

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

I N H O U D

	blz.
1. INLEIDING	1
2. MEEWKUNDIGE AFLEIDING VAN SNEDE	3
3. EEN AFTELSNEDE	6
4. DE MIXED-INTEGER SNEDE VAN GOMORY	8
5. BALAS-SNEDE	10
5.1 Bol- en octahedronsneede	10
5.2 Diepere sneden	11
5.3 Het domein C	12
5.4 Eigenschappen en benaderingen van C	15
5.5 Een algoritme voor 0-1 problemen	20
5.6 Rekenresultaten	22
APPENDIX: Literatuur	24

1. INLEIDING

Probleem: maximaliseer $\sum_{j=1}^n c_j x_j$

(1) onder $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i = b_i, i=1, \dots, m.$

$x_j \geq 0, j \in N = \{1, \dots, n\}.$

$y_i \geq 0, i=1, \dots, m.$

(2) x_j geheel, $j \in N.$

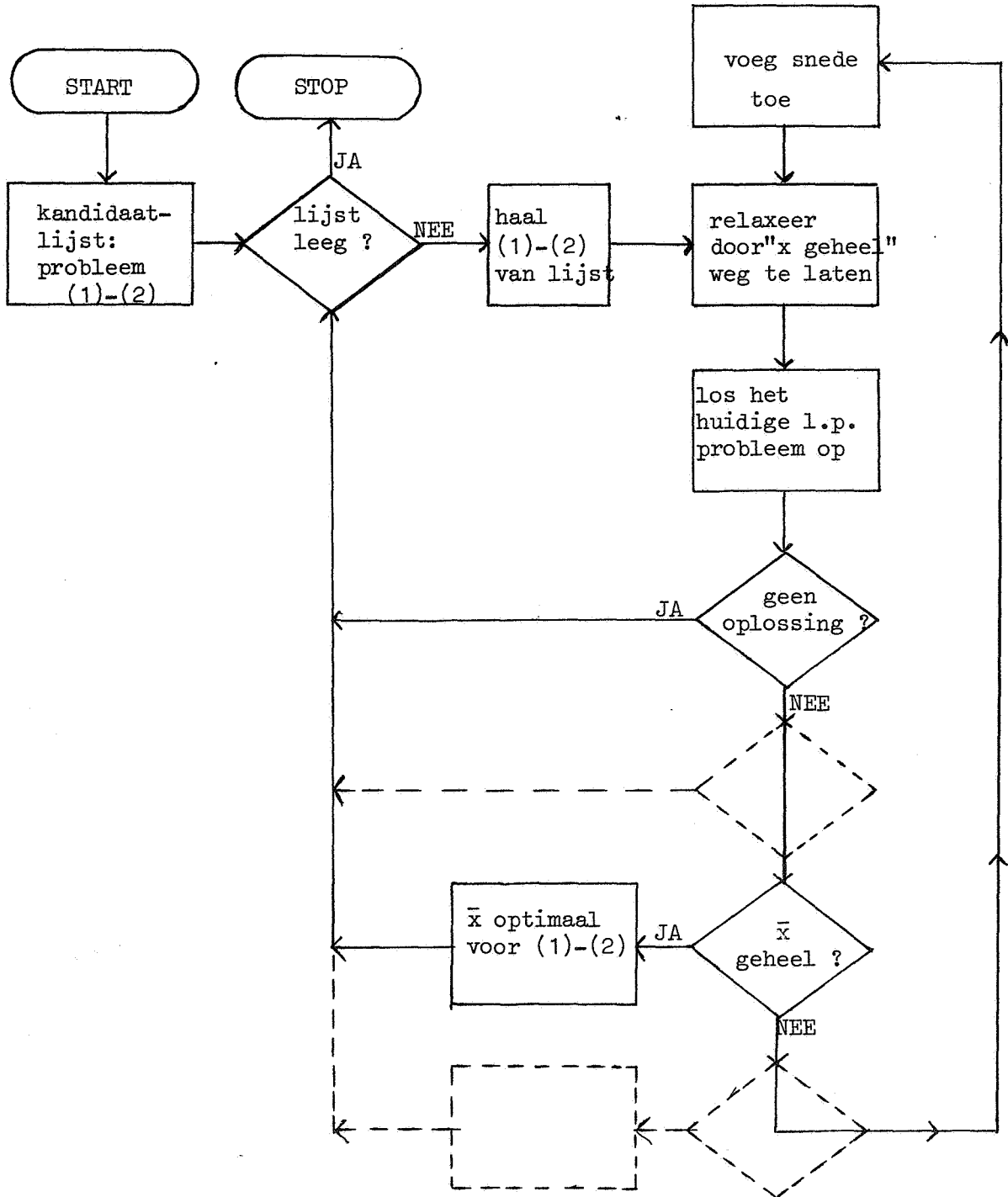
Uit de optimale oplossing van l.p.-probleem (1) leiden wij het volgende stelsel af:

$$(3) \quad x_i = \bar{x}_i - \sum_{j \in R} \bar{a}_{ij} \bar{t}_j, \quad i \in N.$$

In dit stelsel stellen de $t_j, j \in R$, de niet-basisvariabelen voor. Uit het optimale l.p.-tableau zijn de rijen bij basisvariabelen y_i weggelaten; voor een niet-basisvariabele $x_i, i \in R \cap N$, is de rij $x_i = 0 - (-1)x_i$ toegevoegd. De kolomvectoren $\bar{a}_j = (\bar{a}_{1j}, \dots, \bar{a}_{nj})$, $j \in R$, van (3) zijn lineair onafhankelijk.

Als \bar{x} geheeltallig is, lost \bar{x} eveneens probleem (1)-(2) op; in het andere geval kan \bar{x} verder buiten beschouwing worden gelaten. In de snede-algoritmen wordt daarom aan de voorwaarden van het probleem een extra voorwaarde, snede genaamd, toegevoegd. \bar{x} voldoet niet aan deze voorwaarde, maar elke geheeltallige oplossing van (1)-(2) voldoet wel. Van het aldus ook uitgebreide l.p.-probleem wordt de optimale oplossing \bar{x} bepaald. Dit proces wordt herhaald, zolang de gevonden \bar{x} niet geheeltallig is.

Een snede-algoritme kan als volgt in het blokschema van Geoffrion en Marsten worden ondergebracht:



De oudste snede-algoritme is voorgesteld door G. Dantzig. De eerste snede-algoritme, waarvan bewezen kon worden dat hij met een eindig aantal sneden convergeerde naar het geheeltallig optimum, is de bekende geheeltallige snede van Gomory. Gomory leidde deze snede af met algebraïsche argumenten. Wij zullen een meetkundige afleiding van sneden volgen, zoals met name Egon Balas heeft gedaan.

2. MEETKUNDIGE AFLEIDING VAN SNEDEN

$X \equiv \{ x \mid Ax \leq b, x \geq 0 \}$ is het toegelaten continue gebied. Het continue optimum \bar{x} op X verschaft informatie over het geheeltallige optimum op X :

1. Elke oplossing van (1)-(2) ligt in de kegel C , gedefinieerd door

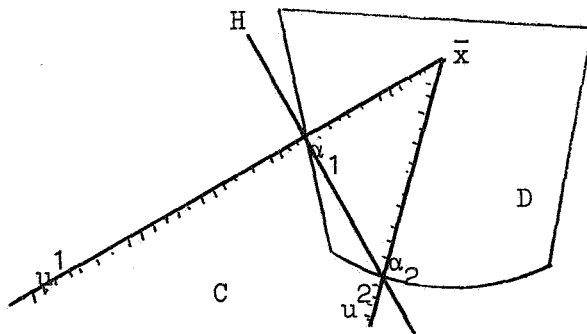
$$t_j \geq 0, j \in R.$$
2. $c\bar{x}$ is een bovengrens voor elke toegelaten oplossing in C , omdat (1) een relaxatie is van (1)-(2).
3. De relatie tussen de oorspronkelijke variabelen x en de niet-basisvariabelen t wordt gegeven door stelsel (3). Uit (2) volgt:

$$\bar{x} - \sum_{j \in R} \bar{a}_j t_j \equiv 0 \pmod{1}.$$

We brengen een snede aan door een hypervlak te trekken door de n snijpunten van de extreme stralen van C met een willekeurige verzameling D , die \bar{x} in zijn inwendige heeft.

Definitie: Een convex buitendomein D is een gesloten convexe verzameling met $\bar{x} \in \text{int } D$.

Notatie: $\text{int } D$ is het inwendige van D ; $\text{bd } D$ is de rand van D .



Lemma 1: Door de snijpunten $\alpha_j = \bar{x} - \bar{\lambda}_j \bar{a}_j$, $j \in R$ van de stralen $u^j \equiv \bar{x} - \lambda_j \bar{a}_j$, $\lambda_j \geq 0$, $j \in R$, met buitendomein D gaat een hypervlak H met vergelijking

$$(4) \quad \sum_{j \in R} \bar{\lambda}_j^{-1} t_j = 1, \quad \text{met } \bar{x} \notin H.$$

Bewijs: Omdat $\bar{x} \in \text{int } D$ volgt $\lambda_j > 0$ voor het snijpunt α_j van u^j met $\text{bd } D$. Deze n snijpunten definiëren een vlak o.g.v. de lineaire onafhankelijkheid van de kolommen \bar{a}_j . In niet-basisvariabelen wordt α_k gegeven door

$$t_j = \begin{cases} \bar{\lambda}_k & , j=k \\ 0 & , j \neq k, \end{cases}$$

m.a.w. α_k voldoet aan (4). \bar{x} met coördinaten $t_j = 0$, voor alle $j \in R$, voldoet niet aan (4).

Opmerking: In de oorspronkelijke variabelen luidt de vergelijking

$$\text{van } H \quad \sum_{j \in N} p_j x_j = p_0, \text{ met}$$

$$p_j = \begin{cases} \sum_{i \in R} \bar{\lambda}_i^{-1} a_{ij} & , j > 0 \\ \sum_{i \in R} \bar{\lambda}_i^{-1} b_i - 1 & , j = 0. \end{cases}$$

We definiëren de halfruimte H^+ door de snede $\sum_{j \in R} \bar{\lambda}_j^{-1} t_j \geq 1$. $H^- = \mathbb{R}^n \setminus H^+$.

Stelling 1: Als $x \in X$ wordt afgesneden door de voorwaarde $\sum_{j \in R} \bar{\lambda}_j^{-1} t_j \geq 1$, dan $x \in \text{int } D \cap H^-$.

Bewijs: $\bar{x} \in H^-$. Als $x \in X$ wordt afgesneden, dan $x \in C \cap H^-$.

$C \cap H^-$ is bevat in de convexe omhulling van $\bar{x}, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\text{conv}(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, zodat x is voor te stellen als

$$x = \mu_0 \bar{x} + \sum_{j \in R} \mu_j \alpha_j, \text{ met } \mu_0 + \sum_{j \in R} \mu_j = 1, \mu_j \geq 0. \text{ Als } \mu_0 = 0,$$

dan $x \in H$. Daaruit volgt $0 < \mu_0 < 1$ voor $x \neq \bar{x}$. x is te schrijven als $x = \mu_0 \bar{x} + (1 - \mu_0)w$, met $w = (1 - \mu_0)^{-1} \sum_{j \in R} \mu_j \alpha_j \in H \cap D$,

o.g.v. de convexiteit van D . Dan $x \in \text{int } D$, omdat $\bar{x} \in \text{int } D$ en $w \in D$.

Definitie: De snede $\sum_{j \in R} \bar{\lambda}_j^{-1} t_j \geq 1$ heet geldig als $\bar{x} \in H^-$ en elke

oplossing x van (1) bevat is in H^+ ; de snede heet S-voorwaardelijk geldig (of een aftelsnede) als een niet-lege verzameling S van oplossingen van (1) niet voldoet aan de snede.

Gevolg: Een snede, bepaald op een domein D , is geldig, als

$$S = \{x \mid x \in \text{int } D \cap H^-, x \equiv 0 \pmod{1}\} = \emptyset.$$

Een aftelsnede mag worden toegevoegd aan het l.p.-probleem als de verzameling S expliciet of impliciet is afgeteld en de optimale oplossing van S is geregistreerd. De gecombineerde snede-aftel-algoritme luidt:

0. Stel $LB = -\infty$. Bepaal een optimale oplossing \bar{x} van (1) en ga naar 4.
1. Genereer een S-voorwaardelijk geldige snede en voeg deze toe aan de voorwaarden van (1).
2. Tel S af. Als $S \neq \emptyset$ registreer dan de optimale oplossing van S als pretendent en stel LB gelijk aan de waarde van deze oplossing.
3. Bepaal de optimale continue oplossing \bar{x} van het in stap 1 vergrote probleem. Als $c\bar{x} \leq LB$, stop: de laatste in stap 2 gevonden oplossing is optimaal of het probleem heeft geen toegelaten oplossing.
4. Als $\bar{x} \not\equiv 0 \pmod{1}$, ga dan naar 1.
5. Stop: \bar{x} is optimaal.

Het cruciale punt van de snede-algoritme is de keuze van het buitendomein. Het domein bepaalt de diepte van de snede, de geldigheid of de al dan niet gemakkelijke aftelbaarheid. Enerzijds zoeken wij een snede die een zo groot mogelijk deel van X afsnijdt; een snede, uitgedrukt in niet-basisvariabelen, is dieper naarmate λ_j groter is. Anderzijds is het wenselijk dat het snijpunt van een straal u^j met bd D eenvoudig te bepalen is.

Als alle sneden geldig zijn, wordt de optimale geheeltallige oplossing uiteindelijk gevonden als optimaal hoekpunt van een l.p.-probleem. De sneden H_i moeten het integer optimum omvormen tot hoekpunt van $X \cap \left(\bigcap_i H_i^+ \right)$. De voorkeur gaat daarom uit naar sneden, waarin facetten liggen van de convexe omhulling van oplossingen van (1)-(2). Het continue optimum van deze omhulling levert immers rechtstreeks het geheeltallig optimum.

3. EEN AFTELSNEDE

Een triviaal voorbeeld van een domein dat een geldige snede geeft, is een eenheidshyperkubus K met $\bar{x} \in \text{int } K$.

Zij $f_i \equiv \bar{x}_i - [\bar{x}_i]$. De straal u^j snijdt bd K voor

$$\bar{\lambda}_j = \min_{i \in N} \begin{cases} (f_i - 1) / \bar{a}_{ij} & , \bar{a}_{ij} < 0 \\ f_i / \bar{a}_{ij} & , \bar{a}_{ij} > 0. \end{cases}$$

In deze vorm wordt een uitermate zwakke snede verkregen. Het is echter mogelijk de snede te versterken door het domein D geleidelijk te vergroten. Aanvankelijk kan $D=K$ beschreven worden door

$$D = \{x \mid -\Delta_i^- \leq x_i - [\bar{x}_i] \leq \Delta_i^+, i=1, \dots, n\}, \text{ met } \Delta_i^- = 0, \Delta_i^+ = 1.$$

Wij laten nu Δ_i^- en Δ_i^+ systematisch toenemen, b.v. volgens onderstaande algoritme:

0. Stel $\Delta_i^- = 0, \Delta_i^+ = 0$, voor alle $i \in N$.

1. Bereken

$$\bar{\lambda}_j = \min_{i \in N} \begin{cases} (f_i - \Delta_i^+) / \bar{a}_{ij} & , \bar{a}_{ij} < 0 \\ (f_i + \Delta_i^+) / \bar{a}_{ij} & , \bar{a}_{ij} \neq 0, \end{cases}$$

voor $j \in R$ en bepaal $i(j)$ als de index $i \in N$, waarvoor het minimum $\bar{\lambda}_j$ wordt aangenomen.

2. Als men geen diepere snede wenst, stop: de huidige $\bar{\lambda}_j$ bepalen een S -voorwaardelijk geldige snede.

3. Bepaal $j_0 \in R$, zodat $\bar{c}_j \bar{\lambda}_j \leq \bar{c}_{j_0} \bar{\lambda}_{j_0}$, voor alle $j \in R$. De huidige snede geeft voor variabele j_0 de kleinste daling van de criteriumfunctie in de eerste iteratiestap van de duale simplexmethode.

4. Stel $i_0 = i(j_0)$. Breid D als volgt uit:

$$\begin{cases} \text{als } \bar{a}_{i_0 j_0} < 0, \text{ stel dan } \Delta_{i_0}^+ := \Delta_{i_0}^+ + 1, \\ \text{als } \bar{a}_{i_0 j_0} > 0, \text{ stel dan } \Delta_{i_0}^- := \Delta_{i_0}^- + 1. \end{cases}$$

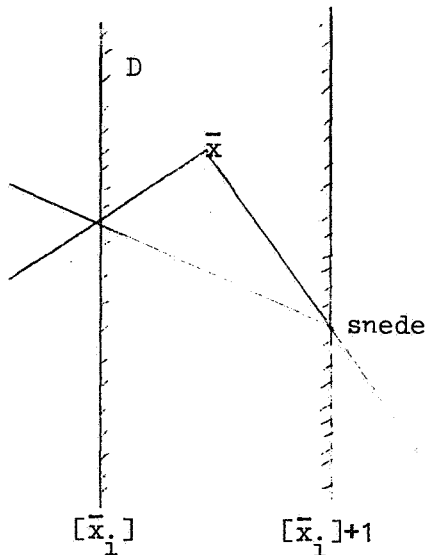
Ga naar 1.

Na afloop van de algoritme zijn $s = \prod_{i \in N} (\Delta_i^+ + \Delta_i^- - 1)$ geheel-

tallige punten in int D bevat, die voor aftelling in aanmerking komen. De duur van de algoritme en de verhouding diepte snede/ aftelling kan worden beheerst middels s .

Voor 0-1 programmering kan $\Delta_{i_0}^*$ bij ophoging in stap 4 direct oneindig gesteld worden voor de berekening van $\bar{\lambda}_j$, terwijl voor de bepaling van s de waarde $\Delta_{i_0}^* + 1$ blijft gelden.

Deze aftelsnede kan worden gecombineerd met branch-and-bound algoritmen voor 0-1 programmering. Daarbij verkeert men in de situatie dat de best bekende oplossing waarde LB heeft en dat een deelverzameling X van oplossingen met niet-gefixeerde variabelen x_j , $j \in N(X)$, en optimale continue oplossing $UB(X)$ onderzocht moet worden. Men kan dan bovenstaande snede genereren, totdat in stap 3 $UB(X) - \bar{c}_j \bar{\lambda}_j \leq LB$. Als het aantal af te tellen punten $s=0$, kan X verder buiten beschouwing worden gelaten; als $0 < s < 2^{|N(X)|}$ leveren Δ_i^- en Δ_i^+ informatie om variabelen te fixeren, zodat de resterende af te tellen verzameling S minder oplossingen dan X bevat.

4. DE MIXED-INTEGERSNEDE VAN GOMORY

Als in rij i $\bar{x}_i \not\equiv 0 \pmod{1}$, kan uit deze rij een snede worden afgeleid door als domein te definiëren:

$$D = \{x \mid [\bar{x}_i] \leq x_i \leq [\bar{x}_i] + 1\}.$$

bd D wordt gevormd door de hypervlakken $x_i = [\bar{x}_i]$ en $x_i = [\bar{x}_i] + 1$.

Het snijpunt van bd D en $u^j = \bar{x} - \lambda_j \bar{a}_j$ wordt gevonden voor

$$\bar{\lambda}_j = \begin{cases} f_i / \bar{a}_{ij} & , \bar{a}_{ij} > 0 \\ (f_i - 1) / \bar{a}_{ij} & , \bar{a}_{ij} < 0, \end{cases}$$

en de snede is

$$(5) \quad \sum_{\substack{j \in R \\ \bar{a}_{ij} > 0}} \bar{a}_{ij} t_j + \sum_{\substack{j \in R \\ \bar{a}_{ij} < 0}} f_i (f_i - 1)^{-1} \bar{a}_{ij} t_j \geq f_i.$$

Bovenstaande snede is niet de gebruikelijke mixed-integer Gomory snede, die zoals bekend de diepste uit rij i af te leiden snede is.

Om (5) te verscherpen merken we op dat stelsel (3) $x = \bar{x} - \sum_{j \in R} \bar{a}_j t_j$

gelijktijdig een geheeltallige oplossing heeft als elk stelsel

$$(6) \quad y = f - \sum_{j \in R} q_j t_j$$

waarvoor geldt:

$$\begin{cases} f = (f_1, \dots, f_n) \\ q_j = \begin{cases} \bar{a}_j \pmod{1} & , j \in R \cap \mathbb{N} \\ \bar{a}_j & , \text{anders,} \end{cases} \end{cases}$$

d.w.z voor een oplossing t met $t_j \equiv 0$, $j \in R \cap \mathbb{N}$, geldt $x \equiv 0 \pmod{1}$

d.e.s.d als $y \equiv 0 \pmod{1}$. Door de snijpunten van de stralen

$u^j(q) = f - \lambda_j q_j$ met bd D' , zodat $f \in \text{int } D'$, gaat een S-voorwaar-

delijk geldige snede, mits de matrix (q_{ij}) rang n heeft. Daarbij

is S gedefiniëerd t.o.v. stelsel (6). Na aftelling van S is de

snede zowel voor (6) als voor stelsel (3) geldig, wegens de

éénéénduidigheid tussen geheeltallige oplossingen van (3) en (6).

De verandering van stelsel kan een diepere snede opleveren en/of het aantal af te tellen punten verminderen.

Voor $D' = \{y \mid 0 \leq y_i \leq 1\}$ vinden we de snede

$$(7) \quad \sum_{\substack{j \in R \\ q_{i,j} > 0}} q_{i,j} t_j + \sum_{\substack{j \in R \\ q_{i,j} < 0}} f_i (f_i - 1)^{-1} q_{i,j} t_j \geq f_i.$$

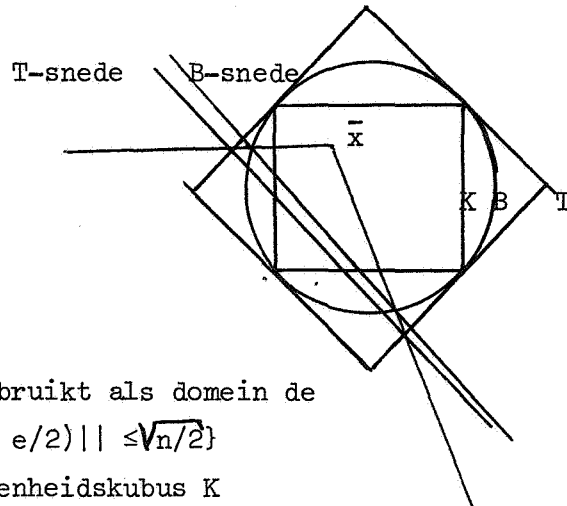
Deze snede is zo diep mogelijk als de coëfficiënt van t_j , $j \in R \cap N$, minimaal is; voor de keuze

$$q_{i,j} = \begin{cases} f_{i,j} & , f_{i,j} = \bar{a}_{i,j} - [\bar{a}_{i,j}] \leq f_i \\ f_{i,j}^{-1} & , f_{i,j} > f_i \end{cases}$$

ontstaat de mixed-integer snede van Gomory. Omdat D' geen geheel-tallige punten bevat, is de snede geldig mits de bijbehorende matrix $(q_{i,j})$ rang n heeft. Dit wordt bereikt voor

$$q_{i,j} = \begin{cases} f_{i,j} & , j \in N, j \neq i, f_{i,j} \leq f_i \\ f_{i,j}^{-1} & , j \in N, j \neq i, f_{i,j} > f_i \\ -1 & , i=j \\ \bar{a}_{i,j} & . j \notin N. \end{cases}$$

In het aldus gereduceerde stelsel zijn de kolommen lineair onafhankelijk. Het stelsel levert de diepste geldige snede, die afgeleid kan worden uit een rij i of uit convexe combinaties van rijen i met $\bar{x}_i \not\equiv 0 \pmod{1}$.

5. BALAS-SNEDEN5.1 Bol- en octahedronsne

De oudste sneede van Balas gebruikt als domein de hyperbol $B = \{x \mid ||x - ([\bar{x}] + e/2)|| \leq \sqrt{n/2}\}$

door de hoekpunten van een eenheidskubus K

met $\bar{x} \in K$. De coëfficiënten $\bar{\lambda}_j$ worden gevonden uit

de vierkantsvergelijking $||f - \lambda_j \bar{a}_j - e/2|| \leq \sqrt{n/2}$.

Als \bar{x} niet ontaard is kan de sneede worden geïnterpreteerd als het hypervlak door de snijpunten van bd B met de (verlengde) ribben van X door \bar{x} .

Een tweede sneede berust op domein $T = \{x \mid |x - ([\bar{x}] + e/2)| \leq n/2\}$,

het octahedron om B , dat eveneens een geldige sneede oplevert. Voor

de berekening van $\bar{\lambda}_j = \max\{\lambda_j \mid \lambda_j > 0, |f - \lambda_j \bar{a}_j - e/2| \leq n/2\}$

bestaan verschillende eenvoudige algoritmen.

TABEL: Aantal sneden in enkele testproblemen

Probleem	Gomory	Balas-bol	Balas-octahedron
1	3	9	8
2	2	8	6
3	4	10	8
4	6	8	11
5	11	24	6
6	7	102	23
7	7	63	43

Beide algoritmen convergeren zeer traag naar de optimale geheel-tallige oplossing. Ofschoon theoretische convergentie verzekerd kan worden, is de feitelijke convergentie slecht en zijn de sneden i.h.a. zwakker dan Gomory-sneden.

5.2 Diepere sneden

Alle Balas-snedes tot dusverre hebben gemeen dat geen enkel geheeltallig punt bevat is in int D: alle hoekpunten van K zijn bevat in bd D. Een snede blijft echter geldig zolang geen toegelaten geheeltallige punten in int D liggen, m.a.w. alle niet toegelaten hoekpunten van K mogen in int D liggen.

Een dergelijk domein D kunnen we als volgt construeren.

S_1, \dots, S_{2^n} zijn de 2^n hypervlakken waarin een facet van het octaëdron T ligt, en S_p^+ is de halfruimte bij S_p waarin T ligt.

Bekijken we nu het domein D dat de doorsnede is van die halfruimten S_p^+ , waarvoor S_p een toegelaten hoekpunt van K bevat. In int D liggen geen toegelaten geheeltallige punten van K, zodat D voor 0-1 programmering een geldige snede oplevert. Als we uitgaande van B of T een groter domein willen opbouwen, is D het grootst mogelijke domein, d.w.z. bewezen kan worden: D is de grootste convexe verzameling V, zodat $B \subset V$ en geen toegelaten hoekpunt van K is bevat in int V.

Qua grootte is de aldus gedefiniëerde verzameling D een wenselijk domein. Het onmiddellijk rijzende probleem is dan de bepaling van het snijpunt van een straal u^j met bd D. Een theoretisch eenvoudige oplossing hiervoor is de volgende. u^j snijdt bd T in een hypervlak S_1 . Is hoekpunt $x_1 \in K \cap S_1$ niet toegelaten bepaal dan het eerstvolgend snijpunt van u^j met een hypervlak S_p totdat het bijbehorende hoekpunt toegelaten is. Echter, K heeft 2^n hoekpunten (en 2^n hypervlakken) en we weten niet expliciet welke hoekpunten toegelaten zijn. De bovenstaande simpele procedure is - exponentieel - omslachtig.

De latere algoritmen van Balas zijn te beschouwen als pogingen om $u^j \cap \text{bd } D$ sneller te berekenen, c.q. te benaderen. In tegenstelling tot snede-algoritmen met B of T als domein houden deze algoritmen ook rekening met voorwaarden, die niet-bindend zijn in het continue optimum \bar{x} , voor zover deze voorwaarden K snijden. Voor 0-1 problemen betreft dit alle niet-redundante voorwaarden. In hoeverre deze aanpak de extra moeite waard is is sterk probleemgebonden, met de gunstigste vooruitzichten bij 0-1 problemen.

5.3 Het domein C

We nemen in het vervolg het middelpunt $[\bar{x}] + e/2$ van B als oorsprong. Verder zullen we ons beperken tot 0-1 problemen; deze beperking is niet essentieel.

Notatie: Luidde het oorspronkelijke probleem

$$\max\{cx' \mid Ax' \leq b, 0 \leq x' \leq e\},$$

dan ontstaat na substitutie van $x = x' - ([\bar{x}] + e/2)$:

$$\max\{cx \mid x \in X\}, \text{ met}$$

$$X \equiv \{x \mid a_i x \leq b_i, i \in Q\}$$

$$\equiv \{x \mid Ax \leq b - A([\bar{x}] + e/2), -x \leq [\bar{x}] + e/2, x \leq -[\bar{x}] + e/2\}.$$

$$Q = Q^+ \cup Q^-, \text{ met } Q^+ \equiv \{i \in Q \mid b_i > 0\}.$$

$M \subset Q$ omvat de oorspronkelijke voorwaarden $Ax' \leq b$,

de kubusvoorwaarden maken deel uit van $Q \setminus M$.

B is de eenheidsbol $\{x \mid \|x\| \leq \sqrt{n/2}\}$.

K is de eenheidskubus $\{x \mid -e/2 \leq x \leq e/2\}$.

T is het octahedron $\{x \mid |x| \leq n/2\}$.

We zoeken een uitbreiding van domein B. Deze wordt mogelijk als een voorwaarde $H^+ = \{x \mid ax \leq b\}$ een deel van B afsnijdt: geheeltallige punten in H^- zijn niet toegelaten.

Definitie: Een verzameling S is een convexe uitbreiding van B

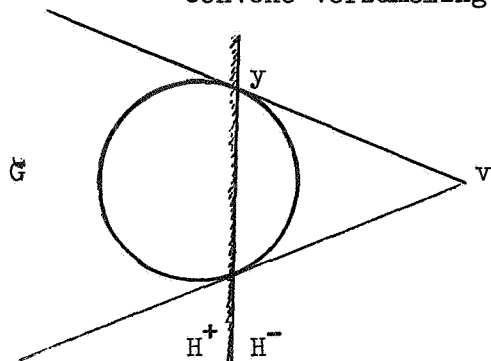
m.b.t. H^+ als:

1. S convex.

2. $B \subset S$.

3. $S \cap H^+ = B \cap H^+$.

De maximale convexe uitbreiding $E(B/H^+)$ is de grootste convexe verzameling die aan punt 3 voldoet.



Voor de constructie van $E(B/H^+)$

trekken we de raakhypervlakken

in alle $y \in \text{bd } B \cap H$. G is de

doorsnede van de halfruimten

bij deze raakvlakken, waarin

B ligt, d.w.z.

$$G \equiv \{x \mid yx \leq n/4, y \in \text{bd } B \cap H\}.$$

De verzameling G is de convexe kegel die voortgebracht wordt door $B \cap H$ met top $v = na/4b$, en vergelijking

$$G = \{x \mid x = v + (y-v)\theta, y \in B \cap H, \theta \geq 0\}.$$

De top v ligt in H^- als $b > 0$, en $v \in \text{int } H^+$ als $b < 0$. Als de voorwaarde H een facet van de kubus K is de top van G een hoekpunt van T .

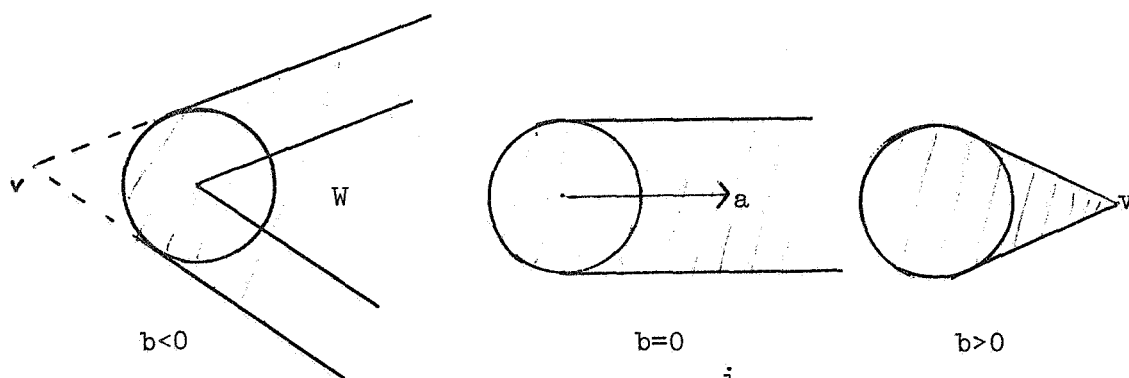
Als $b=0$ is G de cylinder door $B \cap H$ parallel aan de normaal a van H :

$$G = \{x \mid x = y + a\theta, y \in B \cap H\}.$$

De maximale uitbreiding van B , die in H^- moet liggen, wordt gegeven door het deel van G in H^- , d.w.z.:

Stelling 2: $E(B/H^+) = (B \cap H^+) \cup (G \cap H^-)$.

$\text{Int } E(B/H^+)$ bevat geen toegelaten geheeltallige punten.



Zij w_i een richting van $E(B/H^+)$, $i \in Q^-$, $w_i = \begin{cases} a^i & , b_i = 0 \\ y - v_i & , y \in b \cap B \cap H_i, b_i < 0, \end{cases}$
 en W_i de verzameling van alle richtingen in $E(B/H^+)$.
 $E(B/H^+)$ is nu ook te karakteriseren als

$$E(B/H^+) = \begin{cases} \text{conv}(B \cup \{v_i\}) & , i \in Q^+ \\ \text{conv}(B \cup \{x \mid x = w_i \theta, \theta \geq 0, w_i \in W_i\}) & , i \in Q^- \end{cases}$$

Iedere $E(B/H^+)$ op zich is een domein dat een geldige snede oplevert. Hun vereniging bevat dus ook geen toegelaten geheeltallige punten, maar is niet convex. Convexiteit wordt bereikt door de convex omhullende C van deze vereniging te beschouwen, d.i.

$$C \equiv \text{conv}(\bigcup_{i \in Q} E(B/H^+)).$$

Anderzijds bekijken we de verzameling

$$D \equiv \text{conv}(\{v_i \mid i \in Q^+\} \cup \{w_i \mid w_i \in W_i, i \in Q^-\}),$$

de convex omhullende van de kegeltoppen v_i en richtingen w_i , d.i. de kleinste convexe verzameling die alle punten v_i en richtingen w_i bevat. Balas bewijst dat $C = D$, zodat

$$(10) \quad C = \{x \mid x = \sum_{i \in Q^+} v_i \theta_i + \sum_{i \in Q^-} w_i \theta_i, \sum_{i \in Q^+} \theta_i = 1, w_i \in W_i, i \in Q^-, \theta_i \geq 0, i \in Q\}.$$

Het octahedron C is bevat in C , omdat de maximale uitbreiding van B m.b.t. een kubusvoorwaarde als top een hoekpunt v_i van T heeft. De convex omhullende C levert een geldige snede, zoals blijkt uit

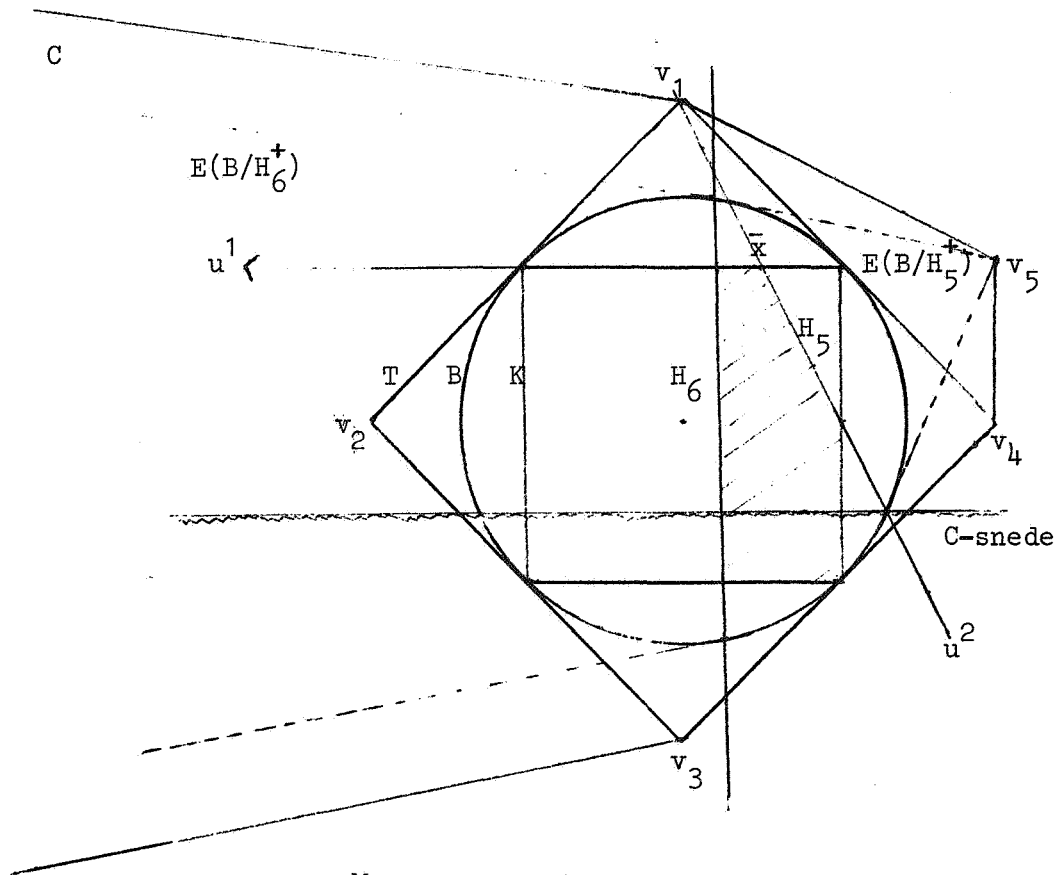
Stelling 3: Een hoekpunt x van K ligt op $bd C$ d.e.s.d.a. x is toegelaten.

Bewijs: 1. Als x niet is toegelaten, is $x \in bd B \cap H_i^-$ voor een $i \in M$.

$$bd B \in H_i^- \subset \text{int } G_i \cap H_i^- \subset \text{int } E(B/H_i^+) \subset \text{int } C.$$

2. Als x is toegelaten, $x \in bd B \cap (\bigcap_{i \in Q} H_i^+)$, zodat

$x \in bd E(B/H_i^+)$ voor alle $i \in Q$. Het enige draaghypervlak van de convexe verzamelingen B en $E(B/H_i^+)$ in x is het raakvlak $R(x)$ door x aan B . Omdat B in de halfruimte $R^+(x)$ en $B \subset E(B/H_i^+)$ geldt $E(B/H_i^+) \subset R^+(x)$ voor alle i , zodat ook de convexe omhulling $C \subset R^+(x)$. Omdat $x \in B \subset C$, is $R(x)$ draaghypervlak van C door x en $x \in bd C$.



Max	$x_1 + x_2$	
onder	$4x_1 + 2x_2 \leq 5$	(H_5^+)
	$8x_1 \leq 5$	(H_6^+)
	$0 \leq x_j \leq 1, x_j \text{ geheel}$	

Opmerkingen:

1. De snede op C is dieper dan de bol- of octahedronsede, omdat $B \subset T \subset C$.
2. Bij algemene geheeltallige programmeringsproblemen kunnen geheeltallige punten, die geen hoekpunten van K zijn, in int C liggen. Voor een geldige snede nemen we als domein $C \cap D'$, zó, dat de hoekpunten van K de enige geheeltallige punten in int D' zijn.
3. Het domein C is de buitenpool van het toegelaten gebied $X \cap K$, waarbij de buitenpool S^* van een begrensde verzameling S gedefinieerd is als $S^* = \{y \mid xy \leq R_S \text{ voor alle } x \in S\}$, met $R_S = \max\{ \|x\| \mid x \in \text{bd } S\}$.
4. C is i.h.a. niet polyhedraal, d.w.z. de doorsnede van een eindig aantal halfruimten, als $Q^- \neq \emptyset$, zoals blijkt uit (10). Het snijpunt van een straal u^j met de "gekromde" $\text{bd } C$ is lastig te berekenen. We zullen C moeten benaderen met polyhedrale verzamelingen.

5.3 Eigenschappen en benaderingen van C .

We zoeken benaderingen van C , waarin bepaalde prettige eigenschappen van C behouden blijven. We gebruiken de volgende

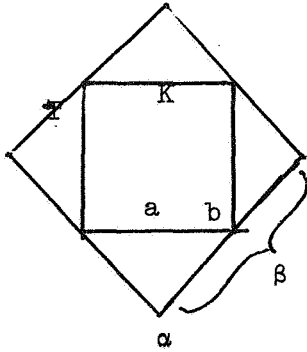
Definities: Een zijde ("face") van een convexe verzameling V is een convexe deelverzameling $V' \subset V$, zodat ieder gesloten lijnsegment in V met een inwendig punt in V' beide eindpunten in V' heeft.

Notatie: $z(K)^m$, resp. $z(T)^m$ is een m -dimensionale zijde van K , resp. T . $z(K)$, resp. $z(T)$ is een $(n-1)$ -dimensionale zijde, d.i. een facet, van K , resp. T .

Een kanoniek hypervlak is een hypervlak $dx = d_0$, met d_0 geheel en $d_j \in \{-1, 0, 1\}$.

Een kanonieke uitbreiding van $z(K)^m$ of $z(T)^m$ is een kanoniek hypervlak dat $z(K)^m$ of $z(T)^m$ bevat.

K en T zijn duale polytopen, d.w.z. er is een éénéénduidige afbeelding ϕ van zijden van K naar zijden van T : ϕ beeldt $z(K)^{n-k}$ af op die zijde van $z(T)^{k-1}$ van T , die de doorsnede is van alle facetten van T waarin hoekpunten liggen van K , die bevat zijn in



$z(K)^{n-k}$. I.h.b. beeldt ϕ een hoekpunt x van K , bevat in de facetten $z_1(K), \dots, z_n(K)$, af op het facet $z(T)$ waarin x ligt, en correspondeert met een hoekpunt van T een facet van K .

De afbeelding ϕ is inclusie-omkerend:

als $z(K)^{n-k-1} \in z(K)^{n-k}$ geldt

$$z(T)^k = \phi[z(K)^{n-k-1}] \supset \phi[z(K)^{n-k}] = z(T)^{k-1}.$$

Stelling 4: Als $z(K)^{n-k}$ een toegelaten hoekpunt x bevat, dan is $z(T)^{k-1} = \phi[z(K)^{n-k}]$ bevat in $bd C$.

Bewijs: Volgens stelling 3 is $x \in bd C$. De convexe verzameling C heeft dus een draaghypervlak in x . Omdat $x \in bd B \subset C$ is het raakvlak $R(x)$ aan $bd B$ in x dit unieke draaghypervlak. $R(x)$ is de uitbreiding van het met x geassocieerde facet $z(T) = \phi(x)$. Omdat $x = z(K)^0 \subset z(K)^{n-k}$ geldt $R(x) \subset z(T) \subset z(T)^{k-1}$. De zijde $z(T)^{k-1} \subset T \subset C$ ligt in een draaghypervlak van C , zodat $z(T)^{k-1} \subset bd C$.

Gevolg 2: Als een hoekpunt v_i van T in $int C$ ligt, dan bevat $z(K) = \phi^{-1}(v_i)$ geen toegelaten punten. Bij gevolg kan de met v_i corresponderende variabele worden gefixeerd. Als twee complementaire hoekpunten van T in $int C$ liggen, heeft K geen toegelaten hoekpunten.

Gevolg 3: Een zijde van C bevat n hoekpunten v_1, \dots, v_n van T d.e.s.d.a. $x = \bigcap_{i=1}^n \phi^{-1}(v_i)$ een toegelaten hoekpunt van K is. Als x is toegelaten, is $x \in \phi(x) = z(T) \subset bd C$. De enige zijden van C , waarin toegelaten hoekpunten van K liggen, hebben dimensie $n-1$.

Het omgekeerde van stelling 4 is niet waar. Wel kan bewezen worden:

Stelling 5: Als een zijde van C m hoekpunten v_1, \dots, v_m van T bevat, wordt de $(n-m)$ -dimensionale zijde $z(K)^{n-m}$ van K , gegeven als de doorsnede van $\phi^{-1}(v_1), \dots, \phi^{-1}(v_m)$ van K , niet afgesneden door een deelverzameling van voorwaarden $H_i(\epsilon)$, $i \in M$, met ϵ een klein positief getal en

$$H_i(\epsilon) = \begin{cases} H_i & , b_i > 0. \\ a_i x = \epsilon & , b_i \leq 0. \end{cases}$$

$H_i(\epsilon)$ is het hypervlak dat ontstaat door H_i zover op te schuiven dat $0 \in \text{int } H_i^+(\epsilon)$.

De uitspraak in deze stelling is tamelijk zwak:

- $z(K)^{n-m}$ kan afgesneden worden door H_i , $i \in Q^-$;
- de hoekpunten van $z(K)^{n-m}$ kunnen worden afgesneden zonder dat $z(K)^{n-m}$ zelf wordt afgesneden.

Het is dus allesbehalve zeker dat $z(K)^{n-m}$ een toegelaten hoekpunt van K bevat.

In berekeningen willen we C vervangen door een polyhedrale verzameling, d.i. de convex omhullende van een eindig aantal punten en richtingen.

Een eerste benadering $P_0(C)$ wordt verkregen door voor iedere $i \in Q^-$ slechts één richting, de normaal a^i van H_i , toe te staan; $P_0(C)$ is de convex omhullende van $|Q^+|$ punten en $|Q^-|$ richtingen en als zodanig polyhedraal:

$$(11) \quad P_0(C) = \{x \mid x = \sum_{i \in Q^+} v_i \theta_i + \sum_{i \in Q^-} a^i \theta_i, \sum_{i \in Q^+} \theta_i = 1, \theta_i \geq 0, i \in Q\}.$$

Bijgevolg is $T \subset P_0(C) \subset C$. $P_0(C) = C$ als $b_i \geq 0$ voor alle $i \in Q$. Het snijpunt α_j van straal $u_j^j = \bar{x} - \lambda_j \bar{a}_j$ met $\text{bd } P_0(C)$ vinden we uit de oplossing van

$$(12) \quad \begin{array}{l} \max \lambda_j \\ \text{onder} \quad \bar{a}_j \lambda_j + \sum_{i \in Q^+} v_i \theta_i + \sum_{i \in Q^-} a^i \theta_i = \bar{x} \\ \sum_{i \in Q^+} \theta_i = 1 \\ \theta_i \geq 0 \quad , \quad i \in Q. \end{array}$$

$P_0(C)$ is ook te beschouwen als de convex omhullende van $E(B/H_1^+)$, $i \in Q^+$ en $E(B/H_1^+(0))$, $i \in Q^-$. Zij $X(0)$ de verzameling van toegelaten punten t.o.v. de vlakken H_i , $i \in Q^+$ en $H_i(0)$, $i \in Q^-$, zodat $X \subset X(0)$.

Volgens stelling 3 ligt een hoekpunt x van K op $\text{bd } P^0(C)$

d.e.s.d.a. $x \in X(0)$: de voor X toegelaten hoekpunten van K liggen op $\text{bd } P_0(C)$. Omdat $x \in X(0)$ niet $x \in X$ impliceert, geldt stelling 3 t.o.v. $P_0(C)$ slechts in één richting. Stelling 4 en 5 en gevolg 2

blijven geldig voor $P_0(C)$. Gevolg 3 geldt slechts voor de helft: een zijde van $P_0(C)$ kan n hoekpunten van T bevatten, terwijl het bijbehorende hoekpunt van K niet toegelaten is.

Een tweede benadering van C wordt verkregen door $P(C)$ te beschouwen, gedefinieerd als de doorsnede van alle draaghalfruimten van C , die een $(n-1)$ -dimensionale zijde van C bevatten. Dan is $P(C)$ polyhedraal en $P_0(C) \subset C \subset P(C)$. De doorsnede van $bd P(C)$ met de bol B is dezelfde als van $bd C$ met B . Hieruit volgt dat in stelling 3 C vervangen mag worden door $P(C)$. Ook de stellingen 4 en 5 en gevolg 2 en 3 gelden onverkort voor $P(C)$. $P(C)$ heeft alle prettige eigenschappen van C en is daarnaast polyhedraal.

We kunnen hier even ingaan op de vraag in hoeverre $P(C)$ het polyhedrale domein D uit par. 5.2 benadert. D is de doorsnede van halfruimten bij uitgebreide facetten van T , waarin een toegelaten hoekpunt van K ligt, zodat ieder facet van D n hoekpunten van T bevat. In $P(C)$ daarentegen komen facetten voor met minder dan n hoekpunten van T , en wel die facetten, waarvan tenminste één voortbrengend punt of één voortbrengende richting afkomstig is van een voorwaarde $i \in M$. D kan uit $P(C)$ verkregen worden door systematisch van de halfruimten die $P(C)$ definiëren die halfruimten weg te laten die minder dan n hoekpunten van T bevatten. Balas heeft een procedure aangekondigd die volgens dit principe werkt. Tot dusverre is deze procedure niet gepubliceerd.

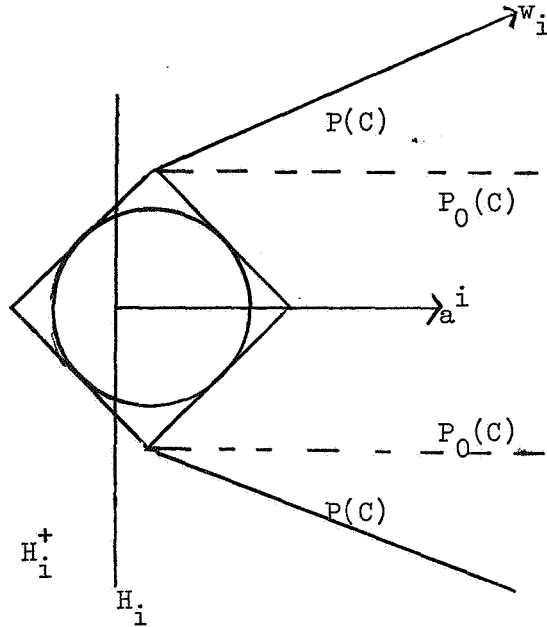
Tussen de facetten van $P_0(C)$ en $P(C)$ bestaat een éénéénduidige relatie die ons in staat stelt de facetten van $P(C)$ te identificeren door middel van de facetten van $P_0(C)$:

Stelling 6: Zij $z[P_0(C)]$ een facet van $P_0(C)$, waarin n affien onafhankelijke hoekpunten v_i , $i \in Q_0^+ \subset Q^+$ en richtingen a^i , $i \in Q_0^- \subset Q^-$ liggen. Zij B_0 de matrix bestaande uit deze vectoren v_i en a^i en zij β^i de i de rij van B_0^{-1} .

a. Het uitgebreide facet R_0 van $z[P_0(C)]$ heeft vergelijking

$$R_0 = \{x \mid \beta x = 1\} \text{ met } \beta = \sum_{i \in Q_0^+} \beta^i.$$

b. Bij R_0 behoort éénéénduidig het uitgebreide facet R van $P(C)$, met vergelijking



$$R = \{x \mid \gamma x = \gamma_0\}, \quad \gamma = g B_0^{-1}, \quad g_i = \begin{cases} \gamma_0 & , i \in Q_0^+ \\ 2b_i / \sqrt{n} & , i \in Q_0^- \end{cases}$$

en γ_0 zo, dat $\|\gamma\| = 1$.

Duidelijk is $R_0 = R$ als $b_i \geq 0$ voor $i \in Q_0^+ \cup Q_0^-$. Verder voldoet een punt v_i van R_0 ook aan R . Het is dus alleen zaak een aantal nieuwe richtingen $w_i \in R$ te bepalen om R te identificeren. Deze berekening verloopt als volgt. Uit de optimale oplossing van l.p.-probleem (12) voor de bepaling van u^j nbd $P_0(C)$ komt de inverse B_0^{-1} van de basismatrix beschikbaar en zijn de indexverzamelingen Q_0^+ en Q_0^- bekend middels de basisvariabelen. Voor de richting $w_i = a^i - 2b_i \gamma / \sqrt{n}$, met γ berekend volgens stelling 6, geldt $\gamma w_i = 0$, zodat w_i een richting van R is. Toevoeging van de kolommen $(w_i, 0)$, $i \in Q_0^-$, aan l.p.-probleem (12) en postoptimalisatie hiervan geeft de doorsnede van u^j met een facet van $P(C)$, als geen a^i , $i \in Q_0^-$, in de basis zitten. Is dat wel het geval, dan wordt de procedure herhaald, totdat alle a^i , $i \in Q_0^-$, uit de basis verdwenen zijn.

5.5 Een algoritme voor 0-1 problemen.

Als de doorsnijding van u^j met een facet $z[P(C)]$ bepaald is, is de resulterende $\bar{\lambda}_j^{-1}$ coëfficiënt in de geldige $P(C)$ -snede. We beschikken echter over meer bruikbare informatie. Als $z[P(C)]$ n hoekpunten van T bevat, is het bijbehorende hoekpunt x_0 van K toegelaten. Aan het l.p.-probleem (9) kan nu de "teggengestelde" snede $cx \geq cx_0 + 1$ worden toegevoegd (mits c geheeltallig is). Deze snede heet tegengesteld, omdat het toegelaten gebied van de snede gekeerd is naar het continue optimum \bar{x} , in tegenstelling tot de normale domein-snede.

Als $z[P(C)]$ k hoekpunten, $1 \leq k < n$, van T bevat, wijst $z[P(C)]$ een zijde $z(K)^{n-k}$ van K aan, die o.g.v. stelling 5 een redelijke kans heeft een toegelaten hoekpunt te bevatten. Deze $(n-k)$ -dimensionale zijde kan expliciet of impliciet worden afgeteld. Wordt bij de aftelling geen toegelaten oplossing gevonden, dan kan de doorzochte zijde worden afgesneden door een tegengestelde kanonieke snede; anders kan de tegengestelde criteriumsnede worden aangebracht, c.q. doorgeschoven. In ieder geval houdt de nieuw toegevoegde voorwaarde in, dat aan probleem (12) een nieuwe kolom kan worden toegevoegd, zodat na heroptimalisatie een grotere $\bar{\lambda}_j$ wordt gevonden.

De volgende algoritme voor 0-1 problemen is mogelijk:

0. Los l.p.-probleem (9) op. Zij R de verzameling van niet-basisvariabelen van de optimale oplossing van (9).
1. Ga na of hoekpunten van T in int $P(C)$ liggen, b.v. door het oplossen van een serie l.p.problemen. Reduceer voor dergelijke hoekpunten de dimensie van K . Als complementaire hoekpunten v_i en $-v_i$ beiden in int $P(C)$ liggen, ga dan naar 6. Kies $j \in R$.
2. Bepaal de doorsnede van u^j met allereerst bd $P_0(C)$ en vervolgens bd $P(C)$ via (12).
Als u^j geen snijpunt heeft met één van beiden, stel dan $\bar{\lambda}_j = \infty$.
Als in de optimale basis van (12) geen hoekpunten van T voorkomen, ga dan naar 4.
3. Tel (een gedeelte van) de zijde van K , die correspondeert met de optimale basis van (12), expliciet of impliciet af. Breng de resulterende tegengestelde snede aan. Heroptimaliseer eventueel (12).
4. Verwijder j uit R . Als $R \neq \emptyset$, kies dan $j \in R$ en ga naar 2.

5. Voeg aan (9) de snede $\sum_{j \in R} \bar{\lambda}_j^{-1} t_j \geq 1$ toe en bereken het continue optimum van het met deze snede en eventuele tegengestelde sneden vergrote l.p.-probleem. Als (9) een toegelaten oplossing heeft, ga dan naar 1.
6. Stop: de beste tot dusver gevonden oplossing is optimaal; als deze ontbreekt heeft het probleem geen geheeltallige oplossing.

De convergentie van deze algoritme berust op het reductieproces in stap 1. Als gevolg daarvan wordt in stap 2 in ieder geval een zijde van T gevonden, die bevat is in bd P(C). De corresponderende zijde van K wordt in stap 3 geheel of gedeeltelijk afgesneden, zodat na toevoeging van de tegengestelde snede zeker een deel van de zijde van T, dat zelf een zijde van deze zijde van T is, in int P(C) bevat is. Daar T slechts eindig veel zijden heeft, zijn deze na verloop van tijd alle in int P(C) bevat, waarna in stap 1 gestopt wordt.

De bovenstaande algoritme moet meer gezien worden als een los schema dan als een strikt voorschrift:

- I.p.v. P(C) kan $P_0(C)$ gebruikt worden, zonder dat de convergentie verloren gaat. $P_0(C)$ is sneller te berekenen, maar levert een minder diepe snede. Een ander verschilpunt is dat het hoekpunt van K dat correspondeert met een oplossing van (12), waarin n hoekpunten van T basisvariabelen zijn, nu niet toegelaten behoeft te zijn.
- Als stap 1 periodiek wordt uitgevoerd blijft de convergentie behouden.
- De nadruk kan naar keuze meer of minder op aftelling worden gelegd in stap 3 door slechts een deel van een zijde van K af te tellen.

De procedure kan gezien worden als een feedbackproces. De aftelling genereert een tegengestelde snede. Toevoeging van deze voorwaarde vergroot P(C). De doorsnede van u^j met bd P(C) vindt plaats in een nieuw, meer naar buiten gelegen facet van P(C). Dit facet correspondeert met een zijde van K die voor aftelling in aanmerking komt. Dit feedbackproces duwt de P(C)-snede steeds dieper in de verzameling X, totdat elke geheeltallige oplossing door de snede, de tegengestelde sneden en de oorspronkelijke voorwaarden wordt afgesneden.

5.6 Rekenresultaten.

De rekenervaring met de latere Balassneden is nog zeer beperkt en de resultaten moeten dan ook als zeer voorlopig worden beschouwd. Enige opmerkingen bij de tabellen:

TABEL 1: { algemene geheeltallige problemen
 { zuivere Balassneden zonder aftelling

pivots			sneden			rekening(sec)		
Gomory	$P_0(C)$	$P(C)$	Gomory	$P_0(C)$	$P(C)$	Gomory	$P_0(C)$	$P(C)$
7	25	12	3	11	5	.5	2.3	1.5
3	14	14	2	6	5	.3	1.5	1.5
9	26	25	4	8	8	1.4	2.6	3.3
14	15	18	6	7	9	.8	1.4	2.8
4	7	7	2	3	3	.3	.6	.8
7	7	6	4	3	3	.5	.7	.8
22	27	16	11	11	4	1.8	4.3	2.6
15	65	52	9	30	22	1.4	13.1	13.5

Tabel 1: De zuivere Balassneden zonder aftelling, gebaseerd op domein $P_0(C)$ of $P(C)$, zijn geen verbetering t.o.v. de mixed-integer Gomory-snede.

TABEL 2: { algemene geheeltallige programmeringsproblemen
 { gemengd Gomory-Balas algoritme met aftelling

pivots		sneden (+ tegengestelde sneden)		rekening(sec)	
Gomory	G-B	Gomory	G-B	Gomory	G-B
75	29	32	11+ 6	8.9	4.7
61	15	24	6+ 6	8.6	5.1
29	12	15	6+ 6	5.3	4.4
36	14	14	6+11	6.1	6.0
97	16	40	8+13	25.4	9.0
67	28	25	8+23	17.4	13.8

Tabel 2: In de gemengde algoritme worden achtereenvolgens sneden, gebaseerd op de volgende domeinen, toegevoegd: Gom, Gom, Gom, $P_0(C)$, Gom, $P(C)$, waarna de van een accolade voorziene cyclus zich telkens herhaalt. Eventuele aftelling vindt expliciet plaats,

voor $P_0(C)$ -smeden beperkt tot één-dimensionale zijden van K en voor $P(C)$ -smeden tot maximaal 3-dimensionale zijden van K . We constateren een aanzienlijke reductie van het aantal pivots en het aantal domein-smeden, maar een betrekkelijk geringe verbetering in rekestijd.

Een voorzichtige conclusie kan zijn dat de latere Balassmeden op zichzelf geen verbetering betekenen t.o.v. de Gomory-snede, maar dat zij, toegepast in bepaalde combinaties en aangevuld met aftelling, uitzicht bieden op een algoritme dat impliciete aftelling en smedemethoden integreert.

APPENDIX: LITERATUUR

1. Balas, E., Intersection cuts - a new type of cutting planes for integer programming,
Opns Res. 19(1971), 19 - 39.
2. Balas, E., V.J. Bowman, F. Glover, D. Sommer, An intersection cut from the dual of the unit hypercube,
Opns.Res. 19(1971), 40 -44.
3. Balas, E., Intersection cuts from maximal convex extensions of the ball and the octahedron,
Man.Sciences Res.Rep. No. 214, Carnegie-Mellon University(1970).
4. Balas, E., Ranking the facets of the octahedron,
Man.Sciences Res.Rep. NO. 252, Carnegie-Mellon University(1971).
5. Balas, E., Integer programming and convex analysis,
Math.Programming 2(1972), 330 -382.
6. Burdet, C.-A., A class of cuts and related algorithms in integer programming,
Man.Sciences Res.Rep. No.220, Carnegie-Mellon University(1970).
7. Burdet, C.-A., Enumerative inequalities in integer programming,
Math. Programming 2(1972), 32 -64.
8. Burdet, C.-A., Polaroids: a new tool in non-convex and in integer programming,
Man.Sciences Res.Rep. No. 284, Carnegie-Mellon University(1972).
9. Burdet, C.-A., On polaroid intersections,
Man.Sciences Res.Rep. No. 279, Carnegie-Mellon University(1972).
10. Glover, F., Generalized cuts in diophantine programming,
Man. Sc. 13(1966), 254 - 268.
11. Glover, F., Cut search methods in integer programming,
Math. Programming 3(1972), 86 - 100.
12. Gomory, R., An algorithm for integer solutions to linear programs,
in 15.

13. Gomory, R., All-integer programming algorithm,
in: Muth and Thompson, Industrial scheduling, New York(1963).
14. Gomory, R., An algorithm for the mixed integer problem,
The RAND Corporation RM-2597, Santa Monica(1960).
15. Graves, R. and Ph. Wolfe(eds.), Recent advances in mathematical
programming,
McGraw Hill(1963).
16. Haldi, J., and L.M. Isaacson, A computer code for integer
solutions to linear programs,
Opns. Res. 13(1965), 946 - 959.
17. Martin, G.T., An accelerated Euclidean algorithm for integer
linear programming,
in: 15, p. 311 - 318.
18. Rockafellar, R.T., Convex Analysis,
Princeton University Press(1970).

