stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BW 15/72 MAART

A. HORDIJK

# OVER EEN DOEBLINVOORWAARDE EN HAAR TOEPASSING IN BESLISSINGSPROCESSEN

VOORLOPIGE UITGAVE



2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

## 0. Inleiding

In [6] worden voldoende voorwaarden gegeven voor het bestaan van optimale strategieën t.o.v. het gemiddelde kosten kriterium. Deze voorwaarden (V3.4 en V3.5 van paragraaf 3) zijn in toepassingen niet eenvoudig te verifiëren. Daarom is er reden om te zoeken naar voorwaarden die op hun beurt de voorwaarden V3.4 en V3.5 impliceren. Bovendien is er de vraag naar het verband tussen deze voorwaarden en de "klassieke" voorwaarden gegeven door Derman, gedeeltelijk in samenwerking met Veinott (voorwaarde V3.6 van paragraaf 3).
Welnu een voorwaarde geïnspireerd door een voorwaarde die in [4] .. Doeblinvoorwaarde genoemd wordt blijkt de sleutel te zijn. We hebben deze voorwaarde (zie paragraaf 3) de simultane Doeblinvoorwaarde genoemd. De voorwaarde van Derman impliceert de simultane Doeblinvoorwaarde. En onder de aanname dat alle toestanden onder iedere stationaire strategie onderling bereikbaar zijn geldt dat de simultane Doeblinvoorwaarde de voorwaarde van Derman impliceert.
Verder bewijzen we met gebruikmaking van resultaten afgeleid onder de simultane Doeblinvoorwaarde dat Derman's conditie de voorwaarden V3.4 en V3.5 impliceert.
Hoewel we postuleren dat de simultane Doeblinvoorwaarde de existentie van een optimale stationaire strategie garandeert, hebben we dit tot op heden niet kunnen bewijzen. Wel bewijzen we (stelling 3.12) dat er een optimale strategie bestaat onder de stationairen. Bij het bewijs van deze stelling gebruiken we het bestaan van optimale strategieën van een model dat we een optimaal-stuurprobleem genoemd hebben. Het optimaal stoppen van een Markov keten is een heel speciaal geval van een optimaal-stuurprobleem. Het schijnt dat optimaal-stuurproblemen een niet onbelangrijk model vormen. We hebben een stelling over de existentie van optimale stuurregels (stelling 3.11) opgenomen.
In paragraaf 1 bestuderen we de Doeblinvoorwaarde (zoals gegeven in [4]) met haar implicaties en voorts de met haar equivalente voorwaarden. De stellingen 1.1 t/m 1.10 zijn niet nieuw. Gedeeltelijk zijn ze te vinden in [4] gedeeltelijk elders. Doob beschouwt bij zijn afleiding van het bestaan van invariante kansverdelingen onder de Doeblinvoor-

waarde een willekeurige toestandsruimte. Dit heeft tot gevolg dat de bewijzen aanzienlijk gecompliceerder worden. Omdat de afleiding bij Doob niet gemakkelijk toegankelijk is en we er in de paragrafen 2 en 3 herhaaldelijk naar verwijzen zijn deze stellingen opgenomen.

In paragraaf 2 beschouwen we een collectie van Markov ketens en geven voorwaarden waaronder de invariante kansverdelingen op continue wijze van de overgangsmatrices afhangen (stellingen 2.1 en 2.4). Verder worden er met de simultane Doeblinvoorwaarde equivalente voorwaarden afgeleid (stellingen 2.2 en 2.6).

In paragraaf 3 worden Markov beslissingsprocessen geïntroduceerd. Voorts worden er met gebruikmaking van de in paragrafen 1 en 2 gevonden resultaten de in het begin van deze inleiding vermelde beweringen afgeleid.

## 1. Over het bestaan van invariante kansverdelingen

In deze paragraaf beschouwen we een (stationaire) Markov keten met eindige of aftelbare toestandruimte I. D.w.z. we gaan uit van een rij van stochastische variabelen $\{\underline{x}_n, n \geq 0\}$ met beeldruimte I en gedefinieerd op zekere kansruimte $(\Omega, F, \mathbb{P})$.
Verder is voor dit stochastisch proces de Markov eigenschap vervuld, i.e. voor iedere $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\{\underline{x}_n = i_n \mid \underline{x}_0 = i_0, \ldots, \underline{x}_{n-1} = i_{n-1}\} = \mathbb{P}\{\underline{x}_n = i_n \mid \underline{x}_{n-1} = i_{n-1}\}.$$

Voorts geldt: $\mathbb{P}\{\underline{x}_m = i_1 \mid \underline{x}_{m-1} = i_0\} = \mathbb{P}\{\underline{x}_n = i_1 \mid \underline{x}_{n-1} = i_0\}$ voor $n,m \geq 1$. We noteren

$$P(i,j) \overset{\text{NOT}}{=} \mathbb{P}\{\underline{x}_n = j \mid \underline{x}_{n-1} = i\} \qquad \text{voor } n \geq 1.$$

Zonder verdere vermelding wordt in deze paragraaf tot aan stelling 1.12 steeds de volgende voorwaarde verondersteld.

*Er bestaat een constante* $c > 0$*, een natuurlijk getal* $N$ *en een eindige verzameling* $J$ *zó dat:* $\sum_{j \in J} P^N(i,j) \geq c$ *voor alle* $i \in I$.

Hierin is $P^N(i,j)$ het N-voudige matrixprodukt van $P(i,j)$. Deze voorwaarde is voor I hoogstens aftelbaar equivalent met een voorwaarde in [4] (p. 192) die naar Doeblin genoemd is. Indien I eindig is dan is deze Doeblinvoorwaarde voor iedere stochastische matrix P vervuld.

Definitie 1.1. Toestand j heet bereikbaar vanuit toestand i indie er een $n \geq 0$ bestaat met $P^n(i,j) > 0$. We noteren dit met $i \to j$.

Definitie 1.2. Toestanden i en j communiceren indien geldt dat $i \to j$ en $j \to i$. Notatie hiervan: $i \longleftrightarrow j$.

Definitie 1.3. Toestand i heet essentieel indien uit $i \to j$ volgt dat $j \to i$.

Definitie 1.4. $K(i) = \{j \mid i \to j\}$, dit is de verzameling van toestanden die bereikbaar zijn vanuit i.

Definitie 1.5. K een niet lege deelverzameling van I heet een fuik indien uit $i \in K$ volgt dat $K(i) \subset K$.

Definitie 1.6. Een fuik K heet een kernfuik indien K geen kleinere fuik bevat.

Notatie 1.1. Voor $\sum_{j \in E} P^n(i,j)$ noteren we $P^n(i,E)$.

Stelling 1.1. Een fuik bevat minstens één kernfuik. Er zijn niet meer kernfuiken dan er elementen in J zijn.

Bewijs

Zij K een fuik, dan is per definitie $K \neq \emptyset$. Zij $i \in K$ dan volgt uit $K(i) \subset K$ dat $P^N(i,K) = 1$. Uit de Doeblinvoorwaarde volgt dan dat

$$(1.1) \qquad K \cap J \neq \emptyset.$$

Zij $\mathcal{K}_0$ de collectie van fuiken K met $K \subset K_0$, voor zekere fuik $K_0$. Zij $\mathcal{K}$ een deelcollectie van $\mathcal{K}_0$ die t.o.v. de inclusierelatie een keten vormt d.w.z. als $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ dan $K_1 \subset K_2$ of $K_2 \subset K_1$. Dan vormt ook $\mathcal{K} \cap J = \{K \cap J \mid K \in \mathcal{K}\}$ een keten, uit (1.1) en het feit dat J een eindige verzameling is, volgt dan dat $\cap\{K \cap J \mid K \in \mathcal{K}\} \neq \emptyset$. Met als gevolg

$$(1.2) \qquad D \overset{\text{NOT}}{=} \cap\{K \mid K \in \mathcal{K}\} \neq \emptyset.$$

Indien $i \in D$ dan $i \in K$ als $K \in \mathcal{K}$

$\Rightarrow K(i) \subset K$ als $K \in \mathcal{K}$

$\Rightarrow K(i) \subset D$. Dus vinden we dat D een fuik is.

Daar $D \subset K_0$ volgt dat $D \in \mathcal{K}_0$. Het lemma van Zorn garandeert nu dat de collectie $\mathcal{K}_0$ minimale elementen t.o.v. de inclusierelatie heeft. Dit zijn kernfuiken.

Indien twee kernfuiken niet samenvallen dan is hun doorsnede leeg. Met (1.1) volgt hieruit dat het aantal kernfuiken niet groter is dan het aantal elementen dat J bevat. $\square$

Stelling 1.2. Een deelverzameling van I zeg K is een kernfuik

$\Longleftrightarrow$ i) $K \neq \emptyset$

ii) $i \in K$ dan $K(i) \subset K$

iii) $i,j \in K$ dan $i \leftrightarrow j$.

Bewijs

$\Longrightarrow$) Indien K een kernfuik is, dan volgt per definitie $K \neq \emptyset$. Zij $i \in K$, daar K een fuik is volgt dan dat $K(i) \subset K$. Indien $i,j \in K$ en $j \notin K(i)$ dan $K(i) \neq K$, waaruit zou volgen dat K geen kernfuik is, dus moet $j \in K(i)$. Dus $i \rightarrow j$, geheel analoog vinden we $j \rightarrow i$.

$\Longleftarrow$) i) en ii) impliceren dat K een fuik is. Met iii) volgt dat $K(i) = K$ indien $i \in K$, maar dit betekent dat K minimaal is t.o.v. de inclusierelatie, dus K is een kernfuik. □

Stelling 1.3. I bevat minstens één kernfuik. De kernfuiken zijn precies de equivalentieklassen geïnduceerd door de equivalentierelatie "communiceren" op de verzameling van essentiële toestanden.

Bewijs

I is een fuik en bevat volgens stelling 1.1 dus minstens één kernfuik. De tweede bewering volgt uit stelling 1.2. □

Stelling 1.4. Voor $i \in I$ zij $N(i) = \{n \geq 1 \mid P^n(i,i) > 0\}$ en zij $d(i) =$ g.g.d. $N(i)$ dan geldt

i) Er bestaat een $n(i)$ zó dat $nd(i) \in N(i)$ indien $n \geq n(i)$.

ii) Indien $i \leftrightarrow j$ dan geldt $d(i) = d(j)$.

iii) Indien K een kernfuik is, dan bestaat er een partitie $C_1, \ldots, C_d$ van K zó dat: $d = d(i)$ voor $i \in K$ en indien $P^n(i,j) > 0$ en $i \in C_k$ en $j \in C_l$ dan $k-l = n(\text{mod } d)$.

Opmerking d(i) wordt de periode van toestand i genoemd. d noemt men de periode van kernfuik K; $C_1, \ldots, C_d$ worden kringfuiken genoemd.

Bewijs

i) Indien $n_1, n_2 \in N(i)$ dan volgt $P^{n_1+n_2}(i,i) \geq P^{n_1}(i,i)P^{n_2}(i,i) > 0$ en dus $n_1+n_2 \in N(i)$.

Zij $d = \min\{n \geq 1 \mid n = n_1-n_2 \text{ met } n_1,n_2 \in N(i)\}$, dan zijn er $n_1(i), n_2(i) \in N(i)$ met $d = n_1(i)-n_2(i)$. Daar $d(i)$ ieder element uit $N(i)$ deelt volgt dat $d(i)$ ook $d$ deelt en dus $d(i) \leq d$.

Zij $n$ een willekeurig element uit $N(i)$, $n$ is te schrijven als $\lambda d + r$ met $\lambda \geq 0$ en $0 \leq r < d$. Daar

$$r = n-\lambda d = n-\lambda n_1(i)+\lambda n_2(i) = \underbrace{(n+\lambda n_2(i))}_{\in N(i)} - \underbrace{\lambda n_1(i)}_{\in N(i)}$$

volgt dan uit $r < d$ en de definitie van $d$ dat $r = 0$. Hieruit volgt dat $d$ een deler is van ieder element uit $N(i)$. En dus is $d \leq d(i)$, met $d(i) \leq d$ volgt $d = d(i)$.

Zij $n(i) = (n_2(i))^2/d$ en $n \geq n(i)$, $n$ schrijven we als $\lambda n_2(i) + r$ met $0 \leq r < n_2(i)$, dan volgt dat $\lambda \geq n_2(i)/d$ en dus is $(\lambda d-r) > 0 \Longrightarrow nd = \lambda n_2(i)d+r(n_1(i)-n_2(i)) = (\lambda d-r)n_2(i)+rn_1(i) \in N(i)$.

ii) Onder i) zagen we dat $d(i) = \min\{n \geq 1 \mid n = n_1-n_2 \text{ met } n_1,n_2 \in N(i)\}$.
Zeg $d(i) = n_1(i)-n_2(i)$
Voor $i,j$ met $i \longleftrightarrow j$ zijn $\mu,\lambda$ zó dat $P^{\lambda}(i,j) > 0$ en $P^{\mu}(j,i) > 0$. Dan $P^{\mu}(j,i)P^{n_1(i)}(i,i)P^{\lambda}(i,j) > 0$ en dus $\mu+\lambda+n_1(i) \in N(j)$, zo ook $\mu+\lambda+n_2(i) \in N(j)$.
Uit de definitie van $d(j)$ volgt dan dat
$d(j) \leq (\mu+\lambda+n_1(i)) - (\mu+\lambda+n_2(i)) = d(i)$. Uit de symmetrie in $i$ en $j$ volgt $d(i) = d(j)$.

iii) Volgens stelling 1.2. iii) geldt dat $i \longleftrightarrow j$ indien $i,j$ elementen zijn van kernfuik $K$. Volgens ii) dus $d(i) = d$ voor alle $i \in K$. We noteren $i \overset{d}{\longleftrightarrow} j$ indien er $n_1 \geq 0$ en $n_2 \geq 0$ zijn met $P^{n_1 d}(i,j) > 0$ en $P^{n_2 d}(j,i) > 0$. De relatie "$\overset{d}{\longleftrightarrow}$" is weer een equivalentierelatie. Kies $i_1 \in K$, zeg $C_1$ is de equivalentieklasse waarin $i_1$.
Zij $i_k$ zó dat $P^{k-1}(i_1,i_k) > 0$ en zij $C_k$ de equivalentieklasse waarin $i_k$ ligt.
Voor willekeurige $i,j \in K$ geldt, indien $P^{n_1}(i,j) > 0$ en $P^{n_2}(i,j) > 0$ dan is $d$ een deler van $n_1-n_2$. Immers zij $n$ zó dat $P^{n}(j,i) > 0$ dan deelt

d $n_1+n$ en $n_2+n$ en dus ook het verschil n.
Voor $j \in K$ zij $P^n(i,j) > 0$ met $n = \lambda d+r$, $0 \leq r < d$ dan volgt uit $P^r(i_1,i_{r+1})P^m(i_{r+1},j) > 0$ voor een m dat $n - (r+m)$ en dus dat m door d deelbaar is dus $j \in C_{r+1}$. Hieruit volgt dat $C_1, \ldots, C_d$ een partitie is van K.
Indien $P^n(i,j) > 0$ met $n = \lambda d+r$, $0 \leq r < d$ en $i \in C_1$ en $j \in C_k$ dan $P^{n_1 d}(i,i_1)P^{k-1}(i_1,i_k)P^{n_2 d}(i_k,j) > 0$ voor zekere $n_1$ en $n_2$.
Hieruit volgt dat $n - \{(n_1+n_2)d + k-1\}$ en dus $r - (k-1)$ door d deelbaar is, dit impliceert dat $r = k-1$ en dus $n = k-1 (\mathrm{mod}\ d)$. □

<u>Stelling 1.5.</u> Zij K een kernfuik met periode d en kringfuiken $C_1, \ldots, C_d$. Dan bestaat er een stochastische matrix $P_K$ op de verzameling K met

i) $P_K(i,j) > 0$ dan zijn i en j in dezelfde kringfuik en $P_K(i,j) = P_K(j,j)$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} P^{nd}(i,j) = P_K(i,j)$, de convergentie is uniform in $i,j \in K$.

<u>Bewijs</u>
Volgens stelling 1.4. iii) als $P^{nd}(i,j) > 0$ dan zijn i en j in dezelfde kringfuik. We kunnen het bewijs dus geven voor een willekeurige kringfuik, de uniforme convergentie voor alle $i,j \in K$ volgt dan uit het feit dat er slechts eindig veel kringfuiken zijn.
Zij C een willekeurige kringfuik en $j_0 \in C$. Voor $i \in C$ bestaat dan een $m(i)$ met $P^{m(i)d}(i,j_0) > 0$.
Zij $m = \max\limits_{i \in J \cap C} m(i)$, waarin J de eindige verzameling uit de Doeblinvoorwaarde voorstelt.
Door gebruik te maken van stelling 1.4. i) vinden we dat geldt voor $\mu = m+n(j_0)$ en $i \in J \cap C$,

$$P^{\mu d}(i,j_0) \geq P^{m(i)d}(i,j_0)P^{(\mu-m(i))d}(j_0,j_0) > 0.$$

Zij

(1.3) $$c_1 = \min_{i\in J\cap C} P^{\mu d}(i,j_0).$$

De Doeblinvoorwaarde garandeert $P^N(i,J) \geq c$ voor alle $i \in I$. Hieruit volgt onmiddellijk dat $P^n(i,J) \geq c$ voor alle $i \in I$ indien $n \geq N$. Dus bestaat er een $\nu$ zó dat $P^{\nu d}(i,J) \geq c$ voor alle $i \in I$. Voor $i \in C$ volgt hieruit dat

(1.4) $$P^{\nu d}(i,J\cap C) \geq c.$$

Daar

$$P^{(\nu+\mu)d}(i,j_0) \geq \sum_{j\in J\cap C} P^{\nu d}(i,j)P^{\mu d}(j,j_0)$$

volgt met (1.3) en (1.4) dat

(1.5) $$P^{(\nu+\mu)d}(i,j_0) \geq c_1 c > 0 \qquad \text{voor alle } i \in C.$$

Zij $a^+ \overset{\text{NOT}}{=} \max(a,0)$ en $a^- = \min(a,0)$ dan $a = a^+ + a^-$. Daar voor $i_1, i_2 \in C$ geldt $\sum_{j\in C} (P^{nd}(i_1,j)-P^{nd}(i_2,j)) = 0$, volgt

(1.6) $$\sum_{j\in C} (P^{nd}(i_1,j)-P^{nd}(i_2,j))^+ = -\sum_{j\in C} (P^{nd}(i_1,j)-P^{nd}(i_2,j))^-.$$

Uit (1.5) volgt dat voor $i_1, i_2 \in C$

(1.7) $$\sum_{j\in C} (P^{(\nu+\mu)d}(i_1,j)-P^{(\nu+\mu)d}(i_2,j))^+ \leq 1 - c_1 c < 1.$$

Voor $j \in C$ zij $m^m(j) = \inf_{i\in C} P^{nd}(i,j)$ en $M^n(j) = \sup_{i\in C} P^{nd}(i,j)$ dan

(1.8) $$\begin{aligned} m^{n+1}(j) &= \inf_{i\in C} \sum_{k\in C} P^d(i,k)P^{nd}(k,j) \\ &\geq \inf_{i\in C} \sum_{k\in C} P^d(i,k)m^n(j) \\ &= m^n(j). \end{aligned}$$

Analoog, voor $j \in C$

(1.9) $$M^{n+1}(j) \leq M^{n}(j)$$

(1.10) $$M^{\nu+\mu+n}(j) - m^{\nu+\mu+n}(j) =$$

$$\sup_{i_1,i_2 \in C} \sum_{k \in C} (P^{(\nu+\mu)d}(i_1,k)-P^{(\nu+\mu)d}(i_2,k))P^{nd}(k,j) \leq$$

gebruik (1.6) $$\sup_{i_1,i_2 \in C} \sum_{k \in C} (P^{(\nu+\mu)d}(i_1,k)-P^{(\nu+\mu)d}(i_2,k))^{+}(M^{n}(j)-m^{n}(j)) \leq$$

gebruik (1.7) $$(1-c_1c)(M^{n}(j)-m^{n}(j)).$$

Uit (1.8) en (1.9) volgt dat $(M^{n}(j)-m^{n}(j))$ monotoon niet stijgend in n is bij vaste j. Door (1.10) herhaald toe te passen vinden we

(1.11) $$(M^{n}(j)-m^{n}(j)) \leq (1-c_1c)^{[n/\nu+\mu]}. \qquad *)$$

Daar het rechterlid van (1.11) naar nul convergeert, zelfs exponentieel snel, volgt dat $\lim_{n\to\infty} (M^{n}(j)-m^{n}(j)) = 0$ uniform in $j \in C$. Dit impliceert dat $\lim_{n\to\infty} P^{nd}(i,j)$ bestaat en onafhankelijk van i is en dat de convergentie uniform is in $i,j \in C$. Uit de uniforme convergentie volgt dat voor $i \in C$

$$\sum_{j \in C} P_K(i,j) = \sum_{j \in C} \lim_{n\to\infty} P^{nd}(i,j)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j \in C} P^{nd}(i,j) = 1.$$

Met $P_K(i,j) \geq 0$ volgt dat $P_K$ een stochastische matrix is. □

<u>Stelling 1.6</u>. Zij K zoals in stelling 1.5. en zij voor $i,j \in K$

$$\Pi_K(i,j) = \frac{1}{d} P_K(j,j).$$

---

*) $[a] = \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq a\}$.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^n(i,j) = \Pi_K(i,j) \qquad \text{uniform in } i,j \in K.$$

Bewijs

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^n(i,j) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{Nd} \sum_{n=1}^{Nd} P^n(i,j) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{d} \sum_{l=1}^{d} \sum_{k\in K} P^l(i,k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^{nd}(k,j)\right] =$$

op grond van de stelling over gedomineerde convergentie en stelling 1.5. ii)

$$\frac{1}{d} \sum_{l=1}^{d} \sum_{k\in K} P^l(i,k) P_K(k,j) =$$

veronderstel nu dat $i-j = r(\text{mod } d)$ en $j \in C_n$ dan met stelling 1.4. iii) en stelling 1.5. i)

$$\frac{1}{d} \sum_{k\in C_n} P^r(i,k) P_K(j,j) =$$

$$\frac{1}{d} P_K(j,j) = \Pi_K(j,j). \qquad \square$$

Stelling 1.7. Indien $K_1, \ldots, K_m$ de kernfuiken zijn en $\rho(i,K_j)$ de kans om vanuit i ooit in kernfuik $K_j$ te komen dan geldt

i) $$\sum_{j=1}^{m} \rho(i,K_j) = 1 \qquad \text{voor alle } i$$

ii) $$\lim_{n\to\infty} P^n(i,K_j) = \rho(i,K_j) \qquad \text{uniform in } i.$$

Bewijs

Uit $\mathbb{P}(\underline{x}_{n+1} \in K_j \mid \underline{x}_n = i) = P(i,K_j) = 1$ indien $i \in K_j$ volgt, als de

Markov keten zich op tijdstip n in kernfuik $K_j$ bevindt dan ook op tijdstip $m \geq n$. Dus

$$P(\underline{x}_n \in K_j \mid \underline{x}_0 = i) = P(\bigcup_{k=0}^{n} (\underline{x}_k \in K_j) \mid \underline{x}_0 = i) = P^n(i,K_j).$$

Hieruit volgt dat $P^n(i,K_j)$ monotoon niet dalend in n is en dat

$$\lim_{n\to\infty} P^n(i,K_j) = P(\bigcup_{n=0}^{\infty} (\underline{x}_n \in K_j) \mid \underline{x}_0 = i) = \rho(i,K_j).$$

Zij $K = \bigcup_{j=1}^{m} K_j$, om de beweringen i) en ii) aan te tonen kunnen we volstaan met te bewijzen dat $\lim_{n\to\infty} P^n(i,K) = 1$ uniform is in i.

Voor $i \in I$ geldt $K(i)$ (voor $K(i)$ zie definitie 1.4) is een fuik, indien $K(i) \cap K = \emptyset$ dan volgt met stelling 1.1 dat er naast $K_1, \ldots, K_m$ nog een kernfuik bestaat. Dit is in tegenspraak met de aanname. Dus voor iedere i geldt $K(i) \cap K \neq \emptyset$ en dit betekent dat er een m(i) bestaat met $P^{m(i)}(i,K) > 0$.

Zij $M = \max_{i\in J} m(i)$ (J is de verzameling uit de Doeblinvoorwaarde) dan volgt uit de monotonie van $P^n(i,K)$ dat

$$\min_{i\in J} P^M(i,K) \overset{\text{NOT}}{=} c_1 > 0.$$

Uit de Doeblinvoorwaarde volgt dan

$$P^{N+M}(i,K) \geq \sum_{j\in J} P^N(i,j)P^M(j,K) \geq c_1 c > 0 \quad \text{voor alle i.} \tag{1.12}$$

Zij $D \overset{\text{NOT}}{=} I - K$ dan impliceert (1.12)

$$\begin{aligned} P^{N+M+n}(i,D) &= \sum_{j\in D} P^n(i,j)P^{N+M}(j,D) \\ &\leq P^n(i,D)(1-c_1 c). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Daar $P^n(i,D)$ monotoon niet stijgend is vinden we door (1.13) herhaald toe te passen dat

$$(1.14) \qquad P^n(i,D) \le (1-c_1 c)^{[n/N+M]}$$

Daar $(1-c_1 c) < 1$ volgt uit (1.14) dat $\lim_{n\to\infty} P^n(i,D) = 0$ uniform in i. □

<u>Stelling 1.8</u>. $K_1, \ldots, K_m$ zijn weer de kernfuiken.

Zij

$$\Pi(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{indien } j \in I - \bigcup_{l=1}^{m} K_l \\ \rho(i,K_l)\, \Pi_{K_l}(j,j) & \text{indien } j \in K_l \end{cases}$$

dan geldt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^n(i,j) = \Pi(i,j) \qquad \text{uniform in } i,j \in I.$$

<u>Bewijs</u>

De bewering is een gevolg van stellingen 1.6 en 1.7 en het feit dat er slechts eindig veel kernfuiken zijn. □

<u>Stelling 1.9</u>. Voor $\Pi(i,j)$ zoals in stelling 1.8 geldt

$$\Pi(i,j) = \sum_{k\in I} P(i,k)\Pi(k,j) = \sum_{k\in I} \Pi(i,k)P(k,j)$$

$$= \sum_{k\in I} \Pi(i,k)\Pi(k,j).$$

<u>Bewijs</u>

$$\Pi(i,j) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^n(i,j)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k\in I} P(i,k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P^n(k,j)\right]$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{gedomineerde}\\ \text{convergentie}\end{array}\right) \qquad = \sum_{k\in I} P(i,k)\Pi(k,j).$$

Met inductie naar n vinden we uit deze gelijkheid

$$\Pi(i,j) = \sum_{k\in I} P^n(i,k)\Pi(k,j) \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \qquad \Pi(i,j) = \sum_{k\in I} \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P^n(i,k)\right] \Pi(k,j) \qquad \text{voor } N \in \mathbb{N}.$$

Uit het feit dat $\Pi(i,\cdot)$ een kansmaat is volgt (zie [8])

$$\Pi(i,j) = \sum_{k\in I} \Pi(i,k)\Pi(k,j). \tag{1.15}$$

Dezelfde argumentatie geeft

$$\Pi(i,j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k\in I} \left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} P^n(i,k)\right] P(k,j) \tag{1.16}$$

$$= \sum_{k\in I} \Pi(i,k)P(k,j). \qquad \square$$

Definitie 1.7. Een kansverdeling $\{p(i) \mid i \in I\}$ noemen we invariant t.o.v. P indien

$$\sum_{i\in I} p(i)P(i,j) = p(j) \qquad \text{voor alle } j.$$

Stelling 1.10. $K_1, \ldots, K_m$ zijn weer de kernfuiken.
Een kansverdeling $p(\cdot)$ is invariant.

$\Longleftrightarrow$ Er bestaan $\rho(K_l) \geq 0$, $l = 1, \ldots, m$ met $\sum_{l=1}^{m} \rho(K_l) = 1$

en
$$p(i) = \begin{cases} \rho(K_l)\, \Pi_{K_l}(i,i) & \text{als } i \in K_l \\ 0 & \text{als } i \in I - \bigcup_{l=1}^{m} K_l \end{cases}$$

Bewijs

$\Longleftarrow$) $\Pi_{K_l}$ is een stochastische matrix op $K_l$, we maken $\Pi_{K_l}$ tot een stochastische matrix op I door te definiëren

$$\Pi_{K_l}(i,j) = 0 \qquad \text{als } i \notin K_l \text{ of } j \notin K_l.$$

Voor $i \in K_l$ geldt dan $\Pi(i,j) = \Pi_{K_l}(j,j)$, met (1.16) volgt

$$(1.17) \qquad \sum_{j\in I} \Pi_{K_l}(j,j)P(j,k) = \Pi_{K_l}(k,k)$$

(1.17) geldt voor $l = 1, \ldots, m$ $\Longrightarrow$

$$\sum_{j\in I} \sum_{l=1}^{m} \rho(K_l)\Pi_{K_l}(j,j)P(j,k) = \sum_{l=1}^{m} \rho(K_l)\Pi_{K_l}(k,k)$$

$\Longrightarrow$)

$$\sum_{i\in I} p(i)P(i,j) = p(j)$$ voor alle $j \Longrightarrow$ met inductie

$$\sum_{i\in I} p(i) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^n(i,j)\right] = p(j)$$ $\Longrightarrow$ gedomineerde convergentie

$$\sum_{i\in I} p(i)\Pi(i,j) = p(j).$$

Met $\Pi(i,j) = 0$ als $j \notin \bigcup_{l=1}^{m} K_l$ volgt hieruit dat

$$(1.17) \qquad p(j) = 0 \qquad \text{voor } j \notin \bigcup_{l=1}^{m} K_l .$$

Als $j \in K_l$ dan

$$\Pi(i,j) = 0 \qquad \text{voor } i \in \bigcup_{l=1}^{m} K_l - K_l .$$

$\Longrightarrow$ voor $j \in K_l$,

$$p(j) = \sum_{i\in K_l} p(i)\Pi(i,j) = [\sum_{i\in K_l} p(i)]\, \Pi_{K_l}(j,j).$$

Zij $\rho(K_l) = \sum_{i\in K_l} p(i)$ dan

$$p(j) = \rho(K_l)\Pi_{K_l}(j,j) \qquad \text{voor } j \in K_l .$$

Met (1.17)

$$\sum_{l=1}^{m} \rho(K_l) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{i\in K_l} p(i) = 1. \qquad \square$$

Als voor iedere essentiële toestand zou gelden dat de periode gelijk aan 1 is, dit betekent het ontbreken van kringfuiken, dan geldt volgens stelling 1.5. ii)

$$\lim_{n\to\infty} P^n(i,j) = P_K(i,j) \qquad \text{voor } i,j \in K,$$

met K een kernfuik en uniform in $i,j \in K$. Met stelling 1.7 volgt dan

$$\lim_{n\to\infty} P^n(i,j) = \begin{cases} \rho(i,K_l)P_{K_l}(j,j) & \text{als } j \in K_l \\ 0 & \text{als } j \notin \bigcup_{l=1}^{m} K_l \,. \end{cases}$$

Bovendien is de convergentie weer uniform in $i,j \in I$.

Stelling 1.11. Zij $\tilde{P}(i,j) = c_1\delta(i,j) + (1-c_1)P(i,j)$ met $0 < c_1 < 1$ *) dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{P}^n(i,j) = \Pi(i,j) \qquad \text{uniform in } i,\ j.$$

Bewijs

Uit $\tilde{P}(i,i) \geq c_1 > 0$ volgt dat voor ieder element i de periode 1 is. Daar uit de Doeblinvoorwaarde volgt dat $\tilde{P}^N(i,J) \geq (1-c_1)^N c$ voor alle i, voldoet ook de stochastische matrix $\tilde{P}$ aan de Doeblinvoorwaarde. Volgens het betoog voorafgaande aan deze stelling nadert $\tilde{P}^n(i,j)$ naar een limiet zelfs uniform in i en j. Uit het bestaan van $\lim_{n\to\infty} \tilde{P}^n(i,j)$ volgt per definitie dat de rij $\{P^n(i,j)\}_{n=1}^{\infty}$ Euler sommeerbaar is voor alle i, j. We bewezen reeds dat de rij Cesarosommeerbaar is voor alle i, j (stelling 1.8). Dit impliceert dat de Eulersom gelijk is aan de Cesarosom. $\square$

---

*) $$\delta(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j. \end{cases}$$

Stelling 1.12. De volgende beweringen zijn equivalent

a) Er bestaat een constante $c > 0$, een natuurlijk getal $N$ en een eindige verzameling $J$ zó dat

$$P^N(i,J) \geq c \qquad \text{voor alle } i.$$

b) Bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een natuurlijk getal $n(\varepsilon)$ en is er een eindige verzameling $J(\varepsilon)$ zó dat

$$P^{n(\varepsilon)}(i,J(\varepsilon)) \geq 1-\varepsilon \qquad \text{voor alle } i.$$

c) De Markov keten heeft eindig veel kernfuiken en de rij $\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P^n(i,j)\}_{N=1}^{\infty}$ convergeert uniform in $i$ en $j$.

Bewijs

a) $\Longrightarrow$ b) We voeren de volgende notatie in, voor $E \subset I$

$$(1.18) \qquad P^n(E;i,j) = \mathbb{P}\{\underline{x}_k \notin E \text{ voor } k=1,\ldots,n-1 \text{ en } \underline{x}_n = j \mid \underline{x}_0 = i\}.$$

$P^n(E;i,j)$ is de kans om in $n$ stappen vanuit $i$ toestand $j$ te bereiken zonder verzameling $E$ te bezoeken. Dus $1 - P^n(E;i,I-E)$ is de kans om in de eerste $n$ stappen $E$ te bezoeken oftewel is gelijk aan $\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n}(\underline{x}_k \in E) \mid \underline{x}_0 = i)$. Deze kans is ook gelijk aan $\sum_{k=1}^{n} P^k(E;i,E)$.
Volgens a) geldt voor willekeurige $i$

$$P^N(i,J) \geq c \Longrightarrow P^N(i,I-J) \leq 1-c$$

$$\Longrightarrow P^N(J;i,I-J) \leq 1-c.$$

Hieruit volgt

$$(1.19) \qquad P^{N+n}(J;i,I-J) = \sum_{j \in I-J} P^n(J;i,j)P^N(J;j,I-J)$$

$$\leq (1-c)P^n(J,i,I-J).$$

Door (1.19) herhaald toe te passen vinden we

$$P^n(J;i,I-J) \leq (1-c)^{[n/N]}. \tag{1.20}$$

Voor $\delta > 0$ kies $N_1$ zó dat $(1-c)^{[N_1/N]} \leq \delta$. Uit (1.20) volgt dan

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N_1} (\underline{x}_k \in J) \mid \underline{x}_0 = i\right) \geq 1-\delta \implies$$

$$\sum_{k=1}^{N_1} P^k(J;i,J) \geq 1-\delta. \tag{1.21}$$

We beschouwen nu de collectie van kansmaten $P^k(i,\cdot)$ voor $k = 1, \ldots, N_1$ en $i \in J$. Omdat deze collectie eindig is bestaat er een eindige verzameling D met maat $\geq 1-\delta$ voor alle elementen uit de collectie.
We gaan dit en (1.21) substitueren in de ongelijkheid

$$\begin{aligned}
P^{N_1+1}(i,D) &= \mathbb{P}(\underline{x}_{N_1+1} \in D \mid \underline{x}_0 = i) \\
&\geq \mathbb{P}\left(\underline{x}_{N_1+1} \in D \text{ en } \bigcup_{k=1}^{N_1} (\underline{x}_k \in J) \mid \underline{x}_0 = i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{j \in J} P^k(J;i,j) P^{N_1+1-k}(j,D) \\
&\geq \sum_{k=1}^{N_1} P^k(J;i,J)(1-\delta) \geq (1-\delta)^2.
\end{aligned}$$

Indien we er voor zorgen dat $(1-\delta)^2 \geq 1-\varepsilon$ dan kunnen $N_1+1$ resp. D voor $n(\varepsilon)$ resp. $J(\varepsilon)$ fungeren.

b) $\implies$ a) triviaal.

a) $\implies$ c) stellingen 1.1 t/m 1.8.

c) $\implies$ a) We noteren de Cesarosom van $P^n(i,j)$ weer met $\Pi(i,j)$. Uit de uniforme convergentie in j volgt dan $\Pi(i,I) = 1$ voor alle i.
Veronderstel $K_1, \ldots, K_m$ zijn de kernfuiken.
In dit bewijs zullen we enkele eigenschappen gebruiken die in de voorafgáande stellingen onder de Doeblinvoorwaarde zijn afgeleid, maar

algemeen geldig zijn. Het zijn: indien $\Pi(i,j) > 0$ voor een i dan noemt men j een positieve terugkeertoestand, j is dan esstentieel en dus $j \in \bigcup_{l=1}^{m} K_l$. Hieruit volgt

$$\Pi(i, I - \bigcup_{l=1}^{m} K_l) = 0.$$

Met $\Pi(i,I) = 1$ vinden we

$$(1.22) \qquad \Pi(i, \bigcup_{l=1}^{m} K_l) = 1 \qquad \text{voor alle } i.$$

Verder geldt algemeen relatie (1.15) en indien $i,j \in K_l$ dan $\Pi(i,j) = \Pi(j,j)$. Kies $i_l \in K_l$, zij $J_l$ een eindige verzameling zô dat $\Pi(i_l,J_l) \geq 2c^{\frac{1}{2}}$ dan volgt

$$(1.23) \qquad \Pi(i,J_l) \geq 2c^{\frac{1}{2}} \qquad \text{voor alle } i \in K_l.$$

Zij $J = \bigcup_{l=1}^{m} J_l$ dan is J een eindige verzameling.
(1.15), (1.22) en (1.23) impliceren

$$\Pi(i,J) = \sum_{l=1}^{m} \Pi(i,K_l)\Pi(i_l,J_l) \geq 2c^{\frac{1}{2}} \qquad \text{voor alle } i.$$

Uit de uniforme convergentie in i volgt dan dat er een N bestaat met

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^n(i,J) \geq c^{\frac{1}{2}} \qquad \text{voor alle } i.$$

Dit impliceert dat voor i er een $n(i) \leq N$ is met

$$(1.24) \qquad P^{n(i)}(i,J) \geq c^{\frac{1}{2}}.$$

Zij de eindige verzameling D zô dat

$$(1.25) \qquad P^k(j,D) \geq c^{\frac{1}{2}} \qquad \text{voor } k = 1, \ldots, N,\ j \in J.$$

Met (1.24) en (1.25) volgt

$$P^{N+1}(i,D) \geq \sum_{j\in J} P^{n(i)}(i,j)P^{N+1-n(i)}(j,D) \geq c$$

voor alle i.

Het triple (C,N+1,D) voldoet dus aan a). □

Definitie 1.8. Een collectie van kansmaten $P$ heet uniform beperkt indien voor iedere $\varepsilon > 0$ er een eindige verzameling $A(\varepsilon)$ bestaat met de eigenschap dat $p(A(\varepsilon)) \geq 1-\varepsilon$ voor alle $p \in P$.

Stelling 1.13. Indien de collectie kansmaten $\{P(i,\cdot) \mid i\in I\}$ uniform beperkt is dan is aan de Doeblinconditie voldaan.
De Doeblinconditie impliceert dat voor iedere $i \in I$ de collectie $\{P^n(i,\cdot) \mid n\in\mathbb{N}\}$ uniform beperkt is.

Bewijs
Voor $\varepsilon > 0$ zij A zó dat $P(i,A) \geq 1-\varepsilon$ voor alle i, dan voldoet het triple $(1-\varepsilon,1,A)$ aan de Doeblinvoorwaarde.
Volgens stelling 1.12 a) $\Rightarrow$ b) is er bij $\varepsilon$ een $n(\varepsilon)$ en een $J(\varepsilon)$ met $P^{n(\varepsilon)}(i,J(\varepsilon)) \geq 1-\varepsilon$. Fixeer i dan is er een eindige verzameling D met $P^k(i,D) \geq 1-\varepsilon$ voor $k = 1, \ldots, n(\varepsilon)-1$. Hieruit volgt

$$P^n(i,J(\varepsilon)\cup D) \geq 1-\varepsilon \qquad \text{voor alle } n.$$ □

Opmerking 1.1. Dat het uniform beperkt zijn van de collectie $\{P(i,\cdot) \mid i\in I\}$ een sterkere voorwaarde is dan de Doeblinvoorwaarde toont het volgende voorbeeld.

$$I = \{0,1,2,\ldots\};\ P(i,i) = 1-c \text{ en } P(i,0) = c \text{ voor } i \in \mathbb{N}.$$

Het uniform beperkt zijn van $\{P^n(i,\cdot) \mid n\in\mathbb{N}\}$ voor iedere $i \in I$ impliceert niet de Doeblinvoorwaarde. Voorbeeld,

$$P(i,i) = 1 \qquad \text{voor alle } i \in I.$$

Opmerking 1.2. Daar algemeen geldt dat $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} P^k(i,j)$ bestaat, we noteren de limiet weer met $\Pi(i,j)$, volgt uit het uniform beperkt zijn van de collectie $\{P^n(i,\cdot) \mid n\in\mathbb{N}\}$ direkt het bestaan van een invariante kansverdeling. Immers het uniform beperkt zijn impliceert dat $\Pi(i,I) = 1$. En hieruit volgt

$$\Pi(i,j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k\in I} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^{n-1}(i,k)\right] P(k,j)$$

$$= \sum_{k\in I} \left[\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^{n-1}(i,k)\right] P(k,j)$$

$$= \sum_{k\in I} \Pi(i,k)P(k,j).$$

En dus $\Pi(i,\cdot)$ is een invariante kansverdeling.
Omgekeerd, indien er een invariante kansverdeling bestaat dan kan bewezen worden dat er een i bestaat met $\{P^n(i,\cdot) \mid n\in\mathbb{N}\}$ uniform beperkt.

Definitie 1.9. Voor een verzameling van toestanden E definiëren we de wachttijd $\underline{\tau}_E$ tot aan binnenkomst in verzameling E door:

$$\underline{\tau}_E(\omega) = \begin{cases} n \text{ indien } \underline{x}_n \in E \text{ en } \underline{x}_k \notin E \text{ voor } k = 1,\dots,n-1 \\ \infty \text{ indien } \underline{x}_k \notin E \qquad \text{voor } k = 1,2,\dots . \end{cases}$$

De verwachting van $\underline{\tau}_E$ onder de voorwaarde dat de Markov keten op tijdstip 0 zich in toestand i bevindt noteren we met $m(i,E)$. Dus

$$m(i,E) = \mathbb{E}(\underline{\tau}_E \mid \underline{x}=i).$$

Stelling 1.14. De volgende beweringen zijn equivalent

a) Er bestaat een constante $c > 0$, een natuurlijk getal N en een verzameling J zó dat

$$P^N(i,J) \geq c \qquad \text{voor alle } i.$$

b) Er bestaat een eindige verzameling E zô dat m(i,E) is uniform begrensd in $i \in I$.

Bewijs

a) $\Longrightarrow$ b) We zullen bewijzen dat m(i,J) uniform begrensd is in i

$$m(i,J) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(\underline{\tau}_J=n \mid \underline{x}_0=i) + \infty.\mathbb{P}(\underline{\tau}_J=\infty \mid \underline{x}_0=i).$$

Voor $\mathbb{P}(\underline{\tau}_J<\infty \mid \underline{x}_0=i) = 1$ is het een bekende stelling dat

$$(1.26) \qquad m(i,J) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\underline{\tau}_J>k \mid \underline{x}_0=i).$$

Indien $\mathbb{P}(\underline{\tau}_J=\infty \mid \underline{x}_0=i) > 0$ dan is $m(i,J) = \infty$ en uit

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(\underline{\tau}_J>k \mid \underline{x}_0=i) = \mathbb{P}(\underline{\tau}_J=\infty \mid \underline{x}_0=i) > 0$$

volgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\underline{\tau}_J>k \mid \underline{x}_0=i) = \infty.$$

Dus ook in dit geval geldt (1.26).

Daar $\mathbb{P}(\underline{\tau}_J>0 \mid \underline{x}_0=i) = 1$ en (zie (1.18))

$$\mathbb{P}(\underline{\tau}_J>k \mid \underline{x}_0=i) = P^k(J;i,I-J) \qquad \text{voor } k \geq 1$$

volgt

$$(1.27) \qquad m(i,J) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P^k(J;i,I-J).$$

Onder stelling 1.12 bewezen we onder aanname van a) relatie (1.20). Substitutie hiervan geeft

$$m(i,J) \leq 1 + N \sum_{k=0}^{\infty} (1-c)^k = 1 + N \frac{1}{c}\ .$$

Deze bovengrens hangt niet van toestand i af, dus hiermee is de uniforme begrensdheid bewezen.

b) $\Longrightarrow$ a) Veronderstel M is de bovengrens, dus $m(i,E) \leq M$ voor alle i. Volgens (1.27) geldt dan ook

$$(1.28) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} P^k(E;i,I-E) \leq M \qquad \text{voor alle } i.$$

Daar $P^k(E;i,I-E)$ monotoon niet stijgend in k is volgt dat voor willekeurige $c > 0$ en $n = [M/c] + 1$ geldt

$$(1.29) \qquad P^n(E;i,I-E) \leq c \qquad \text{voor alle } i,$$

immers stel

$$P^n(E;i_0,I-E) > c \qquad \text{voor een } i_0$$

dan volgt

$$\sum_{k=1}^{n} P^k(E;i_0,I-E) > nc > M.$$

Dit is in tegenspraak met (1.28).
Dat uit (1.29) volgt dat a) voor een zeker triple vervuld is, kan analoog aan stelling 1.12 a) $\Longrightarrow$ b) vanaf relatie (1.20) bewezen worden.

□

Opmerking 1.3. Indien K een kernfuik en $K \cap E = \emptyset$ dan $P(\tau_E = \infty \mid X_0 = i) = 1$ en dus $m(i,E) = \infty$ als $i \in K$. Hieruit volgt dat als voor E voorwaarde b) vervuld is dan $K \cap E \neq \emptyset$ voor iedere kernfuik K. Dit betekent dat het aantal kernfuiken niet groter is dan het aantal elementen in E. Omgekeerd,

Stelling 1.15. Zij de Doeblinvoorwaarde vervuld. Veronderstel $K_1, \ldots, K_m$ zijn de kernfuiken en $i_n \in K_n$ voor $n = 1, \ldots, m$ en $E = \{i_1,\ldots,i_m\}$ dan is $m(i,E)$ uniform begrensd in i.

Bewijs

We gebruiken de volgende stelling uit de theorie over Markov ketens: Indien $\Pi(i_0,i_0) = 0$ voor $i_0$ element uit een kernfuik K dan $\Pi(i,i) = 0$ voor alle $i \in K$. Dit impliceert $\Pi(i_0,K) = 0$. Echter onder de Doeblin-voorwaarde geldt $\Pi(i_0,K) = 1$ en dus $\Pi(i_0,i_0) > 0$ als $i_0$ element van een kernfuik. Zij

$$c = \min\{\Pi(i_n,i_n) \mid n=1,\ldots,m\}.$$

Dan

$$\Pi(i,E) \geq c \qquad \text{voor alle } i \in \bigcup_{n=1}^{m} K_n .$$

Met $\Pi(i, \bigcup_{n=1}^{m} K_n) = 1$ en (1.15) volgt dan

$$\Pi(i,E) \geq c \qquad \text{voor alle } i \in I.$$

Uit de uniforme convergentie in i van $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^n(i,E)$ naar $\Pi(i,E)$ volgt, er bestaat een N met

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} P^n(i,E) \geq c/2 \qquad \text{voor alle } i.$$

Dit impliceert dat er bij i een $n(i) \leq N$ is, zó dat

$$P^{n(i)}(i,E) \geq c/2$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathbb{P}(\underline{x}_{n(i)} \in E \mid \underline{x}_0 = i) \geq c/2$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{N} (\underline{x}_n\ E) \mid \underline{x}_0 = i) \geq c/2$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathbb{P}(\underline{\tau}_E < N \mid \underline{x}_0 = i) \geq c/2$$

$$\Longrightarrow \qquad P^N(E;i,I-E) \leq 1-c/2.$$

De rest van het bewijs is analoog aan het bewijs van stelling 1.14 a) $\Longrightarrow$ b). $\square$

<u>Opmerking 1.4.</u> De bewijzen van stelling 1.14 en 1.15 verlopen via de equivalentie van de Doeblinvoorwaarde met:
Er bestaat een constante $c > 0$, een natuurlijk getal $N$ en een eindige verzameling $E$ ($E$ kan men, zo men dat wil nemen zoals in stelling 1.15) zó dat

$$\mathbb{P}(\underline{\tau}_E < N \mid \underline{x}=i) \geq c \qquad \text{voor alle } i.$$

## 2. Over de continuiteit van invariante kansverdelingen en de uniforme begrensdheid van verwachte terugkeertijden

In deze paragraaf beschouwen we een collectie van Markov ketens. Alle Markov ketens hebben dezelfde toestandsruimte I; I is een eindige of aftelbare verzameling.
We gaan uit van een rij meetbare afbeeldingen $\{\underline{x}_n, n \geq 0\}$, $\underline{x}_n$ is de afbeelding van een zekere meetbare ruimte $(\Omega, F)$ naar de toestandsruimte I. Zij verder $\{\mathbb{P}_\alpha : \alpha \in A\}$ een collectie van kansmaten op $(\Omega, F)$. We veronderstellen dat voor iedere $\alpha \in A$ de rij stochastische variabelen $\{\underline{x}_n, n \geq 0\}$ gedefinieerd op kansruimte $(\Omega, F, \mathbb{P}\ )$ een Markov keten vormt.
We noteren:

$$P_\alpha(i,j) \overset{\text{NOT}}{=} \mathbb{P}_\alpha\{\underline{x}_n = j \mid \underline{x}_{n-1} = i\} \qquad \text{voor } n \geq 1.$$

Uitgezonderd de stellingen 2.2 en 2.6 worden de stellingen in deze paragraaf zonder verdere vermelding afgeleid onder de volgende voorwaarde

*Er bestaat een constante* $c > 0$, *een natuurlijk getal* $N$ *en een eindige verzameling* $J$ *zó dat* $P_\alpha^N(i,j) \geq c$ *voor alle* $i \in I$ *en* $\alpha \in A$.

Voor iedere $\alpha \in A$ is (vergelijk paragraaf 1) aan een Doeblinvoorwaarde voldaan. Maar indien voor iedere stochastische matrix $P_\alpha$, $\alpha \in A$ de Doeblinvoorwaarde (zoals in paragraaf 1) vervuld is dan behoeft bovenstaande voorwaarde nog niet vervuld te zijn (zie opmerking 2.1). We zullen in het vervolg bovenstaande voorwaarde de simultane Doeblinvoorwaarde noemen.

<u>Opmerking 2.1.</u> Zij $I = \{0,1,2,\ldots\}$ en zij voor $n = 1, 2, \ldots$ en $n = \infty$, $P_n(i,0) = 1$ voor $i \leq n$, $i > 2n$ en $P_n(i,i+1) = 1$ voor $n < i \leq 2n$.
Dan geldt

i) $$\lim_{n\to\infty} P_n(i,j) = P_\infty(i,j)$$

ii) $\qquad P_n^N(i,0) = 1 \qquad$ voor $N \geq n+1$ en alle $i \in I$

en

$$P_\infty(i,0) = 1 \qquad \text{voor alle } i \in I$$

iii) De collectie stochastische matrices $\{P_n: n=1,2,\ldots\}$ voldoet niet aan de simultane Doeblinvoorwaarde.

Stelling 2.1. Indien $\lim_{n\to\infty} P_{\alpha_n}(i,j) = P_{\alpha_0}(i,j)$ met $\alpha_n, \alpha_0 \in A$ en indien de Markov keten behorende bij stochastische matrix $P_{\alpha_0}$ ten hoogste één kernfuik heeft dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_{\alpha_n}(i,j) = \Pi_{\alpha_0}(i,j) \qquad \text{voor alle } i,j.$$

Bewijs

Voor een $0 < c_1 < 1$ voeren we in de stochastische matrices:

$$\tilde{P}_\alpha(i,j) = c_1\delta(i,j) + (1-c_1)P_\alpha(i,j) \qquad \text{voor } \alpha \in A.$$

Daar $\tilde{P}_\alpha^N(i,j) \geq (1-c_1)^N P_\alpha^N(i,j)$ volgt uit de simultane Doeblinvoorwaarde dat

(2.1) $$\tilde{P}_\alpha^N(i,J) \geq c_2 \overset{\text{NOT}}{=} (1-c_1)^N c.$$

Volgens stelling 1.11 geldt

(2.2) $$\lim_{n\to\infty} \tilde{P}_{\alpha_0}^n(i,j) = \Pi_{\alpha_0}(i,j) \qquad \text{uniform in } i,j.$$

Daar er hoogstens één kernfuik en dus precies één kernfuik is onder $P_{\alpha_0}$ geldt dat $\Pi_{\alpha_0}(i,j) = \Pi_{\alpha_0}(j,j)$ voor alle $i,j$ (zie paragraaf 1). Zij $j_0$ zó dat $\Pi_{\alpha_0}(j_0,j_0) > 0$, $4c_3 \overset{\text{NOT}}{=} \Pi_{\alpha_0}(j_0,j_0)$. Uit (2.2) volgt dan de existentie van een $N_1$ met

(2.3) $$\tilde{P}_{\alpha_0}^{N_1}(i,j_0) \geq 2c_3 \qquad \text{voor alle } i.$$

Uit $\lim_{n\to\infty} P_{\alpha_n}(i,j) = P_{\alpha_0}(i,j)$ voor alle i,j volgt

(2.4) $$\lim_{n\to\infty} \tilde{P}_{\alpha_n}(i,j) = \tilde{P}_{\alpha_0}(i,j) \qquad \text{voor alle } i,j.$$

Daar $\tilde{P}_{\alpha_n}(i,I) = 1$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$ volgt uit (2.4) (zie [8])

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{P}^2_{\alpha_n}(i,j) = \lim_{n\to\infty} \sum_l \tilde{P}_{\alpha_n}(i,l)\tilde{P}_{\alpha_n}(l,j)$$

$$= \sum_l \tilde{P}_{\alpha_0}(i,l)\tilde{P}_{\alpha_0}(l,j) = \tilde{P}^2_{\alpha_0}(i,j).$$

Dit argument herhalend, vinden we met inductie naar n dat

(2.5) $$\lim_{k\to\infty} \tilde{P}^n_{\alpha_k}(i,j) = \tilde{P}^n_{\alpha_0}(i,j) \qquad \text{voor alle } i,j \in I \text{ en alle } n \in \mathbb{N}.$$

Met (2.3) volgt hieruit het bestaan van een $N_2$ met

$$\tilde{P}^{N_1}_{\alpha_n}(i,j_0) \geq c_3 \qquad \text{voor } n \geq N_2 \text{ en alle } i \text{ uit de eindige verzameling } J.$$

Met (2.1) volgt dan voor $n \geq N_2$ dat

(2.6) $$\tilde{P}^{N+N_1}_{\alpha_n}(i,j_0) \geq \sum_{j\in J} \tilde{P}^N_{\alpha_n}(i,j)\tilde{P}^{N_1}_{\alpha_n}(j,j_0)$$

$$\geq c_2c_3 \qquad \text{voor alle } i.$$

Zij

$$m^r_\alpha(j) = \inf_{i\in I} \tilde{P}^r_\alpha(i,j)$$

en

$$M^r_\alpha(j) = \sup_{i\in I} \tilde{P}^r_\alpha(i,j).$$

Geheel analoog aan het bewijs van stelling 1.5 van (1.5) tot (1.11) laat zich met behulp van (2.6) bewijzen dat

$$(2.7) \qquad M^r_{\alpha_n}(j) - m^r_{\alpha_n}(j) \leq (1-c_2c_3)^{[r/N+N_1]} \qquad \text{voor alle } i \text{ en } j \text{ en } n \geq N_2.$$

Daar uit de simultane Doeblinvoorwaarde de Doeblinvoorwaarde volgt weten we reeds uit stelling 1.11 dat

$$(2.8) \qquad \lim_{r\to\infty} \tilde{P}^r_{\alpha_n}(i,j) = \Pi_{\alpha_n}(i,j) \qquad \text{uniform in } i,j.$$

Uit (2.7) volgt nu (vergelijk stelling 1.5) dat de convergentie in relatie (2.8) ook uniform is in $n = 0, 1, \ldots$ .
In combinatie met de relatie (2.5) levert dit de relatie

$$(2.9) \qquad \lim_{n\to\infty} \Pi_{\alpha_n}(i,j) = \Pi_{\alpha_0}(i,j) \qquad \text{voor alle } i,j. \qquad \square$$

Opmerking 2.2. Volgens paragraaf 1, maar ook zonder de Doeblinvoorwaarde geldt

$$\Pi(i,j) = \frac{1}{d} \lim_{n\to\infty} P^{nd}(i,j),$$

met $d$ de periode van toestand $j$. Als $d_n$ nu de periode is van zekere toestand $j_0$ onder $P_{\alpha_n}$ dan ligt de vraag voor de hand of

$$(2.10) \qquad \lim_{n\to\infty} d_n = d_0.$$

Het is niet moeilijk te bewijzen dat $d_n$ een deler is van $d_0$ voor $n$ groot genoeg. Echter niet altijd geldt (2.10). Immers zij $P$ zó dat de periode van toestand $j_0$ groter is dan 1 en zij
$P_n(i,j) = (1/n\ \delta(i,j) + (1-1/n)P(i,j))$, dan heeft $j_0$ periode 1 onder $P_n$ en $\lim_{n\to\infty} P_n(i,j) = P(i,j)$ voor alle $i,j$.

Opmerking 2.3. Indien er onder $P_{\alpha_0}$ meerdere kernfuiken zijn dan is relatie (2.9) niet altijd vervuld.
Voorbeeld: De toestandsruimte I bevat twee elementen.

Zij $\quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ en $\quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Als $\quad P_n = (1/n\ P_2 + (1-1/n)P_1)$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_1$.

Echter $\Pi_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ voor $n = 2, 3, \ldots$ en $\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

In het vervolg van deze paragraaf zullen we de volgende voorwaarden veronderstellen.

V2.1. *Voor iedere* $i \in I$ *is de collectie kansmaten* $\{P_\alpha(i,\cdot) \mid \alpha\in A\}$ *uniform beperkt.*

V2.2. *De collectie stochastische matrices* $\{P_\alpha(\cdot,\cdot) \mid \alpha\in A\}$ *is gesloten, d.w.z. indien voor zekere stochastische matrix zeg* $P$ *geldt dat* $\lim\limits_{n\to\infty} P_{\alpha_n}(i,j) = P(i,j)$ *voor alle* $i,j$ *dan is er een* $\alpha_0 \in A$ *met* $P = P_{\alpha_0}$.

Stelling 2.2. De volgende beweringen zijn equivalent

a) Er bestaat een constante $c > 0$, een natuurlijk getal $N$ en een eindige verzameling $J$ zó dat

$$P_\alpha^N(i,J) \geq c \qquad \text{voor alle } i \in I \text{ en alle } \alpha \in A.$$

b) Bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een natuurlijk getal $n(\varepsilon)$ en is er een eindige verzameling $J(\varepsilon)$ zó dat

$$P_\alpha^{n(\varepsilon)}(i,J(\varepsilon)) \geq 1-\varepsilon \text{ voor alle } i \in I \text{ en alle } \alpha \in A.$$

Bewijs

a) $\Longrightarrow$ b) Zij $E$ een eindige verzameling met de eigenschap dat voor $i_0$

$$P_\alpha(i_0,E) \geq 1-\delta \qquad \text{voor alle } \alpha. \tag{2.11}$$

Daar een eindige vereniging van collecties van kansmaten die ieder voor zich uniform beperkt zijn, weer uniform beperkt is; bestaat er nu een eindige verzameling D met

$$P_\alpha(i,D) \geq 1-\delta \qquad \text{voor } i \in E \text{ en alle } \alpha.$$

Met (2.11) volgt dan

$$P_\alpha^2(i_0,D) \geq \sum_{i\in E} P_\alpha(i_0,i)P_\alpha(i,D) \geq (1-\delta)^2 \geq 1-\varepsilon \quad \text{voor } \delta$$

groot genoeg. Hieruit volgt dat de collectie $\{P_\alpha^2(i_0,\cdot) \mid \alpha\in A\}$ uniform beperkt is.
Met behulp van deze argumentatie volgt via inductie dat

(2.12) $\qquad \{P_\alpha^n(i,\cdot) \mid \alpha\in A\}$ is uniform beperkt voor alle $i \in I$
en alle $n \in \mathbb{N}$.

Het overige deel van het bewijs verloopt analoog aan het bewijs van stelling 1.12. a) $\Rightarrow$ b).

b) $\Rightarrow$ a) triviaal. □

Stelling 2.3. Zij $\mathcal{P}$ de verzameling van kansmaten $p(\cdot)$ op I met de eigenschap dat bij p een $\alpha \in A$ met $\sum_i p(i)P_\alpha(i,j) = p(j)$ voor alle j.
Dus $\mathcal{P}$ is de collectie van invariante kansmaten.
$\mathcal{P}$ is uniform beperkt.

Bewijs
Volgens stelling 2.2. a) $\Rightarrow$ b) zijn er bij $\varepsilon > 0$ een $n(\varepsilon)$ en een $J(\varepsilon)$ met

$$P_\alpha^{n(\varepsilon)}(i,J(\varepsilon)) \geq 1-\varepsilon \qquad \text{voor alle } i \in I \text{ en alle } \alpha \in A.$$

Hieruit volgt dat

$$P_\alpha^{n(\varepsilon)+1}(i,J(\varepsilon)) \geq \sum_j P_\alpha(i,j)P_\alpha^{n(\varepsilon)}(j,J(\varepsilon))$$

$$\geq \sum_j P_\alpha(i,j)(1-\varepsilon)$$

$$= (1-\varepsilon).$$

Via inductie laat zich zo bewijzen dat voor alle $i \in I$ en alle $\alpha \in A$

(2.13) $$P_\alpha^n(i,J(\varepsilon)) \geq 1-\varepsilon \qquad \text{voor } n \geq n(\varepsilon).$$

Hieruit volgt dat

(2.14) $$\Pi_\alpha(i,J(\varepsilon)) \geq 1-\varepsilon \qquad \text{voor alle } i \in I \text{ en alle } \alpha \in A.$$

Indien $\sum_i p(i)P_\alpha(i,j) = p(j)$ voor alle $j$, dan volgt (zie bewijs van stelling 1.10)

$$\sum_i p(i)\Pi_\alpha(i,j) = p(j) \qquad \text{voor alle } j$$

$$\Longrightarrow \quad p(J(\varepsilon)) = \sum_i p(i)\Pi_\alpha(i,J(\varepsilon)) \qquad \text{(met (2.14))}$$

$$\geq \sum_i p(i)(1-\varepsilon) = 1-\varepsilon.$$

Hiermee is bewezen dat voor een willekeurig element $p$ uit $\mathcal{P}$ geldt $p(J(\varepsilon)) \geq 1-\varepsilon$. □

<u>Stelling 2.4</u>. Indien $\lim_{n\to\infty} p_n(i) = p(i)$ voor alle $i$ en $p_n(\cdot)$ is een invariante kansmaat onder $P_{\alpha_n}$ en

$$\lim_{n\to\infty} P_{\alpha_n}(i,j) = P_{\alpha_0}(i,j) \qquad \text{voor alle } i,j$$

dan is $p(\cdot)$ een invariante kansmaat onder $P_{\alpha_0}$.

Bewijs

Uit het uniform beperkt zijn van de collectie van alle invariante kansmaten (stelling 2.3) en $\lim_{n\to\infty} p_n(i) = p(i)$ volgt dat

(2.15) $\qquad p(I) = 1.$ *)

Immers,

$$\begin{aligned} p(I) &\geq p(J(\varepsilon)) && \text{(voor } J(\varepsilon) \text{ zie stelling 2.3)} \\ &= \sum_{i\in J(\varepsilon)} \lim_{n\to\infty} p_n(i) && (J(\varepsilon) \text{ is een eindige verzameling}) \\ &= \lim_{n\to\infty} p_n(J(\varepsilon)) \\ &\geq 1 - \varepsilon \quad \text{en dus} \quad p(I) = 1. \end{aligned}$$

(2.15) impliceert (zie [8]) dat

$$\lim_{n\to\infty} \sum_i p_n(i) P_{\alpha_n}(i,j) = \sum_i p(i) P_{\alpha_0}(i,j).$$

Daar $p_n(\cdot)$ invariant is onder $P_{\alpha_n}$ volgt hieruit dat $p(\cdot)$ invariant is onder $P_{\alpha_0}$. □

Opmerking 2.4. Indien $P_{\alpha_0}$ ten hoogste één kernfuik heeft, dan is er precies één invariante kansverdeling onder $P_{\alpha_0}$. Hiervan gebruikmakend is stelling 2.1 ook via stelling 2.4 te bewijzen.

In definitie 1.9 definieerden we de wachttijd tot aan binnenkomst in verzameling E. De verwachting van de wachttijd onder de voorwaarde dat de Markov keten op tijdstip 0 zich in toestand i bevindt noteerden we

*) De bewering volgt onmiddellijk uit een stelling van Prohorov.

met $m(i,E)$. In deze paragraaf beschouwen we een collectie van Markov ketens, het ligt voor de hand de verwachte wachttijd voor de Markov keten met matrix van overgangswaarschijnlijkheden $P_\alpha$ te noteren met $m_\alpha(i,E)$.
Dit toevoegen van de index $\alpha$ (we deden het al in de notatie $\Pi_\alpha$) zullen we in het vervolg voor meerdere in paragraaf 1 reeds ingevoerde notaties doen.

Definitie 2.1. Verzameling $E$ heet bereikbaar vanuit $i$ onder $P_\alpha$ indien er een $n \geq 0$ bestaat met $P_\alpha^n(i,E) > 0$. Notatie hiervoor: $i \xrightarrow{P_\alpha} E$.

Stelling 2.5. Indien verzameling $E$ bereikbaar is vanuit iedere toestand $i$ en onder iedere matrix $P_\alpha$ dan bestaat er een getal $M < \infty$ zó dat

$$m_\alpha(i,E) \leq M \qquad \text{voor alle } i \text{ en alle } \alpha. \tag{2.16}$$

Bewijs
We definiëren inductief een rij $\{x^k(\cdot)\}_{k=1}^\infty$ van functies op $I$ door:

$$x^1(i) = \sup_{\alpha\in A} P_\alpha(i,I-E) \qquad \text{voor alle } i$$

en

$$x^{k+1}(i) = \sup_{\alpha\in A} \sum_{j\in I-E} P_\alpha(i,j)x^k(j) \qquad \text{voor alle } i. \tag{2.17}$$

Daar

$$x^1(i) = \sup_{\alpha\in A} P_\alpha(E;i,I-E) \qquad \text{(voor notatie zie (1.18)}$$

en daar uit

$$x^k(i) \geq \sup_{\alpha\in A} P_\alpha^k(E;i,I-E)$$

volgt dat

$$P_\alpha^{k+1}(E;i,I-E) = \sum_{j\in I-E} P_\alpha(i,j)P_\alpha^k(E;j,I-E)$$

$$\leq \sum_{j\in I-E} P_\alpha(i,j)x^k(j)$$

$$\leq \sup_{\alpha\in A} \sum_{j\in I-E} P_\alpha(i,j)x^k(j)$$

$$= x^{k+1}(i),$$

vinden we middels inductie dat

$$x^k(i) \geq \sup_{\alpha\in A} P_\alpha^k(E;i,I-E) \qquad \text{voor alle } i. \tag{2.18}$$

Ook via volledige inductie zullen we bewijzen dat

$$0 \leq x^{k+1}(i) \leq x^k(i) \qquad \text{voor alle } i \text{ en alle } k \in \mathbb{N}. \tag{2.19}$$

Immers daar $P_\alpha(i,I-E) \leq 1$ voor alle $\alpha$ geldt er dat $x^1(i) \leq 1$

$$\Longrightarrow \quad x^2(i) = \sup_{\alpha\in A} \sum_{j\in I-E} P_\alpha(i,j)x^1(j)$$

$$\leq \sup_{\alpha\in A} \sum_{j\in I-E} P_\alpha(i,j).1$$

$$= x^1(i).$$

En analoog laat zich uit $x^n(i) \leq x^{n-1}(i)$ voor alle $i$, bewijzen dat $x^{n+1}(i) \leq x^n(i)$ voor alle $i$. Daar het supremum van niet negatieve getallen zeker niet negatief is volgt uit $x^n(i) \geq 0$ dat $x^{n+1}(i) \geq 0$.
Hiermee is (2.19) aangetoond.
Uit (2.19) volgt dat $\lim_{k\to\infty} x^k(i)$ bestaat. Zij

$$x^0(i) = \lim_{k\to\infty} x^k(i). \tag{2.20}$$

Uit de ongelijkheid

$$x^{k+1}(i) \geq \sum_{j\in I-E} P_\alpha(i,j)x^k(j),$$

volgt door overgang op de limiet voor $k \to \infty$

$$x^0(i) \geq \sum_{j\in I-E} P_\alpha(i,j)x^0(j).$$

Deze ongelijkheid geldt voor iedere $\alpha \in A$, dus volgt

(2.21) $$x^0(i) \geq \sup_{\alpha\in A} \sum_{j\in I-E} P_\alpha(i,j)x^0(j).$$

Bij vaste i zeg $i_0$, kies $\alpha_k$ zó dat

(2.22) $$\sum_{j\in I-E} P_{\alpha_k}(i_0,j)x^k(j) \geq x^{k+1}(i_0) - 1/k.$$

Er bestaat nu een deelrij $\alpha_{k_n}$ met $\lim_{n\to\infty} P_{\alpha_{k_n}}(i,j)$ bestaat voor alle i,j.
Met het uniform beperkt zijn van de collectiè $P_\alpha(i,\cdot)$ bij vaste i volgt dan dat de limiet een stochastische matrix is.
Uit de veronderstelling omtrent het gesloten zijn van de collectie $P_\alpha$ volgt dan het bestaan van een $\alpha_0 \in A$ met

(2.23) $$\lim_{n\to\infty} P_{\alpha_{k_n}}(i,j) = P_{\alpha_0}(i,j) \qquad \text{voor alle } i,j.$$

Door relatie (2.22) te beschouwen voor de deelrij $k_n$ en n naar oneindig te laten gaan, daarbij (2.20) en (2.23) gebruikend, vinden we

$$\sum_{j\in I-E} P_{\alpha_0}(i_0,j)x^0(j) \geq x^0(i_0),$$

met (2.21) volgt

(2.24) $$\sum_{j\in I-E} P_{\alpha_0}(i_0,j)x^0(j) = x^0(i_0).$$

Door relatie (2.24) herhaald toe te passen (vergelijk afleiding van (2.18)) vinden we (eigenlijk weer met inductie)

(2.25) $$\sum_{j\in I-E} P^k_{\alpha_0}(E;i_0,j)x^0(j) = x^0(i_0) \qquad \text{voor alle } k.$$

Daar voor de stochastische matrix $P_{\alpha_0}$ de Doeblinvoorwaarde geldt en de verzameling E bereikbaar is vanuit iedere toestand i onder $P_{\alpha_0}$ volgt dat iedere kernfuik minstens één element met E gemeen heeft. Volgens stelling 1.15 geldt dan $m_{\alpha_0}(i_0,E) < \infty$, met relatie (1.27) volgt

$$\lim_{k\to\infty} P^k_{\alpha_0}(E;i_0,I-E) = 0.$$

Relatie (2.25) impliceert dan $x^0(i_0) = 0$. We bewezen dit voor willekeurige $i_0 \in I$. We vinden hieruit met relatie (2.18) dat

(2.26) $$\lim_{k\to\infty} \sup_{\alpha\in A} P^k_\alpha(E;i,I-E) = 0 \qquad \text{voor alle } i.$$

Op grond van (2.26) is er een constante $c_1 < 1$ en een $N_1$ zó dat

$$P_\alpha^{N_1}(E;i,I-E) \le c_1 \qquad \text{voor alle } \alpha \text{ en voor alle } i \in J,$$

met J de eindige verzameling uit de simultane Doeblinvoorwaarde

$$\Longrightarrow \quad P_\alpha^{N+N_1}(E;i,I-E) \le \sum_j P^N_\alpha(i,j)P_\alpha^{N_1}(E;j,I-E)$$

$$= \sum_{j\in J} \ldots + \sum_{j\in I-J} \ldots$$

$$\le c_1 P^N_\alpha(i,J) + P^N_\alpha(i,I-J)$$

(daar $P^N_\alpha(i,J) \ge c$) $$\le 1 - c(1-c_1) \qquad \text{voor alle } i \text{ en alle } \alpha.$$

Geheel analoog aan het bewijs van stelling 1.14 a) $\Longrightarrow$ b) vinden we dan

$$m_\alpha(i,E) \leq 1 + (N+N_1)(c(1-c_1))^{-1} \quad \text{voor alle } i \text{ en alle } \alpha.$$

□

<u>Stelling 2.6.</u> De volgende beweringen zijn equivalent

a) Er bestaat een constante $c > 0$, een natuurlijk getal $N$ en een eindige verzameling $J$ zó dat

$$P_\alpha^N(i,J) \geq c \qquad \text{voor alle } i \in I \text{ en alle } \alpha \in A.$$

b) Er bestaat een eindige verzameling $E$ en een getal $M < \infty$ zó dat

$$m_\alpha(i,E) \leq M \qquad \text{voor alle } i \in I \text{ en alle } \alpha \in A.$$

<u>Bewijs</u>

a) $\Longrightarrow$ b) Daar $P_\alpha^N(i,J) > 0$ voor alle $i \in I$ en alle $\alpha \in A$, is de eindige verzameling $J$ bereikbaar vanuit iedere toestand $i$ onder iedere $P_\alpha$. Volgens stelling 2.5 geldt dan

$$m_\alpha(i,J) \qquad \text{uniform begrensd in } i \text{ en } \alpha.$$

b) $\Longrightarrow$ a) Analoog aan zoals onder stelling 1.14 b) $\Longrightarrow$ a) aangegeven is, kan afgeleid worden dat bij $\delta > 0$ er een $N_1$ is met

$$\sum_{k=1}^{N_1} P_\alpha^k(E;i,E) \geq 1-\delta \qquad \text{voor alle } i \text{ en alle } \alpha.$$

Daar voor alle $i$ en alle $n \in \mathbb{N}$ de collectie $\{P_\alpha^n(i,\cdot) \mid \alpha \in A\}$ uniform beperkt is (zie (2.12)), is er een eindige verzameling $D$ met

$$P_\alpha^k(i,D) \geq 1-\delta \qquad \text{voor alle } i \in E, \text{ voor } 1 \leq k \leq N_1 \text{ en alle } \alpha.$$

$\Longrightarrow$ (zie stelling 1.12 a) $\Longrightarrow$ b)) $P_\alpha^{N_1+1}(i,D) \geq (1-\delta)^2$ voor alle $i$, alle $\alpha$.

Het triple $((1-\delta)^2, N_1+1, D)$ voldoet dus aan de simultane Doeblinvoorwaarde. □

## 3. Existentie optimale strategieën in Markov beslissingsprocessen

In deze paragraaf beschouwen we Markov beslissingsprocessen. *)
Toestandsruimte I veronderstellen we hoogstens aftelbaar te zijn. Zij $A(i)$ de verzameling van toegelaten beslissingen in toestand i. We veronderstellen dat de bewegingswet q voldoet aan

V3.1. *Voor iedere* $i \in I$ *is de collectie van kansmaten* $\{q(\cdot|i,a) \mid a \in A(i)\}$ *uniform beperkt.*

De voorwaarde is altijd vervuld indien I een eindige verzameling is. Is I aftelbaar en $A(i)$ eindig voor alle i dan is ze ook vervuld. Zij $\mathcal{P}$ de collectie van alle kansmaten op I. Door de a's uit $A(i)$ die dezelfde kansmaat $q(\cdot|i,a)$ op I induceren, te identificeren is het mogelijk $A(i)$ te zien als deelverzameling van $\mathcal{P}$. We veronderstellen op $\mathcal{P}$ de topologie van de puntsgewijze convergentie d.w.z. $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ met $p_n, p \in \mathcal{P}$ indien $\lim_{n\to\infty} p_n(i) = p(i)$ voor alle i. We veronderstellen

V3.2. *Voor iedere* $i \in I$ *geldt* $A(i)$ *is gesloten.*

Uit deze voorwaarde en het uniform beperkt zijn van de collectie $\{q(\cdot|i,a) \mid a \in A(i)\}$ volgt dat $A(i)$ rijtjescompact is, d.w.z. bij iedere rij $\{a_n\} \subset A(i)$ is een $a \in A(i)$ zó dat $a = \lim_{r\to\infty} a_{n_r}$ met $\{a_{n_r}\}$ een deelrij is van $\{a_n\}$.
Verder veronderstellen we dat de kostenfunctie w begrensd is en dat

V3.3. *Voor iedere* $i \in I$ *geldt* $w(i,a)$ *is continu in* a.

Tenslotte zij opgemerkt dat ook aan de laatste twee voorwaarden voldaan is indien $A(i)$ eindig is voor alle i.

Zij F de verzameling van functies op I met $f(i) \in A(i)$ voor alle i. De collectie van stationaire strategieën $C_S$ bestaat uit strategieën van

*) Voor een inleiding hierin zij verwezen naar [2] en [7].

het type $f^{\infty} \stackrel{\text{NOT}}{=} (f,f,\dots)$.

Zij W een collectie voorwaardelijke kansmaten d.w.z. als $\mu \in W$ dan $\mu(\cdot|i)$ een kansmaat op $A(i)$ voor iedere $i \in I$.

De collectie van gerandomiseerde strategieën $C_{RS}$ bestaat uit strategieën van het type $\mu^{\infty} \stackrel{\text{NOT}}{=} (\mu,\mu,\dots)$.

Zij verder C de collectie van alle strategieën en $C_{RM}$ de collectie van gerandomiseerde markovstrategieën d.w.z. van het type $(\mu_0,\mu_1,\mu_2,\dots)$ met $\mu_n \in W$.

Voor iedere strategie R uit $C_S$ wordt het bijbehorende stochastische proces een stationaire Markov keten. Indien $R = f^{\infty}$ met $f \in F$ dan zullen we de matrix van overgangswaarschijnlijkheden noteren met $P_f$. We hebben in paragraaf 2 eigenschappen afgeleid voor een collectie van Markov ketens. De collectie van Markov ketens die we hier zullen beschouwen is de collectie geïnduceerd door de stationaire strategieën. Om straks de resultaten van paragraaf 2 te kunnen gebruiken merken we op dat voorwaarde V3.1 impliceert dat voor iedere $i \in I$ de collectie kansmaten $\{P_f(i,\cdot) \mid f \in F\}$ uniform beperkt is (vergelijk voorwaarde V2.1). Verder volgt het gesloten zijn van de collectie stochastische matrices $P_f$ met $f \in F$ (voorwaarde V2.2) uit voorwaarde V3.2.

Indien de stochastische variabele $\underline{w}_n$ de kosten op tijdstip n voorstelt dan kunnen de verwachte verdisconteerde kosten indien het proces start in toestand i en strategie R wordt gevolgd genoteerd worden met

$$\psi(i,\beta,R) \stackrel{\text{NOT}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \, \mathbb{E}_R\{\underline{w}_n \mid \underline{x}_0=i\}.$$

Analoog voor de verwachte gemiddelde kosten

$$\phi(i,R) \stackrel{\text{NOT}}{=} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}_R\{\underline{w}_k \mid \underline{x}_0=i\}.$$

<u>Stelling 3.1.</u> Voor iedere $0 < \beta < 1$ bestaat er een $R_\beta \in C_S$ zó dat

$$\psi(i,\beta,R_\beta) = \inf_{R\in C} \psi(i,\beta,R) \qquad \text{voor alle } i \in I.$$

Bewijs

We noteren

$$\psi(i,\beta) = \inf_{R\in C} \psi(i,\beta,R).$$

Stelling 3 p. 96 van [7] kan gegeneraliseerd worden tot $\psi$ is de unieke oplossing van de funktionaalvergelijking

$$u(i) = \inf_{a\in A(i)} \{w(i,a) + \beta\sum_j q(j|i,a)u(j)\}, \qquad i \in I.$$

Voor $i \in I$ zij $a_n(i) \in A(i)$ zó dat

$$\psi(i,\beta) + 1/n \geq w(i,a_n(i)) + \beta\sum_j q(j|i,a_n(i))\psi(j,\beta).$$

Zij verder $f_n$ zó dat $f_n(i) = a_n(i)$, $i \in I$ en zij $f$ en $\{f_{n_r}\}_{r=1}^{\infty}$ zó dat $\lim_{r\to\infty} f_{n_r} = f$ (zo'n $f$ bestaat op grond van het rijtjescompact zijn van $A_n(i)$ voor alle $i \in I$; zie tekst tussen V3.2 en V3.3). Er volgt dan uit de continuïteit van de kostenfunktie $w$ en de bewegingswet $q$ dat $f$ geldt:

$$\psi(i,\beta) = w(i,f(i)) + \beta\sum_j q(j|i,f(i))\psi(j,\beta).$$

Door deze gelijkheid herhaald toe te passen volgt dan voor $n \in \mathbb{N}$

$$\psi(i,\beta) = \sum_{k=0}^{n} \beta^k \sum_j P_f^k(i,j)w(j,f(j)) + \beta^{n+1} \sum_j P_f^{n+1}(i,j)\psi(j,\beta)$$

$$\Longrightarrow \qquad \psi(i,\beta,f^\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \sum_j P_f^k(i,j)w(j,f(j))$$

$$= \psi(i,\beta). \qquad \square$$

In [6] (definitie 2) werd $R$ een limietpunt van verdisconteerd-optimale strategieën genoemd indien er een rij $\{\beta_n\}$ bestaat met $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 1$ en $R_{\beta_n}$ zoals in stelling 3.1 en $R = \lim_{n\to\infty} R_{\beta_n}$.

Verder werd daar bewezen dat onder de voorwaarden

V3.4. *Indien* $\lim_{n\to\infty} P_{f_n}(i,j) = P_f(i,j)$ *voor alle* $i,j$ *dan volgt*

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_{f_n}(i,j) = \Pi_f(i,j) \text{ voor alle } i,j.$$

V3.5. *Voor iedere* $f \in F$ *geldt* $\Pi_f(i,I) = 1$ *voor alle* $i$.

ieder limietpunt van verdisconteerd-optimale strategieën optimaal is t.o.v. de gemiddelde verwachte kosten (stelling 1)*). En uit de rijtjescompactheid van F en stelling 3.1 volgt dan ook het bestaan van optimale stationaire strategieën t.o.v. het gemiddelde kosten kriterium.

Uit artikelen van Derman [1] en van Derman en Veinott [3] volgt dat de volgende voorwaarde ook voldoende is voor de existentie van gemiddeld-optimale strategieën

V3.6. *Voor iedere* $f \in F$ *geldt dat onder de Markov keten met overgangswaarschijnlijkheden* $P_f$ *de toestandsruimte* $I$ *een kernfuik is en de toestanden positieve terugkeertoestanden zijn. Voorts bestaat er een toestand* $i_0$ *en een constante* $M$ *met de eigenschap dat de verwachte tijd nodig om uitgaande van toestand* $i$ *de toestand* $i_0$ *te bereiken kleiner dan* $M$ *is voor iedere strategie* $R \in C_S$.

In de notatie van paragraaf 2 weergegeven luidt de tweede helft van voorwaarde V3.6: er bestaat een toestand $i_0$ en een $M$ zó dat $m_f(i,i_0) \le M$ voor alle $i \in I$ en alle $f \in F$. Volgens stelling 2.6 b) $\Longrightarrow$ a) impliceert dit dat voor de collectie van stochastische matrices $P_f$ met $f \in F$ aan de simultane Doeblinvoorwaarde is voldaan. Dus voorwaarde V3.5 is zeker vervuld. Bovendien volgt uit $m_f(i,i_0) < \infty$ dat $i_0$ bereikbaar is vanuit iedere toestand $i$ onder iedere stationaire

*) Het bewijs in [6] is gegeven voor het model met A(i) eindig voor alle i. Het bewijs kan gegeneraliseerd worden voor het model dat we hier beschouwen.

strategie $f^\infty$. Volgens stelling 2.1 geldt dan dat ook voorwaarde V3.4 vervuld is.

Door voorwaarde V3.6 iets te verzwakken vinden we

V3.7. *Er bestaat een toestand* $i_0$ *en een* $M$ *zó dat* $m_f(i,i_0) \leq M$ *voor alle* $i \in I$ *en alle* $f \in F$.

Onder de aanname dat voor iedere stationaire strategie de Markov keten hoogstens één kernfuik heeft geldt dan volgens stellingen 2.5 en 2.6

$$\text{V3.7} \iff \text{simultane Doeblinvoorwaarde.}$$

Uit gezonderd de stellingen 3.10 en 3.11 zullen we in het vervolg van deze paragraaf zonder verdere vermelding veronderstellen dat aan de simultane Doeblinvoorwaarde voldaan is, dus:

*Er bestaat een constante* $c > 0$, *een natuurlijk getal* $N$ *en een eindige verzameling* $J$ *zó dat* $P_f^N(i,J) \geq c$ *voor alle* $i \in I$ *en alle* $f \in F$.

In definitie 1.9 definieerden we voor verzameling toestanden $E$ de stochastische variabele $\underline{\tau}_E$. De verwachting van $\underline{\tau}_E$ indien strategie $R$ wordt gevolgd en de toestand op tijdstip nul $i$ is noteren we met $m_R(i,E)$. Dus

$$m_R(i,E) = \mathbb{E}_R(\underline{\tau}_E \mid \underline{x}_0 = i).$$

<u>Stelling 3.2</u>. Indien verzameling $E$ bereikbaar is vanuit iedere toestand $i$ onder iedere stationaire strategie dan bestaat er een getal $M < \infty$ zó dat

$$m_R(i,E) \leq M \qquad \text{voor alle } i \text{ en alle } R \in C.$$

Bewijs

We voeren de volgende notatie in

$$P_R^n(E;i,j) = \mathbb{P}_R\{\underline{x}_k \notin E \text{ voor } k=1,\dots,n-1 \text{ en } \underline{x}_n=j \mid \underline{x}_0=i\}$$

met $\mathbb{P}_R$ de notatie voor de kansmaat indien strategie R gevolgd wordt.
Volgens stelling 2.5 bestaat er een M met

$$m_R(i,E) \le M \qquad \text{voor alle } i \text{ en alle stationaire } R \in C_S.$$

We zullen bewijzen dat deze M ook bovengrens is voor alle strategieën.
Daartoe beschouwen we een nieuw Markov beslissingsproces met bewegingswet

$$\tilde{q}(j|i,a) = \begin{cases} q(j|i,a) & \text{voor } i \notin E \text{ en } a \in A(i) \\ 1 & \text{voor } i \in E \text{ en } j = i \text{ en } a \in A(i) \end{cases}$$

en opbrengstfunktie $\tilde{r}(i,a) = 1$ als $i \notin E$. Laat de stochastische variabele $\underline{r}_n$ de opbrengst op de n-de dag voorstellen en zij $\tilde{\mathbb{E}}_R(\underline{r}_n \mid \underline{x}_0=i)$ de verwachting van $\underline{r}_n$ wanneer het proces start in toestand i, strategie R wordt gevolgd en $\tilde{q}$ de bewegingswet is.
Men kan inzien dat voor $i \notin E$ de kans om n stappen buiten E te blijven onder de bewegingswet q of $\tilde{q}$ (q en $\tilde{q}$ geven dezelfde kans), dit is $P_R^n(E;i,I-E)$ gelijk is aan $\tilde{\mathbb{E}}_R(\underline{r}_n \mid \underline{x}_0=i)$

$$\Longrightarrow \text{(vergelijk (1.27))} \quad m_R(i,E) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathbb{E}}_R(\underline{r}_n \mid \underline{x}_0=i) \quad \text{voor } i \notin E.$$

We beschouwen daarom

$$\sup_{R \in C} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathbb{E}}_R(\underline{r}_n \mid \underline{x}_0=i) \qquad \text{voor } i \notin E.$$

Volgens stelling 2.5 geldt dat de reeksen

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_f^n(E;i,I-E)$$

uniform convergeren in $i \in I$ en $f \in F$

$$\Longrightarrow \text{als} \quad \lim_{k\to\infty} P^n_{f_k}(E;i,I-E) = P^n_{f_0}(E;i,I-E) \qquad \text{voor alle } n$$

$$\text{dan ook} \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P^n_{f_k}(E;i,I-E) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n_{f_0}(E;i,I-E).$$

Maar uit $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f_0$ volgt

$$\lim_{k\to\infty} P_{f_k}(i,j) = P_{f_0}(i,j) \qquad \text{voor alle } i,j.$$

En hieruit volgt dat als $B_n$ een element is uit de $\sigma$-algebra voortgebracht door $\{\underline{x}_0,\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n\}$ dan

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_{f_k^\infty}(B_n \mid \underline{x}_0=i) = \mathbb{P}_{f_0^\infty}(B_n \mid \underline{x}_0=i) \qquad \text{voor alle } i \text{ en alle } n.$$

Dus uit $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f_0$ volgt dat

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P^n_{f_k}(E;i,I-E) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n_{f_0}(E;i,I-E).$$

Hiervan gebruikmakend kan analoog aan stelling 7 p. 67 van [7] bewezen worden dat als $f_0$ een limietpunt is van verdisconteerd-optimale strategieën dan volgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathbb{E}}_{f_0^\infty}(\underline{r}_n \mid \underline{x}_0=i) = \sup_{R\in C} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathbb{E}}_R(\underline{r}_n \mid \underline{x}_0=i) \qquad \text{voor } i \notin E$$

$$\Longrightarrow \qquad m_R(i,E) \le m_{f_0^\infty}(i,E) \le M \qquad \text{voor } i \notin E$$

voor willekeurige i en willekeurige R geldt nu

$$m_R(i,E) = \mathbb{P}_R(\underline{x}_1 \in E \mid \underline{x}_0 = i) + \sum_{j \notin E} \mathbb{P}_R(\underline{x}_1 = j \mid \underline{x}_0 = i) m_R(j,E)$$

$$\leq M(\mathbb{P}_R(\underline{x}_1 \in E \mid \underline{x}_0 = i) + \mathbb{P}_R(\underline{x}_1 \notin E \mid \underline{x}_0 = i))$$

$$= M. \qquad \square$$

Definitie 3.1. Toestand j heet C-bereikbaar vanuit toestand i indien er een strategie R en een $n \geq 0$ bestaat met $\mathbb{P}_R\{\underline{x}_n = j \mid \underline{x}_0 = i\} > 0$. We noteren dit met $i \xrightarrow{C} j$

Definitie 3.2. Toestanden i en j C-communiceren indien geldt dat $i \xrightarrow{C} j$ en $j \xrightarrow{C} i$. Notatie hiervoor: $i \overset{C}{\longleftrightarrow} j$.

Definitie 3.3. Toestand i heet C-essentieel indien uit $i \xrightarrow{C} j$ volgt dat $j \xrightarrow{C} i$.

Definitie 3.4. $K_C(i) = \{j \mid i \xrightarrow{C} j\}$. $K_C(i)$ is de verzameling van toestanden die C-bereikbaar zijn vanuit i.

Definitie 3.5. K een niet lege deelverzameling van I heet een C-fuik indien uit $i \in K$ volgt dat $K_C(i) \subset K$.

Definitie 3.6. Een C-fuik K heet een C-kernfuik indien K geen kleinere C-fuik bevat.

Het is duidelijk dat uit $\mathbb{P}_R\{\underline{x}_n = j \mid \underline{x}_0 = i\} > 0$ het bestaan van toestanden $i_k$ en beslissingen $a_0 \in A(i)$ en $a_k \in A(i_k)$, $k = 1, \ldots, m$ volgt met de eigenschap dat $m \leq n-1$, $i_{k_1} \neq i_{k_2}$ voor $k_1 \neq k_2$ en

$$q(i_1 | i,a_0)\ q(i_2 | i_1,a_1) \ldots q(j | i_m,a_m) > 0.$$

Hieruit volgt dat indien voor f geldt $f(i) = a_0$ en $f(i_k) = a_k$, $k = 1, \ldots, m$ dan $P_f^{m+1}(i,j) > 0$. Dit betekent dat i.p.v. definitie 3.1 we $C$-bereikbaarheid ook hadden kunnen definiëren met

$i \xrightarrow{C} j \iff$ Er bestaat een $f \in F$ en een $n \geq 0$ zó dat $P_f^n(i,j) > 0$.

We formuleren nu drie stellingen die geheel analoog aan de stellingen 1.1, 1.2 en 1.3 bewezen kunnen worden.

Stelling 3.3. Een C-fuik bevat minstens één C-kernfuik. Er zijn niet meer C-kernfuiken dan er elementen in J zijn.

Stelling 3.4. Een deelverzameling van I zeg K is een C-kernfuik

$\iff$ i) $K \neq \emptyset$

ii) $i \in K$ dan $K_C(i) \subset K$

iii) $i,j \in K$ dan $i \overset{C}{\longleftrightarrow} j$.

Stelling 3.5. I bevat minstens één C-kernfuik. De C-kernfuiken zijn precies de equivalentieklassen geïnduceerd door de equivalentierelatie "C-communiceren" op de verzameling van C-essentiële toestanden.

Noteren we de verzameling van toestanden die onder $P_f$ vanuit i bereikbaar zijn met $K_f(i)$ dan volgt $K_C(i) = \bigcup_{f \in F} K_f(i)$. Zij K de vereniging van alle C-kernfuiken dan volgt $K_C(i) \cap K \neq \emptyset$ voor alle i, immers als $K_C(i_0) \cap K = \emptyset$ dan is er volgens stelling 3.3 ($K_C(i_0)$ is een C-fuik) een C-kernfuik buiten K en dit is in tegenspraak met de aanname omtrent K. Echter daar $K_C(i)$ de vereniging is van verzamelingen $K_f(i)$ hoeft dit niet te impliceren dat $K_f(i) \cap K \neq \emptyset$ voor alle i en voor alle $f \in F$.

Stelling 3.6. Indien K een C-kernfuik is dan geldt

i) Er bestaat een $f \in F$ zó dat K een priemfuik is voor de Markov keten geïnduceerd door de stationaire strategie $f^\infty$.

ii) Bij $i_1, i_2 \in K$ bestaat een $\mu \in W$ zó dat $i_1, i_2$ essentieel zijn en communiceren voor de Markov ketens geïnduceerd door de gerandomiseerde strategie $\mu^\infty$.

Bewijs

i) Kies $j_0 \in K$. Voglens stelling 3.4 is $K_C(i) = K$ voor alle $i \in K$. Verder geldt, zoals we reeds opmerkten, $K_C(i) = \bigcup_{f \in F} K_f(i)$. Dus bij iedere $i \in K$ bestaat een f en een $n \geq 0$ met $P_f^n(i,j_0) > 0$. Voor $i \in K$ zij

$$n(i) = \min\{n \mid \exists f \in F \text{ met } P_f^n(i,j_0) > 0\}.$$

Bij $i \in K$ dan een f met $P_f^{n(i)}(i,j_0) > 0$, zij $a(i)$ de beslissing die deze f in toestand i voorschrijft.

Zij $f_0 \in F$ zó dat $f_0(i) = a(i)$. We zullen via volledige inductie bewijzen dat $j_0$ onder $P_{f_0}$ vanuit iedere toestand $i \in K$ bereikbaar is.

Zij

$$I_n = \{i \in K \mid n(i) = n\}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Als $i \in I_1$ dan $q(j_0 \mid i, a(i)) > 0$ en dus $P_{f_0}(i,j_0) > 0$.

Veronderstel

$$P_{f_0}^k(i,j_0) > 0 \qquad \text{voor alle } i \in I_k.$$

Indien $i \in I_{k+1}$ dan zijn er toestanden $i_1, \ldots, i_k$ en beslissingen $a_0 \in A(i)$, $a_1 \in A(i_1)$, ..., $a_k \in A(i_k)$ zó dat

$$q(i_1 \mid i, a_0)\, q(i_2 \mid i_1, a_1) \ldots q(j_0 \mid i_k, a_k) > 0.$$

$\Longrightarrow$ $n(i_1) = k$ en dus volgens inductieaanname $P_{f_0}^k(i_1,j_0) > 0$

$\Longrightarrow$ $P_{f_0}^{k+1}(i,j_0) > 0$. En daar i een willekeurig element uit $I_{k+1}$ was volgt dan

$$P_{f_0}^{k+1}(i,j_0) > 0 \qquad \text{voor alle } i \in I_{k+1}.$$

ii) Zij $f_k$ zó dat

$$i \xrightarrow{P_{f_k}} i_k \qquad\qquad \text{voor alle } i \in K,\ k = 1,\ 2.$$

en zij $\mu \in W$ zó dat

$$\mu(\{f_1(i)\}|i) = \mu(\{f_2(i)\}|i) = 1/2 \qquad \text{voor alle } i \in K.$$

Dan geldt voor de Markov keten geïnduceerd door de strategie $\mu^\infty$ dat $i_1$ en $i_2$ bereikbaar zijn vanuit iedere toestand $i \in K$ en dat K een fuik is. □

Bij $i_1, i_2 \in K$ bestaat niet altijd een $f \in F$ met $i_1, i_2$ communicerend en essentieel onder $P_f$.
Voorbeeld: $K = \{1,2,3\}$. In toestand 1 zijn twee beslissingen $\{a_1, a_2\}$ met $q(2|1,a_1) = q(3|1,a_2) = 1$. In de toestanden 2 en 3 één beslissing a met $q(1|3,a) = q(1|2,a) = 1$. Dan communiceren toestanden 2 en 3 alleen onder gerandomiseerde stationaire strategieën.

<u>Stelling 3.7</u>. We noteren $\inf\limits_{R \in C} \phi(i,R)$ met $\phi(i)$. Voor iedere $i \in I$ en elke $a \in A(i)$ geldt

$$\phi(i) \leq \sum_j q(j|i,a)\ \phi(j).$$

<u>Bewijs</u>
Voor $f \in F$ en $R \in C$ noteren we $(f,R)$ voor de strategie die verkregen wordt door op tijdstip $t = 0$ beslissing $f(i)$ te nemen wanneer i de begintoestand is en vervolgens vanaf tijdstip $t = 1$ te beslissen alsof de toestand op tijdstip $t = 1$ de begintoestand is en de beslissingen volgens strategie R genomen worden.
Omdat voor iedere $f \in F$ en iedere $R \in C$ de strategie $(f,R)$ ook tot C behoort geldt

$$\phi(i) \leq \phi(i,(f,R)) \qquad\qquad \forall f \in F \text{ en } \forall R \in C.$$

Zij $i_0$ een willekeurige toestand en $a_0$ een willekeurig element uit $A(i_0)$. Zij $f_0$ zó dat $f_0(i_0) = a_0$. Kies $\varepsilon > 0$ en zij $R_0$ zó dat

$$\phi(i,R_0) \leq \phi(i) + \varepsilon \qquad \text{voor alle } i \in I.$$

Nu geldt

$$\begin{aligned}
\phi(i_0) &\leq \phi(i_0,(f_0,R_0)) \\
&= \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}_{(f_0,R_0)} \{\underline{w}_n \mid \underline{x}_0=i_0\} \\
&= \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_j P_{f_0}(i_0,j)\, \mathbb{E}_{(f_0,R_0)}\{\underline{w}_n \mid \underline{x}_1=j\} \\
&= \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \sum_j P_{f_0}(i_0,j)\, \mathbb{E}_{R_0} \{\underline{w}_n \mid \underline{x}_0=j\} \\
&\leq \sum_j P_{f_0}(i_0,j) \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}_{R_0} \{\underline{w}_n \mid \underline{x}_0=j\} \\
&= \sum_j q(j|i_0,a_0)\, \phi(j,R_0) \\
&\leq \sum_j q(j|i_0,a_0)\, (\phi(j)+\varepsilon) \\
&= \sum_j q(j|i_0,a_0)\, \phi(j) + \varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

<u>Stelling 3.8.</u> Indien de toestanden $i_1$ en $i_2$ essentieel zijn en communiceren voor een Markov keten geïnduceerd door een gerandomiseerde stationaire strategie $\mu^\infty$ met $\mu \in W$ dan geldt

$$\phi(i_1) = \phi(i_2).$$

<u>Bewijs</u>

Uit de simultane Doeblinvoorwaarde volgt (vergelijk stelling 2.6 a) $\Rightarrow$ b)) het bestaan van een eindige verzameling E die bereikbaar is vanuit iedere toestand i en onder iedere stationaire strategie. Volgens stelling 3.2 geldt dan het bestaan van een $\dot{M}$ met

$$m_R(i,E) \le M \qquad \text{voor alle } i \text{ en alle } R \in C.$$

In het bijzonder volgt dan

$$m_{\mu^\infty}(i,E) \le M \qquad \text{voor alle } i.$$

Volgens stelling 1.14 b) $\Longrightarrow$ a) geldt dan dat de Markov keten geïnduceerd door $\mu^\infty$ aan de Doeblinvoorwaarde voldoet. We kunnen dus de resultaten van paragraaf 1 gebruiken.
Toestanden $i_1$ en $i_2$ zijn essentieel en communiceren onder $P_\mu$ en dus behoren ze tot dezelfde kernfuik zeg K.
We zullen bewijzen dat $\sup_{i\in K} \phi(i) - \inf_{i\in K} \phi(i) = 0$, en dus in het bijzonder $\phi(i_1) = \phi(i_2)$, door de ontkenning hiervan tot een tegenspraak te herleiden.
Veronderstel

$$\sup_{i\in K} \phi(i) - \inf_{i\in K} \phi(i) = c > 0.$$

Volgens stelling 3.7 geldt voor willekeurige $i \in I$

$$\phi(i) \le \sum_j q(j|i,a)\,\phi(j) \qquad \text{voor alle } a \in A(i).$$

$$\Longrightarrow \qquad \phi(i) \le \sum_j \left(\int_{A(i)} \mu(da|i)q(j|i,a)\right) \phi(j)$$

$$= \sum_j P_\mu(i,j)\,\phi(j).$$

Middels inductie vinden we hieruit

$$\phi(i) \le \sum_j P_\mu^n(i,j)\,\phi(j) \qquad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \qquad \phi(i) \le \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{j} P_\mu^n(i,j)\, \phi(j) \qquad \text{voor alle } N \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \qquad \phi(i) \le \sum_{j} \Pi_\mu(i,j)\, \phi(j).$$

Voor $i \in K$ zij $p(i)$ de notatie voor $\Pi_\mu(i,i)$ dan geldt (zie paragraaf 1) $p(i) > 0$ voor alle $i \in K$ en $\sum_{i \in K} p(i) = 1$.

Volgens bovenstaande ongelijkheid

$$\phi(i) \le \sum_{j \in K} p(j)\, \phi(j).$$

Zij $j_0 \in K$ zó dat

$$\phi(j_0) \le \inf_{i \in K} \phi(i) + \frac{c}{2}.$$

Dan geldt voor willekeurige $i \in K$ dat

$$\phi(i) \le p(j_0)(\sup_{i \in K} \phi(i) - \tfrac{c}{2}) + (1 - p(j_0))(\sup_{i \in K} \phi(i))$$

$$= \sup_{i \in K} \phi(i) - p(j_0)\, \frac{c}{2}.$$

Daar $p(j_0)\, \frac{c}{2} > 0$ levert dit een tegenspraak met de definitie van een supremum. □

Stelling 3.9. Zij K de vereniging van de C-kernfuiken.

i) Er bestaat een $f_1 \in F$ met de eigenschap dat

$$\phi(i, f_1^\infty) = \phi(i) \qquad \text{voor alle } i \in K.$$

ii) Indien K vanuit iedere toestand i onder iedere stationaire strategie $f^\infty$ bereikbaar is dan bestaat er een $f_2 \in F$ met $f_2 = f_1$ op K en

$$\phi(i,f_2^\infty) = \phi(i) \qquad\qquad \text{voor alle } i. \ ^{*)}$$

Bewijs

i) Veronderstel $K_1, K_2, \ldots, K_m$ zijn de C-kernfuiken. Vanuit een C-kernfuik, zeg $K_i$, is geen enkele toestand buiten $K_i$ bereikbaar onder welke strategie dan ook. Dit betekent dat de Markov beslissingdprocessen op de verschillende C-kernfuiken geheel onafhankelijk van elkaar zijn. Om i) te bewijzen kunnen we dus volstaan met ons te beperken tot één C-kernfuik. Verder mogen we zonder beperking der algemeenheid veronderstellen dat deze C-kernfuik met I samenvalt. Volgens de stellingen 3.6 ii) en 3.8 geldt dan

$$\phi(i_1) = \phi(i_2) \qquad\qquad \text{voor alle } i_1 \text{ en } i_2.$$

We noteren $\phi$ voor de funktiewaarde van $\phi(\cdot)$. Veronderstel $f_0^\infty$ is een limietpunt van verdisconteerd-optimale strategieën (volgens stelling 3.1 en de rijtjescompactheid van F zijn er dergelijke limietpunten). Dus we veronderstellen rijen $\{\beta_n\}$ en $\{f_n\}$ met $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 1$ en $\lim_{n\to\infty} f_n = f_0$ en $f_n^\infty$ is $\beta_n$-verdisconteerd optimaal d.w.z.

$$\psi(i,\beta_n,f_n^\infty) = \inf_{R\in C} \psi(i,\beta_n,R).$$

Verder veronderstellen we dat $\lim_{n\to\infty} (1-\beta_n)\, \psi(i,\beta_n,f_n^\infty)$ bestaat voor alle i. Deze veronderstelling is geen beperking der algemeenheid, immers uit het feit dat I hoogstens aftelbaar is en $(1-\beta)\, \psi(i,\beta,R)$ in absolute waarde niet groter dan een bovengrens van de absolute waarde van de kostenfunktie volgt dat er altijd een deelrij van $\{\beta_n\}$ gekozen kan worden waarvoor de veronderstelling juist is.

Zij

$$(3.1) \qquad g(i) = \lim_{n\to\infty} (1-\beta_n)\, \psi(i,\beta_n,f_n^\infty)$$

---

*) In het bewijs van dit deel van de stelling maken we de extra veronderstelling dat

$$\phi(i) = \inf_{R\in C} \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} E_R\{\underline{w}_n \mid \underline{x}_0 = i\} \quad \text{voor } i \in K.$$

dan geldt volgens [6] lemma 3 dat $g(i) \leq \phi$ voor alle i. Indien er onder de strategie $f_0^\infty$ maar één kernfuik is dan geldt volgens stelling 2.1 $\lim_{n\to\infty} \Pi_{f_n}(i,j) = \Pi_{f_0}(i,j)$ voor alle i en j. Met stelling 1 van [6] volgt dan $\phi(i,f_0^\infty) = g(i)$ en dus $\phi(i,f_0^\infty) = \phi$ voor alle i.
Indien er onder $f_0^\infty$ meerdere kernfuiken zijn, zeg $K_1^*, \ldots, K_r^*$, dan kunnen we stelling 1 van [6] niet zonder meer toepassen. Wel zullen we analoog aan deze stelling te werk gaan.
Er geldt

$$(1-\beta_n)\psi(i,\beta_n,f_n^\infty) = (1-\beta_n)w(i,f_n(i)) + \beta_n \sum_j P_{f_n}(i,j)[(1-\beta_n)\psi(j,\beta_n,f_n^\infty)].$$

Door links en rechts de limiet te nemen voor $n \to \infty$ vinden we

$$g(i) = \sum_j P_{f_0}(i,j)g(j) \qquad \text{voor alle } i$$

$$\Longrightarrow \qquad g(i) = \sum_j \Pi_{f_0}(i,j)g(j) \qquad \text{voor alle } i$$

$\Longrightarrow$ de funktie $g(\cdot)$ is constant op $K_i^*$ zeg met waarde

$$g(K_i^*) \qquad \text{voor } i = 1,\ldots,r. \tag{3.2}$$

Zonder beperking der algemeenheid mogen we veronderstellen dat $\lim_{n\to\infty} \Pi_{f_n}(i,j)$ bestaat voor alle i en j, immers door overgang op een geschikt gekozen deelrij van $\{f_n\}$ is dit altijd te bereiken.
Zij

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_{f_n}(i,j) = \Pi^*(i,j). \tag{3.3}$$

Daar voor $i \in I$ geldt dat $\Pi_{f_n}(i,\cdot)$ een invariante kansmaat onder $P_{f_n}$ is volgt uit stelling 2.4 dat $\Pi^*(i,\cdot)$ een invariante kansmaat onder $P_{f_0}$ is.
Volgens stelling 1.10 bestaan er dan $\rho(i,K_l^*) \geq 0$ met $\sum_{l=1}^{r} \rho(i,K_l^*) = 1$ en

$$(3.4)\qquad \Pi^*(i,j) = \begin{cases} \rho(i,K_l^*)\ \Pi_{K_l^*}(j,j) & \text{als } j \in K_l^* \\ 0 & \text{als } j \in I - \bigcup_{l=1}^{r} K_l^* . \end{cases}$$

Analoog aan (5) van stelling 1 uit [6] geldt

$$\lim_{n\to\infty} \phi(i,f_n^\infty) = \sum_j \Pi^*(i,j)\ g(j).$$

Met (3.2) en (3.4) volgt hieruit

$$(3.5\qquad \lim_{n\to\infty} \phi(i,f_n^\infty) = \sum_{l=1}^{r} \rho(i,K_l^*)\ g(K_l^*).$$

Voor $f \in F$ geldt

$$(3.6)\qquad \phi(i,f^\infty) = \sum_j \Pi_f(i,j)\ w(j,f(j))$$

$\Longrightarrow$ $\phi(i,f_0^\infty)$ = is constant op $K_l^*$ zeg met waarde

$$(3.7)\qquad \phi(K_l^*) \qquad\qquad \text{voor } l = 1,\ldots,r.$$

Uit (3.3) em (3.6) met gebruikmaking van de continuïteit van $w(i,a)$ in $a$ volgt

$$(3.8)\qquad \lim_{n\to\infty} \phi(i,f_n^\infty) = \sum_j \Pi^*(i,j)\ w(j,f_0(j)).$$

Uit het invariant zijn van de kansmaat $\Pi^*(i,\cdot)$ t.o.v. $P_{f_0}$ volgt

$$\sum_j \Pi^*(i,j)\ P_{f_0}(j,k) = \Pi^*(i,k) \qquad \text{voor alle } k$$

$\Longrightarrow$ door iteratie van deze gelijkheid

$$\sum_j \Pi^*(i,j)\ P_{f_0}^n(j,k) = \Pi^*(i,k) \qquad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow$ deze gelijkheid geldt ook voor de Cesarosom $\Pi_{f_0}$ en dus

$$\sum_j \Pi^*(i,j)\,\Pi_{f_0}(j,k) = \Pi^*(i,k)$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_j \Pi^*(i,j)w(j,f_0(j)) = \sum_j \Pi^*(i,j) \sum_k \Pi_{f_0}(j,k)w(k,f_0(k))$$

$$= \sum_j \Pi^*(i,j)\phi(j,f_0^\infty)$$

(met (3.4) en (3.7)) $$= \sum_{l=1}^{r} \rho(i,K_l^*)\phi(K_l^*).$$

Met (3.8) volgt dan

$$\lim_{n\to\infty} \phi(i,f_n^\infty) = \sum_{l=1}^{r} \rho(i,K_l^*)\phi(K_l^*). \tag{3.9}$$

Uit (3.5) en (3.9) volgt dan

$$\sum_{l=1}^{r} \rho(i,K_l^*)(\phi(K_l^*) - g(K_l^*)) = 0. \tag{3.10}$$

Uit $g(i) \leq \phi$ en $\phi \leq \phi(i,f_0^\infty)$ voor alle $i$ volgt

$$\phi(K_l^*) - g(K_l^*) \geq 0 \qquad \text{voor } l = 1,\ldots,r.$$

Met (3.10) volgt hieruit dat

$$\phi(K_l^*) = g(K_l^*) = \phi$$

indien er een $i$ is met $\rho(i,K_l^*) > 0$.

(3.10a) Zij $K^*$ de vereniging van kernfuiken $K_l^*$ met $\phi(K_l^*) = \phi$. Uit $\sum_{l=1}^{r} \rho(i,K_l^*) = 1$ volgt dat $K^* \neq \emptyset$.

We hebben nu bewezen dat op $K^*$ de strategie $f_0^\infty$ optimaal is t.o.v. het gemiddelde kosten kriterium. We hebben aan het begin van het bewijs

verondersteld dat I een C-kernfuik is. Dit betekent dat alle toestanden onderling C-bereikbaar zijn. In het bijzonder is $K^*$ vanuit iedere toestand C-bereikbaar.
Voor $i \in I-K^*$ zij

$$n(i) = \min\{n \mid \exists f \in F, \exists j \in K^* \text{ met } P_f^n(i,j) > 0\}.$$

Bij $i \in I-K^*$ dan een f en een $j \in K^*$ met $P_f^{n(i)}(i,j) > 0$, zij a(i) de beslissing die deze f in toestand i voorschrijft. Zij $f_1$ zó dat $f_1(i) = a(i)$ voor $i \notin K^*$ en $f_1(i) = f_0(i)$ voor $i \in K^*$. Analoog aan het bewijs van stelling 3.6. i) kan dan bewezen worden dat $K^*$ onder $P_{f_1}$ vanuit iedere toestand bereikbaar is. Dit impliceert dat de essentiële toestanden onder $P_{f_1}$ de verzameling $K^*$ vormen.
Met $\phi(i,f_0^\infty) = \phi$ voor $i \in K^*$ volgt dan $\phi(i,f_1^\infty) = \phi$ voor alle i.

ii) Volgens i) is er een $f_1$ zó dat op K, de vereniging van de C-kernfuiken $K_1, \ldots, K_m$, $\phi(i,f_1^\infty) = \phi(i)$. Op $K_i$ is de functie $\phi(\cdot)$ constant. We noteren de functiewaarde met $\phi(K_i)$.
Gegeven is nu dat K bereikbaar is vanuit iedere toestand i onder iedere stationaire strategie $f^\infty$. Volgens stelling 3.2 bestaan er dan een $0 < c_1 < 1$ en een natuurlijk getal M zó dat

$$\sup_{R \in C} P_R^n(K;i,I-K) \leq c_1^{[n/M]} \qquad \text{voor alle } i \in I \text{ en alle } R \in C. \tag{3.11}$$

Daar $P_R^n(K;i,j) = \mathbb{P}_R\{\underline{x}_k \notin K \text{ voor } k=1,\ldots,n-1 \text{ en } \underline{x}_n=j \mid \underline{x}_0=i\}$ volgt dat

$$1 - P_R^n(K,i,I-K) = \mathbb{P}_R\{\bigcup_{k=1}^{n} (\underline{x}_k \in K) \mid \underline{x}_0=i\}.$$

Daar K een vereniging is van C-kernfuiken geldt

$$= \mathbb{P}_R\{\underline{x}_n \in K \mid \underline{x}_0=i\}.$$

Met (3.11) volgt dan

(3.12) $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_R\{\underline{x}_n \in K \mid \underline{x}_0 = i\} = 1 \quad . \qquad \text{uniform in alle } i \text{ en alle } R$$

Kies $\varepsilon > 0$ dan is er een strategie R met

$$\phi(i,R) \leq \phi(i) + \varepsilon \qquad \text{voor alle } i.$$

Zij $i_0$ een willekeurige toestand buiten K dan is er bij $i_0$ en R een $R_0 \in C_{RM}$ te vinden met $\phi(i_0,R) = \phi(i_0,R_0)$ *). Zeg $R_0 = (\mu_0,\mu_1,\ldots)$ dan geldt dus

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}_{R_0}(\underline{w}_n \mid \underline{x}_0 = i_0) \leq \phi(i_0) + \varepsilon.$$

Hieruit volgt het bestaan van een deelrij der natuurlijke getallen $\{N_k\}$ met

(3.13) $$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} \mathbb{E}_{R_0}(\underline{w}_n \mid \underline{x}_0 = i_0) \leq \phi(i_0) + \varepsilon.$$

Daar

$$\mathbb{E}_{R_0}(\underline{w}_n \mid \underline{x}_0 = i_0) =$$

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} P_{\mu_0}(i_0,i_1)P_{\mu_1}(i_1,i_2) \ldots P_{\mu_{n-1}}(i_{n-1},i_n)w(i_n,\mu_n)$$

met

$$w(i_n,\mu_n) = \int_{A(i_n)} \mu(da|i_n)w(i_n,a)$$

en bij een Cesaro-som de eerste n termen zonder de som te veranderen weggelaten kunnen worden, volgt

(3.14) $$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} \mathbb{E}_{R_0}(\underline{w}_n \mid \underline{x}_0 = i_0) =$$

$$\sum_j P_{R_0}(\underline{x}_m = j \mid \underline{x}_0 = i_0) \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k - m} \mathbb{E}_{R_m}(\underline{w}_n \mid \underline{x}_0 = j)$$

*) Deze bewering laat zich bewijzen door stelling 1 p. 55 van [7] te generaliseren voor dit model.

waarin $R_m = (\mu_m, \mu_{m+1}, \ldots)$. Verder is aangenomen dat de limiet in de tweede factor bestaat voor alle j (door eventueel van te voren over te gaan op een deelrij van $\{N_k\}$ levert deze aanname geen beperking op). We willen nu voor $j \in K$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k - m} \mathbb{E}_{R_m}(\underline{w}_n \mid \underline{x}_0 = j)$$

naar onderen afschatten met $\phi(j)$. Dit is correct indien

$$\phi(j) \leq \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}_R(\underline{w}_n \mid \underline{x}_0 = j) \qquad \text{voor alle } R. \tag{3.15}$$

De relaties (3.13), (3.14) en (3.15) combinerend vinden we

$$\sum_{j\in K} P_{R_0}(\underline{x}_m = j \mid \underline{x}_0 = i_0)\phi(j) \leq \phi(i_0) + \varepsilon \qquad \text{voor alle m.}$$

Daar $\phi(j) = \phi(K_i)$ voor $j \in K_i$ is de linkerhelft van de ongelijkheid te schrijven als

$$\sum_{i=1}^{m} P_{R_0}(\underline{x}_n \in K_i \mid \underline{x}_0 = i_0)\phi(K_i) \leq \phi(i_0) + \varepsilon \qquad \text{voor alle n.}$$

Door de limiet te nemen voor $n \to \infty$ vinden we

$$\sum_{i=1}^{m} P_{R_0}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\underline{x}_n \in K_i) \mid \underline{x}_0 = i_0\right)\phi(K_i) \leq \phi(i_0) + \varepsilon.$$

Dit implicieert

$$\inf_{R\in C} \sum_{i=1}^{m} P_R\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\underline{x}_n \in K_i) \mid \underline{x}_0 = j\right)\phi(K_i) \leq \phi(j) \text{ voor alle j.} \tag{3.16}$$

Zij de verzameling van beslissingen $\tilde{A}(i)$ gedefinieerd door

$$\tilde{A}(i) = A(i) \qquad \text{voor } i \notin K$$

en

$$\tilde{A}(i) = \{f_1(i)\} \qquad \text{voor } i \in K.$$

Met deze beperking van de toegelaten beslissingen gaat een vermindering van het aantal strategieën in de verschillende klassen gepaard. We zul-

len dit aangeven door de aanduidingen van de diverse klassen te versieren met het symbool "~", dus $\tilde{C}$ i.p.v. C, etc.
Relatie (3.16) met deel i) van deze stelling impliceert nu dat

$$\inf_{R \in \tilde{C}} \phi(i,R) = \phi(i) \qquad \text{voor alle } i.$$

De rest van het bewijs zal nu bestaan uit het aantonen dat voor het nieuwe Markovbeslissingsproces ($\tilde{R}$ i.p.v. R) de voorwaarde V3.4 vervuld is. Omdat V3.5 onder de simultane Doeblinvoorwaarde steeds vervuld is mogen we dan stelling 1 van [6] toepassen.
Veronderstel

$$f_n, f_0 \in F \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(i) = f_0(i) \quad \text{en} \quad f_n(i) = f_0(i) = f_1(i) \quad \text{voor } i \in K.$$

Alle essentiële toestanden onder $f_1$ (en dus ook onder $f_n$ en $f_0$) liggen binnen K. Om aan te tonen dat

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_{f_n}(i,j) = \Pi_{f_0}(i,j) \qquad \text{voor alle } i,j$$

is het dus voldoende om aan te tonen dat (vergelijk stelling 1.7 en bedenk dat $K_r$ onder $f_n$ en $f_0$ een fuik is)

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_{f_n^\infty}(\underline{x}_k \in K_r \mid \underline{x}_0 = i) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_{f_0^\infty}(\underline{x}_k \in K_r \mid \underline{x}_0 = i) \tag{3.17}$$

voor alle i
en r = 1,...,m.

Uit de uniforme convergentie in relatie (3.12) vinden we dan dat voldoende is te bewijzen

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{f_n^\infty}(\underline{x}_k \in K_r \mid \underline{x}_0 = i) = \mathbb{P}_{f_0^\infty}(\underline{x}_k \in K_r \mid \underline{x}_0 = i) \tag{3.18}$$

voor alle i;
r = 1,...,m
en $k \in \mathbb{N}$.

Maar uit $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0$ volgt $\lim_{n\to\infty} P_{f_n}(i,j) = P_{f_0}(i,j)$ voor alle i,j.

En hieruit volgt dat als $B_k$ een element is uit de σ-algebra voortgebracht door $\{\underline{x}_0,\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_k\}$ dan

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{f_n^\infty}(B_k \mid \underline{x}_0=i) = P_{f_0^\infty}(B_k \mid \underline{x}_0=i) \quad \text{voor alle } i.$$

En dit impliceert (3.18). □

Het laatste gedeelte van het bewijs van stelling 3.9. ii), om precies te zijn vanaf relatie(3.16), was in feite een *optimaal-stuurprobleem.*

Bij een optimaal-stuurprobleem hebben we een doelverzameling D. Op D is een begrensde opbrengstfunktie r gedefinieerd. Indien het proces de verzameling D in toestand i binnenkomt dan ontvangt de bestuurder een opbrengst r(i). De vraag is dan weer bestaat er een optimale strategie en zo ja hoe kan deze bepaald worden? We zullen ons tot het eerste gedeelte van deze vraag, de existentie, beperken. Het optimaal stoppen van een Markov keten is een speciaal geval van een optimaal-stuurprobleem. Daar niet in alle gevallen een optimale stopregel voor de Markov keten bestaat (zie [5], p. 101), is er ook niet in alle gevallen een optimale stationaire strategie voor het stuurprobleem.
Om het optimaal-stuurprobleem in te passen in de Markovbeslissingsprocessen maken we de toestanden in D absorberend d.w.z. voor $i \in D$ geldt $q(i|i,a) = 1$ voor alle $a \in A(i)$. Indien D aftelbaar veel toestanden bevat dan volgt dat niet meer aan de Doeblinvoorwaarde voldaan kan zijn. Echter voor de volgende stelling is de volgende verzwakking van de simultane Doeblinvoorwaarde voldoende.

V.3.8. *Er bestaat een constante* $c > 0$, *een natuurlijk getal* N *en een eindige verzameling* J *zó dat* $P_f^N(i, J\cup D) \geq c$ *voor alle* $i \in I-D$ *en alle* $f \in F$.

<u>Stelling 3.10</u>. Onder V3.8 bestaat er een optimale stationaire strategie vóór het optimaal-stuurprobleem met doelverzameling D indien D van-

uit iedere toestand i onder iedere stationaire strategie bereikbaar is.

Bewijs

We zullen de existentie van een optimale strategie aantonen door van het optimaal-stuurprobleem een markovbeslissingsprobleem te maken met de gemiddelde verwachte opbrengst als optimaliteitskriterium.
We definiëren daartoe opbrengstfunktie r ook buiten D door $r(i) = 0$ voor $i \notin D$. Daar iedere toestand in D absorberend is volgt dat voor iedere strategie de opbrengst van het optimaal-stuurprobleem gelijk is aan de gemiddelde verwachte opbrengst van het markovbeslissingsprobleem.
Om nu te bewijzen dat er een stationaire strategie bestaat met maximale gemiddelde verwachte opbrengst gebruiken we weer stelling 1 uit [6].
Daartoe moeten we aantonen dat voorwaarden V3.4 en V3.5 vervuld zijn.
Verzameling D is vanuit iedere toestand onder iedere stationaire strategie f bereikbaar. Zij f een willekeurig element uit F. Zij verder $0 < c_1 < 1$ en $N_1$ zó dat

$$\mathbb{P}_{f^\infty}\{\underline{x}_{N_1} \in D \mid \underline{x}_0 = i\} \geq c_1 \qquad \text{voor alle } i \in J.$$

Daar D absorberend is volgt hieruit

$$P_f^{N_1}(D;i,I-D) \leq 1 - c_1 \qquad \text{voor alle } i \in J.$$

Zonder beperking der algemeenheid veronderstellen we dat $J \cap D = \emptyset$, immers we mogen indien $J \cap D \neq \emptyset$ voor het vervolg van het bewijs i.p.v. J ook $J \cap (I-D)$ nemen.
Nu geldt:

$$P_f^N(i,D) + P_f^N(D;i,J) + P_j^N(D;i,I-(D\cup J)) = 1.$$

Uit de afgezwakte simultane Doeblinvoorwaarde volgt

$$P_f^N(i,D\cup J) = P_f^N(i,D) + P_f^N(D;i,J) \geq c \quad \text{voor } i \in I-D$$

$$\Longrightarrow \quad P_f^{N+N_1}(D;i,I-D) = \sum_{j\in J} P_f^N(D;i,j)P_f^{N_1}(D;j,I-D) + \sum_{j\in I-(D\cup J)} \cdots$$

$$\leq (1-c_1)P_f^N(D;i,J) + P_f^N(D;i,I-(D\cup J))$$

$$= P_f^N(D;i,J) + P_f^N(D;i,I-(D\cup J)) - c_1P_f^N(D;i,J)$$

$$= 1 - P_f^N(i,D) - c_1P_f^N(D;i,J)$$

$$\leq 1 - c_1 \,[P_f^N(i,D) + P_f^N(D;i,J)]$$

$$\leq 1 - c_1c \qquad \text{voor alle } i \in I-D.$$

Daar D absorberend is volgt dat $P^n(D;i,I-D) = 0$ voor $n \geq 1$ en $i \in D$.
Dus $P_f^{N+N_1}(D;i,I-D) \leq 1-cc_1$ voor alle i.
Daar f willekeurig is kunnen we hiervan gebruikmakend geheel analoog aan stelling 2.5 bewijzen dat er $c_2 > 0$ en $N_2$ bestaan met

$$\sup_{f\in F} P_f^{N_2}(D;i,I-D) \leq 1-c_2 \qquad \text{voor alle } i \in J.$$

Met een argumentatie als hierboven volgt dan

$$P_f^{N+N_2}(D;i,I-D) \leq 1-cc_2 \qquad \text{voor alle } i \in I \text{ en voor alle } f \in F.$$

$$(3.19) \qquad \Longrightarrow \quad P_f^n(D;i,I-D) \leq (1-cc_2)^{[n/N+N_2]}$$

$$\Longrightarrow \quad \Pi_f(i,D) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{f^\infty}(\underline{x}_n \in D \mid \underline{x}_0 = i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - P_f^n(D;i,I-D)$$

$$= 1 \qquad \text{voor alle } i \text{ en alle } f$$

en dus is voorwaarde V3.5 vervuld.
Voor $j \in D$ geldt

$$\Pi_f(i,j) = \sum_{n=1}^{\infty} P_f^n(D;i,j)$$

en

$$P_f^{n+1}(D;i,j) \leq P_f^n(D;i,I-D)$$

en dus met (3.19) volgt dat de reeks uniform in i en f convergeert.

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \Pi_{f_n}(i,j) = \Pi_{f_0}(i,j) \text{ als } f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0 \text{ ,}$$

vergelijk het laatste argument van het vorig bewijs. □

In de laatste stelling van deze paragraaf zullen we in het bewijs een optimaal-stuurprobleem tegenkomen. Aan de existentie van optimale strategieën hebben we daar niet genoeg aan. We zullen een voldoende voorwaarde voor het optimaal zijn van een stationaire strategie nodig hebben. Daartoe bewijzen we de volgende stelling, we veronderstellen dat aan voorwaarde V3.8 is voldaan.

Stelling 3.11. Indien voor de funktie s geldt dat

$$s(i) = r(i) \qquad \text{voor } i \in D$$

en

$$(3.20) \qquad s(i) = \max_{a \in A(I)} \sum_j q(j|i,a)s(j) \qquad \text{voor alle } i,$$

dan is $s(i)$ de maximale opbrengst van het stuurprobleem van stelling 3.10. Indien voor $f \in F$ geldt dat

$$(3.21) \qquad s(i) = \sum_j P_f(i,j)s(j)$$

dan is $f^{\infty}$ een optimale strategie.

Bewijs

Voor t een willekeurige begrensde funktie met $t(i) = r(i)$ voor $i \in D$ zullen we bewijzen dat de stuuropbrengst onder de gerandomiseerde markovstrategie $R = (\mu_0, \mu_1, \ldots)$ gelijk is aan

$$\alpha(i,R) \overset{\text{NOT}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in I} \mathbb{P}_R(\underline{x}_n=j \mid \underline{x}_0=i)t(j). \tag{3.22}$$

We voeren in een rij van stochastische variabelen $\underline{t}_n$ door te definiëren; $\underline{t}_n = t(i)$ indien $\underline{x}_n = i$ is, dan geldt

$$\sum_j \mathbb{P}_R(\underline{x}_n=j \mid \underline{x}_0=i)t(j) = \mathbb{E}_R(\underline{t}_n \mid \underline{x}_0=i).$$

Welnu, met $\underline{\tau}_D$ de wachttijd tot aan binnenkomst in de doelverzameling D vinden we

$$\mathbb{E}_R(\underline{t}_m \mid \underline{x}_0=i) = \mathbb{E}_R(\underline{t}_m \mid \underline{x}_0=i,\ \underline{\tau}_D\leq m)\mathbb{P}_R(\underline{\tau}_D\leq m) +$$

$$+ \mathbb{E}_R(\underline{t}_m \mid \underline{x}_0=i,\ \underline{\tau}_D>m)\mathbb{P}_R(\underline{\tau}_D>m).$$

Gebruikmakend van relatie (3.19) is analoog stelling 3.2 te bewijzen dat $m_R(i,D)$ begrensd is $\Longrightarrow \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}_R(\underline{\tau}_D>m) = 0$. Dit impliceert dat de tweede term van bovenstaande gelijkheid naar nul convergeert. Als $\underline{\tau}_D \leq m$ dan $\underline{x}_m \in D$ en hieruit volgt dat de eerste term gelijk is aan

$$\sum_{j\in D} \mathbb{P}_R(\underline{x}_m=j \mid \underline{x}_0=i)r(j)$$

dus

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_R(\underline{t}_m \mid \underline{x}_0=i) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j\in D} \mathbb{P}_R(\underline{x}_m=j \mid \underline{x}_0=i)r(j),$$

maar dit is de verwachte stuuropbrengst onder strategie R.

Uit (3.20) volgt dat voor willekeurige $\mu \in W$ geldt

$$s(i) \geq \sum_j \left[\int_{A(i)} \mu(da|i)q(j|i,a)\right]s(j)$$

$$= \sum_j P_\mu(i,j)s(j).$$

Met inductie naar n volgt hieruit dat

$$(3.23) \qquad s(i) \geq \sum_j \mathbb{P}_R(\underline{x}_n=j \mid \underline{x}_0=i)s(j) \qquad \text{voor alle i en } R \in C_{RM}$$

immers stel (3.23) is bewezen voor $n = n_0$ dan voor $R = (\mu_0,\mu_1,\ldots)$

$$\sum_j \mathbb{P}_R(\underline{x}_{n_0+1}=j \mid \underline{x}_0=i)s(j) = \sum_l P_{\mu_0}(i,l)\left[\sum_j \mathbb{P}_{R^*}(\underline{x}_{n_0}=j \mid \underline{x}_0=l)s(j)\right]$$

met $R^* = (\mu_1,\mu_2,\ldots)$.

$$\leq \sum_l P_{\mu_0}(i,l)s(l) \leq s(i).$$

Met relatie (3.22) volgt dan dat s een bovengrens is van de verwachte stuuropbrengsten van gerandomiseerde markovstrategieën. Gebruikmakend van een generalisatie van stelling 1 pag. 55 van [7] kunnen we hieruit concluderen dat s de bovengrens is voor alle strategieën.

Zij $f \in F$ zó dat (3.21) geldt dan volgt

$$\sum_j P_f^n(i,j)s(j) = s(i) \qquad \text{voor alle n.}$$

Met (3.22) volgt dan dat $\alpha(i,f^\infty) = s(i)$ voor alle i. □

<u>Stelling 3.12</u>. Er bestaat een $f_0$ met de eigenschap dat

$$\phi(i,f_0^\infty) = \inf_{f\in F} \phi(i,f^\infty) \qquad \text{voor alle i.}$$

<u>Bewijs</u>

We hebben eerder ingevoerd de notatie

$$\phi(i) = \inf_{R\in C} \phi(i,R).$$

In dit bewijs zullen we noteren

$$\phi(i) = \inf_{f\in F} \phi(i,f^{\infty}).$$

Veronderstel $f_1 \in F$ heeft de eigenschap dat voor een aantal kernfuiken onder $P_{f_1}$ zeg $K_1, K_2, \ldots, K_m$ geldt

$$\phi(i,f_1^{\infty}) = \phi(i) \qquad \text{voor } i \in K_r,\ 1 \leq r \leq m.$$

Volgens het bewijs van stelling 3.9. i) bestaat er zo'n $f_1$.
We gaan F nu reduceren tot $F_1$ door te eisen als $f \in F_1$ dan

$$f(i) = f_1(i) \qquad \text{voor } i \in K_r,\ 1 \leq r \leq m.$$

In het laatste gedeelte van dit bewijs zullen we aantonen dat hierdoor het infimum van de verwachte gemiddelde kosten over alle stationaire strategieën niet wordt vergroot. Dus

$$\text{(3.24)} \qquad \phi(i) = \inf_{f\in F_1} \phi(i,f^{\infty}) \qquad \text{voor alle } i.$$

Nemen we deze relatie voor dit moment aan, dan kunnen we weer een limietpunt voor verdisconteerd-optimale strategieën (deze liggen nu allemaal in $F_1$) nemen. Dus veronderstel $f_n \in F_1$ is $\beta_n$-verdisconteerd-optimaal (t.o.v. de gereduceerde klasse van strategieën), $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_2 \in F_1$ en zeg

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_{f_n}(i,j) = \Pi^*(i,j) \qquad \text{voor alle } i,j.$$

Nu zijn er twee mogelijkheden

$$\text{a)} \qquad \Pi^*(i, \bigcup_{r=1}^{m} K_r) = 1 \qquad \text{voor alle } i.$$

$\Longrightarrow$ het bestaan van een $n_0$ met $\Pi_{f_n}(i, \bigcup_{r=1}^{m} K_r) \geq \frac{1}{2}$ voor $n \geq n_0$

en $i \in J$ (de eindige Doeblinverzameling).

Daar

$$P_f^N(i,J) \geq c \qquad \text{voor alle } i$$

volgt

$$\Pi_f(i,J) \geq c \qquad \text{voor alle } i.$$

Gebruiken we dit dan vinden we

$$\Pi_{f_n}(i, \bigcup_{r=1}^{m} K_r) \geq \tfrac{1}{2}c \qquad \text{voor } n \geq n_0 \text{ en alle } i.$$

Dit betekent dat voor $n \geq n_0$ de kernfuiken onder $P_{f_n}$ precies $K_1, K_2, \ldots, K_m$ zijn (bedenk dat $f_n = f_1$ op deze K's). Dit impliceert dat (vergelijk bijv. bewijs van relatie (3.17))

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_{f_n}(i,j) = \Pi_{f_2}(i,j) \qquad \text{voor alle } i,j.$$

Hieruit volgt volgens stelling 1 uit [6] dat voor $f_2$ geldt

$$\phi(i,f_2^\infty) = \phi(i) \qquad \text{voor alle } i.$$

b) $$\Pi^*(i, \bigcup_{r=1}^{m} K_r) < 1 \qquad \text{voor een } i.$$

Dit impliceert (zie bewijs van stelling 3.9. i)) dat er minstens één kernfuik onder $P_{f_2}$ is zeg $K_{m+1}$ met

$$\phi(i,f_2^\infty) = \phi(i) \qquad \text{voor } i \in K_{m+1}.$$

Daar voor iedere f het aantal kernfuiken niet groter is dan het aantal elementen in J volgt dat volgens dit procédé in een eindig aantal stappen een optimale (onder de stationairen) strategie gevonden kan worden. Rest ons de relatie (3.24) te bewijzen. We doen dit door een willekeurige $f \in F$ te vergelijken met de $\tilde{f} \in F_1$ met

$$\tilde{f}(i) = \begin{cases} f_1(i) & \text{voor } i \in \bigcup_{r=1}^{m} K_r \\ f(i) & \text{voor } i \notin \bigcup_{r=1}^{m} K_r . \end{cases}$$

We zullen bewijzen dat

$$(3.25) \qquad \phi(i,\tilde{f}^{\infty}) \leq \phi(i,f^{\infty}) \qquad \text{voor alle } i.$$

Uit (3.25) volgt onmiddelijk (3.24).
Om relatie (3.25) aan te tonen beschouwen we een optimaal-stuurprobleem.
Zeg $K_{m+1}, \ldots, K_n$ zijn de kernfuiken onder $P_f$. We voeren nu m + n nieuwe toestanden in zeg $k_1, k_2, \ldots, k_{m+n}$. De doelverzameling D bestaat uit deze m + n punten.
Als $i \notin \bigcup_{i=1}^{m+n} K_i$ dan is er in i maar één aktie $a_1$ mogelijk en

$$q(j|i,a_1) = q(j|i,f(i)).$$

Als $i \in K_r - (\bigcup_{i=1}^{m} K_i)$ met $m+1 \leq r \leq n$ dan zijn er in i twee akties mogelijk

$$a_1 \text{ met } q(k_r|i,a_1) = 1 \qquad \text{en} \qquad a_2 \text{ met } q(j|i,a_2) = q(j|i,f(i)).$$

Als $i \in K_r - (\bigcup_{i=m+1}^{m+n} K_i)$ met $1 \leq r \leq m$ dan zijn er in i twee akties mogelijk

$$a_1 \text{ met } q(j|i,a_1) = q(j|i,f(i))$$

en

$$a_2 \text{ met } q(k_r|i,a_2) = 1 .$$

Als $i \in K_{r_1} \cap K_{r_2}$ met $1 \leq r_1 \leq m$ en $m+1 \leq r_2 \leq m+n$ dan zijn er in i twee akties mogelijk

$$a_1 \text{ met } q(k_{r_2} | i,a_1) = 1$$

en

$$a_2 \text{ met } q(k_{r_1} | i,a_2) = 1.$$

I.p.v. een opbrengstfunktie spreken we hier liever over kostenfunktie daar we gaan "minimaliseren". Stellingen 3.10 en 3.11 blijven natuurlijk geldig.
Welnu de kosten in toestand $k_j$, zeg $r(j)$, zijn voor $1 \leq j \leq m$ gelijk aan $\phi(i,f_1^{\infty})$ met $i \in K_j$ en voor $m+1 \leq j \leq m+n$ zijn ze gelijk aan $\phi(i,f^{\infty})$ met $i \in K_j$. Onder een stuurregel h verstaan we een funktie die aan iedere toestand een aktie toevoegt.
Zeg $\alpha(i,h)$ zijn de verwachte kosten indien in toestand i gestart wordt en stuurregel h gevolgd wordt.
Zij $h_1$ de stuurregel die in ieder punt de aktie $a_1$ kiest dan geldt

$$\alpha(i,h_1) = \phi(i,f^{\infty}) \qquad \text{voor alle } i \in I.$$

Zij $h_2$ de stuurregel die in toestand $i \in \bigcup_{r=1}^{m+n} K_r$ de aktie $a_2$ kiest dan geldt

$$\alpha(i,h_2) = \phi(i,\tilde{f}^{\infty}) \qquad \text{voor alle } i \in I.$$

We definiëren s(i) door

$$s(i) = \begin{cases} \phi(i,\tilde{f}^{\infty}) & \text{voor } i \in I \\ r(j) & \text{voor } i = k_j,\ 1 \leq j \leq m+n. \end{cases}$$

Voor $i \notin \bigcup_{i=1}^{m+n} K_i$ is $\tilde{f}(i) = f(i) \Longrightarrow$

$$\sum_{j \in I} q(j|i,a_1)s(j) = \sum_{j \in I} q(j|i,\tilde{f}(i))\phi(j,\tilde{f}^{\infty})$$

$$= \phi(i,\tilde{f}^{\infty}) = s(i).$$

Voor $i \in K_j - (\bigcup_{i=1}^{m} K_i)$ met $m+1 \leq j \leq m+n$ geldt

$$s(i) = \phi(i,\tilde{f}^{\infty}) \leq \phi(i,f^{\infty}) = r(j) \Longrightarrow q(k_j|i,a_1)r(j) \geq s(i)$$

en

$$\sum_{j\in I} q(j|i,a_2)s(j) = s(i).$$

Voor $i \in K_{j_1} \cap K_{j_2}$ met $1 \leq j_1 \leq m$ en $m+1 \leq j_2 \leq m+n$ geldt

$$s(i) = \phi(i,\tilde{f}^{\infty}) = \phi(i,f_1^{\infty})$$

$$\Longrightarrow \quad q(k_{j_2}|i,a_1)r(j_2) = \phi(i,f^{\infty}) \geq \phi(i,f_1^{\infty}) = s(i)$$

en

$$q(k_{j_1}|i,a_2)r(j_1) = \phi(i,f_1^{\infty}) = s(i).$$

Voor $i \in K_j - (\bigcup_{i=m+1}^{m+n} K_i)$ met $i \leq j \leq m$ geldt

$$s(i) = \phi(i,\tilde{f}^{\infty}) = \phi(i,f_1^{\infty})$$

$$\Longrightarrow \quad q(k_j|i,a_2)r(j) = \phi(i,f_1^{\infty}) = s(i).$$

Om te bewijzen dat

$$\sum_{j\in I} q(j|i,a_1)s(j) \geq s(i)$$

moeten we aantonen dat

$$\sum_{j\in I} q(j|i,f(i))\phi(j,\tilde{f}^{\infty}) \geq \phi(i,\tilde{f}^{\infty}).$$

We zien hier momenteel geen eenvoudiger argumentatie voor dan de volgende.
Volgens stelling 3.9. i) geldt $g(i) \leq \phi(i)$ voor alle $i \in I$ en $g(i) = \phi(i)$ voor $i \in \bigcup_{r=1}^{m} K_r$ .

Daar $(1-\beta_n)\psi(i,\beta_n)$ voldoet aan

$$(1-\beta_n)\psi(i,\beta_n) = \min_{a\in A(i)} [(1-\beta_n)w(i,a)+\beta_n \sum_j q(j|i,a)\{(1-\beta_n)\psi(j,\beta_n)\}]$$

volgt uit (3.1) dat

$$g(i) = \min_{a\in A(i)} \sum_j q(j|i,a)g(j)$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_j q(j|i,f(i))\phi(j,\tilde{f}^{\infty}) \geq \sum_j q(j|i,f(i))\phi(j)$$

$$\geq \sum_j q(j|i,f(i))g(j)$$

$$\geq g(i) = \phi(i) = \phi(i,\tilde{f}^{\infty}) \quad \text{voor } i \in K_j$$

Volgens stelling 3.11 hebben we hiermee aangetoond dat s(i) de minimale stuurkosten zijn en dat $h_2$ een optimale stuurregel is. In het bijzonder geldt $h_2$ is beter dan $h_1$ en dus

$$\phi(i,\tilde{f}^{\infty}) \leq \phi(i,f) \qquad \text{voor alle } i,$$

waarmee relatie (3.25) is aangetoond. □

Referenties

[1] C. Derman: Denumerable state Markovian decision processes - average cost criterion. Ann. Math. Statist. 37 (1966), 1545-1554.

[2] C. Derman: *Finite state Markovian decision processes*. Academic Press, New York 1970.

[3] C. Derman and A. Veinott: A solution to a countable system of equations arising in Markovian decision processes. Ann. Math. Statist. 38 (1967), 582-585.

[4] J.L. Doob: *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons, Inc., New York 1953.

[5] E.B. Dynkin und A.A. Juschkewitsch: *Sätze und Aufgaben über Markoffsche Prozesse*. Springer-Verlag, Berlin 1969.

[6] A. Hordijk: A sufficient condition for the existence of an optimal policy with respect to the average cost criterion in Markovian decision processes. Rapport BW 14/71, Mathematisch Centrum; verschijnt in "Transactions of the Sixth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes".

[7] A. Hordijk en H.C. Tijms: *Colloquium Markov-programmering*. BC 1/70, Mathematisch Centrum, Amsterdam 1970

[8] H. Scheffé: A useful convergence theorem for probability distributions. Ann. Math. Statist. 18 (1947), 434-438.