BA

stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BN 17/72 OKTOBER

BA

K. DEKKER
EEN CONTINU VOORRAADPROBLEEM MET LEVERTIJDEN

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Voorwoord

De in dit verslag gegeven numerieke resultaten zijn verkregen met berekeningen op de Electrologica X8 computer van het Mathematisch Centrum te Amsterdam.

De schrijver wil zijn dank betuigen voor de hulp die hij van dr. H. C. Tijms mocht krijgen, en voor de waardevolle suggesties die dr. B. B. van der Genugten hem gegeven heeft.

Inhoud

1. Inleiding

In een veem wordt een bepaald artikel opgeslagen. De klantenorders voor dit product komen binnen volgens een Poisson proces met parameter λ; de grootte van de orders voldoet aan een (willekeurige) verdeling $F(x)$, met $F(0) = 0$. Indien aan eén order niet voldaan kan worden, dan wordt deze nageleverd.
Bij een ander veem kan het artikel besteld worden; de levertijd heeft een exponentiële verdeling met parameter μ.

Van der Genugten [1] heeft een model opgesteld bij dit probleem, waarbij verondersteld wordt dat willekeurig veel bestellingen toegestaan zijn. In dit verslag nemen we aan dat slechts besteld mag worden, indien geen bestelling uitstaat.

In hoofdstuk twee geven we een kanstheoretische beschrijving van een (S,s)-politiek. De verkregen resultaten worden nader uitgewerkt voor het geval dat $F(x)$ een exponentiële verdeling met parameter ν is. Bovendien wordt, uitgaande van bepaalde kostenfuncties, de optimale strategie in de klasse van (S,s)-strategieën en de karakteristieke momenten berekend.

In het derde hoofdstuk trachten we, bij bepaalde kostenfuncties, de gemiddelde kosten per tijdseenheid te minimaliseren. De optimale strategie wordt iteratief met behulp van Markov programmering bepaald. Het blijkt dat deze van het (S,s)-type is.

In de appendix lossen we het stelsel integraal-vergelijkingen op dat in het derde hoofdstuk optreedt.

2. Kanstheoretisch model bij een (S,s)-politiek

In dit hoofdstuk leiden we de verdelingsfuncties van enkele karakteristieke grootheden af. Vervolgens nemen we aan dat F(x) een exponentiële verdeling is, en berekenen daarbij een aantal momenten. Bij gegeven kostenfuncties kunnen dan de gemiddelde kosten per tijdseenheid berekend worden. Door deze kosten te minimaliseren vinden we een optimale strategie in de klasse van (S,s)-strategieën. Tenslotte geven we de numerieke waarden van verdelingsfuncties en momenten bij een (S,s)-politiek.

2.1. Het model

In ons model beschouwen we de volgende(stochastische) grootheden:

$V_f(t)$, $\underline{V}_f(t)$: de werkelijke voorraad op het tijdstip t;

$V_a(t)$, $\underline{V}_a(t)$: de algebraïsche voorraad op het tijdstip t, dit is de werkelijke voorraad min de grootte van het aantal na te leveren orders op het tijdstip t;

$V(t)$, $\underline{V}(t)$: de economische voorraad op het tijdstip t, dit is de algebraïsche voorraad plus de grootte van de eventueel uitstaande bestelling op het tijdstip t;

$\xi(t)$, $\underline{\xi}(t)$: het aantal uitstaande bestellingen op het tijdstip t.

Wij merken op dat $\underline{V}_f(t)$ alleen niet-negatieve waarden kan aannemen, $\underline{V}_a(t)$ en $\underline{V}(t)$ elke waarde, $\underline{\xi}(t)$ is 0 of 1.

We nemen aan dat bij het beheer van de voorraad de strategie (S,s) gevolgd wordt, dat wil zeggen: indien de economische voorraad V(t) beneden het niveau s gedaald is, wordt, indien mogelijk, een bestelling ter grootte S-V(t) gedaan.
Merk op, dat indien een bestelling binnenkomt op een moment dat de economische voorraad kleiner is dan s, direkt een nieuwe bestelling

gedaan wordt.
Wij beschouwen alleen (S,s)-strategieën met $S > s > 0$.

We definiëren nu de volgende grootheden:

$$\underline{x}(t) = S - \underline{V}(t), \quad \underline{y}(t) = S - \underline{V}_a(t), \quad \Delta = S - s.$$

Aangezien $\underline{V}(t) \geq S$ en $\underline{V}_a(t) \geq S$ onder een (S,s)-strategie, geldt altijd $\underline{x}(t) \geq 0$ en $\underline{y}(t) \geq 0$. Merk op dat $0 \leq y(t) \leq \Delta$ dan en slechts dan als $\xi(t) = 0$.
Als toestandsruimte nemen we

$$\zeta = \{(x,\xi) \mid x \geq 0,\ \xi = 0,1\}.$$

Het zal dan duidelijk zijn dat het proces $(\underline{x}(t),\underline{\xi}(t))$ een homogeen Markov proces is.

2.2 De voorwaartse vergelijkingen van $(x(t),\xi(t))$

Uit de definitie van Δ volgt dat de toestand van het systeem met kans 0 in de verzameling $(\Delta<x,\xi=0)$ verkeert. In de overige punten van ζ leiden we de voorwaartse vergelijkingen af. (De integratie intervallen in de formules zijn gesloten).

Stelling 2.1. De voorwaartse vergelijkingen van het proces $(\underline{x}(t),\underline{\xi}(t))$ zijn:

(2.1)
$$\frac{d}{dt} P(\underline{x}(t)\leq x,\underline{\xi}(t)=0) = -\lambda\, P(\underline{x}(t)\leq x,\underline{\xi}(t)=0) + \mu\, P(\underline{x}(t)\leq x,\underline{\xi}(t)=1)$$
$$\lambda \int_0^x P(y-dy<\underline{x}(t)\leq y,\underline{\xi}(t)=0)\ F(x-y)$$

voor $\Delta \geq x \geq 0$,

(2.2)
$$\frac{d}{dt} P(\underline{x}(t)\leq x,\underline{\xi}(t)=1) = -(\lambda+\mu)\, P(\underline{x}(t)\leq x,\underline{\xi}(t)=1) + \mu\, P(\underline{x}(t)>\Delta,\underline{\xi}(t)=1) +$$
$$+ \lambda \int_0^\Delta P(y-dy<\underline{x}(t)\leq y,\underline{\xi}(t)=0)\ (1-F(\Delta-y)) +$$

$$+ \lambda \int_0^x P(y-dy<\underline{x}(t)\leq y, \underline{\xi}(t)=1)\ F(x-y)$$

voor $x \geq 0$.

Bewijs.

De toestand van het systeem wordt in de periode [t,t+h] slechts gewijzigd indien hetzij klantenorders hetzij bestellingen binnenkomen.
Voor $h \to 0$ geldt:
Kans dat een order binnenkomt is $\lambda h + o(h)$;
Kans dat bestelling binnenkomt is $\xi\mu h + o(h)$;
Kans op meer dan één gebeurtenis is $o(h)$.
Verder is de kans dat de grootte van de binnenkomende order kleiner of gelijk aan Q is, gelijk aan F(Q).
Voor $0 \leq x \leq \Delta$ geeft dit:

$$P(\underline{x}(t+h)\leq x, \underline{\xi}(t+h)=0) = (1-\lambda h)\ P(\underline{x}(t)\leq x,\ \underline{\xi}(t)=0) + \mu h\ P(\underline{x}(t)\leq x, \underline{\xi}(t)=1) + $$

$$+ \lambda h \int_0^x P(y-dy<\underline{x}(t)\leq y, \underline{\xi}(t)=0)\ F(x-y) + o(h),$$

en dit levert na deling door h in de limiet de vergelijking (2.1).
Voor $0 \leq x$ krijgen we:

$$P(\underline{x}(t+h)\leq x, \underline{\xi}(t+h)=1) = (1-\lambda h-\mu h)\ P(\underline{x}(t)\leq x, \underline{\xi}(t)=1) + \mu h\ P(\underline{x}(t)>\Delta, \underline{\xi}(t)=1) +$$

$$+ \lambda h \int_0^\Delta P(y-dy<\underline{x}(t)\leq y, \underline{\xi}(t)=0)\ \{1 - F(\Delta-y)\}$$

$$+ \lambda h \int_0^x P(y-dy<\underline{x}(t)\leq y,\ \underline{\xi}(t)=1)\ F(x-y),$$

en dit levert na deling door h in de limiet de vergelijking (2.2).

2.3. De stationaire vergelijkingen van $\{\underline{x}(t), \underline{\xi}(t)\}$

Stel voor $k = 0,1$

$$G_k(x) = \lim_{t\to\infty} P(\underline{x}(t)\le x, \underline{\xi}(t)=k).$$

Stelling 2.2. De stationaire vergelijkingen van het proces $\{\underline{x}(t),\underline{\xi}(t)\}$ zijn:

$$\lambda G_0(x) = \mu G_1(x) + \lambda \int_0^x G_0(dy)\, F(x-y), \qquad \text{voor } 0 \le x \le \Delta, \tag{2.3}$$

en

$$(\lambda+\mu)G_1(x) = \lambda G_0(\Delta) + \lambda \int_0^x G_1(dy)\, F(x-y)$$
$$+ \mu(1-G_0(\Delta)-G_1(\Delta))-\lambda \int_0^\Delta G_0(dy)\, F(\Delta-y), \quad \text{voor } x \ge 0. \tag{2.4}$$

Bewijs

Neem in (2.1) en (2.2) de limiet $t \to \infty$. De term $\frac{d}{dt}$ wordt dan gelijk aan 0. Het restant levert (2.3) en (2.4)

2.4. De limietverdeling van $\{\underline{x}(t),\underline{\xi}(t)\}$

Laten $\underline{x}$ en $\underline{\xi}$ variabelen zijn met een simultane verdeling gelijk aan de limietverdeling van het proces $\{\underline{x}(t),\underline{\xi}(t)\}$, $t \to \infty$.
Stel voor $0 < \alpha \le 1$: $U(\alpha,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k F^{(k*)}(x)$, waarbij $F^{(k*)}(x)$ de k-voudige convolutie van $F(x)$ met zichzelf is.
Dan geldt:

Stelling 2.3. De marginale verdeling van $\underline{\xi}$ wordt gegeven door:

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= P(\underline{\xi}=1) = \frac{1}{1+\frac{\mu}{\lambda+\mu}U(\frac{\lambda}{\lambda+\mu},\Delta) + \frac{\mu}{\lambda}U(1,\Delta)}, \\ \xi_0 &= P(\underline{\xi}=0) = 1 - \xi_1. \end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

De simultane verdeling van $\underline{x}$ en $\underline{\xi}$ luidt:

$$(2.6)\qquad \begin{cases} G_1(x) = P(\underline{x}\leq x, \underline{\xi}=1) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\xi_1\, U(\frac{\lambda}{\lambda+\mu},x), & x \geq 0, \\ G_0(x) = P(\underline{x}\leq x, \underline{\xi}=0) = \frac{\mu}{\lambda}\,\xi_1\, U(1,x) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\xi_1 U(\frac{\lambda}{\lambda+\mu},x), & \Delta \geq x \geq 0. \end{cases}$$

In het bijzonder geldt voor de marginale verdeling van $\underline{x}$

$$(2.7)\qquad G(x) = P(\underline{x}\leq x) = \begin{cases} \frac{\mu}{\lambda}\,\xi_1\, U(1,x)\quad , & \Delta \geq x \geq 0, \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\xi_1\, U(\frac{\lambda}{\lambda+\mu},x)\quad , & x > \Delta. \end{cases}$$

Bewijs. Substitueer $x = 0$ in vergelijking (2.3) en tel het resultaat bij (2.4) op. Dit geeft

$$(2.8)\qquad (\lambda+\mu)\; G_1(x) = \mu(1-G_0(\Delta))+\lambda \int_0^x G_1(dy)F(x-y), \qquad x \geq 0.$$

Zij nu $g_k(s)$, $f(s)$ en $u(\alpha,s)$ de Laplace-getransformeerde van respectievelijk $G_k(x)$, $F(x)$ en $U(\alpha,x)$.
(De Laplace-getransformeerde van $H(x)$ is $\int_0^\infty e^{-sx}\, H(dx)$).
Transformatie van vergelijking (2.8) levert nu

$$(\lambda+\mu)\; g_1(s) = \mu(1-G_0(\Delta)) + \lambda g_1(s)\; f(s).$$

Hieruit volgt

$$(2.9)\qquad g_1(s) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,(1-G_0(\Delta)) \sum_{k=0}^{\infty} \{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, f(s)\}^k =$$

$$= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,(1-G_0(\Delta))\; u(\frac{\lambda}{\lambda+\mu},s).$$

Beschouw nu (2.3) als vergelijking in $G_0(x)$ voor alle $x \geq 0$. Laplace-transformatie geeft dan

$$\lambda g_0(s) = \mu g_1(s) + \lambda g_0(s)\; f(s);$$

substitutie van de waarde van $g_1(s)$ uit (2.9) levert

$$(2.10) \qquad g_0(s) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}(1-G_0(\Delta))\; u(\frac{\lambda}{\lambda+\mu},s)\; u(1,s) =$$

$$= \frac{\mu}{\lambda}(1-G_0(\Delta))\; \{u(1,s) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\; u(\frac{\lambda}{\lambda+\mu},s)\}.$$

Door terug transformatie van (2.9) en (2.10) volgt direkt vergelijking (2.6), daar $\xi_1 = 1 - G_0(\Delta)$.
(2.5) volgt onmiddellijk door in de vergelijking voor $G_0(x)$ $x = \Delta$ te substitueren. Tenslotte leveren (2.6) en de relatie $G(x) = G_0(x) + G_1(x)$ vergelijking (2.7)

2.5. De limietverdeling van $\{\underline{x}(t), \underline{y}(t)\}$

Zij $\underline{y}$ een variabele met een verdeling, die correspondeert met de limietverdeling van $\underline{y}(t) = S - \underline{V}_a(t)$, $t \to \infty$. Zij $\underline{Q}$ een stochast die de bestelgrootte aangeeft, zij $\underline{z} = \underline{Q} - \Delta$, en $M(z)$ de verdelingsfunctie van $\underline{z}$.
Hieruit volgt dat $\underline{y} = \underline{x} + \underline{\xi}\,.\,\underline{Q}$.

Stelling 2.4   De volgende relaties gelden:

$$(2.11) \qquad E\underline{y} = E\underline{x} + E\underline{\xi}\,.\,E\underline{Q}\,,$$

$$(2.12^a) \qquad \mathrm{cov}(\underline{x},\underline{\xi}) = \xi_1\; \{E(\underline{x}|\underline{\xi}=1) - E\underline{x}\},$$

$$(2.12) \qquad \mathrm{var}\;\underline{y} = \mathrm{var}\;\underline{x} + (E\underline{\xi})^2\; \mathrm{var}\;\underline{Q} + E\underline{Q}^2\; \mathrm{var}\;\underline{\xi} + 2E\underline{Q}\; \mathrm{cov}(\underline{x},\underline{\xi}),$$

$$(2.13) \qquad \mathrm{cov}(\underline{x},\underline{y}) = \mathrm{var}(\underline{x}) + E\underline{Q}\,.\,\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{\xi}).$$

Bewijs. Een bekend resultaat uit de waarschijnlijkheidsrekening leert ons (zie bijvoorbeeld Feller I, hoofdstuk 11):

$$E(\underline{\xi}\underline{Q}) = E\underline{\xi}\,.\,E\underline{Q}\,,$$

$$\mathrm{var}(\underline{\xi}\underline{Q}) = E\underline{\xi}\;\;\mathrm{var}\;\underline{Q} + \mathrm{var}\;\underline{\xi}(E\underline{Q})^2.$$

Uit de speciale verdeling die $\underline{\xi}$ in het beschouwde geval heeft ($\underline{\xi}$=0 of 1) volgt nu ook

$$\mathrm{var}(\underline{\xi Q}) = (E\underline{\xi})^2 \; \mathrm{var}\; \underline{Q} + E\underline{Q}^2 \; . \; \mathrm{var}\; \underline{\xi}.$$

Bovendien geldt, daar $\underline{\xi}$ = 0 of 1,

$$(2.12^a) \qquad \mathrm{cov}(x,\underline{\xi}) = E\underline{x\xi} - E\underline{x}E\underline{\xi} = \xi_1 \{E(\underline{x}|\underline{\xi}=1) - E\underline{x}\}.$$

Onder de voorwaarde $\underline{\xi}$ = 1 zijn $\underline{x}$ en $\underline{Q}$ onafhankelijk, dus

$$\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{\xi Q}) = E(\underline{x\xi Q}) - E\underline{x} \; . \; E\underline{\xi Q} =$$

$$= \xi_1 E\underline{Q}E(\underline{x}|\underline{\xi}=1) - E\underline{x}\; E\underline{\xi}\; E\underline{Q} =$$

$$= E\underline{Q}\xi_1 \; \{E(\underline{x}|\underline{\xi}=1) - E\underline{x}\} = E\underline{Q}\; \mathrm{cov}(\underline{x},\underline{\xi}).$$

Uit de definitie van $\underline{y} = \underline{x} + \underline{\xi Q}$ volgt

$$\mathrm{var}\; \underline{y} = \mathrm{var}\; \underline{x} + \mathrm{var}(\underline{\xi Q}) + 2\; \mathrm{cov}(\underline{x},\underline{\xi Q})$$

en

$$E\underline{y} = E\underline{x} + E(\underline{\xi Q}).$$

Passen we de voorgaande resultaten toe op deze vergelijkingen, dan vinden we (2.11) en (2.12).
Tenslotte geldt:

$$\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{y}) = \mathrm{cov}(\underline{x},\underline{x}+\underline{\xi Q}) = E(\underline{x}(\underline{x}+\underline{\xi Q})) - E\underline{x}\; E(\underline{x}+\underline{\xi Q}) =$$

$$= E\underline{x}^2 + E\underline{x\xi Q} - (E\underline{x})^2 - E\underline{x} \; . \; E\underline{\xi Q} =$$

$$= \mathrm{var}\; \underline{x} + \mathrm{cov}(\underline{x},\underline{\xi Q}) \;,$$

en hieruit volgt na substitutie van $\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{\xi Q}) = E\underline{Q}\; \mathrm{cov}(\underline{x},\underline{\xi})$ vergelijking (2.13).

Stelling 2.5. Voor willekeurige M wordt de verdeling van $\underline{y}$ gegeven door

$$(2.14)\qquad \begin{cases} P(\underline{y}\le y) = G_0(y) & , \quad 0 \le y \le \Delta, \\ P(\underline{y}\le y) = G_0(\Delta) + \int_0^{y-\Delta} G_1(dx)\, M(y-x) & , \quad \Delta < y. \end{cases}$$

Bewijs. Uit $P(\underline{y}\le y) = P(\underline{y}\le y|\underline{\xi}=0)\ .\ \xi_0 + P(\underline{y}\ y|\underline{\xi}=1)\ .\ \xi_1$

volgt direkt (2.14), daar $P(\underline{y}\le y|\underline{\xi}=0) = P(\underline{x}\le y|\underline{\xi}=0)$ en

$P(\underline{y}\le y|\underline{\xi}=1) = P(\underline{x}+\underline{Q}\le \underline{y}|\underline{\xi}=1)$; immers $\underline{x}$ en $\underline{Q}$ zijn onafhankelijk onder de voorwaarde $\underline{\xi} = 1$.

De limietverdeling $\underline{V}_f$ van de fysieke voorraad volgt direkt uit de relatie $\underline{V}_f = \max(0,S-\underline{y})$.

2.6 De limietverdeling van $\{\underline{L}(t)\}$

Laat $\underline{L}(t)$ de levertijd van het systeem op het tijdstip t zijn; dat wil zeggen de tijd die verstrijkt vanaf t tot het moment waarop de fysieke voorraad voor het eerst positief zou zijn, indien na t geen orders meer binnenkwamen.

Als $\underline{L}$ een variabele is met een verdeling gelijk aan de limietverdeling van $\underline{L}(t)$, $t \to \infty$, dan geldt:

Stelling 2.6. De verdeling van de levertijd $\underline{L}$ van het systeem wordt gegeven door:

$$(2.15)\qquad \begin{cases} P(\underline{L}=0) = P(\underline{y}<S), \\ P(\underline{L}\le t) = P(\underline{y}<S) + (1-e^{-\mu t})\, P(\underline{y}\ge S) - \mu t e^{-\mu t}\, P(\underline{x}\ge S)\ , \end{cases}$$

voor $t > 0$.

Bewijs. Het eerste deel van (2.15) volgt direkt uit de definitie van $\underline{L}$. Indien $\underline{V}_a \leq 0$, dus $\underline{y} \geq S$, dan moeten we één bestelling afwachten als $\underline{x} < S$, en twee bestellingen als $\underline{x} \geq S$, voordat de algebraïsche voorraad voor het eerst weer positief is, mits geen orders binnenkomen. Dus

$$P(\underline{L}\leq t) = P(\underline{L}=0) + (1-e^{-\mu t})\ P(\underline{y}\geq S,\underline{x}<S) + (1-e^{-\mu t}-\mu te^{-\mu t})\ P(\underline{x}\geq S),$$

wat het tweede deel van (2.15) oplevert.

2.7. De gemiddelde kosten per tijdseenheid

We beschouwen bestelkosten, voorraadkosten en naleveringskosten.

Bestelkosten.

Laat C(X) de kosten zijn van een bestelling ter grootte X. De verwachting van de kosten van een enkele bestelling zijn dan:

$$\int_{\Delta}^{\infty} C(x)\ P(\underline{Q}=dx) = \int_{\Delta}^{\infty} C(x+\Delta)\ M(dx).$$

De gemiddelde bestelkosten per tijdseenheid zijn volgens (2.7)

$$(2.16)\qquad \lambda\ P(\underline{V}=S)\ .\int_0^{\infty} C(x+\Delta)\ M(dx) = \mu\ .\ \xi_1\ .\int_0^{\infty} C(x+\Delta)\ M(dx).$$

Voorraadkosten en Naleveringskosten

Laat a de kosten zijn van het in voorraad houden van een eenheid per tijdseenheid, b de kosten per tijdseenheid van een na te leveren eenheid.

De gemiddelde voorraadkosten per tijdseenheid zijn dan

$$(2.17)\qquad \int_0^S a\ .\ x\ .\ P(\underline{V}_f=dx) = \int_0^S a\ .\ (S-x)\ .\ P(\underline{y}=dx),$$

en de gemiddelde naleveringskosten per tijdseenheid zijn

$$(2.18)\qquad -\int_{-\infty}^{0} b\ .\ x\ .\ P(\underline{V}_a=dx) = \int_S^{\infty} b(x-S)\ P(\underline{y}=dx).$$

2.8. Limietverdelingen voor exponentieel verdeelde orders

We veronderstellen nu dat de verdeling F van de grootte van de orders exponentieel is met parameter ν.

Stelling 2.7. De simultane verdeling van $\underline{x}$ en $\underline{\xi}$ wordt gegeven door

$$(2.19)\quad \begin{cases} G_1(x) = \xi_1\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, e^{-\frac{\mu\nu x}{\lambda+\mu}}\right) & 0 \le x\ , \\ G_0(x) = \xi_1\left(\frac{\mu}{\lambda}-1+\frac{\mu\nu x}{\lambda}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, e^{-\frac{\mu\nu x}{\lambda+\mu}}\right) & 0 \le x \le \Delta\ , \end{cases}$$

$$\text{waarbij } \xi_1 = \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda}\nu\Delta + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-\frac{\mu\nu\Delta}{\lambda+\mu}}}$$

Bewijs. Uit de definitie van $u(\alpha,s)$ en $f(s)$ als getransformeerden van $U(\alpha,x)$ en $F(x)$ volgt:

$$u(\alpha,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \{\alpha f(s)\}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha\nu}{\nu+s}\right)^k = 1 + \frac{\alpha\nu}{\nu+s-\alpha\nu}\ , \quad 0< \alpha \le 1\ ,$$

dus

$$U(\alpha,s) = \int_0^s \{\delta(0) + \alpha\nu\, e^{-\nu(1-\alpha)x}\}dx = \begin{cases} 1 + \nu s & , \quad \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha\, e^{-(1-\alpha)\nu x}), & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Uit de relaties (2.5) en (2.6) volgt nu de bewering van de stelling.

Stelling 2.8. De verdeling $\underline{z} = \underline{Q} - \Delta$, wordt gegeven door

$$(2.20)\quad M(z) = 1 - e^{-\nu z} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(e^{-\nu z} - e^{-\frac{\mu\nu z}{\lambda+\mu}}\right) e^{-\frac{\mu\nu\Delta}{\lambda+\mu}}\ , \qquad z \ge 0.$$

Bewijs. Zij $\underline{v}$ de totale vraag in de levertijd. Het is eenvoudig na te gaan dat

$$P(\underline{v}=0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad \text{en } h(x) = e^{-\frac{\mu\nu x}{\lambda+\mu}} \cdot \frac{\mu\lambda\nu}{(\lambda+\mu)^2}\ , \quad (x>0),$$

waarbij $h(x)$ de kansdichtheid van de vraag is voor $x > 0$.

Conditionerend naar $\underline{v}$ en gebruikmakend van de "geheugenloosheidseigenschap" van de exponentiële verdeling, vinden wij

$$P(\underline{Q}\leq Q) = P(\underline{v}\leq\Delta) \;.\; \{1-e^{-\nu(Q-\Delta)}\} + P\{\Delta < \underline{v} \leq Q\} \;, \quad Q > \Delta.$$

Substitutie van $P(\underline{v}\leq x) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, e^{-\frac{\mu\nu x}{\lambda+\mu}}$, en $\underline{Q} = \underline{z} + \Delta$

geeft de bewering van de stelling.

Uit deze stelling en stelling 2.5 volgt onmiddellijk de verdeling van $\underline{y}$:

$$(2.21) \qquad P(\underline{y}\leq y) = \begin{cases} G_0(y) \;, & 0 \leq y \leq \Delta \\ 1 - \xi_1 \;.\; \left(e^{-\frac{\mu\nu}{\lambda+\mu}(y-\Delta)} + (y-\Delta)\,\frac{\lambda^2\mu\nu}{(\lambda+\mu)^3}\, e^{-\frac{\mu\nu y}{\lambda+\mu}}\right) , & y > \Delta. \end{cases}$$

Wij merken op dat (2.21) ons leert, dat de service-graad (gedefinieerd door $P\{\underline{V}_a > 0\}$) gegeven wordt door $P(\underline{y}\leq S)$.
Uit (2.15) leiden we nu de verdeling van de levertijd van het systeem af:

$$(2.22) \qquad P(\underline{L}\leq t) = 1 - \xi_1\, e^{-\mu t}\, \{e^{-\frac{\mu\nu s}{\lambda+\mu}} + s\frac{\lambda^2\mu\nu}{(\lambda+\mu)^3}\, e^{-\frac{\mu\nu S}{\lambda+\mu}} + \mu t\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, e^{-\frac{\mu\nu S}{\lambda+\mu}}\} \;.$$

De momenten van $\underline{x}$, $\underline{\xi}$, $\underline{Q}$ en $\underline{L}$ kunnen nu direkt uit (2.19), (2.20) en (2.22) berekend worden. De momenten van $\underline{y}$ volgen uit stelling 2.1.
We geven hier de formules zonder verdere afleiding:

$$E\underline{\xi} \quad = \xi_1 = \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda}\nu\Delta + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, e^{-\frac{\mu\nu\Delta}{\lambda\ \mu}}} \;;$$

$$P(\underline{\xi}=0) = \xi_0 = 1 - \xi_1 \;;$$

$$\mathrm{Var}(\underline{\xi}) = \xi_1 \;.\; \xi_0 \;;$$

$$E(\underline{x}|\underline{\xi}=0) = \frac{\xi_1}{\xi_0} \cdot \{\tfrac{1}{2}\frac{\mu\nu\Delta^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{\mu\nu} + (\frac{\lambda\Delta}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\mu\nu})\, e^{-\frac{\mu\nu\Delta}{\lambda+\mu}}\} \;;$$

$$E(\underline{x}|\underline{\xi}=1) = \frac{\lambda}{\mu\nu}$$

$$E\underline{x} = \xi_1 \cdot \{\frac{1}{2}\frac{\mu\nu\Delta^2}{\lambda} + (\frac{\lambda\Delta}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\mu\nu})\, e^{-\frac{\mu\nu\Delta}{\lambda+\mu}}\} \;;$$

$$\mathrm{Var}(\underline{x}) = \xi_1 \cdot \{\frac{1}{3}\frac{\mu\nu\Delta^3}{\lambda} + (\frac{\lambda\Delta^2}{\lambda+\mu} + \frac{2\lambda\Delta}{\mu\nu} + \frac{2\lambda(\lambda+\mu)}{\mu^2\nu^2})\, e^{-\frac{\mu\nu\Delta}{\lambda+\mu}}\} - (E\underline{x})^2 \;;$$

$$\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{\xi}) = \xi_1 \cdot \{(E\underline{x}|\underline{\xi}=1) - E\underline{x}\} \;;$$

$$E\underline{Q} = \Delta + \frac{1}{\nu} + \frac{\lambda^2}{\mu\nu(\lambda+\mu)}\, e^{-\frac{\mu\nu\Delta}{\lambda+\mu}} = \frac{\lambda}{\mu\nu\xi_1} \;;$$

$$E\underline{Q}^2 = \Delta^2 + \frac{2\Delta}{\nu} + \frac{2}{\nu^2} + \frac{2\lambda^2}{\mu\nu(\lambda+\mu)}\,(\Delta + \frac{\lambda+2\mu}{\mu\nu})\, e^{-\frac{\mu\nu\Delta}{\lambda+\mu}} \;;$$

$$E\underline{L} = \frac{\xi_1}{\mu}\,\{e^{-\frac{\mu\nu s}{\lambda+\mu}} + s\frac{\lambda^2\mu\nu}{(\lambda+\mu)^3}\, e^{-\frac{\mu\nu S}{\lambda+\mu}} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, e^{-\frac{\mu\nu S}{\lambda+\mu}}\} \;;$$

$$\mathrm{Var}\ (\underline{L}) = 2\frac{\xi_1}{\mu^2}\,\{e^{-\frac{\mu\nu s}{\lambda+\mu}} + s\frac{\lambda^2\mu\nu}{(\lambda+\mu)^3}\, e^{-\frac{\mu\nu S}{\lambda+\mu}} + \frac{2\lambda}{\lambda+\mu}\, e^{-\frac{\mu\nu S}{\lambda+\mu}}\} - (E\underline{L})^2 \;.$$

2.9. Bepaling optimale (S,s)-strategie

Laat de bestel-, voorraad- en naleveringskosten gedefinieerd zijn als in paragraaf 2.7 en zij de functie $C(x)$ gegeven door

$$C(x) = c + d \,.\, x.$$

Stelling 2.9. De gemiddelde kosten per tijdseenheid y bedragen

$$y = \frac{d\lambda}{\nu} + c\mu\xi_1 + a\{S - \frac{\lambda}{\mu\nu} - \xi_1 \cdot (\frac{1}{2}\frac{\mu\nu\Delta^2}{\lambda} + (\frac{\lambda\Delta}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\mu\nu})\, e^{-\frac{\mu\nu\Delta}{\lambda+\mu}})\}$$
$$+ (a+b) \,.\, \xi_1 \,.\, e^{-\frac{\mu\nu S}{\lambda+\mu}}\,\{(S-\Delta)\frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{\lambda^2}{\mu\nu(\lambda+\mu)} + \frac{\lambda+\mu}{\mu\nu}\, e^{\frac{\mu\nu\Delta}{\lambda+\mu}}\}. \tag{2.23}$$

<u>Bewijs.</u> Uit (2.16) volgt dat de gemiddelde bestelkosten per tijdseenheid bedragen:

$$\mu\xi_1 \int_0^\infty C(x+\Delta)\ M(dx) = \mu\xi_1 \int_0^\infty \{c + d\ (x+\Delta)\}\ M(dx) = \mu\xi_1 c + \mu\xi_1\ E\underline{Q},$$

en volgens paragraaf 2.8. is $E\underline{Q} = \frac{\lambda}{\mu\nu\xi_1}$.

Voor de voorraad- en naleveringskosten volgt uit (2.17) en (2.18):

$$\int_0^S a(S-x)\ P(\underline{y}=dx) = aS - aE\underline{y} - a\ .\ P(\underline{y}>S)\ .\ \{S - E(\underline{y}|\underline{y}>S)\}$$

en

$$\int_S^\infty b(x-S)\ P(\underline{y}=dx) = b\ P(\underline{y}>S)\ \{E(\underline{y}|\underline{y}>S) - S\}\ .$$

Uit (2.21) leidt men eenvoudig af dat

$$\{E(\underline{y}|\underline{y}>S) - S\}\ P(y>S) = \xi_1\ e^{-\frac{\mu\nu S}{\lambda+\mu}}\ \{(S-\Delta)\frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{\lambda^2}{\mu\nu(\lambda+\mu)} + \frac{\lambda+\mu}{\mu\nu}\ e^{+\frac{\mu\nu\Delta}{\lambda+\mu}}\}\ .$$

Optelling van deze kosten geeft (2.23).

Met formule (2.23) zijn de gemiddelde kosten expliciet geschreven als functie van S en Δ. Door het minimum van deze functie te bepalen, vinden we de optimale (S,s) strategie. We hebben dit minimum numeriek bepaald met de procedure RNKONEMIN van Bus [2]. De gevonden optimale S en s, en de daarbij behorende kosten, staan voor verschillende waarden van λ/μ, ν, a, b, en c vermeld in tabel 2.1. (Omdat S en s onafhankelijk zijn van d, is d = 0 gekozen).

Tabel 2.1

Optimale S en s en bijbehorende gemiddelde kosten per tijdseenheid.

λ	μ	ν	a	b	c	S	s	y
20	1	1	1	10	30	90.60	26.32	69.14
20	1	1	1	5	30	75.81	13.87	55.86
10	1	1	1	5	30	42.14	5.05	32.96
5	1	1	1	5	30	24.55	1.26	20.56

We kunnen S en s ook optimaliseren onder de voorwaarde dat de service graad minstens α is. We stellen de naleveringskosten dan gelijk aan 0.

In tabel 2.2 geven we een overzicht van de servicegraad α, de verwachte levertijd $E\underline{L}$ en de variantie van de levertijd var $\underline{L}$ bij diverse waarden van s. De waarden van de andere parameters waren $\lambda = 20$, $\mu = 1$, $\nu = 1$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 30$, $d = 0$

Tabel 2.2

Servicegraad en levertijd.

S	s	y	α	$E\underline{L}$	var $\underline{L}$
90.60	0	36.77	.7823	.2205	.6308
90.60	10.53	41.32	.8498	.1533	.5379
90.60	21.06	46.50	.8936	.1100	.4638
90.60	26.32	49.28	.9091	.0948	.4339
90.60	31.58	52.17	.9214	.0828	.4088
90.60	42.11	58.24	.9381	.0668	.3730
90.60	52.64	64.60	.9468	.0593	.3566

2.10. Numerieke waarden van de momenten

Voor de numerieke berekening van een aantal van de in paragraaf 2.8 bepaalde grootheden is een ALGOL programma geschreven. Daarin wordt de simultane verdeling van $\{\underline{x},\underline{\xi}\}$, de verdeling van $\underline{y}$ en een aantal eerste en tweede momenten van deze verdelingen berekend. Omdat de in paragraaf 2.8. gevonden uitdrukkingen slechts afhangen van het produkt $\nu\Delta$ en het quotient $^{\lambda}/\mu$, en niet van deze waarden afzonderlijk, stellen we t = $^{\lambda}/\mu$ $\Delta = 1$. t stelt dus de gemiddelde levertijd van een bestelling voor met als tijdseenheid de gemiddelde tijd tussen twee orders, en nu = $\nu\Delta$ stelt het aantal malen voor dat de gemiddelde grootte van een order gaat op het verschil $\Delta = S - s$.

Beschrijving van de output.

Als getalvoorbeeld is genomen t = 5 en nu = 10. De eerste regel herhaalt de ingelezen waarden; i stap regelt hierbij de grootte van de stappen waarin de "voorraad-as" verdeeld wordt. De berekeningen voor de verdelingsfuncties van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ worden uitgevoerd in x = 0, ^{1}/istap, ^{2}/istap, ..., totdat een waarde wordt bereikt die minder dan 10^{-4} afwijkt van de waarde in $x = \infty$. In het voorbeeld is istap = 5 genomen. Allereerst worden de waarden van de marginale verdeling G(x) afgedrukt, en wel op de eerste regel voor x = 0,.2, .4, .6, .8 en 1, op de volgende regel voor x = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2, op de daaropvolgende regel voor x = 2.2, ..., 3, enzovoorts. Daarna worden de verdelingen $G_0(x)$ en $G_1(x)$ afgedrukt.
Onder het kopje COND. VERD. VAN S-VE GEG. AANTAL BEST. wordt de conditionele verdeling $P(\underline{x}\leq x,\underline{\xi}=k)$ gegeven.
Vervolgens wordt de conditionele verwachting van $\underline{x} = S - V_{-e}$, gegeven het aantal bestellingen, gegeven, en daarna de momenten van $\underline{x}$, $\underline{\xi}$ en L.
Onder het hoofd MOMENTEN VAN S - VA worden de momenten van $\underline{y}$ gegeven, en tenslotte is de marginale verdeling van $\underline{y}$ afgedrukt.

istap= 5 nu= 10 t= 5

SIM. VERD. VAN S-VE EN AANTAL BEST.

	.0000	.2000	.4000	.6000	.8000	1.0000
G(X)	.0848	.2545	.4242	.5939	.7636	.9332
		.9522	.9657	.9754	.9824	.9874
		.9910	.9935	.9954	.9967	.9976
		.9983	.9988	.9991	.9994	.9996
		.9997	.9998	.9998	.9999	.9999
		.9999	1.0000	1.0000		
0	.0141	.0836	.1815	.2997	.4325	.5758
1	.0707	.1709	.2427	.2942	.3310	.3574
		.3764	.3899	.3996	.4066	.4116
		.4152	.4177	.4196	.4209	.4218
		.4225	.4230	.4233	.4236	.4237
		.4239	.4240	.4240	.4241	.4241
		.4241	.4242	.4242		

COND. VERD. VAN S-VE GEG. AANTAL BEST.

0	.0246	.1452	.3152	.5205	.7512	1.0000
1	.1667	.4029	.5722	.6934	.7803	.8426
		.8872	.9192	.9421	.9585	.9703
		.9787	.9847	.9891	.9922	.9944
		.9960	.9971	.9979	.9985	.9989
		.9992	.9995	.9996	.9997	.9998
		.9999	.9999	.9999		

COND. VERW. VAN S-VE GEG. AANTAL BEST.

K	KSI	E(X|K)
0	.5758	.5539
1	.4242	.5000

MOMENTEN VAN S-VE EN AANTAL BEST.

EX = .5310 EXSI = .4242
SIGX= .4425 SIGXSI= .4942
RHO(X,XSI)= .0602

MOMENTEN VAN S-VA

EY = 1.0310 SIGY = .7388 RHO(X,Y)= .5515

MARG. VERD. VAN S—VA

X=	.0000	VA=	.0141
X=	.2000	VA=	.0836
X=	.4000	VA=	.1815
X=	.6000	VA=	.2997
X=	.8000	VA=	.4325
X=	1.0000	VA=	.5758
X=	1.2000	VA=	.6850
X=	1.4000	VA=	.7663
X=	1.6000	VA=	.8269
X=	1.8000	VA=	.8719
X=	2.0000	VA=	.9053
X=	2.2000	VA=	.9300
X=	2.4000	VA=	.9484
X=	2.6000	VA=	.9619
X=	2.8000	VA=	.9720
X=	3.0000	VA=	.9794
X=	3.2000	VA=	.9848
X=	3.4000	VA=	.9888
X=	3.6000	VA=	.9918
X=	3.8000	VA=	.9940
X=	4.0000	VA=	.9956
X=	4.2000	VA=	.9968
X=	4.4000	VA=	.9976
X=	4.6000	VA=	.9983
X=	4.8000	VA=	.9987
X=	5.0000	VA=	.9991
X=	5.2000	VA=	.9993
X=	5.4000	VA=	.9995
X=	5.6000	VA=	.9996
X=	5.8000	VA=	.9997
X=	6.0000	VA=	.9998
X=	6.2000	VA=	.9999
X=	6.4000	VA=	.9999
X=	6.6000	VA=	.9999

3. Een iteratiemethode

In dit hoofdstuk nemen wij aan dat de ordergrootte exponentiëel verdeeld is. Wij zullen met behulp van de theorie van de Markov-programmering een iteratie-methode afleiden waarmee, onder zekere voorwaarden, een optimale voorraadstrategie gevonden kan worden. De iteratie-methode genereert alleen (S,s)-strategieën en leidt tot een optimale strategie van het (S,s)-type als de beste strategie in de klasse van de (S,s)-strategie gegeven wordt door een (S,s)-strategie met $S \geq 2s > 0$.

3.1. Toestandsruimte en toegelaten beslissingen

De toestand van het systeem wordt bepaald door de economische voorraad x en de grootte van de lopende bestelling Q, en indien geen bestelling onderweg is, alleen door de economische voorraad. Wij beschouwen alleen de toestand van het systeem op de momenten dat een klantenorder of een bestelling binnenkomt, aangezien dit de enige momenten zijn waarop beslist kan worden.
Als toestandsruimte nemen we dus

$$I = \{(x,Q) \mid Q > 0,\ x \in R\} \cup \{x \mid x \in R\}\ .$$

We definiëren nu de verzamelingen

$$W = \{x \mid x \in R\}$$

en

$$W_0 = \{x \mid x \leq 0\}\ .$$

Bestellingen, zijn toegelaten indien de toestand van het systeem een toestand uit W is; bevindt het systeem zich in een toestand van W_0, dan moet een bestelling gedaan worden.
Geven wij nu beslissingen D aan met D = 0 indien de beslissing "niet bestellen" luidt, en D = S indien de beslissing is "vul de economische voorraad aan tot het niveau S", dan is de verzamelingen van toegelaten beslissingen in een toestand u

$$H(u) = \begin{cases} \{0\} & u \in I - W \ , \\ \{S \mid S > u\} \cup \{0\} \ , & u \in W - W_0 \ , \\ \{S \mid S > 0\} & , \ u \in W_0 \ . \end{cases}$$

3.2. Bepaling van overgangskansen

Laat $P_D(u,A)$ de kans zijn dat het systeem een toestand van A aanneemt bij de eerstvolgende toestandsverandering die optreedt indien in toestand u de beslissing D genomen wordt. Is de grootte van de klantenorders exponentieel verdeeld met parameter ν, dan wordt $P_D(u,A)$ gegeven door

$$(3.1) \quad \begin{cases} P_D((x,Q),x) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} & , \ D = 0, \\ P_D((x,Q),A) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1-e^{-\nu(x-w)}) & , \ D = 0, \ A = \{(w,Q) \mid w \le x\}, \\ P_D(x,A) = 1 - e^{-\nu(x-w)} & , \ D = 0, \ A = \{w \mid w \le x\}, \\ P_D(x,(y,y-x)) = 1 & , \ D = y > 0. \end{cases}$$

3.3. Berekening van k- en t-functies

Stel de bestel-, voorraad- en naleveringskosten zijn gedefinieerd als in paragraaf 2.7 en 2.9. Laat $k_D(u)$ de te verwachten kosten zijn die gemaakt zullen worden in de periode tot de eerstvolgende toestandsverandering, indien in toestand u de beslissing D genomen wordt; zij $t_D(u)$ de verwachte lengte van deze periode.
Het is dan gemakkelijk in te zien dat geldt:

$$(3.2) \quad \begin{cases} k_D(x) = \begin{cases} \frac{ax}{\lambda} & , \quad D = 0, \\ c + d(y-x) & , \quad D = y > 0, \end{cases} \\ \\ k_D((x,Q)) = \begin{cases} a\,\frac{x-Q}{\lambda+\mu} & , \quad x \ge Q, \ D = 0, \\ -b\,\frac{x-Q}{\lambda+\mu} & , \quad x \le Q, \ D = 0. \end{cases} \end{cases}$$

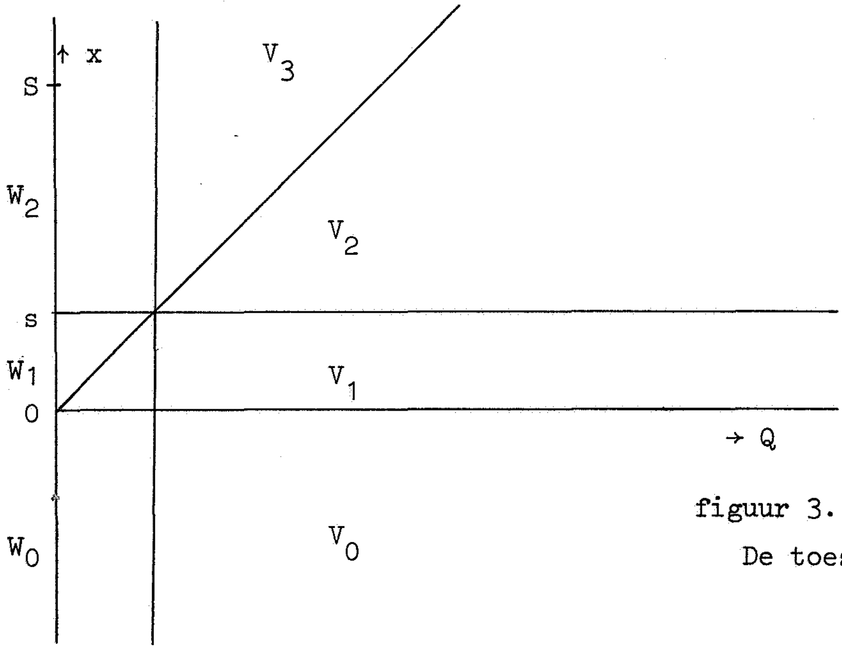
$$
(3.3)\quad \begin{cases} t_D(x) = \begin{cases} {}^1/\lambda & , \quad D = 0, \\ 0 & , \quad D > 0, \end{cases} \\ t_D((x,Q)) = \dfrac{1}{\lambda+\mu} \quad , \quad D = 0. \end{cases}
$$

3.4. Bepaling van de y- en v-functies

We gaan nu uit van een strategie $z = (S,s)$; d.w.z. dat een bestelling geplaatst wordt, indien toegelaten, wanneer de economische voorraad x kleiner is geworden dan s, en wel een bestelling ter grootte $S - x$. Bovendien eisen we dat $S \geq 2.s$.
We definiëren nu de verzamelingen

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \{x \mid 0 < x < s\}, \\
W_2 &= \{x \mid s \leq x\}, \\
V_0 &= \{(x,Q) \mid x \leq 0,\ Q > s\}, \\
V_1 &= \{(x,Q) \mid 0 < x < s,\ Q > s\}, \\
V_2 &= \{(x,Q) \mid s \leq x \leq Q,\ Q > s\}, \\
V_3 &= \{(x,Q) \mid Q < x,\ Q > s\}.
\end{aligned}
$$

Deze verzameling zijn weergegeven in figuur 3.1.



figuur 3.1.
De toestandsruimte I.

We merken op dat de toestandsruimte geen priemfuiken bevat; immers vanuit elke toestand kan een toestand uit W_0 bereikt worden, en vanuit W_0 kan (S) bereikt worden.
De theorie van de Markov-programmering leidt tot de volgende funktionaalvergelijkingen voor de gemiddelde kosten y_z en de waarderingsfunkties $v_z(u)$.

$$v_z(u) = k_z(u) - y_z\, t_z(u) + \int v_z(y)\, P_z(u,dy),$$

waarbij we stellen $v_z(0) = 0$.
We definiëren nu de functies:

$$y = y_z,$$

$$w_k(x) = v_z(x) \quad , \quad x \in W_k \quad , \quad k = 0,\ 1,\ 2,$$

$$v_k(x,Q) = v_z((x,Q)) \quad , \quad (x,Q) \in V_k \quad , \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Substitueren we nu de waarden van $k_z(u)$, $t_z(u)$ en $P_z(u,dy)$, dan vinden we het volgende stelsel funktionaal-vergelijkingen.
(ter vereenvoudiging van de notatie stellen we $g(y) = \nu e^{-\nu y}$).

$$x \in W_0:\quad w_0(x) = c + d(S-x) + v_2(S,S-x);$$

$$x \in W_1:\quad w_1(x) = c + d(S-x) + v_3(S,S-x);$$

$$x \in W_2:\quad w_2(x) = \frac{ax}{\lambda} - \frac{y}{\lambda} + \int_{-\infty}^{0} w_0(y)\ g(x-y)dy + \int_{0}^{S} w_1(y)\ g(x-y)dy$$
$$+ \int_{S}^{x} w_2(y)\ g(x-y)dy;$$

$$(x,Q) \in V_0:\ v_0(x,Q) = -b\frac{x-Q}{\lambda+\mu} - \frac{y}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\, w_0(x) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_{-\infty}^{x} v_0(y,Q)g(x-y)dy;$$

$$(x,Q) \in V_1: \quad v_1(x,Q) = -b\frac{(x-Q)}{\lambda+\mu} - \frac{y}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} w_1(x) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_{-\infty}^{0} v_0(y,Q)g(x-y)dy$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_{0}^{x} v_1(y,Q)\, g(x-y)dy;$$

$$(x,Q) \in V_2: \quad v_2(x,Q) = -b\frac{(x-Q)}{\lambda+\mu} - \frac{y}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} w_2(x) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_{-\infty}^{0} v_0(y,Q)g(x-y)dy$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_{0}^{s} v_1(y,Q)g(x-y)dy + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_{s}^{x} v_2(y,Q)g(x-y)dy;$$

$$(x,Q) \in V_3: \quad v_3(x,Q) = a\frac{(x-Q)}{\lambda+\mu} - \frac{y}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} w_2(x) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_{-\infty}^{0} v_0(y,Q)g(x-y)dy$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_{0}^{s} v_1(y-Q)g(x-y)dy + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_{s}^{Q} v_0(y,Q)g(x-y)dy$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_{Q}^{x} v_3(y,Q)g(x-y)dy;$$

$$w_0(0) = 0.$$

<u>Stelling 3.1.</u> De waarderingsfuncties v_i en w_j worden gegeven door: (ter vereenvoudiging van de notatie stellen we $\alpha = \frac{\mu\nu}{\lambda+\mu}$)

(3.4) $$w_0(x) = -dx - \frac{bx}{\mu};$$

(3.5) $$w_1(x) = -dx + \frac{ax}{\mu} - (a+b)\,\frac{\lambda}{\mu^2\nu}\,(e^{-\alpha x}-1);$$

(3.6) $$w_2(x) = \left(-\frac{1}{\lambda} - \frac{\nu x}{\lambda} + \frac{\nu s}{\lambda}\right)y + d\left(\frac{1}{\nu} - S\right) + a\left(\tfrac{1}{2}\,\frac{\nu x^2}{\lambda} + \frac{x}{\lambda} - \tfrac{1}{2}\,\frac{\nu s^2}{\lambda} + \frac{s}{\nu} - \frac{1}{\mu\nu}\right)$$

$$+ (a+b)\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu^2\nu}\, e^{-\alpha s} - \frac{\lambda}{\mu^2\nu}\right);$$

(3.7) $$v_0(x,Q) = -\frac{y}{\mu} - dx + \frac{\lambda}{\mu\nu} d + b(-\frac{2x}{\mu} + \frac{2\lambda}{\mu^2\nu} + \frac{Q}{\mu});$$

(3.8) $$v_1(x,Q) = -\frac{y}{\mu} - dx + \frac{\lambda}{\mu\nu} d + b(-\frac{2x}{\mu} + \frac{2\lambda}{\mu^2\nu} + \frac{Q}{\mu})$$
$$+ (a+b)\,(\frac{x}{\mu} - \frac{2\lambda}{\mu^2\nu} + \frac{2\lambda}{\mu^2\nu} e^{-\alpha x} + \frac{\lambda^2 x}{\mu(\lambda+\mu)^2} e^{-\alpha x});$$

(3.9) $$v_2(x,Q) = \{-\frac{1}{\lambda} - \frac{\nu x}{\lambda} + \frac{\nu s}{\lambda} - \frac{\lambda e^{-\alpha(x-s)}}{\mu(\lambda+\mu)}\}y + \{\frac{1}{\nu} - s + \frac{\lambda^2 e^{-\alpha(x-s)}}{\mu\nu(\lambda+\mu)}\}d$$
$$+ \frac{bQ}{\mu} + (a+b)\,\{-\frac{x}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2\nu(\lambda+\mu)} e^{-\alpha x} + \frac{\lambda+\mu}{\mu^2\nu} e^{-\alpha s} + \frac{\lambda^2 s}{\mu(\lambda+\mu)^2} e^{-\alpha x}\}$$
$$+ a\{\tfrac{1}{2}\frac{\nu x^2}{\lambda} + \frac{x}{\lambda} - \tfrac{1}{2}\frac{\nu s^2}{\lambda} + \frac{s}{\mu} - \frac{1}{\mu\nu} + \frac{\lambda s}{\mu(\lambda+\mu)} e^{-\alpha(x-s)} -$$
$$+ \frac{\lambda(2\lambda+\mu)}{\mu^2\nu(\lambda+\mu)} e^{-\alpha(x-s)}\};$$

(3.10) $$v_3(x,Q) = \{-\frac{1}{\lambda} - \frac{\nu x}{\lambda} + \frac{\nu s}{\lambda} - \frac{\lambda e^{-\alpha(x-s)}}{\mu(\lambda+\mu)}\}y + \{\frac{1}{\nu} - s + \frac{\lambda^2 e^{-\alpha(x-s)}}{\mu\nu(\lambda+\mu)}\}d$$
$$+ (a+b)\,\{-\frac{\lambda}{\mu^2\nu} + \frac{\lambda}{\mu^2\nu} e^{-\alpha(x-Q)} + \frac{\lambda^2}{\mu^2\nu(\lambda+\mu)} e^{-\alpha x} + \frac{\lambda+\mu}{\mu^2\nu} e^{-\alpha s}$$
$$+ \frac{\lambda^2 s e^{-\alpha x}}{\mu(\lambda+\mu)^2}\}$$
$$+ a\{\tfrac{1}{2}\frac{\nu x^2}{\lambda} + \frac{x}{\lambda} - \tfrac{1}{2}\frac{\nu s^2}{\lambda} + \frac{s}{\mu} - \frac{1}{\mu\nu} - \frac{Q}{\mu} + \frac{\lambda s e^{-\alpha(x-s)}}{\mu(\lambda+\mu)}$$
$$- \frac{\lambda(2\lambda+\mu)}{\mu^2\nu(\lambda+\mu)} e^{-\alpha(x-s)}\};$$

Bewijs. Voor het bewijs verwijzen we naar de appendix.

Stelling 3.2. De gemiddelde kosten worden gegeven door

$$(3.11)\qquad y = \frac{d\lambda}{\nu} - \frac{a\lambda}{\mu\nu} + \lambda(1+\nu S-\nu s+ \frac{\lambda^2}{\mu(\lambda+\mu)}\, e^{-\alpha(S-s)})^{-1}\ .$$

$$.\ \{c + \frac{b+a}{\mu}\,(\frac{\lambda^2}{\mu\nu(\lambda+\mu)}\, e^{-\alpha S} + \frac{\lambda+\mu}{\mu\nu}\, e^{-\alpha s} + \frac{\lambda^2 s}{(\lambda+\mu)^2}\, e^{-\alpha S}) +$$

$$+\ a(\tfrac{1}{2}\,\frac{\nu S^2}{\lambda} + \frac{S}{\lambda} - \tfrac{1}{2}\,\frac{\nu s^2}{\lambda} + \frac{\lambda s}{\mu(\lambda+\mu)}\, e^{-\alpha(S-s)} - \frac{\lambda}{\mu^2\nu}\, e^{-\alpha(S-s)})\}.$$

Bewijs. De relatie volgt onmiddellijk door in de oorspronkelijke vergelijking voor $w_0(x)$,

$$w_0(x) = c + d(S-x) + v_2(S,S-x),$$

$x = 0$ te substitueren, en uit de waarde van $v_2(S,S)$ volgens (3.9).

Opmerking: (3.11) stemt overeen met (2.22).

3.5. Iteratiestap

Uitgaande van de strategie z construeren we nu een nieuwe strategie z_1 die indien mogelijk beter is.
Definieer daartoe

$$v(D,x) = k_D(x) - t_D(x).y + \int_{u\in I} v_z(u)\; P_D(x,du), \qquad x \in W.$$

We dienen nu het minimum van $v(D,x)$ te bepalen voor $D \in H(x)$.
Substitueren we in deze vergelijking de waarden van $k_D(x)$, $t_D(x)$ en $P_D(x,du)$, (vergelijk de formules 3.1, 3.2 en 3.3) dan vinden we:

voor $x \in W_2$: $\quad v(S^*,x) = c + d(S^*-x) + v_3(S^*,S^*-x), \qquad S^* > x,$

$$v(0,x) = w_2(x);$$

voor $x \in W_1$: $v(S^*,x) = c + d(S^*-x) + v_3(S^*,S^*-x)$, $S^* > x$,

$$v(0,x) = \frac{ax}{\lambda} - \frac{y}{\lambda} + \int_{-\infty}^{0} w_0(u)g(x-u)du + \int_{0}^{x} w_1(u)g(x-u)du;$$

voor $x \in W_0$: $v(S^*,x) = c + d(S^*-x) + v_2(S^*,S^*-x)$.

We merken hierbij op dat een beslissing S^* in een toestand x impliceert, dat een bestelling gedaan wordt ter grootte $S^* - x$.

Stelling 3.3. De funkties $f_3(u,x) = c + d(u-x) + v_3(u,u-x)$ en $f_2(u,x) = c + d(u-x) + v_2(u,u-x)$, voor $u \geq 0$, zonder de voorwaarde $u \geq x$, bereiken het minimum in een punt $u = u_1$, dat niet afhangt van x.

Bewijs. Substitueer (3.10), respektievelijk (3.9), in de uitdrukkingen voor $f_3(u,x)$ en $f_2(u,x)$. Dan blijkt na enig rekenen dat f_3 en f_2 als volgt geschreven kunnen worden:

$$f_3(u,x) = g_1(x) + h(u), \qquad f_2(u,x) = g_0(x) + h(u),$$

waarbij h(u) gegeven wordt door

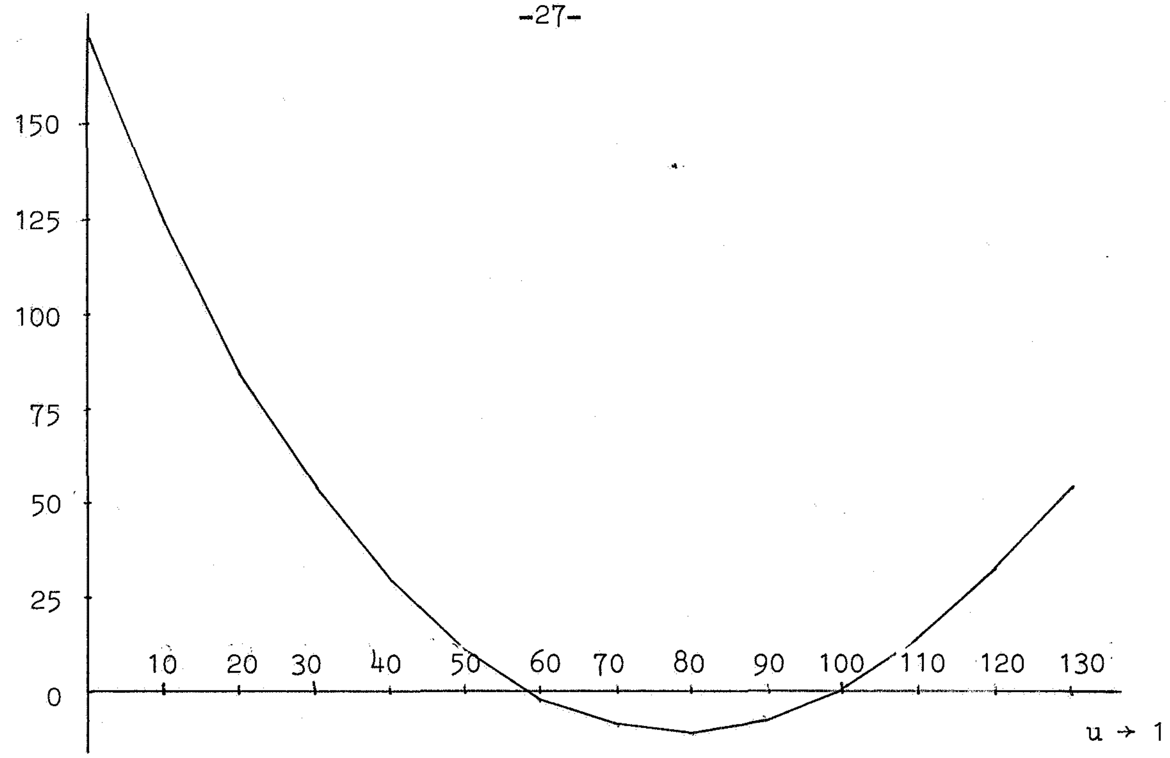
$$(3.12)\quad h(u) = \tfrac{1}{2}\frac{a\nu}{\lambda}u^2 + \left(d - \frac{\nu y}{\lambda} + \frac{a}{\lambda} - \frac{a}{\mu}\right)u + e^{-\alpha u}\,.\,\left\{-\frac{\lambda y}{\mu(\lambda+\mu)}e^{\alpha s} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^2 d}{\mu\nu(\lambda+\mu)}e^{\alpha s} + (a+b)\frac{\lambda^2}{\mu(\lambda+\mu)}\left(\frac{1}{\mu\nu} + \frac{s}{\lambda+\mu}\right) + \frac{a\lambda}{\mu(\lambda+\mu)}e^{\alpha s}\left(s - \frac{2\lambda+\mu}{\mu\nu}\right)\right\}.$$

Met behulp van formule (3.11) is het nu na te gaan, dat h'(u) één nulpunt heeft, en monotoon stijgend is op $(0,\infty)$, indien a, b, c, d, s en S niet negatief zijn. Ter illustratie geven we in figuur 3.2 de grafiek van $f_3(u,0)$. De parameters hadden hierbij de waarden:

$\lambda = 20$, $\mu = 1$, $\nu = 1$, $a = 1$, $b = 5$, $c = 30$, $d = 0$,

$S = 100$, $s = 10$.



Figuur 3.2. De funktie $f_3(u,0) = g_1(0) + h(u)$.

De nieuwe strategie zal dus aanvulling van de economische voorraad tot het niveau u_1 voorschrijven, indien in toestand $x < u_1$ een bestelling gedaan wordt. We dienen nu de verzameling te bepalen, waarin de beslissing "bestellen" luidt. In elk geval behoort W_0 tot deze verzameling. Voor de overige toestanden $x \in W$ dienen we $v(0,x)$ en $v(u_1,x)$ te vergelijken. Op grond van het model nemen we aan dat $v(0,x) - v(u_1,x)$ monotoon dalend is op $(0,u_1)$. We kunnen dan drie gevallen onderscheiden:

1^e. $v(u_1,u_1) < v(0,u_1)$. In dit geval zou de verzameling toestanden waarin de beslissing "bestellen" luidt, de verzameling $(-\infty,u_1]$ omvatten. Het is duidelijk dat deze situatie slechts optreedt, indien de strategie z zeer ongunstig is. Omdat we slechts strategieën van het (S,s)-type met $S \geq 2s \geq 0$ willen beschouwen, kiezen we als nieuwe strategie $z_1 = (u_1,\frac{1}{2}u_1)$, die in elk geval beter is dan de strategie z, indien $z \neq z_1$.

2^e. $v(u_1,0) > v(0,0)$. Dit betekent dat het gunstiger is niet te bestellen in toestanden $x \in [0,u_1]$. We eisten echter dat, mits toegestaan, een bestelling geplaatst werd, indien de voorraad niet meer positief is. De nieuwe strategie luidt dus nu $z_1 = (u_1,0)$.

3^e. $v(u_1,s_1) = v(0,s_1)$, $0 \leq s_1 < S$. In dit geval vinden we als beste nieuwe strategie de strategie $z_1^* = (u_1,s_1)$; als $s_1 > \frac{1}{2}.u_1$, dan valt deze strategie niet in de beschouwde klasse, en kiezen we als nieuwe strategie $z_1 = (u_1,\frac{1}{2}u_1)$.

Het is duidelijk dat het proces $(z,z_1,z_2,\ldots)$ convergeert naar de optimale strategie, indien we slechts eindig vaak z_k^* vervangen door z_k; immers vanaf een zeker index k_0 wordt het proces optimaal behandeld, dus het proces $(z_{k_0},z_{k_0+1},\ldots)$ convergeert naar de optimale strategie.
Hieruit volgt dat indien de optimale strategie (S,s) is, met $S \geq 2.s$, het hierboven beschreven proces naar deze strategie zal convergeren; geldt echter $S \leq 2.s$, dan zal het proces niet de optimale strategie vinden, maar hoogstens de beste op de rand van $\{(x,y) \mid x \geq 2y \geq 0\}$.

3.6. Numerieke voorbeelden

In de onderstaande tabellen geven we voor een aantal waarden van λ, a, b en c, de startstrategie $z_0 = (S_0,s_0)$ en de bijbehorende waarde van y_0, en de volgens het iteratieproces gevonden strategieën $z_1,z_2,\ldots,z_k$, totdat $|S_k - S_{k-1}| < 10^{-6}.S_k$ en $|s_k-s_{k-1}| < 10^{-6}.s_k$. (Steeds is gekozen $\mu = \nu = 1$ en $d = 0$.)

Tabel 3.1. Waarden van S_k, s_k en y_k bij $\lambda = 20$, $a = 1$, $b = 10$, $c = 30$.

k	S_k	s_k	y_k
0	100	10	73.9019
1	94.47	44.86	73.2233
2	93.32	24.72	69.2367
3	90.67	28.06	69.1417
4	90.60	26.30	69.1417
5	90.60	26.32	69.1417

Tabel 3.2. Waarden van S_k, s_k en y_k bij $\lambda = 20$, $a = 1$, $b = 5$, $c = 30$.

k	S_k	s_k	y_k
0	100	10	59.35
1	79.01	29.00	58.71
2	77.81	12.82	55.91
3	75.85	14.90	55.89
4	75.82	13.87	55.86
5	75.81	13.87	55.86

Tabel 3.3. Waarden van S_k, s_k en y_k bij $\lambda = 10$, $a = 1$, $b = 5$, $c = 30$.

k	S_k	s_k	y_k
0	100	10	51.71
1	60.57	30.29	46.43
2	53.05	26.52	42.76
3	49.89	3.04	33.70
4	42.85	9.17	33.45
5	42.55	4.87	32.96
6	42.14	5.10	32.96
7	42.14	5.05	32.96

Tabel 3.4. Waarden van S_k, s_k en y_k by $\lambda = 5$, $a = 1$, $b = 5$, $c = 30$.

k	S_k	s_k	y_k
0	100	10	52.52
1	56.50	28.25	43.01
2	46.16	23.08	36.41
3	39.45	19.72	32.48
4	35.54	0	22.29
5	26.26	6.07	21.78
6	25.65	.94	20.59
7	24.58	1.47	20.57
8	24.55	1.26	20.56

De op deze wijze verkregen resultaten blijken overeen te stemmen met de resultaten uit hoofdstuk 2 (zie tabel 2.1).

Appendix

In hoofdstuk drie leidden we een stelsel functionaal-vergelijkingen voor de waarderingsfuncties v(u) af. We zullen nu een oplossing voor dit stelsel construeren met behulp van de theorie van de integraal-vergelijkingen.

Ter vereenvoudiging van de notatie stellen we:

$\tilde{a} = a/\mu$, $\tilde{b} = b/\mu$, $\tilde{y} = y/\mu$, $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, $g(u) = \nu e^{-\nu u}$.

We merken op dat nu geldt: $0 < \alpha < 1$.

Het stelsel gaat dan over in de volgende vergelijkingen:

(1) $x>Q$, $Q\geq s$,
$$v_3(x,Q) = (1-\alpha)(\tilde{a}x-\tilde{a}Q-\tilde{y}+w_2(x)) + \alpha\int_{-\infty}^{0} v_0(y,Q)g(x-y)dy + \alpha\int_{0}^{s} v_1(y,Q)g(x-y)dy + \alpha\int_{s}^{Q} v_2(y,Q)g(x-y)dy + \alpha\int_{Q}^{x} v_3(y,Q)g(x-y)dy;$$

(2) $Q \geq x > s$,
$$v_2(x,Q) = (1-\alpha)(\tilde{b}Q-\tilde{b}x-\tilde{y}+w_2(x)) + \alpha\int_{-\infty}^{0} v_0(y,Q)g(x-y)dy + \alpha\int_{0}^{s} v_1(y,Q)g(x-y)dy + \alpha\int_{s}^{x} v_2(y,Q)g(x-y)dy;$$

(3) $s\geq x>0$, $Q\geq s$,
$$v_1(x,Q) = (1-\alpha)(\tilde{b}Q-\tilde{b}x-\tilde{y}+w_1(x)) + \alpha\int_{-\infty}^{0} v_0(y,Q)g(x-y)dy + \alpha\int_{0}^{x} v_1(y,Q)g(x-y)dy;$$

(4) $0\geq x$, $Q\geq s$,
$$v_0(x,Q) = (1-\alpha)(\tilde{b}Q-\tilde{b}x-\tilde{y}+w_0(x)) + \alpha\int_{-\infty}^{x} v_0(y,Q)g(x-y)dy;$$

(5) $x > s$,
$$w_2(x) = \frac{1-\alpha}{\alpha}(\tilde{a}x-\tilde{y}) + \int_{-\infty}^{0} w_0(y)g(x-y)dy + \int_{0}^{s} w_1(y)g(x-y)dy + \int_{s}^{x} w_2(y)g(x-y)dy;$$

(6) $s \geq x > 0, \quad w_1(x) = c + d(S-x) + v_3(S,S-x);$

(7) $0 \geq x, \quad w_0(x) = c + d(S-x) + v_2(S,S-x).$

In deze vergelijkingen zijn S en s constanten die voldoen aan de relatie $S \geq 2s > 0$, terwijl $\tilde{y}$ een nader te bepalen onbekende is.
Ten einde een éénduidige oplossing te verkrijgen, stellen we de eisen

(8) $$w_0(0) = 0$$

en

(9) $$\lim_{x\to-\infty} e^{px} w_0(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{px} v_0(x,Q) = 0, \quad Q > 0, \ p > 0.$$

Bij de bepaling van de oplossing zullen we gebruik maken van de volgende bewering.

<u>Bewering.</u> Zij $h(x)$ kwadratisch integreerbaar over elk eindig interval.
Stel dat voor alle $p > 0$ geldt $\lim_{x\to\div\infty} e^{px}h(x) = 0$.
Dan wordt de oplossing van de Volterra-vergelijking

(10) $$f(x) = h(x) + \alpha \int_{-\infty}^{x} \nu e^{-\nu x+\nu y} f(y)\, dy, \quad \alpha < 1,$$

waarvoor geldt dat $\lim_{x\to-\infty} e^{px}f(x) = 0$ voor alle $p > 0$, gegeven door

(11) $$f(x) = h(x) + \alpha \int_{-\infty}^{x} \nu e^{-\nu(1-\alpha)(x-y)} h(y)dy.$$

<u>Bewijs.</u>
Definieer $k(x,y)$ door: $k(x,y) = \begin{cases} \nu e^{-\nu x+\nu y}, & x > y, \\ 0, & x \leq y. \end{cases}$

Dan is $k(x,y)$ een $L^2(a,b)$ kern voor elk eindig interval (a,b). De resolvente kern van $k(x,y)$ is

$$R(x,y,\alpha) = \begin{cases} \nu e^{-\nu(1-\alpha)(x-y)}, & x > y, \\ 0, & x \leq y. \end{cases}$$

Voor elk eindig interval (a,b) geldt nu dat de oplossing van

$$f(x) = h(x) + \alpha \int_a^b k(x,y)f(y)dy, \quad \alpha < 1,$$

eenduidig is en gegeven wordt door

$$f(x) = h(x) + \alpha \int_a^b R(x,y,\alpha)h(y)dy.$$

Schrijven we nu de oorspronkelijke vergelijking als ($b \geq x$)

$$f(x) = h(x) + \alpha \int_a^b k(x,y)f(y)dy + e^{-\nu x+\nu a}(f(a)-h(a)),$$

dan luidt de oplossing van deze vergelijking volgens het bovenstaande

$$f(x) = h(x) + \alpha \int_a^b R(x,y,\alpha)h(y)dy + e^{-\nu x+\nu a}(f(a)-h(a))$$
$$+ \alpha \int_a^b R(x,y,\alpha)e^{-\nu y+\nu a}(f(a)-h(a))dy.$$

Nemen we nu de limiet voor $a \to -\infty$, dan vinden we vergelijking (11), waarbij we gebruik maken van de aanname $\lim_{x\to-\infty} e^{px}h(x) = 0$ en $\lim_{x\to-\infty} e^{px}f(x) = 0$ voor $p > 0$.

We definiëren nu de functies

$$h_Q(x) = \begin{cases} (1-\alpha)\tilde{b}(Q-x), & x \leq Q, \\ (\alpha-1)\tilde{a}(Q-x), & x > Q, \end{cases}$$

en

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} (1-\alpha)(w_2(x)-y), & x > s, \\ (1-\alpha)(w_1(x)-y), & s \geq x > 0, \\ (1-\alpha)(w_0(x)-y), & 0 \geq x. \end{cases}$$

De vergelijkingen (1),(2),(3) en (4) kunnen we dan voorstellen door de lineaire integraal-vergelijking

(12) $$v(x) = h_Q(x) + \tilde{h}(x) + \alpha \int_{-\infty}^{x} g(x-y)v(y)dy.$$

Wegens de lineariteit kan $v(x)$ nu geschreven worden als $\tilde{v}(x) + v_Q(x)$, waarbij $\tilde{v}(x)$ en $v_Q(x)$ de oplossingen zijn van de vergelijkingen

(12a) $$v_Q(x) = h_Q(x) + \alpha \int_{-\infty}^{x} g(x-y)v_Q(y)dy$$

en

(12b) $$\tilde{v}(x) = \tilde{h}(x) + \alpha \int_{-\infty}^{x} g(x-y)\tilde{v}(y)dy.$$

Omdat $h_Q(x)$ een continue functie is, $\lim_{x\to-\infty} e^{px}h_Q(x) = 0$ voor $p > 0$ en $\alpha < 1$, mogen we de bewering toepassen. Uit vergelijking (12a) volgt nu

$$\text{(13)}\qquad v_Q(x) = \begin{cases} \tilde{b}(Q-x) + \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\dfrac{\tilde{b}}{\nu}, & x \le Q, \\ \tilde{a}(x-Q) + \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\dfrac{\tilde{a}}{\nu} + \dfrac{\alpha(\tilde{a}+\tilde{b})}{(1-\alpha)\nu}e^{-\alpha\nu(x-Q)}, & x > Q. \end{cases}$$

Substitueren we dit resultaat in de vergelijkingen (6) en (7) en passen we (8) toe, dan vinden we

$$\text{(14)}\qquad w_0(x) = -dx - \tilde{b}x$$

en

$$\text{(15)}\qquad w_1(x) = -dx + \tilde{a}x + \frac{\alpha(\tilde{a}+\tilde{b})}{(1-\alpha)\nu}(e^{-\alpha\nu x}-1).$$

Beschouw nu vergelijking (5). Dit is een Volterra-vergelijking met kern $k(x,y)$. De resolvente van deze kern is $R(x,y,\alpha)$. In het beschouwde geval geldt $\alpha = 1$, dus $R(x,y,\alpha) = \nu$. De oplossing van (5) luidt dus

$$\begin{aligned} \text{(16)}\qquad w_2(x) &= \frac{1-\alpha}{\alpha}(\tilde{a}x-\tilde{y}) + \int_s^x \nu\frac{1-\alpha}{\alpha}(\tilde{a}y-\tilde{y})dy + e^{-\nu s}\int_{-\infty}^0 w_0(y)\nu e^{\nu y}dy \\ &\quad + e^{-\nu s}\int_0^s w_1(y)\nu e^{\nu y}dy \\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha}(\tilde{a}x-\tilde{y}) + \tfrac{1}{2}\nu\frac{1-\alpha}{\alpha}\tilde{a}(x^2-s^2) - \nu\frac{1-\alpha}{\alpha}\tilde{y}(x-s) - ds + \frac{d}{\nu} \\ &\quad + \tilde{a}s - \frac{\tilde{a}}{\nu} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{\nu} + \frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{\nu}\frac{1}{1-\alpha}e^{-\nu(1-\alpha)s}. \end{aligned}$$

Uit de formules (14), (15) en (16) blijkt dat $w_0(x)$, $w_1(x)$ en $w_2(x)$ continue functies zijn. Hieruit volgt dat $h(x)$ slechts discontinuïteiten heeft in $x=0$ en $x=s$. Omdat bovendien geldt dat $\lim_{x\to-\infty} e^{px}h(x)=0$ voor $p>0$, mogen we de bewering toepassen op vergelijking (12b). We vinden dan

$$\tilde{v}(x) = \tilde{h}(x) + \alpha\int_{-\infty}^x \nu e^{-\nu(1-\alpha)(x-y)}\tilde{h}(y)dy.$$

Hieruit kan $\tilde{v}(x)$ intervalsgewijs berekend worden. Dit levert na enig rekenwerk:

$$\text{(17)}\quad x \le 0,\qquad \tilde{v}(x) = -\tilde{y} - dx - \tilde{b}x + \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{d+\tilde{b}}{\nu},$$

$$\text{(18)}\quad 0<x\le s,\qquad \tilde{v}(x) = -\tilde{y} - dx + \tilde{a}x + \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{d}{\nu} + \frac{\alpha(2\tilde{a}+\tilde{b})}{(1-\alpha)\nu}(e^{-\nu(1-\alpha)x}-1)$$

$$+ \alpha^2 x(\tilde{a}+\tilde{b})e^{-\nu(1-\alpha)x};$$

(19) $s < x$,
$$\tilde{v}(x) = -\tilde{y}\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(1+\nu x-\nu s+\frac{\alpha^2}{1-\alpha}e^{-\nu(1-\alpha)(x-s)}\right) - ds + \frac{d}{\nu}$$
$$+ \frac{\alpha^2}{1-\alpha}\frac{d}{\nu}e^{-\nu(1-\alpha)(x-s)} + (\tilde{a}+\tilde{b})\, e^{-\nu(1-\alpha)x} \times$$
$$\left\{\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\nu} + \alpha^2 s + \frac{e^{\nu(1-\alpha)(x-s)}}{(1-\alpha)\,\nu}\right\} - \frac{\alpha\,\tilde{b}}{(1-\alpha)\nu}$$
$$+ \tilde{a}\times\left\{\tfrac{1}{2}\nu\frac{1-\alpha}{\alpha}(x^2-s^2)+\frac{1-\alpha}{\alpha}x+s-x-\frac{1}{\nu}+\left(\alpha s-\frac{\alpha^2+\alpha}{\nu}\right)e^{-\nu(1-\alpha)(x-s)}\right\}.$$

De oplossing van vergelijking (12) luidt dus $v(x) = v_Q(x) + \tilde{v}(x)$. De oplossing van het stelsel (1), ... , (7) wordt nu gegeven door de formules (14), (15) en (16) en de relaties

$$\begin{aligned}
v_3(x,Q) &= v_Q(x) + \tilde{v}(x), && x > Q,\\
v_2(x,Q) &= v_Q(x) + \tilde{v}(x), && Q \geq x > s,\\
v_1(x,Q) &= v_Q(x) + \tilde{v}(x), && s \geq x > 0,\\
v_0(x,Q) &= v_Q(x) + \tilde{v}(x), && 0 \geq x,
\end{aligned}$$

waarbij $v_Q(x)$ door formule (13), $\tilde{v}(x)$ door een van de formules (17), (18) en (19) bepaald wordt.
Substitueren we in deze uitdrukkingen $\tilde{a}=a/\mu$, $\tilde{b}=b/\mu$, $\tilde{y}=y/\mu$, $\alpha=\lambda/(\lambda+\mu)$, dan verkrijgen we de in stelling 3.1 gegeven functies v_i en w_j.

Literatuur

[1] Van der Genugten, B.B., Een (B,S)-bestelsysteem met levertijden. Systeemtheorie, notitie nr. 1, Philips, (1971).

[2] Bus, J.C.P., Minimalisering van funkties van meerdere variabelen, NP 29/71, Mathematisch Centrum, (1972).

[3] De Leve, G. en H.C. Tijms, Leergang besliskunde, deel 7c, MC Syllabus 1.7c, Mathematisch Centrum, (1970).

[4] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications 1, Wiley publications in statistics, (1957).