stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BW 1/70 DECEMBER

JAC.M. ANTHONISSE

(GEMENGDE) GEHEELTALLIGE LINEAIRE PROGRAMMERING
DE ALGORITHME VAN LAND EN DOIG
DE ALGORITHME VAN DAKIN

voorlopig rapport; 2de (ongewijzigde) druk

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Samenvatting

Dit voorlopige rapport bevat een summiere beschrijving van twee 'branch and bound' methoden voor geheeltallige lineaire programmering.

1. Inleiding

Vele optimatiseringsproblemen kunnen worden geformuleerd als continu lineair programmeringsprobleem:

maximaliseer $\quad z_c = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,, \qquad (1)$

onder de voorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1,..,m), \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,..,n). \qquad (3)$$

Door de ontwikkeling van oplossingstechnieken en computerprogramma's is het oplossen van een LP probleem, binnen zekere grenzen, een routinezaak geworden.

Heel anders is de situatie voor het gemengde en zuiver geheeltallige LP probleem:

maximaliseer $\quad z_g = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,, \qquad (1)$

onder de voorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1,...,m), \qquad (2)$$

$$x_j = \text{geheel} \quad (j=1,...,n_1), \qquad (4)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,..,n). \qquad (3)$$

Dit probleem heet een zuiver geheeltallig LP probleem als $n_1 = n$, gemengd als $1 \leq n_1 < n$.
Het LP probleem dat uit het geheeltallige probleem ontstaat door weglating van de voorwaarden (4) heet de continue versie van het geheeltallige probleem.

De klasse problemen die als geheeltallig LP probleem kunnen worden geformuleerd is zeer groot.
Het is dan ook niet verwonderlijk dat al een groot aantal oplossingstechnieken is voorgesteld.
De moeilijkheid is efficiente en betrouwbare methoden te vinden.

Een goede algorithme die routinematig voor elk geheeltallig probleem bruikbaar is wordt wel als een moderne versie van de 'steen der wijzen' beschouwd. Vandaar dat veel aandacht aan geheeltallige problemen met een speciale structuur wordt besteedt.

Noch de algorithme van Land en Doig, noch de algorithme van Dakin maken gebruik van de structuur van het LP probleem, en zijn in principe voor elk geheeltallig LP probleem bruikbaar. Voor een gegeven probleem kan de hoeveelheid rekenwerk echter onuitvoerbaar groot blijken te zijn.

Beide algorithmen trachten de oplossing van het gestelde probleem te vinden door een eindig aantal continue problemen op te lossen. Deze deelproblemen zijn zodanig gedefinieerd dat de algorithmen bijzonder goed als recursieve procedures kunnen worden geschreven.

2. Recursieve procedures.

Een algorithme of procedure is een rekenvoorschrift waarvan is bewezen dat het tot het gevraagde resultaat leidt.
Doorgaans worden de berekeningen in een aantal stappen uitgevoerd. De in elke stap uit te voeren berekeningen worden door het voorschrift gegeven. Elke stap kan dan ook als afzonderlijke procedure worden beschouwd.
Veelal is het al dan niet uitvoeren van een stap afhankelijk van in eerdere stappen verkregen resultaten. De algorithme bevat dan voorschriften van het type:

'als dit, ga dan verder bij stap zus',

'als dat, ga dan verder bij stap zo '.

Veelal bevatten de voorschriften voor het uitvoeren van een stap de opdracht een procedure uit te voeren waarvan slechts de naam wordt gegeven, bijv. : bereken de sinus van x. Er is dan aangenomen dat de uitvoerder van de algorithme over een procedure ter berekening van 'de sinus van x' beschikt.

Het bijzondere van recursieve procedures is dat minstens een van de stappen waardoor de procedure is gedefinieerd een opdracht tot het uitvoeren van diezelfde procedure bevat.

Op het eerste gezicht lijkt het onmogelijk een procedure op correcte wijze in 'door zichzelf' te laten definieren. Een algorithme is echter een methode voor het oplossen van een bepaalde klasse problemen, het is vaak mogelijk een gegeven probleem uit die klasse op te lossen met behulp van de oplossing van een ander probleem uit diezelfde klasse. Als de definitie van dat andere probleem zodanig is dat elk oorpsronkelijk probleem tenslotte gereduceerd wordt tot een probleem waarvan de oplossing triviaal is, kan van het verband tussen die problemen gebruik worden gemaakt. Recursieve definitie en cirkel definitie zijn niet identiek.

Het is niet moeilijk in te zien waarom voor het bewijzen van de juistheid van een recursieve procedure vaak het principe van volledige inductie wordt gebruikt.

Voor $n \geq m \geq 0$, met m en n geheel, wordt de binomiaal coefficient

$B(n,m) = \binom{n}{m}$ doorgaans gedefinieerd als

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad ,$$

zodat
$$B(n,m) = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(n-1)n}{1.2.3\ldots(n-m)} \quad ,$$

hetgeen tot een zeer eenvoudig rekenvoorschrift leidt.
Wegens
$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} \quad \text{voor } 0 < m < n$$

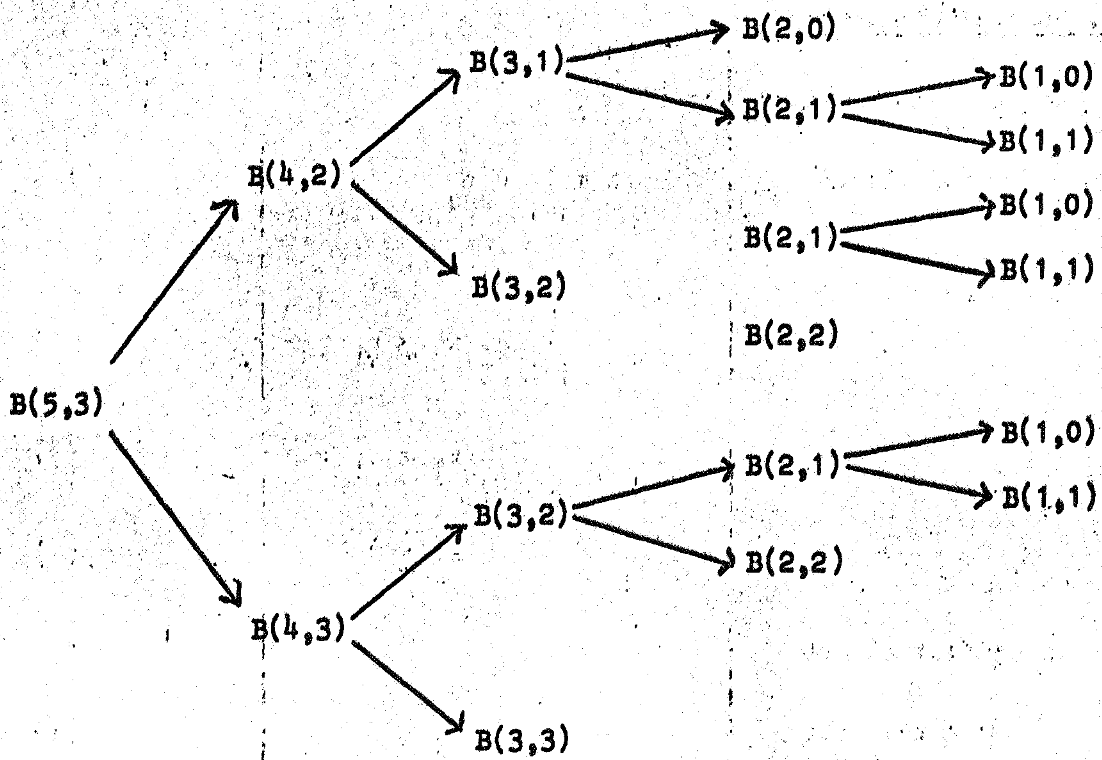
en
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad ,$$

kan de binomiaalcoefficient ook recursief worden gedefinieerd:

$$B(n,m) = \begin{cases} 1 \text{ als } m = 0 \\ 1 \text{ als } n = m \\ B(n-1,m-1) + B(n-1,m) & \text{anders.} \end{cases}$$

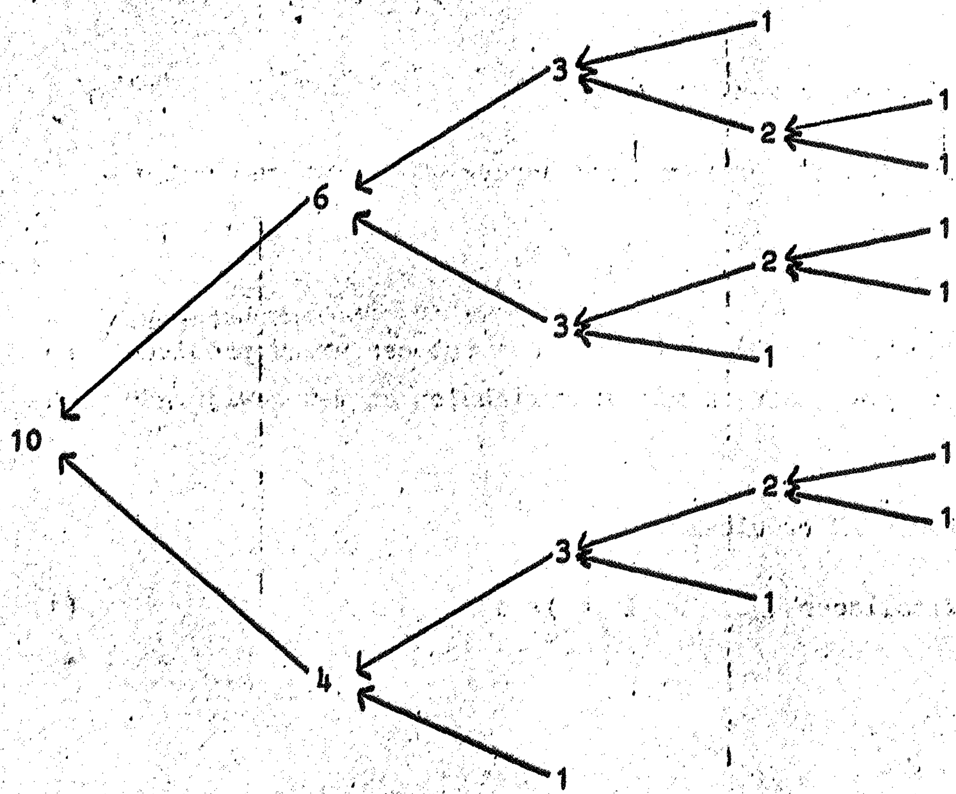
Deze recursieve definitie geeft aanleiding tot een recursief rekenvoorschrift ter berekening van $B(n,m)$.

De berekening van $B(5,3)$ kan nu als volgt worden voorgesteld:



waarin $\alpha \rightarrow \beta$ kan worden geinterpreteerd als: de opdracht α te berekenen leidt tot de opdracht β te berekenen.

De waarde van B(5,3) wordt als volgt verkregen:



3. Speciale voorwaarden.

Het continue LP probleem

maximaliseer $$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

onder

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (2)$$

$$x_1 = d_1 \qquad (5)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (3)$$

is equivalent met

maximaliseer $$z = \sum_{j=2}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

onder

$$\sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i - d_1 a_{i1} \qquad (6)$$

$$x_j \geq 0 \quad , \qquad (3)$$

waarbij is aangenomen dat $d_1 \geq 0$.

Toevoeging van een of meer voorwaarden

$$x_{j_1} = d_{j_1} \qquad (7)$$

aan probleem (1), (2), (3) leidt dus tot een nieuw probleem, van hetzelfde type, maar in minder variabelen en met gewijzigde rechterleden.

Het continue LP probleem

maximaliseer $$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

onder

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \tag{2}$$

$$x_1 \geq e_1 \tag{8}$$

$$x_j \geq 0 \tag{3}$$

is equivalent met

maximaliseer
$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

onder

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i - e_1 a_{i1} \tag{9}$$

$$x_j \geq 0 \;. \tag{3}$$

Toevoeging van een of meer voorwaarden

$$x_{j_l} \geq e_{j_l}$$

aan probleem (1), (2), (3) leidt dus slechts tot wijziging van de rechterleden.

Voor de oplossing van het uitgebreide LP probleem is het in beide gevallen kennelijk niet nodig de nieuwe voorwaarden als nieuwe rijen aan het simplex tableau toe te voegen.

Ook toevoeging van voorwaarden

$$x_{j_l} \leq f_{j_l} \tag{11}$$

behoeft niet tot uitbreiding van het tableau te leiden. Er is een variant op de simplex methode waarin deze 'upper bounds' op speciale wijze worden behandeld.

In beide algoritmen worden voorwaarden van bovenstaande typen aan het continue probleem toegevoegd, gelijkheden bij Land en Doig, ongelijkheden bij Dakin.

Is een LP probleem opgelost en worden daarna voorwaarden van bovenstaande typen toegevoegd dan kan de gevonden basis van het ongewijzigde probleem als uitgangspunt dienen voor het oplossen van het nieuwe probleem.

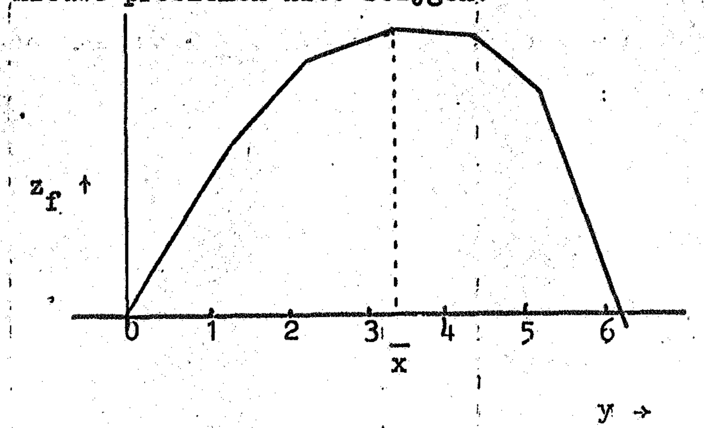
4. Globale omschrijving van de algorithmen.

Als de continue versie van een geheeltallig probleem onoplosbaar is dan is het geheeltallige probleem onoplosbaar,

Wordt een variabele x_{j_1} ($1 \leq j_1 \leq n_1$) op een gehele waarde gefixeerd dan ontstaat een nieuw geheeltallig (of continu) probleem.

In elke uitvoering van de algorithme van Land en Doig wordt een variabele gekozen en achtereenvolgens op verschillende gehele waarden gefixeerd. Op elk van de nieuwe problemen die zo ontstaan wordt hetzelfde proces toegepast. Het zou weinig efficient zijn achtereenvolgens de waarden 0, 1, 2, ... aan de gekozen variabele toe te kennen. Land en Doig stelden het volgende procede voor:

> Fixeer de variabele achtereenvolgens op zodanige gehele getallen dat de optimale z-waarden van de continue versies van de bijbehorende nieuwe problemen niet stijgen.



Ter uitvoering van dit voorschrift wordt eerst de continue versie van het probleem opgelost. Zij $\bar{x}$ de waarde van de gekozen variabele x in deze oplossing. Zij $z_h(y)$ de optimale z-waarde van de continue versie van het probleem dat ontstaat door de voorwaarde x = y toe te voegen. Als $y_1 \leq y_2 \leq \bar{x}$ en $\bar{x} \leq y_3 \leq y_4$ dan geldt $z_h(y_1) \leq z_h(y_2)$ respectievelijk $z_f(y_4) \leq z_f(y_3)$. De gekozen variabele wordt dus eerst op $y_2(y_3)$ en pas later op $y_1(y_4)$ gefixeerd. De keuze eerst y_2 of y_3 hangt af van $z_f(y_2)$ en $z_f(y_3)$.

In de situatie die in de figuur is weergegeven zou de variabele achtereenvolgens op de waarden 4, 3, 5, 2, 1, 6, 0, 7, 8,... worden ge-

gefixeerd.

Ook de algorithme van Dakin begint met de oplossing van de continue versie van het probleem. De gekozen variabele wordt echter niet gefixeerd maar begrensd. Zij g = het grootste gehele getal < $\bar{x}$, h = het kleinste gehele getal > $\bar{x}$, ($\bar{x}$ $\neq$ geheel). In de optimale oplossing van het geheeltallige probleem is dan aan juist één van de ongelijkheden $x \leq g$, $x \geq h$ voldaan.
Door de twee voorwaarden achtereenvolgens aan het probleem toe te voegen ontstaan twee nieuwe problemen waarop hetzelfde proces wordt toegepast.
In de oplossing voor de continue versie van de nieuwe problemen zal gelden $x = g$ respectievelijk $x = h$. De volgorde waarin de ongelijkheden worden toegevoegd wordt bepaald door $z_f(g)$ en $z_f(h)$.

In de situatie die in de figuur is weergegeven zou eerst de voorwaarde $x \geq 4$ en daarna de voorwaarde $x \leq 3$ worden toegevoegd.

5. De algorithme van Land en Doig

Ter beschrijving van de algorithme worden de termen 'globale' en 'locale' grootheid gebruikt. De globale grootheden zijn in elke uitvoering van de algorithme beschikbaar en kunnen daar van waarde veranderen. De locale grootheden zijn per uitvoering gedefinieerd en uitsluitend in die uitvoering beschikbaar.

In deze methode wordt een toegelaten oplossing van het geheeltallige LP probleem gezocht. Is zo'n oplossing gevonden dan wordt een betere toegelaten oplossing gezocht etc. Als geen betere oplossing kan worden gevonden is de laatst gevonden oplossing optimaal.

Definieer de globale grootheden:

$$x_j^* \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

en

$$z^*$$

waarbij

x_j^* = waarde van x_j in beste tot nu toe gevonden oplossing,

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \, .$$

Zolang geen toegelaten oplossing bekend is kan

$$z^* = -\infty \, , \; x_j^* = -\infty \quad (j = 1,\ldots,n)$$

worden gesteld.

In de volgende beschrijving stelt P_g het geheeltallige probleem

$$\text{maximaliseer} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

onder
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i=1,\ldots,m), \qquad (2)$$

$$x_j = \text{geheel} \quad (j=1,\ldots,n_1), \qquad (4)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,\ldots n), \qquad (3)$$

voor en P_c de continue versie van P_g.

$z(P_c)$ stelt de optimale waarde van de objectfunctie van P_c voor, kies $z(P_c) = -\infty$ als P_c onoplosbaar.

Stap 1

Los P_c op.

Is P_c onoplosbaar, of $z(P_c) \leq z^*$, ga verder bij stap 7.
Als P_c een onbeperkte oplossing toelaat is het probleem vermoedelijk verkeerd gedefinieerd, beëindig alle berekeningen.

Stap 2

Zij $x_j = \bar{x}_j \quad (j=1,\ldots,n)$ de gevonden oplossing van P_c.
Als een index j_0 bestaat met $1 \leq j_0 \leq n_1$ waarvoor $\bar{x}_{j_0} \neq$ geheel ga dan verder bij stap 3.
Nu is $\bar{x}_j$ = geheel voor $j = 1,\ldots,n_1$, dus is een nieuwe oplossing van P_g gevonden. Vervang de huidige waarde van x_j^* door $\bar{x}_j$, bereken de nieuwe waarde van z^*. Ga verder bij stap 7.

Stap 3

Kies een index v $(1 \leq v \leq n_1)$ waarvoor $\bar{x}_v \neq$ geheel, bij voorbeeld een index waarvoor de afstand tussen $\bar{x}_j$ en het dichtst bijzijnde gehele getal maximaal is:

$$\underset{\bar{x}_j \neq \text{geheel}}{\text{maximum}} \quad \text{minimum} \; (\bar{x}_j - [\bar{x}_j], [\bar{x}_j] + 1 - \bar{x}_j).$$

Hierin stelt $[x]$ het grootste gehele getal $\leq x$ voor. (De entier van x).

v is een locale grootheid.

Definieer de locale grootheden

$$g_l = [\bar{x}_v] \quad , \quad g_r = g_l + 1 \; ,$$
$$z_l = z\,(P_c, x_v = g_l) \quad , \quad z_r = z\,(P_c, x_v = g_r) \; .$$

Stap 4.

Als $z_l \leq z^{*}$ én $z_r \leq z^{*}$ ga dan verder bij stap 7.

Deze regel is gerechtvaardigd door het feit dat z_l en z_r bovenschattingen zijn voor de optimale waarde van P_g.
Door nog meer variabelen op een geheeltallige waarde te fixeren of met x_v nog verder van $\bar{x}_v$ af te wijken kan de waarde van de objectfunctie niet toenemen.

Als $z_r > z_l$ ga dan verder bij stap 6.

Stap 5

Los, via de methode van Land en Doig, het probleem $(P_g, x_v = g_l)$ op.

De nieuwe uitvoering van de algorithme heeft $(P_g, x_v = g_l)$ als 'oorspronkelijk' probleem, dus als P_g. Na voltooing van die berekeningen wordt de algorithme op dit punt van de huidige uitvoering voortgezet. De locale grootheden van de huidige uitvoering zijn ongewijzigd beschikbaar.
Indien $g_l = 0$ vervang dan de huidige waarde van z_l door $-\infty$.
Indien $g_l > 0$ vervang dan de huidige waarde van z_l door $z(P_c, x_v = g_l - 1)$.

Verminder de huidige waarde van g_l met 1.

Ga verder bij stap 4.

Stap 6

Los, via de methode van Land en Doig, het probleem (P_g, $x_v = g_r$) op.

Vervang de huidige waarde van z_r door $z(P_c, x_v = g_r + 1)$, vermeerder de huidige waarde van g_r met 1.

Ga verder bij stap 4.

Stap 7

Einde van deze uitvoering van de algorithme. De berekeningen worden voortgezet in stap 5 of stap 6 van de uitvoering waarin opdracht werd gegeven tot de huidige uitvoering.

6. De algorithme van Dakin

De inleiding voor deze algorithme is identiek aan die voor de methode van Land en Doig.

Stap 1

Los P_c op.
Is P_c onoplosbaar, of $z(P_c) \leq z^*$, ga dan verder bij stap 7.
Als P_c een onbeperkte oplossing toelaat is het probleem vermoedelijk verkeerd gedefinieerd, beeindig alle berekeningen.

Stap 2

Zij $x_j = \bar{x}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ de gevonden oplossing van P_c.
Bestaat een $\bar{x}_{j_0} \neq$ geheel met $1 \leq j_0 \leq n_1$ ga dan verder bij stap 3.
Is $\bar{x}_j$ = geheel voor $j = 1, \ldots, n_1$, dan is een nieuwe oplossing voor P_g gevonden, geef x_j^* $(j = 1, \ldots, n)$ en z^* nieuwe waarden, ga verder bij stap 7.

Stap 3

Kies een index v $(1 \leq v \leq n_1)$ waarvoor $\bar{x}_v \neq$ geheel.
Definieer de locale grootheden

$$g_l = \left[\bar{x}_v\right] \quad , \quad g_r = g_l + 1,$$

$$z_l = z(P_c, x_v \leq g_l) \ , \quad z_r = z(P_c, x_v \geq g_r).$$

Stap 4

Als $z_l \leq z^*$ én $z_r \leq z^*$ ga dan verder bij stap 7.
Als $z_r > z_l$ ga dan verder bij stap 6.

Stap 5

Los, via de methode van Dakin, het probleem $(P_g, x_v \leq g_l)$ op.

Vervang de huidige waarde van z_l door $-\infty$.
Ga verder bij stap 4.

Stap 6

Los, via de methode van Dakin, het probleem (P_g, $x_v \geq g_r$) op.

Vervang de huidige waarde van z_r door $-\infty$.
Ga verder bij stap 4.

Stap 7

Einde van deze uitvoering.

7. Vergelijking van de algorithmen

De twee algorithmen stemmen op zeer veel punten overeen. Het essentiele verschil is dat bij Land en Doig de gekozen variabele wordt gefixeerd op een gehele waarde, terwijl bij Dakin de gekozen variabele door een geheel getal wordt begrensd.
Hieruit volgt dat de diepte van de recursie bij Land en Doig maximaal n_1 is, terwijl de diepte voor Dakin onbepaald is.
Elke uitvoering van de algorithme van Dakin leidt tot hoogstens twee nieuwe uitvoeringen, met respectievelijk $x_v \leq g_l$ en $x_v \geq g_r$.
Elke uitvoering van de algorithme van Land en Doig kan tot een groot aantal nieuwe uitvoeringen leiden.

Als de ongelijkheden (2) de voorwaarden

$$x_j \leq 1 \qquad (j = 1, \ldots, n_1)$$

bevatten zijn de twee algorithmen identiek.

Het blijkt dat door beide algorithmen een optimale oplossing van het geheeltallige probleem vaak vrij snel wordt gevonden. Een gevonden oplossing mag echter pas als optimaal worden beschouwd als het zoekproces naar een betere oplossing geen resultaat geeft. In vele gevallen wordt het grootste deel van de rekentijd aan dit verifieren van de reeds gevonden optimale oplossing besteed. Een mogelijke verklaring voor dit verschijnsel wordt door het volgende voorbeeld gegeven.

8. Voorbeeld.

Maximaliseer $\sum_{j=1}^{n} x_j$,

onder $0 \leq x_j \leq 1 \quad (j = 1, \ldots, n)$,

$x_j = \text{geheel} \quad (j = 1, \ldots, n)$,

en $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i - \frac{1}{2} \quad (i = 1, \ldots, 2^n)$

waarbij $a_{ij} = \pm 1 \quad (j = 1, \ldots, n)$,

en $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ alle combinaties van +1 en -1 doorloopt.

b_i = het aantal $a_{ij} = +1$.

Definieer $u_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } a_{ij} = -1 \\ 1 & \text{als } a_{ij} = 1 \end{cases}$,

dan is er een één éénduidig verband tussen de 2^n en de hoekpunten, van de n-dimensionale eenheidskubus.
Voor elke voorwaarde geldt dat het erbij behorende hoekpunt niet aan de voorwaarde voldoet, terwijl de andere hoekpunten wel voldoen.
Door n-1 variabelen te fixeren ontstaat daarom een probleem in één variabele waarvan de continue versie oplosbaar is.
Pas door de resterende variabele te fixeren blijkt dat er geen oplossing is.

Dit betekent dat beide algorithmen alle 2^n hoekpunten onderzoeken alvorens het resultaat onoplosbaar te geven.

In het algemene geval zouden dergelijke situaties voor kunnen komen nadat een aantal variabelen is gefixeerd en $2^p \approx m$, waarin p = het aantal nog niet gefixeerde integer variabelen.

9. Literatuur

1. R.J. Dakin
   A tree search algorithm for mixed integer programming problems.
   The Computer Journal 8(1965) 3, 250-255.

2. A.G. Doig and A.H. Land
   An automatic method of solving discrete programming problems.
   Econometrica 28(1960) 497-520.