten $z = \mu$ en $z = x$, terwijl $z = g_2(x)$ een rechte lijn voorstelt. Voor $x = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu}$ is $g_1(x) = g_2(x) = \frac{1}{2}\mu$. Verder geldt daar

(3.44) $$\frac{dg_1(x)}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{x - \mu}{2\sqrt{(x-\mu)^2 + \sigma^2}} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2} = \frac{dg_2(x)}{dx},$$

zodat de rechte aan de hyperbool raakt. Daar $g_1(x)$ een concave functie is, is steeds $g_1(x) < g_2(x)$, zodat de beschouwde tak van de hyperbool steeds onder de rechte lijn $z = g_2(x)$ ligt. Waar dit mogelijk is, dus voor $x > \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu}$, zal steeds de oplossing (3.38) de voorkeur hebben boven (3.39)



Figuur 3.1. De verwachte minimale opbrengst als functie van de ingekochte hoeveelheid x.

Definiëren we voor willekeurige $x \geqq 0$

$$(3.45)\qquad g(x) = \min_{F \in \mathcal{F}(\mu,\sigma)} \int_0^\infty \min(t,x)\, dF(t)$$

dan is volgens het voorgaande

$$(3.46)\qquad g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{voor } x > \dfrac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu} \\ g_2(x) & \text{voor } x \leqq \dfrac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu} \end{cases}.$$

Omdat $g(x)$ concaaf en differentieerbaar is, zijn voldoende voorwaarden opdat $-cx + g(x)$ maximaal is voor $x \geqq 0$:

$$(3.47)\qquad -c + g'(x) \leqq 0,$$

$$(3.48)\qquad x\{-c + g'(x)\} = 0.$$

Uit (3.48) volgt, dat $x = 0$ gekozen moet worden voor $c > \max g'(x) = \dfrac{\mu^2}{\mu^2+\sigma^2}$. Voor $c = \dfrac{\mu^2}{\mu^2+\sigma^2}$ kan x willekeurig gekozen worden in het interval $[0, \dfrac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}]$.

In beide gevallen is de verwachte brutowinst nul. Voor $\dfrac{\mu^2}{\mu^2+\sigma^2} > c$ volgt uit

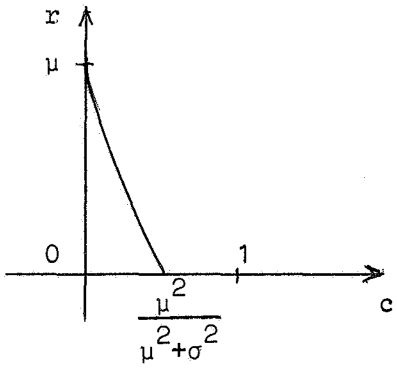
$$(3.49)\qquad g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{x-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2+\sigma^2}} = c$$

$$(3.50)\qquad x = \mu - \frac{c-\frac{1}{2}}{\sqrt{c(1-c)}}\,\sigma.$$

Voor de verwachte brutowinst r geldt volgens de aldus afgeleide bestelpolitiek

$$(3.51) \qquad r = \begin{cases} (1-c)\left(\mu-\sigma\sqrt{\dfrac{c}{1-c}}\right), & \text{als } c < \dfrac{\mu^2}{\mu^2+\sigma^2} \\ 0, & \text{als } c \geq \dfrac{\mu^2}{\mu^2+\sigma^2} \end{cases}$$

Figuur 3.2 geeft het verband tussen r en c volgens (3.51) weer.



Figuur 3.2. De bruto winst als functie van c.

Het behandelde probleem kan worden beschouwd als een spel van de inkoper tegen de natuur, waarbij de inkoper slechts zuivere strategieën x tot zijn beschikking heeft en de natuur gemengde strategieën volgens $F \in \mathcal{F}(\mu,\sigma)$. De max-min strategie van de inkoper bleek te leiden tot een verwachte brutowinst (3.51). Men kan zich nu afvragen, hoe groot de verwachte brutowinst zal zijn bij een min-max strategie van de natuur. Volgens een bekende eigenschap geldt in ieder geval

$$(3.52) \qquad \begin{aligned} &\max_{x\geq 0}\ \min_{F\in\mathcal{F}(\mu,\sigma)} \left\{-cx + \int_0^\infty \min(t,x)\, dF(t)\right\} \leq \\ &\leq \min_{F\in\mathcal{F}(\mu,\sigma)}\ \max_{x\geq 0} \left\{-cx + \int_0^\infty \min(t,x)\, dF(t)\right\}, \end{aligned}$$

mits het rechterlid bestaat. Wij zullen bewijzen dat in (3.52) het $\leq$-teken vervangen mag worden door het =-teken. Hiertoe behoeven wij slechts aan te tonen, dat er een zodanige $F \in \mathcal{F}(\mu,\sigma)$ bestaat, dat $\max_{x\geq 0} \{-cx+\mathcal{E}\min(\underline{t},x)\}$ gelijk is aan het linkerlid van (3.52). De gezochte F blijkt de verdelingsfunctie van de natuur te zijn, die behoort bij de optimale x-waarde, die de max-min strategie voorschrijft. Wij onderscheiden twee gevallen.

1. $c < \dfrac{\mu^2}{\mu^2+\sigma^2}$.

Kiest men x volgens (3.50), dan wordt de verdelingsfunctie van de natuur, gedefinieerd door (3.38), vastgelegd door

$$
\begin{aligned}
t_l &= \mu - \sigma\sqrt{\frac{c}{1-c}}\\
t_r &= \mu + \sigma\sqrt{\frac{1-c}{c}}\\
q_l &= 1-c\\
q_r &= c.
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

Bij deze verdeling moet nu x zodanig gekozen worden, dat $-cx + \mathcal{E}\min(\underline{t},x)$ maximaal wordt. Door toepassing van (1.5) blijkt, dat het maximum wordt bereikt voor elke $x \in (t_l,t_r)$. De brutowinst verkrijgt dan juist de voor dit geval in (3.51) verkregen waarde:

$$-cx + (1-c)t_l + cx = (1-c)\left(\mu-\sigma\sqrt{\frac{c}{1-c}}\right). \tag{3.54}$$

2. $c \geq \dfrac{\mu^2}{\mu^2+\sigma^2}$.

In dit geval werd volgens de max-min strategie door de natuur de verdeling (3.39) gekozen. Voor de brutowinst geldt nu

$$-cx + \frac{\mu^2 x}{\mu^2+\sigma^2} = \left(\frac{\mu^2}{\mu^2+\sigma^2} - c\right) x \leq 0. \tag{3.55}$$

De inkoper bereikt het maximum door $x = 0$ te nemen, zodat ook hier in (3.52) het =-teken geldt.

Uit het bovenstaande blijkt, dat de inkoper zijn resultaten niet kan verbeteren door het toepassen van een gemengde strategie.

4. Een tweede probleem

Behalve voor het oplossen van het in paragraaf 1 geformuleerde probleem kunnen de resultaten uit de voorgaande paragrafen gebruikt worden bij de oplossing van het volgende probleem.

De hoeveelheid van een produkt, die wordt gefabriceerd of geoogst gedurende een bepaalde vaste periode, is een stochastische variabele $\underline{t}$ met verdelingsfunctie $F \in \mathcal{F}(\mu,\sigma)$. De verkoopsprijs is in deze periode d gulden per eenheid, daarna echter b gulden per eenheid $(d<b)$. Om het produkt voor b gulden te kunnen verkopen, moet het worden opgeslagen in daartoe geëigende ruimten, bijvoorbeeld diepvrieskisten. Wij nemen aan, dat gekozen kan worden uit n typen diepvrieskisten, waarbij voor elk type j de inhoud a_j en de kosten c_j voor één opslagperiode gegeven zijn. De inhoud van een diepvrieskist bedraagt steeds een geheel aantal eenheden.

Voor de oplossing van dit probleem kan men als volgt te werk gaan. Stel de hoeveelheid produkt, die men wil kunnen bewaren, x. Voor de kosten c(x), die benodigd zijn om deze x eenheden volgens de voordeligste combinatie van diepvrieskisten op te slaan, geldt dan

$$(4.1)\qquad c(x) = \min \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j\, s_j \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_j\, s_j \geq x & \\ s_j \geq 0, & j=1,\ldots,n \\ s_j \text{ geheel}, & j=1,\ldots,n \end{array} \right\}$$

De opbrengst van $\underline{t}$ eenheden bedraagt

$$(4.2) \qquad \begin{cases} d\underline{t} & \text{als } \underline{t} \leq x \\ dx + b(\underline{t}-x) & \text{als } \underline{t} > x. \end{cases}$$

De verwachting van de maximale brutowinst bij de meest ongunstige produktiegrootteverdeling $F \in \mathcal{F}(\mu,\sigma)$ is

$$(4.3) \qquad \begin{aligned} r &= \sup_{x \geq 0} \{-c(x) + \inf_{F \in \mathcal{F}(\mu,\sigma)} (d \int_0^x t dF(t) + \int_{x+}^{\infty} \{dx + b(t-x)\} dF(t))\} \\ &= b\mu + \sup_{x \geq 0} \{-c(x) + (d-b) \inf_{F \in \mathcal{F}(\mu,\sigma)} \mathcal{E} \min(\underline{t},x)\} \end{aligned}$$

(4.3) kan op dezelfde wijze worden opgelost als (1.6), als bewezen kan worden, dat x een eindige bovengrens heeft. Wij zullen een dergelijke bovengrens berekenen. Eerst stellen wij vast, dat geldt

$$(4.4) \qquad \begin{aligned} &\sup_{x \geq 0} \{-c(x) + (d-b) \inf_{F \in \mathcal{F}(\mu,\sigma)} \min(\underline{t},x)\} \geq \\ &\geq -c(0) + (d-b) \inf_{F \in \mathcal{F}(\mu,\sigma)} \min(\underline{t},0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

en dat

$$(4.5) \qquad \begin{aligned} c(x) &\geq \sum_{j=1}^{n} (\min c_j) s_j \\ &\geq \min c_j \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\max a_j} s_j \\ &\geq \frac{\min c_j}{\max a_j} x \end{aligned}$$

voor alle $x \geqq 0$ en alle s_j, die voldoen aan de bijvoorwaarden in (4.1). Verder is voor alle $F \in \mathcal{F}(\mu,\sigma)$

$$(4.6) \qquad \mathcal{E}\min(\underline{t},x) \leqq \mu,$$

zodat voor $x > \frac{\max a_j}{\min c_j}(d-b)\mu$ geldt

$$(4.7) \qquad \begin{aligned} &-c(x) + (d-b) \inf_{F\in\mathcal{F}(\mu,\sigma)} \min(\underline{t},x) < \\ &< -(d-b)\mu + (d-b)\mu = 0. \end{aligned}$$

Met

$$(4.8) \qquad N_0 = \frac{\max a_j}{\min c_j}(d-b)\mu$$

als bovengrens voor x kan het nu beschouwde probleem op soortgelijke wijze worden opgelost als (1.6). In (4.4) mogen dus sup en inf vervangen worden door max en min.

Berekent men $c(N_0)$ d.m.v. dynamische programmering, dan beschikt men over de waarde van $c(x)$ met de bijbehorende oplossing s_j, $j=1,\ldots,n$, voor alle $x \in [0,N_0]$. Daar $c(x)$ niet lineair is, moet $\min_{F\in\mathcal{F}(\mu,\sigma)} \mathcal{E}\min(\underline{t},x)$ in alle sprongpunten van $c(x)$ berekend worden. Voor discrete $\underline{t}$ wordt hiertoe (2.5), (2.6) opgelost, in het continue geval berekent men $g(x)$ volgens (3.42), (3.43), (3.46).