EXEMPLAAR VAN DE REKENAFDELING

CR 4
1

MODERNE REKENMETHODEN

Blz.1 t/m blz.82.

A. v. Wyngaarden

Inleiding.

De titel, welke wij gekozen hebben voor deze cursus, zou de indruk kunnen wekken, dat wij alleen voor kenners te appreciëren moderne snufjes op rekengebied zouden behandelen. Dit is echter geenszins de bedoeling. Veeleer beogen wij een overzicht te geven van die groep van rekenmethoden, welke betrekking hebben op analytische vraagstukken als bijv. het oplossen van differentiaalvergelijkingen, en welke speciaal tegenwoordig van het grootste belang zijn zowel voor de zelfstandig wetenschappelijke werker als voor de moderne rekeninstituten. Het is nodig een tamelijk grondige kennis te bezitten van dat deel van de numerieke wiskunde, dat gewoonlijk aangeduid wordt als interpolatierekening of differentierekening. Daarom zullen wij hieraan heel wat tijd besteden. Voorts is de keuze van numerieke methoden in zekere mate afhankelijk van de ten dienste staande machinale hulpmiddelen. Daarom zullen wij ook hier enige aandacht aan besteden en het ligt in de bedoeling aan de cursus een of meer demonstraties op de rekenafdeling van het Mathematisch Centrum te verbinden.

1. De klassieke interpolatie.

In de numerieke wiskunde wordt een functie van een of meer veranderlijken gedefinieerd door haar waarde in een tafel vast te leggen voor een aantal waarden of combinaties van waarden van de onafhankelijkeveranderlijke of veranderlijken. Daarmede rijst direct het probleem van de interpolatie, dat is het bepalen van de functiewaarde voor argumentwaarden, die niet in de tafel zijn gegeven. Wij zullen de klassieke stelling van dit interpolatieprobleem allereerst behandelen, daarbij ons voorlopig - ter wille van de eenvoud - beperkende tot het geval van één variabele.

Zij een functie $f(x)$ gegeven voor $n + 1$ waarden van het (i.h.a. complexe) argument x. Deze waarden x_i $(i = 0,1,2,\ldots n)$ zullen wij aanduiden als de basispunten. Aan deze functie voegen wij een andere functie $f_n^*(x)$ toe, de zg. interpolerende functie, welke gedefinieerd is door de volgende twee eisen:

a) In de basispunten zijn beide functies gelijk, dus $f_n^*(x_i)= f(x_i)$.

b) $f_n^*(x)$ is een polynoom in x van de laagste graad, als verenigbaar is met de vorige eis, d.w.z. i.h.a. van de graad n en zeker niet van hogere graad.

Blijkbaar geldt, als

$$a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = f_n^* (x), \qquad (1.1)$$

dat

$$a_o + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n = f (x_i). \qquad (1.2)$$

Dit zijn samen n + 2 vergelijkingen in de n + 1 onbekenden a_j ($j = o, 1 \dots n$), dus $f_n^* (x)$ moet voldoen aan

$$\begin{vmatrix} 1 & x_o & x_o^2 \dots & x_o^n & f(x_o) \\ 1 & x_1 & x_1^2 \dots & x_1^n & f(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \dots & x_n^n & f(x_n) \\ 1 & x & x^2 & x^n & f_n^*(x) \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.3)$$

De minor van $f_n^* (x)$ is de determinant van Vandermonde:

$$V (x_o\ x_1 \dots x_n) \equiv \begin{vmatrix} 1 & x_o & x_o^2 \dots & x_o^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \dots & x_n^n \end{vmatrix} \qquad (1.4)$$

*Blijkbaar is:

$$f_n^* (x) = - \begin{vmatrix} 1 & x_o & x_o^2 \dots & x_o^n & f(x_o) \\ 1 & x_1 & x_1^2 \dots & x_1^n & f(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \dots & x_n^n & f(x_n) \\ 1 & x & x^2 & x^n & 0 \end{vmatrix} : V (x_o\ x_1 \dots x_n). \qquad (1.5)$$

Hiermede is de gezochte functie, zij het in een tamelijk onhandelbare vorm, gevonden.
In het algemeen is $f_n^* (x)$ natuurlijk niet identiek gelijk aan f (x). Wij stellen derhalve:

$$f (x) = f_n^* (x) + R_{n+1} (x), \qquad (1.5)$$

waarin $R_{n+1} (x)$ een restterm is, welke nul is voor de basispunten.

Door in (1.3) voor $f_n^* (x)$ te schrijven $f(x) - R_{n+1} (x)$ vinden wij voor de restterm de aan (1.5) analoge voorstelling:

$$R_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & f(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n & f(x_n) \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n & f(x) \end{vmatrix} : V(x_0\, x_1 \dots x_n) \quad (1.7)$$

Natuurlijk zijn de uitdrukkingen (1.5) en (1.7) voor practisch gebruik niet bar geschikt. Wij moeten de determinanten dus op een geschikte wijze uitwerken. Hiertoe staan twee wegen open.

Allereerst merken wij op, dat de determinant V geschreven kan worden als:

$$\begin{aligned} V(x_0\, x_1 \dots x_n) = {} & (x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) . \\ & (x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1) \dots (x_{n-1} - x_{n-2}) . \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) . (x_1 - x_0) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Immers, het is een veelterm in de x_i's van de graad $1+2+\dots+n$, welke nul is, als $x_i = x_j$, en is dus op een multiplicatieve constante na gelijk aan het rechter lid van (1.8). Voorts treedt in de determinant één term op gelijk aan $1.x_1.x_2^2.x_3^3 \dots x_n^n$ (en wel langs de hoofddiagonaal) en deze treedt ook één keer op in het rechter lid van (1.8) (nl. als het product van de eerste termen van alle factoren), waaruit volgt, dat de genoemde constante één is.

Door nu de determinant in de teller van (1.5) te ontwikkelen naar de elementen van de laatste kolom, bekende eigenschappen over verwisseling van rijen en (1.8) toe te passen, gaat de formule (1.5) over in

$$f_n^*(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + f(x_1)\,\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$$

$$+ \dots + f(x_n)\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} . \quad (1.9)$$

In deze vorm is zij bekend als de "interpolatieformule van Lagrange". Men kan dit resultaat trouwens ook wel direct neerschrijven, als men bedenkt, dat de factor van $f(x_k)$ een polynoom van de n-de graad is, dat klaarblijkelijk nul is voor alle x_i behalve voor x_k, waar het $= 1$ is, zodat het rechterlid van (1.9) een polynoom van de graad n is, dat op de basispunten de voorgeschreven waarden aanneemt.

Door invoering van de functie

$$\psi_{n+1}(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) = \varphi_{n+1}(x) \tag{1.10}$$

kunnen wij (1.9) de wat sierlijker gedaante geven:

$$f_n^*(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\psi'_{n+1}(x_i)} \cdot \frac{\psi_{n+1}(x)}{x - x_i} \cdot \qquad f(x_i) \tag{1.11}$$

De tweede omvorming van (1.5) verkrijgen wij, door ons af te vragen, met welke complementaire functie het polynoom $f_{n-1}^*(x)$, behorende bij de basispunten $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ vermeerderd wordt, indien wij het door toevoeging van het punt x_n complementeren tot $f_n^*(x)$. Nu is $f_{n-1}^*(x)$ een polynoom van de graad n-1 en $f_n^*(x)$ van de graad n, dus de gezochte complementaire functie moet een polynoom van de graad n zijn, dat nul is voor $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, want daar heeft $f_{n-1}^*(x)$ reeds de voorgeschreven waarde ! Derhalve moet gelden:

$$f_n^*(x) = f_{n-1}^*(x) + \left[f_0 f_1 \ldots f_n\right] \psi_n(x), \tag{1.12}$$

waarin $\left[f_0\ f_1 \ldots f_n\right]_n$ een van x onafhankelijk getal voorstelt. Omdat de coefficient van x^n in ψ_n volgens (1.10) = 1 is, moet $\left[f_0\ f_1 \ldots f_n\right]$ de coefficient van x^n in $f_n^*(x)$ zijn, zodat dus volgens (1.5) geldt:

$$\left[f_0\ f_1 \ldots f_n\right] = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \ldots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} : V(x_0\ x_1 \ldots x_n) \tag{1.13}$$

met $\left[f_0\right] = f(x_0)$.

Door het afbraakproces, gedefinieerd door (1.12) voort te zetten, neemt (1.5) de volgende vorm aan:

$$f_n^*(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[f_0\ f_1 \ldots f_i\right] \psi_i(x), \tag{1.14}$$

Welke vorm wij de "interpolatieformule van Newton" zullen noemen. In wat meer uitgeschreven vorm luidt zij dus:

$$f_n^*(x) = f(x_0) + \left[f_0\ f_1\right](x-x_0) + \left[f_0\ f_1\ f_2\right](x-x_0)(x-x_1) +$$

$$+ \left[f_0\ f_1 \ldots f_n\right](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x - x_{n-1}). \tag{1.15}$$

De grootheden $\left[f_0\ f_1 \ldots f_i\right]$ hebben wij nog slechts in de determinantvorm, welke practisch onbruikbaar is. Hun ware karakter leren wij kennen door de volgende overweging. Wij beschouwen eens het polynoom $f_{n-2}^*(x)$, behorende bij de basispunten $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Wanneer wij dit complementeren tot het polynoom $f_n^*(x)$ door eerst het punt x_o en dan punt x_n aan het stelsel basispunten toe te voegen, geldt blijkbaar

$$f_n^*(x) - f_{n-2}^*(x) = [f_1\ f_2 \ldots f_{n-1}\ f_o]\,(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$
$$+ [f_1\ f_2 \ldots f_{n-1}\ f_o\ f_n](x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_o). \qquad (1.16)$$

Complementeren wij echter door eerst het punt x_n en dan het punt x_o toe te voegen, dan vinden wij

$$f_n^*(x) - f_{n-2}^*(x) = [f_1\ f_2 \ldots f_{n-1}\ f_n]\,(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$
$$+ [f_1\ f_2 \ldots f_{n-1}\ f_n\ f_o]\,(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n). \qquad (1.17)$$

Deze twee uitdrukkingen moeten natuurlijk identiek zijn. Nu zien wij uit (1.4) en (1.13), dat de grootheden $[f_o\ f_1 \ldots f_n]$ symmetrische functies van $x_o, x_1 \ldots x_n$ zijn, d.w.z. dat wij de volgorde van de letters mogen verwisselen. Maar dan volgt ook direct uit (1.16) en (1.17) de recursievergelijking

$$[f_o\ f_1 \ldots f_n] = \frac{[f_1\ f_2 \ldots f_n] - [f_o\ f_1 \ldots f_{n-1}]}{x_n - x_o}. \qquad (1.18)$$

Dus $[f_i] = f(x_i)$; $[f_i\ f_{i+1}] = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$, etc. De grootheden $[f_o\ f_1 \ldots f_n]$ zijn dus differentiequotienten of, zoals men ze in de numerieke wiskunde pleegt te noemen: gedeelde differenties.

Wij kunnen nu het volgende eenvoudige schema maken om gedeelde differenties te berekenen:

x_o	$f(x_o) = [f_o]$			
		$[f_o\ f_1]$		
x_1	$f(x_1) = [f_1]$		$[f_o\ f_1\ f_2]$	
		$[f_1\ f_2]$		$[f_o\ f_1\ f_2\ f_3]$
x_2	$f(x_2) = [f_2]$		$[f_1\ f_2\ f_3]$	
		$[f_2\ f_3]$		
x_3	$f(x_3) = [f_3]$			

Een eenvoudig voorbeeld, waarin $f(x) = x^3$ en x de reele waarden 0,1,3,6,7 en 10 heeft ziet er dus als volgt uit:

x	f(x)					
0	0					
		1				
1	1		4			
		13		1		
3	27		10		0	
		63		1		0
6	216		16		0	
		127		1		
7	343		23			
		219				
10	1000					

In dit voorbeeld zien wij, dat de gedeelde differenties van de derde orde constant = 1 zijn, zodat die van hogere orde nul zijn. Dit is geen toeval. Immers men ziet direct uit (1.4) en (1.13), dat als $f(x) = x^n$ is, $[f_0\ f_1 \dots f_n] = 1$ is. Overigens bewijst men gemakkelijk dat, als $f(x) = g(x) + h(x)$, ook $[f_0\ f_1 \dots f_n] = [g_0\ g_1 \dots g_n] + [h_0\ h_1 \dots h_n]$ en ook dat, als $f(x) = c.\ g(x)$, ook $[f_0 f_1 \dots f_n] = c.\,[f_0\ f_1 \dots f_n]$. Daaruit volgt direct de belangrijke stelling:

Is $f(x)$ een polynoom van de graad n, dan zijn de gedeelde differenties van de n-de orde constant en dus alle van hogere orde nul.

Ook volgt direct uit (1.4) en (1.13), dat voor $f(x) = 1/x$ geldt $[f_0\ f_1 \dots f_n] = (-1)^n\ (x_0\ x_1 \dots x_n)^{-1}$.

Ook de restterm laat zich gemakkelijk met behulp van de gedeelde differenties uitdrukken. Uit (1.7), (1.8), (1.10) en (1.13) volgt nl.:

$$R_{n+1}(x) = [f_0\ f_1 \dots f_n\ f]\ \psi_{n+1}(x). \tag{1.19}$$

De betekenis van de interpolatieformules zou slechts gering zijn, wanneer wij niets konden vertellen over de grootte van de restterm. Immers is het natuurlijk onze bedoeling in $f_n^*(x)$ een goede benadering voor $f(x)$ zelf te vinden en nu hebben wij wel de middelen om $f_n^*(x)$ te bepalen, maar de essentiele moeilijkheid van de interpolatie is daarmede slechts afgeschoven op $R_{n+1}(x)$. Wij zullen hier later nog uitvoeriger op ingaan, maar wij kunnen nu alvast gemakkelijk succes bereiken door ons te beperken tot het geval, dat alle basispunten op de reëele as liggen en $f(x)$ een reëele functie van de reëele veranderlijke x is, welke functie bovendien in het segment, bepaald door de basispunten, een continue n-de afgeleide bezit. Het is overigens duidelijk, dat dit voor de beoefenaar van de numerieke wiskunde slechts uiterst zelden een beperking inhoudt.

Zij a het kleinste en b het grootste van alle getallen $x_0, x_1, \dots x_n$ dan heeft $R_{n+1}(x) = f(x) - f_n^*(x)$ voor $a \leqq x \leqq b$ minstens n+1 nulpunten (nl. de basispunten en eventuele andere nulpunten). Volgens de stelling van Rolle heeft de n-de afgeleide $f^{(n)}(x) - f_n^{*(n)}(x)$ dus in het interval $a < x < b$ minstens één nulpunt, zeg ξ. Uit (1.5) en (1.13) volgt $f_n^{*(n)}(x) = n!\,[f_0\ f_1 \dots f_n]$, dus volgt

$$[f_0\ f_1 \dots f_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\quad ,\ a < \xi < b. \tag{1.20}$$

Wanneer wij alle basispunten laten samenvallen met x_0 vinden wij

$$\underbrace{[f_0\ f_0 \dots f_0]}_{n+1 \text{ maal}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{1.21}$$

Deze formule stelt ons in staat gedeelde differenties te definieren, wanneer twee of meer basispunten samenvallen. Als voorbeeld geven wij het gedeelde differentieschema voor $f(x) = x^4$, als de basispunten zijn 0,1,1,2,2,2,4. Met behulp van $f'(x) = 4\,x^3$ en $f''(x) = 12\,x^2$ vinden wij:

$$
\begin{array}{llllll}
x & f(x) = x^4 & & & & \\
0 & 0 & & & & \\
 & & 1 & & & \\
1 & 1 & & 3 & & \\
 & & \underline{4} & & 4 & \\
1 & 1 & & 11 & & 1 \\
 & & 15 & & 6 & \\
2 & 16 & & 17 & & 1 \\
 & & \underline{32} & & 7 & \\
2 & 16 & & \underline{24} & & 1 \\
 & & \underline{32} & & 10 & \\
2 & 16 & & 44 & & \\
 & & 120 & & & \\
4 & 256 & & & &
\end{array}
$$

Onderstreept zijn de gedeelde differenties, die bepaald zijn met behulp van afgeleiden. Tevens zien wij weer, dat de vierde differenties allen = 1 zijn, zoals wij al aangetoond hadden.

Wij kunnen nu ook de restterm een prettige gedaante geven. Immers uit (1.19) en (1.20) volgt:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\quad \psi_{n+1}(x), \tag{1.22}$$

waarin ξ een of andere waarde is in het segment bepaald door de basispunten en x of, indien x reeds in het segment van de basispunten ligt, wat in het geval van interpolatie (in tegenstelling met extrapolatie) altijd het geval is, in het segment bepaald door de basispunten, dus $a < \xi < b$. Door voor de optredende n-de afgeleide de extreme waarden te kiezen, verkrijgen wij dus een bruikbare, hoewel wellicht pessimistische schatting voor de restterm. Kiezen wij als voorbeeld $f(x) = \sin x$ en als basispunten $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$, $x_2 = \pi$, $x_3 = 3\pi/2$ en $x_4 = 2\pi$ en kiezen wij $x = 3\pi/4$, dan weten wij, dat alle afgeleiden in absolute waarde maximaal 1 zijn, zodat dus:

$$\left|R_5(3\pi/4)\right| = \frac{1}{5!}\cdot\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{5\pi}{4} = 0{,}143$$

In werkelijkheid is in dit geval $R_5(3\pi/4) = 0{,}082$.

Een interessant resultaat verkrijgen wij door alle basispunten samen te laten vallen in x_0. Uit (1.14), (1.21) en (1.22) volgt dan al:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}\{x_0+\vartheta(x-x_0)\}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad 0<\vartheta<1 \tag{1.23}$$

Dit is de formule van Taylor met restterm in de vorm van Lagrange! Wij zullen nu enige toepassingen van het voorgaande behandelen.

Het eerste voorbeeld is aan onze praktijk ontleend: Gevraagd een zo eenvoudig mogelijk polynoom $f(x)$ te bepalen, zodanig, dat $f(0)= 1$, $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ en $f(1) = f''(1)= 0$, $f'(1)= C$.

Wij stellen een schema van gedeelde differenties op uitgaande van vier basispunten $x = 0$ en drie basispunten $x = 1$. De onderstreepte waarden volgen weer uit de gegeven afgeleiden, waarna de rest van het schema kan worden gecompleteerd. Uit (1.15) volgt nu direct:

$$
\begin{array}{cccccccc}
x & f(x) & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & & \\
 & & \underline{0} & & & & & \\
0 & 1 & & \underline{0} & & & & \\
 & & \underline{0} & & \underline{0} & & & \\
0 & 1 & & \underline{0} & & -1 & & \\
 & & \underline{0} & & -1 & & C+4 & \\
0 & 1 & & -1 & & C+3 & & -4C-10 \\
 & & -1 & & C+2 & & -3C-6 & \\
1 & 0 & & C+1 & & -2C-3 & & \\
 & & \underline{C} & & -C-1 & & & \\
1 & 0 & & \underline{0} & & & & \\
 & & \underline{C} & & & & & \\
1 & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

$$f(x) = 1 + 0.\,x + 0.\,x^2 + 0.\,x^3 - 1.\,x^4 + (C+4)\,x^4(x-1) + (-4C-10).\,x^4\,(x-1)^2 = 1-(5C + 15)\,x^4 +(9C+24)\,x^5-(4C+10)\,x^6.$$

Stel, dat wij de eis $f'''(0)= 0$ laten vallen. Dan behoeven we slechts in het eerste basispunt $x= 0$ te laten vervallen en vinden:

$$f(x) = 1+0.\,x+0.\,x^2 - 1.\,x^3 + (C+3)\,x^3\,(x-1) + (-3C-6)\,x^3\,(x-1)^2$$

$$= 1- (4C+10)\,x^3 + (7C + 15)\,x^4 - (3C+6)\,x^5\,.$$

Het tweede voorbeeld betreft het invers interpoleren in een tafel van een functie, waarin het argument met gelijke intervallen opklimt. Het direct interpoleren, d.w.z. het bepalen van de functie bij voorgeschreven argument, in zulk een argument zullen wij nog uitvoerig behandelen. Een van de manieren om invers te interpoleren, d.w.z. het bepalen van het argument bij voorgeschreven waarde van de functie, sluit echter direct bij het behandelde aan. Door nl. de rol van functie en argument te verwisselen, hebben wij een functietafel, waarin wij direct kunnen interpoleren, doch waarin de intervallen van het argument niet gelijk zijn.

Als voorbeeld bepalen wij de waarde van x, waarvoor $\sin x = 0{,}20000$ uit de volgende tabel :

x^o	sin x	x			
5	0,08716	5			
			57,81		
10	0,17365	10		5,2	
			58,71		12
15	0,25882	15		8,2	
			60,10		
20	0,34202	20			

Wij hebben gedeelde differenties van x als functie van sin x bepaald. Als basispunten nemen wij nu achtereenvolgens de punten, waarvoor sin x zo dicht mogelijk bij 0,20000 ligt, dus eerst 0,17365, dan 0,25882, dan 0,08716 en dan 0,34202.

Dan is volgens de formule van Newton:

$$x_3^* = 10 + 58{,}71\ (0{,}20000 - 0{,}17365) + 5{,}2\ (0{,}20000 - 0{,}17365)\times$$
$$\times(0{,}20000 - 0{,}25882) + 12\ (0{,}20000 - 0{,}17365)(0{,}20000 - 0{,}25882)\times$$
$$\times(0{,}20000 - 0{,}08716) = 10 + 1{,}5470 - 0{,}0081 - 0{,}0021 = 11{,}537,$$

wat inderdaad de juiste waarde is.

Een wat algemener geval treedt op, wanneer twee functies, zeg y en z getabelleerd zijn als functie van een parameter x, die ons achteraf niet meer interesseert. Willen wij dan de waarde van z bij voorgeschreven waarde van y hebben, dan is het niet nodig eerst door inverse interpolatie de x te bepalen en hieruit weer de z, maar men kan direct uit y de z vinden. Het kan ook het grote voordeel hebben, dat zowel y als z zulke onaangename functies van x zijn, dat het vinden van de x niet wel mogelijk is, terwijl z als functie van y heel normaal is. Als voorbeeld hiervan kiezen wij $y = e^x + x$ en $z = e^x - x$. Gevraagd wordt uit de volgende tabel door interpolatie de waarde van z te vinden, waarvan y = 300 is.

x	y	z
5,4	226,80642	216,00642
5,5	250,19193	239,19193
5,6	276,02641	264,82641
5,7	304,56740	293,16740
5,8	336,09956	324,49956
5,9	370,93747	359,13747

Wij schrijven dit over in een nieuwe tabel in een wat prettiger volgorde en bepalen de gedeelde differenties:

y	z					
276,02641	264,82641					
		0,9929925				
304,56740	293,16740		$1,350.10^{-5}$			
		0,9926437		$-2,830.10^{-8}$		
250,19193	239,19193		$1,180.10^{-5}$		$9,12.10^{-11}$	
		0,9930158		$-3,279.10^{-8}$		$-2,13.10^{-13}$
336,09956	324,49956		$1,435.10^{-5}$		$7,10.10^{-11}$	
		0,9926802		$-2,808.10^{-8}$		
226,80642	216,00642		$1,096.10^{-5}$			
		0,9930619				
370,93747	359,13747					

Door interpolatie vinden wij dan:

$z = 264,82641 + 23,805595 - 0,001478 + 0,000154 + 0,000018 + 0,000003 =$ 288,63070. In dit geval zouden wij in de praktijk natuurlijk anders te werk gaan. Wij zouden een e^x-tafel met fijner argument nemen en door een beetje proberen de bijpassende waarde van x zoeken. Door dit te doen vinden, dat $x = 5,6846518$ en $z = 288,63070$, dus ons antwoord was precies juist.

2. Gelijke intervallen.

Wij gaan nu het voor de toepassingen verreweg het meest belangrijke geval bezien, dat het verschil tussen twee opeenvolgende waarden van het argument constant is, of anders gezegd, dat de basispunten equidistant zijn. Het genoemd verschil noemen we het interval en geven we aan met de letter w.

De noemer $x_n - x_o$, welke volgens (1,18) nodig is om met de (n-1)ste gedeelde differenties de n-de te berekenen, is nu eenvoudig = nw. Maar juist omdat deze noemer constant is, is het wel zo gemakkelijk, niet met de differentiequotienten te rekenen, maar met de differenties zelf, welke veel eenvoudiger te berekenen zijn, en in de formule de nodige correcties aan te brengen.

Het is voor het volgende van groot belang een weloverwogen nomenclatuur te bezitten, die ondubbelzinnigheid paart aan eenvoud. Jammer genoeg is er in de literatuur grote verscheidenheid. Wij zullen drie verschillende systemen volgen, welke elk onder omstandigheden voordelen hebben. Gemeenschappelijk in alle drie systemen is de notatie van argument en functie. Het argument $x_o + kw$, waarin x_o een willekeurig argument is, noemen we x_k; de erbijbehorende functiewaarde $f(x_k)$ noemen we f_k. Verder geven we een differentie van de k-de orde weer door de symbolische k-de macht van een differentieoperator (Δ, ∇ of δ) te plaatsen voor het functieteken. Overigens laten we het functieteken altijd weg, als er geen gevaar voor vergissing bestaat. Tenslotte geven we de plaats van de differentie in het schema aan door een index rechts onder het operatorsymbool, maar de manier waarop de plaats en index samenhangen verschilt in de drie systemen en wordt gedefinieerd door:

Voorwaartse differenties : $$\Delta_p^k f = \Delta_{p+1}^{k-1} f - \Delta_p^{k-1} f \;;\; \Delta_p^o f = f_p \qquad (2,1)$$

Achterwaartse differenties : $$\nabla_p^k f = \nabla_p^{k-1} f - \nabla_{p-1}^{k-1} f \;;\; \nabla_p^o f = f_p \qquad (2,2)$$

Centrale differenties : $$\delta_p^k f = \delta_{p+1/2}^{k-1} f - \delta_{p-1/2}^{k-1} f \;;\; \delta_p^o f = f_p \qquad (2,3)$$

Bij gebruikmaking van voorwaartse of achterwaartse notatie heeft de index slechts gehele waarden ; bij centrale notatie daarentegen is de index een geheel getal of een geheel getal plus een half. Het eenvoudigste is de hieronder uitgeschreven overzichten goed te bezien. Wij hebben tegelijk ook somfuncties ingevoerd, welke het differentieschema naar de linkerzijde voltooien. Is de functie gegeven, dan zijn ook de differenties bepaald. De somfuncties slechts in zoverre, dat we in iedere kolom één getal vrij kunnen kiezen.

Voorwaartse differenties:

Arg.		Somfuncties		Functie		Differenties			
x_{-2}		Δ^{-2}_{-1}		f_{-2}		Δ^{2}_{-3}		Δ^{4}_{-4}	
	---		Δ^{-1}_{-1}		Δ^{1}_{-2}		Δ^{3}_{-3}		---
x_{-1}		Δ^{-2}_{0}		f_{-1}		Δ^{2}_{-2}		Δ^{4}_{-3}	
	---		Δ^{-1}_{0}		Δ^{1}_{-1}		Δ^{3}_{-2}		---
x_{0}		Δ^{-2}_{1}		f_{0}		Δ^{2}_{-1}		Δ^{4}_{-2}	
	---		Δ^{-1}_{1}		Δ^{1}_{0}		Δ^{3}_{-1}		---
x_{1}		Δ^{-2}_{2}		f_{1}		Δ^{2}_{0}		Δ^{4}_{-1}	
	---		Δ^{-1}_{2}		Δ^{1}_{1}		Δ^{3}_{0}		---
x_{2}		Δ^{-2}_{3}		f_{2}		Δ^{2}_{1}		Δ^{4}_{0}	

Achterwaartse differenties:

Arg.		Somfuncties		Functie		Differenties			
x_{-2}		∇^{-2}_{-3}		f_{-2}		∇^{2}_{-1}		∇^{4}_{0}	
	---		∇^{-1}_{-2}		∇^{1}_{-1}		∇^{3}_{0}		---
x_{-1}		∇^{-2}_{-2}		f_{-1}		∇^{2}_{0}		∇^{4}_{1}	
	---		∇^{-1}_{-1}		∇^{1}_{0}		∇^{3}_{1}		---
x_{0}		∇^{-2}_{-1}		f_{0}		∇^{2}_{1}		∇^{4}_{2}	
	---		∇^{-1}_{0}		∇^{1}_{1}		∇^{3}_{2}		---
x_{1}		∇^{-2}_{0}		f_{1}		∇^{2}_{2}		∇^{4}_{3}	
	---		∇^{-1}_{1}		∇^{1}_{2}		∇^{3}_{3}		---
x_{2}		∇^{-2}_{1}		f_{2}		∇^{2}_{3}		∇^{4}_{4}	

Centrale differenties:

Arg.		Somfuncties		Functie		Differenties			
x_{-2}		δ^{-2}_{-2}		f_{-2}		δ^{2}_{-2}		δ^{4}_{-2}	
	---		$\delta^{-1}_{-3/2}$		$\delta^{1}_{-3/2}$		$\delta^{3}_{-3/2}$		---
x_{-1}		δ^{-2}_{-1}		f_{-1}		δ^{2}_{-1}		δ^{4}_{-1}	
	---		$\delta^{-1}_{-1/2}$		$\delta^{1}_{-1/2}$		$\delta^{3}_{-1/2}$		---
x_{0}		δ^{-2}_{0}		f_{0}		δ^{2}_{0}		δ^{4}_{0}	
	---		$\delta^{-1}_{1/2}$		$\delta^{1}_{1/2}$		$\delta^{3}_{1/2}$		---
x_{1}		δ^{-2}_{1}		f_{1}		δ^{2}_{1}		δ^{4}_{1}	
	---		$\delta^{-1}_{3/2}$		$\delta^{1}_{3/2}$		$\delta^{3}_{3/2}$		---
x_{2}		δ^{-2}_{2}		f_{2}		δ^{2}_{2}		δ^{4}_{2}	

Uitdrukkelijk zij er op gewezen, dat er in wezen niet het minste verschil bestaat tussen deze types differenties; het betreft alleen een formele kwestie van notatie.

Het verband tussen de gedeelde differenties bij constant interval

w en de

gewone differenties is, wanneer de basispunten in volgorde $x_0, x_1 \dots x_n$ zijn:

$$\left[f_0\ f_1\ \dots f_n\right] = \frac{1}{n!w^n}\ \Delta_0^n = \frac{1}{n!w^n}\nabla_n^n = \frac{1}{n!w^n}\delta_{n/2}^n \qquad (2.4)$$

Tenslotte nog enige formele conventies. Wij kiezen als x_0 een basispunt dicht bij x en stellen $x = x_0 + p\ w$, waarin dus p i.h.a. klein is, bijv. $0 \leq p \leq 1$ of $-1/2 \leq p \leq 1/2$. De bijbehorende functiewaarde geven wij aan met f_p en de door het polyncom geleverde benadering met f_p^*. De index p geeft nu niet meer het aantal basispunten aan. Verder is algemeen $x_i = x_0 + i\ w$.

De eerste interpolatieformule, welke wij onder de loupe nemen is die van Lagrange. Is het aantal basis-punten even, zeg 2 k, dan nummeren wij ze $x_{-k+1}, \dots, x_0, \dots, x_k$. Is het aantal oneven, zeg 2 k+1, dan nummeren wij $x_{-k}, \dots, x_0, \dots x_k$. Wij schrijven nu (1.11) als

$$f_p^* = \sum_{i=-k+1}^{k} f_i \cdot L_i^{2k}(p) \qquad (2.5)$$

of

$$f_p^* = \sum_{i=-k}^{k} f_i \cdot L_i^{2k+1}(p) \qquad (2.6)$$

Hierin zijn $L_i^n(p)$ de polynomen of coëfficienten van Lagrange. Het superscript 2k of 2k+1 duidt geen macht aan, maar is slechts een indicatie van het aantal basispunten. Wij kunnen ze nu direct uitrekenen en vinden dan:

$$L_i^{2k}(p) = \prod_{\substack{j=-k+1 \\ \neq i}}^{k} \frac{p-j}{i-j} = \frac{(-1)^{k+i}}{(k+i-1)!(k-i)!(p-i)} \prod_{j=1}^{2k} (p+k-j), \qquad (2.7)$$

$$L_i^{2k+1}(p) = \prod_{\substack{j=-k \\ \neq i}}^{k} \frac{p-j}{i-j} = \frac{(-1)^{k+i}}{(k+i)!(k-i)!(p-i)} \prod_{j=0}^{2k} (p+k-j). \qquad (2.8)$$

Deze polynomen zijn eenvoudig. Het is zelfs maar nodig de helft ervan te berekenen, want meetkundig evident en gemakkelijk uit (2.7) en (2.8) af te leiden zijn de symmetrierelaties:

$$L_i^{2k}(p) = L_{1-i}^{2k}(1-p), \qquad (2.9)$$

$$L_i^{2k+1}(p) = L_{-i}^{2k+1}(-p) \ . \qquad (2.10)$$

Verder is er nog een goede controle op de berekening. Interpoleren wij nl. de functie $f(x) \equiv 1$, dat is een polynoom van de nulde graad, zodat de restterm altijd nul is, dan volgt direct

$$\sum_{i=-k+1}^{k} L_i^{2k}(p) = \sum_{i=-k}^{k} L_i^{2k+1}(p) = 1. \qquad (2.11)$$

Rondt men de waarden van de polynomen af tot een zeker aantal decimalen, dan moet men altijd zorgen, dat (2.11) blijftgelden.

In de volgende tafels geven wij de waarden van de coefficienten L_i^3, L_i^4, L_i^5 en L_i^6 voor p = 0 (0,01) 1. Met het oog op de relaties (2.9) en (2.10) kunnen de tafels zo beknopt gegeven worden. Voor uitgebreider tafels zie men de MTP-tafel : "Tables of Lagrangian Coefficients".

Een van de nadelen van Lagrange-interpolatie is, dat voor elk aantal basispunten een tafel van evenzoveel interpolatiecoefficienten nodig is. Ook vergemakkelijkt de kennis van de geinterpoleerde met behulp van een zeker aantal basispunten geenszins de bepaling met behulp van meer basispunten. Het hele werk moet overgedaan worden. In het algemeen is het ook moeilijk te zien hoeveel basispunten nodig zijn om een gewenste precisie te bereiken, zodat men bijv. juist verschillende aantallen basispunten moet proberen. Daar staat tegenover, dat geen voorbereiding nodig is voor het maken van differenties. Dit laatste is echter maar ten dele een verdienste, omdat, zoals wij zullen zien, het maken van differenties ook uit anderen hoofde van groot belang is.

Vervolgens gaan wij de formule van Newton beschouwen voor aequidistamte basispunten. Deze formule kan nu verschillende vormen aannemen naar gelang van de volgorde, waarin wij de basispunten kiezen.

Allereerst kiezen wij de basispunten in de volgorde: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. De functie $\psi_n(x)$ uit (1.10) neemt een zeer eenvoudige vorm aan:

$$\psi_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) = w^n\, n!\, \binom{p}{n} \;. \qquad (2.12)$$

Met het oog op (1.14) en (2.4) vinden wij dus:

$$f_p^* = \sum_{i=0}^{n} \binom{p}{i} \Delta_0^i = f_0 + p\Delta_0^1 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta_0^2 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}\Delta_0^n \qquad (2.13)$$

Deze formule staat bekend als die van Gregory-Newton. De erin optredende polynomen zijn eenvoudig binomiaalcoefficienten. Voor p = 0 (0,01)1 geven wij hieronder tabellen ervan. Van $\binom{p}{2}$ zijn de opgegeven waarden exact.

Een variant van de formule verkrijgen wij, door als basispunten te kiezen x_0, x_{-1}, $x_{-2}, \ldots, x_{-n}$. Wij vinden dan

$$f_p^* = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{-p}{i} \nabla_0^i =$$

$$= f_0 + p\nabla_0 + \frac{p(p+1)}{2!}\nabla_0^2 + \ldots + \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}\nabla_0^n \qquad (2.14)$$

Aangezien de voornaamste toepassing van deze formule betrekking heeft op negatieve waarden van p, is het niet nodig van deze nieuwe coefficienten ook tafels te geven.

p	L^3_{-1}	L^3_0	L^3_1
0,00	-0,00000	+1,00000	+0,00000
0,01	-0,00495	+0,99990	+0,00505
0,02	-0,00980	+0,99960	+0,01020
0,03	-0,01455	+0,99910	+0,01545
0,04	-0,01920	+0,99840	+0,02080
0,05	-0,02375	+0,99750	+0,02625
0,06	-0,02820	+0,99640	+0,03180
0,07	-0,03255	+0,99510	+0,03745
0,08	-0,03680	+0,99360	+0,04320
0,09	-0,04095	+0,99190	+0,04905
0,10	-0,04500	+0,99000	+0,05500
0,11	-0,04895	+0,98790	+0,06105
0,12	-0,05280	+0,98560	+0,06720
0,13	-0,05655	+0,98310	+0,07345
0,14	-0,06020	+0,98040	+0,07980
0,15	-0,06375	+0,97750	+0,08625
0,16	-0,06720	+0,97440	+0,09280
0,17	-0,07055	+0,97110	+0,09945
0,18	-0,07380	+0,96760	+0,10620
0,19	-0,07695	+0,96390	+0,11305
0,20	-0,08000	+0,96000	+0,12000
0,21	-0,08295	+0,95590	+0,12705
0,22	-0,08580	+0,95160	+0,13420
0,23	-0,08855	+0,94710	+0,14145
0,24	-0,09120	+0,94240	+0,14880
0,25	-0,09375	+0,93750	+0,15625
0,26	-0,09620	+0,93240	+0,16380
0,27	-0,09855	+0,92710	+0,17145
0,28	-0,10080	+0,92160	+0,17920
0,29	-0,10295	+0,91590	+0,18705
0,30	-0,10500	+0,91000	+0,19500
0,31	-0,10695	+0,90390	+0,20305
0,32	-0,10880	+0,89760	+0,21120
0,33	-0,11055	+0,89110	+0,21945
0,34	-0,11220	+0,88440	+0,22780
0,35	-0,11375	+0,87750	+0,23625
0,36	-0,11520	+0,87040	+0,24480
0,37	-0,11655	+0,86310	+0,25345
0,38	-0,11780	+0,85560	+0,26220
0,39	-0,11895	+0,84790	+0,27105
0,40	-0,12000	+0,84000	+0,28000
0,41	-0,12095	+0,83190	+0,28905
0,42	-0,12180	+0,82360	+0,29820
0,43	-0,12255	+0,81510	+0,30745
0,44	-0,12320	+0,80640	+0,31680
0,45	-0,12375	+0,79750	+0,32625
0,46	-0,12420	+0,78840	+0,33580
0,47	-0,12455	+0,77910	+0,34545
0,48	-0,12480	+0,76960	+0,35520
0,49	-0,12495	+0,75990	+0,36505
0,50	-0,12500	+0,75000	+0,37500

p	L^4_{-1}	L^4_0	L^4_1	L^4_2	
0,00	−0,0000000	+1,0000000	+0,0000000	−0,0000000	1,00
0,01	−0,0032835	+0,9949005	+0,0100495	−0,0016665	0,99
0,02	−0,0064680	+0,9896040	+0,0201960	−0,0033320	0,98
0,03	−0,0095545	−0,9841135	+0,0304365	−0,0049955	0,97
0,04	−0,0125440	+0,9784320	+0,0407680	−0,0066560	0,96
0,05	−0,0154375	+0,9725625	+0,0511875	−0,0083125	0,95
0,06	−0,0182350	+0,9665080	+0,0616920	−0,0099640	0,94
0,07	−0,0209405	+0,9602715	+0,0722785	−0,0116095	0,93
0,08	−0,0235520	+0,9538560	+0,0829440	−0,0132480	0,92
0,09	−0,0260715	+0,9472645	+0,0936855	−0,0148785	0,91
0,10	−0,0285000	+0,9405000	+0,1045000	−0,0165000	0,90
0,11	−0,0308385	+0,9335655	+0,1153845	−0,0181115	0,89
0,12	−0,0330880	+0,9264640	+0,1263360	−0,0197120	0,88
0,13	−0,0352495	+0,9191985	+0,1373515	−0,0213005	0,87
0,14	−0,0373240	+0,9117720	+0,1484280	−0,0228760	0,86
0,15	−0,0393125	+0,9041875	+0,1595625	−0,0244375	0,85
0,16	−0,0412160	+0,8964480	+0,1707520	−0,0259840	0,84
0,17	−0,0430355	+0,8885565	+0,1819935	−0,0275145	0,83
0,18	−0,0447720	+0,8805160	+0,1932840	−0,0290280	0,82
0,19	−0,0464265	+0,8723295	+0,2046205	−0,0305235	0,81
0,20	−0,0480000	+0,8640000	+0,2160000	−0,0320000	0,80
0,21	−0,0494935	+0,8555305	+0,2274195	−0,0334565	0,79
0,22	−0,0509080	+0,8469240	+0,2388760	−0,0348920	0,78
0,23	−0,0522445	+0,8381835	+0,2503665	−0,0363055	0,77
0,24	−0,0535040	+0,8293120	+0,2618880	−0,0376960	0,76
0,25	−0,0546875	+0,8203125	+0,2734375	−0,0390625	0,75
0,26	−0,0557960	+0,8111880	+0,2850120	−0,0404040	0,74
0,27	−0,0568305	+0,8019415	+0,2966085	−0,0417195	0,73
0,28	−0,0577920	+0,7925760	+0,3082240	−0,0430080	0,72
0,29	−0,0586815	+0,7830945	+0,3198555	−0,0442685	0,71
0,30	−0,0595000	+0,7735000	+0,3315000	−0,0455000	0,70
0,31	−0,0602485	+0,7637955	+0,3431545	−0,0467015	0,69
0,32	−0,0609280	+0,7539340	+0,3548160	−0,0478720	0,68
0,33	−0,0615395	+0,7440685	+0,3664815	−0,0490105	0,67
0,34	−0,0620840	+0,7340520	+0,3781480	−0,0501160	0,66
0,35	−0,0625625	+0,7239375	+0,3898125	−0,0511875	0,65
0,36	−0,0629760	+0,7137280	+0,4014720	−0,0522240	0,64
0,37	−0,0633255	+0,7034265	+0,4131235	−0,0532245	0,63
0,38	−0,0636120	+0,6930360	+0,4247640	−0,0541880	0,62
0,39	−0,0638365	+0,6825595	+0,4363905	−0,0551135	0,61
0,40	−0,0640000	+0,6720000	+0,4480000	−0,0560000	0,60
0,41	−0,0641035	+0,6613605	+0,4595895	−0,0568465	0,59
0,42	−0,0641480	+0,6506440	+0,4711560	−0,0576520	0,58
0,43	−0,0641345	+0,6398535	+0,4826965	−0,0584155	0,57
0,44	−0,0640640	+0,6289920	+0,4942080	−0,0591360	0,56
0,45	−0,0639375	+0,6180625	+0,5056875	−0,0598125	0,55
0,46	−0,0637560	+0,6070680	+0,5171320	−0,0604440	0,54
0,47	−0,0635205	+0,5960115	+0,5285385	−0,0610295	0,53
0,48	−0,0632320	+0,5848960	+0,5399040	−0,0615680	0,52
0,49	−0,0628915	+0,5737245	+0,5512255	−0,0620585	0,51
0,50	−0,0625000	+0,5625000	+0,5625000	−0,0625000	0,50
	L^4_2	L^4_1	L^4_0	L^4_{-1}	p

p	L_{-2}	L^5_{-1}	L^5_o	L^5_1	L^5_2
0,00	+0,00000000	0,00000000	1,00000000	0,00000000	0,00000000
0,01	+0,00082908	-0,00659983	+0,99987500	+0,00673317	-0,00083742
0,02	+0,00164934	-0,01306536	+0,99950004	+0,01359864	-0,00168266
0,03	+0,00246028	-0,01939563	+0,99887520	+0,02059537	-0,00253522
0,04	+0,00326144	-0,02558976	+0,99800064	+0,02772224	-0,00339456
0,05	+0,00405234	-0,03164687	+0,99687656	+0,03497813	-0,00426016
0,06	+0,00483254	-0,03756616	+0,99550324	+0,04236184	-0,00513146
0,07	+0,00560158	-0,04334683	+0,99388100	+0,04987217	-0,00600792
0,08	+0,00635904	-0,04898816	+0,99201024	+0,05750784	-0,00688896
0,09	+0,00710448	-0,05446943	+0,98989140	+0,06526757	-0,00777402
0,10	+0,00783750	-0,05985000	+0,98752500	+0,07315000	-0,00866250
0,11	+0,00855763	-0,06506923	+0,98491160	+0,08115377	-0,00955382
0,12	+0,00926464	-0,07014656	+0,98205184	+0,08927744	-0,01044736
0,13	+0,00995798	-0,07508143	+0,97894640	+0,09751957	-0,01134252
0,14	+0,01063734	-0,07987336	+0,97559604	+0,10587864	-0,01223866
0,15	+0,01130234	-0,08452187	+0,97200156	+0,11435313	-0,01313516
0,16	+0,01195264	-0,08902656	+0,96816384	+0,12294144	-0,01403136
0,17	+0,01258788	-0,09338703	+0,96408380	+0,13164197	-0,01492662
0,18	+0,01320774	-0,09760296	+0,95976244	+0,14045304	-0,01582026
0,19	+0,01381188	-0,10167403	+0,95520080	+0,14937297	-0,01671162
0,20	+0,01440000	-0,10560000	+0,95040000	+0,15840000	-0,01760000
0,21	+0,01497178	-0,10938063	+0,94536120	+0,16753237	-0,01848472
0,22	+0,01552694	-0,11301576	+0,94008564	+0,17676824	-0,01936506
0,23	+0,01606518	-0,11650523	+0,93457460	+0,18610577	-0,02024032
0,24	+0,01658624	-0,11984896	+0,92882944	+0,19554304	-0,02110976
0,25	+0,01708984	-0,12304687	+0,92285156	+0,20507813	-0,02197266
0,26	+0,01757574	-0,12609896	+0,91664244	+0,21470904	-0,02282826
0,27	+0,01804368	-0,12900523	+0,91020360	+0,22443377	-0,02367582
0,28	+0,01849344	-0,13176576	+0,90353664	+0,23425024	-0,02451456
0,29	+0,01892478	-0,13438063	+0,89664320	+0,24415637	-0,02534372
0,30	+0,01933750	-0,13685000	+0,88952500	+0,25415000	-0,02616250
0,31	+0,01973138	-0,13917403	+0,88218380	+0,26422897	-0,02697012
0,32	+0,02010624	-0,14135296	+0,87462144	+0,27439104	-0,02776576
0,33	+0,02046188	-0,14338703	+0,86683980	+0,28463397	-0,02854862
0,34	+0,02079814	-0,14527656	+0,85884084	+0,29495544	-0,02931786
0,35	+0,02111484	-0,14702187	+0,85062656	+0,30535313	-0,03007266
0,36	+0,02141184	-0,14862336	+0,84219904	+0,31582464	-0,03081216
0,37	+0,02168898	-0,15008143	+0,83356040	+0,32636757	-0,03153552
0,38	+0,02194614	-0,15139656	+0,82471284	+0,33697944	-0,03224186
0,39	+0,02218318	-0,15256923	+0,81565860	+0,34765777	-0,03293032
0,40	+0,02240000	-0,15360000	+0,80640000	+0,35840000	-0,03360000
0,41	+0,02259648	-0,15448943	+0,79693940	+0,36920357	-0,03425002
0,42	+0,02277254	-0,15523816	+0,78727924	+0,38006584	-0,03487946
0,43	+0,02292808	-0,15584683	+0,77742200	+0,39098417	-0,03548742
0,44	+0,02306304	-0,15631616	+0,76737024	+0,40195584	-0,03607296
0,45	+0,02317734	-0,15664687	+0,75712656	+0,41297813	-0,03663516
0,46	+0,02327094	-0,15683976	+0,74669364	+0,42404824	-0,03717306
0,47	+0,02334378	-0,15689563	+0,73607420	+0,43516337	-0,03768572
0,48	+0,02339584	-0,15681536	+0,72527104	+0,44632064	-0,03817216
0,49	+0,02342708	-0,15659983	+0,71428700	+0,45751717	-0,03863142
0,50	+0,02343750	-0,15625000	+0,70312500	+0,46875000	-0,03906250

p	L_1^6	L_2^6	L_3^6	
0,00	+0,00000000	−0,00000000	+0,00000000	1,00
0,01	+0,01006508	−0,00250187	+0,00033329	0,99
0,02	+0,02026197	−0,00501433	+0,00066633	0,98
0,03	+0,03058412	−0,00752953	+0,00099867	0,97
0,04	+0,04102892	−0,01004790	+0,00133067	0,96
0,05	+0,05159274	−0,01256746	+0,00166146	0,95
0,06	+0,06227190	−0,01508649	+0,00199101	0,94
0,07	+0,07306272	−0,01760320	+0,00231905	0,93
0,08	+0,08396145	−0,02011575	+0,00264536	0,92
0,09	+0,09496431	−0,02262239	+0,00296967	0,91
0,10	+0,10606750	−0,02512125	+0,00329175	0,90
0,11	+0,11726719	−0,02761053	+0,00361134	0,89
0,12	+0,12855951	−0,03008840	+0,00392821	0,88
0,13	+0,13994058	−0,03255302	+0,00424210	0,87
0,14	+0,15140646	−0,03500257	+0,00455278	0,86
0,15	+0,16295320	−0,03743519	+0,00486001	0,85
0,16	+0,17457684	−0,03984906	+0,00516354	0,84
0,17	+0,18627333	−0,04224232	+0,00546314	0,83
0,18	+0,19803879	−0,04461313	+0,00575857	0,82
0,19	+0,20986902	−0,04695964	+0,00604960	0,81
0,20	+0,22176000	−0,04928000	+0,00633600	0,80
0,21	+0,23370765	−0,05157236	+0,00661753	0,79
0,22	+0,24570785	−0,05383487	+0,00689396	0,78
0,23	+0,25775649	−0,05606568	+0,00716507	0,77
0,24	+0,26984940	−0,05826294	+0,00743064	0,76
0,25	+0,28198242	−0,06042480	+0,00769043	0,75
0,26	+0,29415138	−0,06254943	+0,00794423	0,74
0,27	+0,30635209	−0,06463498	+0,00819183	0,73
0,28	+0,31858033	−0,06667960	+0,00843301	0,72
0,29	+0,33083188	−0,06868147	+0,00866755	0,71
0,30	+0,34310250	−0,07063875	+0,00889525	0,70
0,31	+0,35538796	−0,07254961	+0,00911590	0,69
0,32	+0,36768399	−0,07441224	+0,00932930	0,68
0,33	+0,37998634	−0,07622480	+0,00953524	0,67
0,34	+0,39229074	−0,07798551	+0,00973353	0,66
0,35	+0,40459289	−0,07969254	+0,00992397	0,65
0,36	+0,41688852	−0,08134410	+0,01010639	0,64
0,37	+0,42917335	−0,08293841	+0,01028058	0,63
0,38	+0,44144307	−0,08447367	+0,01044636	0,62
0,39	+0,45369338	−0,08594812	+0,01060356	0,61
0,40	+0,46592000	−0,08736000	+0,01075200	0,60
0,41	+0,47811862	−0,08870754	+0,01089150	0,59
0,42	+0,49028493	−0,08998901	+0,01102191	0,58
0,43	+0,50241465	−0,09120265	+0,01114305	0,57
0,44	+0,51450348	−0,09234678	+0,01125476	0,56
0,45	+0,52654711	−0,09341965	+0,01135690	0,55
0,46	+0,53854126	−0,09441957	+0,01144930	0,54
0,47	+0,55048166	−0,09534486	+0,01153183	0,53
0,48	+0,56236401	−0,09619384	+0,01160434	0,52
0,49	+0,57418404	−0,09696486	+0,01166669	0,51
0,50	+0,58593750	−0,09765625	+0,01171875	0,50
	L_0^6	L_{-1}^6	L_{-2}^6	p

p	L_{-2}^{6}	L_{-1}^{6}	L_{0}^{6}	
0,00	+0,00000000	-0,00000000	+1,00000000	1,00
0,01	+0,00049579	-0,0049[illegible]8	+0,99654209	0,99
0,02	+0,00098301	-0,0097[illegible]9	+0,99283571	0,98
0,03	+0,00146141	-0,01440126	+0,98883645	0,97
0,04	+0,00193077	-0,01893642	+0,98469396	0,96
0,05	+0,00239088	-0,02333957	+0,98026195	0,95
0,06	+0,00284153	-0,02761113	+0,97559318	0,94
0,07	+0,00328253	-0,03175156	+0,97069015	0,93
0,08	+0,00371368	-0,03576036	+0,96555663	0,92
0,09	+0,00413481	-0,03964106	+0,96019456	0,91
0,10	+0,00454575	-0,04339125	+0,95460750	0,90
0,11	+0,00494634	-0,04701252	+0,94879318	0,89
0,12	+0,00533643	-0,05050552	+0,94276977	0,88
0,13	+0,00571588	-0,05387093	+0,93652539	0,87
0,14	+0,00608456	-0,05710945	+0,93006822	0,86
0,15	+0,00644234	-0,06022184	+0,92340148	0,85
0,16	+0,00678910	-0,06320806	+0,91652844	0,84
0,17	+0,00712474	-0,06607133	+0,90945239	0,83
0,18	+0,00744917	-0,06881009	+0,90217669	0,82
0,19	+0,00776228	-0,07142601	+0,89470475	0,81
0,20	+0,00806400	-0,07392000	+0,88704000	0,80
0,21	+0,00835425	-0,07629299	+0,87918592	0,79
0,22	+0,00863298	-0,07854595	+0,87114603	0,78
0,23	+0,00890011	-0,08067987	+0,86292388	0,77
0,24	+0,00915560	-0,08269578	+0,85452308	0,76
0,25	+0,00939941	-0,08459473	+0,84594727	0,75
0,26	+0,00963151	-0,08637779	+0,83720010	0,74
0,27	+0,00985185	-0,08804607	+0,82828528	0,73
0,28	+0,01006043	-0,08960072	+0,81920655	0,72
0,29	+0,01025723	-0,09104288	+0,80996769	0,71
0,30	+0,01044225	-0,09237375	+0,80057250	0,70
0,31	+0,01061548	-0,09359454	+0,79102481	0,69
0,32	+0,01077694	-0,09470648	+0,78132849	0,68
0,33	+0,01092665	-0,09571085	+0,77148742	0,67
0,34	+0,01106461	-0,09660891	+0,76150554	0,66
0,35	+0,01119087	-0,09740199	+0,75138680	0,65
0,36	+0,01130545	-0,09809142	+0,74113516	0,64
0,37	+0,01140840	-0,09867854	+0,73075462	0,63
0,38	+0,01149978	-0,09916475	+0,72024921	0,62
0,39	+0,01157962	-0,09955143	+0,70962299	0,61
0,40	+0,01164800	-0,09984000	+0,69888000	0,60
0,41	+0,01170498	-0,10003191	+0,68802435	0,59
0,42	+0,01175063	-0,10012861	+0,67706015	0,58
0,43	+0,01178503	-0,10013159	+0,66599152	0,57
0,44	+0,01180828	-0,10004234	+0,65482260	0,56
0,45	+0,01182044	-0,09986238	+0,64355758	0,55
0,46	+0,01182164	-0,09959325	+0,63220062	0,54
0,47	+0,01181195	-0,09923649	+0,62075591	0,53
0,48	+0,01179150	-0,09879368	+0,60922767	0,52
0,49	+0,01176040	-0,09826640	+0,59762013	0,51
0,50	+0,01171875	-0,09765625	+0,58593750	0,50
	L_{3}^{6}	L_{2}^{6}	L_{1}^{6}	p

p	$\binom{p}{2}$	$\binom{p}{3}$	$\binom{p}{4}$	$\binom{p}{5}$	$\binom{p}{6}$
0,00	0,00000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,01	-0,00495	+0,0032835	-0,0024544	+0,0019586	-0,0016289
0,02	-0,00980	+0,0064680	-0,0048187	+0,0038357	-0,0031836
0,03	-0,01455	+0,0095545	-0,0070942	+0,0056328	-0,0046658
0,04	-0,01920	+0,0125440	-0,0092826	+0,0073518	-0,0060775
0,05	-0,02375	+0,0154375	-0,0113852	+0,0089943	-0,0074203
0,06	-0,02820	+0,0182360	-0,0134035	+0,0105619	-0,0086960
0,07	-0,03255	+0,0209405	-0,0153389	+0,0120564	-0,0099063
0,08	-0,03680	+0,0235520	-0,0171930	+0,0134793	-0,0110530
0,09	-0,04095	+0,0260715	-0,0189670	+0,0148322	-0,0121377
0,10	-0,04500	+0,0285000	-0,0206625	+0,0161168	-0,0131620
0,11	-0,04895	+0,0308385	-0,0222808	+0,0173345	-0,0141276
0,12	-0,05280	+0,0330880	-0,0238234	+0,0184869	-0,0150360
0,13	-0,05655	+0,0352495	-0,0252915	+0,0195756	-0,0158889
0,14	-0,06020	+0,0373240	-0,0266867	+0,0206021	-0,0166877
0,15	-0,06375	+0,0393125	-0,0280102	+0,0215678	-0,0174340
0,16	-0,06720	+0,0412160	-0,0292634	+0,0224743	-0,0181292
0,17	-0,07055	+0,0430355	-0,0304476	+0,0233229	-0,0187749
0,18	-0,07380	+0,0447720	-0,0315643	+0,0241151	-0,0193725
0,19	-0,07695	+0,0464265	-0,0326146	+0,0248523	-0,0199233
0,20	-0,08000	+0,0480000	-0,0336000	+0,0255360	-0,0204288
0,21	-0,08295	+0,0494935	-0,0345217	+0,0261675	-0,0208904
0,22	-0,08580	+0,0509080	-0,0353811	+0,0267481	-0,0213093
0,23	-0,08855	+0,0522445	-0,0361793	+0,0272792	-0,0216870
0,24	-0,09120	+0,0535040	-0,0369178	+0,0277622	-0,0220246
0,25	-0,09375	+0,0546875	-0,0375977	+0,0281982	-0,0223236
0,26	-0,09620	+0,0557960	-0,0382203	+0,0285888	-0,0225851
0,27	-0,09855	+0,0568305	-0,0387868	+0,0289350	-0,0228104
0,28	-0,10080	+0,0577920	-0,0392986	+0,0292381	-0,0230007
0,29	-0,10295	+0,0586815	-0,0397567	+0,0294995	-0,0231571
0,30	-0,10500	+0,0595000	-0,0401625	+0,0297202	-0,0232809
0,31	-0,10695	+0,0602485	-0,0405171	+0,0299016	-0,0233731
0,32	-0,10880	+0,0609200	-0,0408218	+0,0300448	-0,0234350
0,33	-0,11055	+0,0615395	-0,0410776	+0,0301510	-0,0234675
0,34	-0,11220	+0,0620840	-0,0412859	+0,0302212	-0,0234718
0,35	-0,11375	+0,0625625	-0,0414477	+0,0302568	-0,0234490
0,36	-0,11520	+0,0629760	-0,0415642	+0,0302587	-0,0234001
0,37	-0,11655	+0,0633255	-0,0416365	+0,0302281	-0,0233260
0,38	-0,11780	+0,0636120	-0,0416659	+0,0301661	-0,0232279
0,39	-0,11895	+0,0638365	-0,0416533	+0,0300737	-0,0231066
0,40	-0,12000	+0,0640000	-0,0416000	+0,0299520	-0,0229632
0,41	-0,12095	+0,0641035	-0,0415070	+0,0298020	-0,0227986
0,42	-0,12180	+0,0641480	-0,0413755	+0,0296248	-0,0226136
0,43	-0,12255	+0,0641345	-0,0412064	+0,0294214	-0,0224093
0,44	-0,12320	+0,0640640	-0,0410010	+0,0291927	-0,0221864
0,45	-0,12375	+0,0639375	-0,0407602	+0,0289397	-0,0219459
0,46	-0,12420	+0,0637560	-0,0404851	+0,0286634	-0,0216887
0,47	-0,12455	+0,0635205	-0,0401767	+0,0283648	-0,0214154
0,48	-0,12480	+0,0632320	-0,0398362	+0,0280447	-0,0211270
0,49	-0,12495	+0,0628915	-0,0394644	+0,0277040	-0,0208242
0,50	-0,12500	+0,0625000	-0,0390625	+0,0273438	-0,0205078

p	$\binom{p}{2}$	$\binom{p}{3}$	$\binom{p}{4}$	$\binom{p}{5}$	$\binom{p}{6}$
0,50	-0,12500	+0,0625000	-0,0390625	+0,0273438	-0,0205078
0,51	-0,12495	+0,0620585	-0,0386314	+0,0269647	-0,0201786
0,52	-0,12480	+0,0615680	-0,0381722	+0,0265678	-0,0198373
0,53	-0,12455	+0,0610295	-0,0376857	+0,0261539	-0,0194846
0,54	-0,12420	+0,0604440	-0,0371731	+0,0257238	-0,0191213
0,55	-0,12375	+0,0598125	-0,0366352	+0,0252783	-0,0187480
0,56	-0,12320	+0,0591360	-0,0360730	+0,0248182	-0,0183655
0,57	-0,12255	+0,0584155	-0,0354874	+0,0243444	-0,0179743
0,58	-0,12180	+0,0576520	-0,0348795	+0,0238576	-0,0175751
0,59	-0,12095	+0,0568465	-0,0342500	+0,0233585	-0,0171685
0,60	-0,12000	+0,0560000	-0,0336000	+0,0228480	-0,0167552
0,61	-0,11895	+0,0551135	-0,0329303	+0,0223268	-0,0163357
0,62	-0,11780	+0,0541880	-0,0322419	+0,0217955	-0,0159107
0,63	-0,11655	+0,0532245	-0,0315355	+0,0212549	-0,0154807
0,64	-0,11520	+0,0522240	-0,0308122	+0,0207058	-0,0150462
0,65	-0,11375	+0,0511875	-0,0300727	+0,0201487	-0,0146078
0,66	-0,11220	+0,0501160	-0,0293179	+0,0195843	-0,0141660
0,67	-0,11055	+0,0490105	-0,0285486	+0,0190134	-0,0137213
0,68	-0,10880	+0,0478720	-0,0277658	+0,0184365	-0,0132743
0,69	-0,10695	+0,0467015	-0,0269701	+0,0178542	-0,0128253
0,70	-0,10500	+0,0455000	-0,0261625	+0,0172672	-0,0123749
0,71	-0,10295	+0,0442685	-0,0253437	+0,0166762	-0,0119235
0,72	-0,10080	+0,0430080	-0,0245146	+0,0160816	-0,0114715
0,73	-0,09855	+0,0417195	-0,0236758	+0,0154840	-0,0110194
0,74	-0,09620	+0,0404040	-0,0228283	+0,0148840	-0,0105677
0,75	-0,09375	+0,0390625	-0,0219727	+0,0142822	-0,0101166
0,76	-0,09120	+0,0376960	-0,0211098	+0,0136791	-0,0096666
0,77	-0,08855	+0,0363055	-0,0202403	+0,0130752	-0,0092180
0,78	-0,08580	+0,0348920	-0,0193651	+0,0124711	-0,0087713
0,79	-0,08295	+0,0334565	-0,0184847	+0,0118672	-0,0083268
0,80	-0,08000	+0,0320000	-0,0176000	+0,0112640	-0,0078848
0,81	-0,07695	+0,0305235	-0,0167116	+0,0106620	-0,0074456
0,82	-0,07380	+0,0290280	-0,0158203	+0,0100617	-0,0070096
0,83	-0,07055	+0,0275145	-0,0149266	+0,0094635	-0,0065771
0,84	-0,06720	+0,0259840	-0,0140314	+0,0088678	-0,0061484
0,85	-0,06375	+0,0244375	-0,0131352	+0,0082751	-0,0057236
0,86	-0,06020	+0,0228760	-0,0122387	+0,0076859	-0,0053033
0,87	-0,05655	+0,0213005	-0,0113425	+0,0071004	-0,0048875
0,88	-0,05280	+0,0197120	-0,0104474	+0,0065192	-0,0044765
0,89	-0,04895	+0,0181115	-0,0095538	+0,0059425	-0,0040706
0,90	-0,04500	+0,0165000	-0,0086625	+0,0053708	-0,0036700
0,91	-0,04095	+0,0148785	-0,0077740	+0,0048043	-0,0032750
0,92	-0,03680	+0,0132480	-0,0068890	+0,0042436	-0,0028856
0,93	-0,03255	+0,0116095	-0,0060079	+0,0036889	-0,0025023
0,94	-0,02820	+0,0099640	-0,0051315	+0,0031405	-0,0021250
0,95	-0,02375	+0,0083125	-0,0042602	+0,0025987	-0,0017541
0,96	-0,01920	+0,0066560	-0,0033946	+0,0020639	-0,0013897
0,97	-0,01455	+0,0049955	-0,0025352	+0,0015363	-0,0010319
0,98	-0,00980	+0,0033320	-0,0016827	+0,0010163	-0,0006809
0,99	-0,00495	+0,0016665	-0,0008374	+0,0005041	-0,0003369
1,00	-0,00000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000

Naast deze twee formules is een andere groep formules van groot belang, welke wij centrale interpolatieformules zullen noemen.

De eerste en meest fundamentele verkrijgen wij door als basispunten te kiezen x_o, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2},.... Dan vinden wij:

$$f_p^* = f_o + \binom{p}{1}\delta_{1/2} + \binom{p}{2}\delta_o^2 + \binom{p+1}{3}\delta_{1/2}^3 + \binom{p+1}{4}\delta_o^4 + \binom{p+2}{5}\delta_{1/2}^5 + \binom{p+2}{6}\delta_o^6 + \ldots, \quad (2.15)$$

bekend als de voorwaartse formule van Gauss. De restterm wordt:

$$R_{2k} = \binom{p+k-1}{2k} w^{2k} f^{(2k)}(\xi), \quad (2.16)$$

waar $x_o - (k-1)\,w < \xi < x_o + k\,w$, als x ook aan deze betrekking voldoet, of

$$R_{2k+1} = \binom{p+k}{2k+1} w^{2k+1} f^{(2k+1)}(\xi), \quad (2.17)$$

waar $x_o - k\,w < \xi < x_o + k\,w$, als x ook aan deze betrekking voldoet.

Blijkbaar zijn de differenties, welke in deze formule voorkomen de volgende:

$$\begin{array}{llcccccccccccc}
x_o & f_o & \searrow & & \nearrow & \delta_o^2 & \searrow & & \nearrow & \delta_o^4 & \searrow & & \nearrow & \delta_o^6 \ \searrow \\
 & & & \delta_{1/2}^1 & & & & \delta_{1/2}^3 & & & & \delta_{1/2}^5 & & \\
x_1 & f_1 & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Een alternatief vormen de basispunten in de volgorde x_o, x_{-1}, x_1, x_{-2}, x_2.... Dan volgt de formule

$$f_p^* = f_o + \binom{p}{1}\delta_{-1/2} + \binom{p+1}{2}\delta_o^2 + \binom{p+1}{3}\delta_{-1/2}^3 + \binom{p+2}{4}\delta_o^4 + \binom{p+2}{5}\delta_{-1/2}^5 + $$
$$+ \binom{p+3}{6}\delta_o^6 \ldots, \quad (2.18)$$

de zgn. terugwaartse formule van Gauss. De restterm is nu

$$R_{2k} = \binom{p+k}{2k} w^{2k} f^{(2k)}(\xi), \quad (2.19)$$

waar $x_o - k\,w < \xi < x_o + (k-1)\,w$, als ook x aan deze betrekking voldoet, of

$$R_{2k+1} = \binom{p+k}{2k+1} w^{2k+1} f^{(2k+1)}(\xi), \quad (2.20)$$

waar $x_o - k\,w < \xi < x_o + k\,w$, als ook x aan die betrekking voldoet.

De in deze formule optredende differenties zijn

$$\begin{array}{llcccccccccccc}
x_{-1} & f_{-1} & & & & & & & & & & & & \\
 & & & \delta_{-1/2} & & & & \delta_{-1/2}^3 & & & & \delta_{-1/2}^5 & & \\
x_o & f_o & \nearrow & & \searrow & \delta_o^2 & \nearrow & & \searrow & \delta_o^4 & \nearrow & & \searrow & \delta_o^6 \ \nearrow
\end{array}$$

De twee formules van Gauss zelf worden in de praktijk niet zoveel gebruikt. Van veel groter belang zijn enige andere formules, welke wij verkrijgen door geschikt met (2.15) en (2.18) te jongleren. Allereerst kunnen wij het gemiddelde van de twee formules nemen. Dat is een interessante handelwijze op zich zelf. Is het aantal basispunten van beide formules gelijk en oneven, dan zijn dit ook de zelfde punten. Het bepalen van het gemiddelde is dan slechts een kwestie van notatie en symmetrisatie. Zijn de aantallen basispunten gelijk maar even, dan is x_k voor (2.15) wel en voor (2.18) niet een basispunt en anderzijds is x_{-k} voor (2.15) niet, maar voor (2.18) wel een basispunt. In dit geval is het resultaat van het middelingsproces een polynoom, dat niet voldoet aan onze oorspronkelijke definitie van een interpolatiepolynoom. Het resultaat van de middeling is de formule van Stirling:

$$f_p^* = f_0 + \frac{p}{2}\left(\delta_{-1/2} + \delta_{1/2}\right) + \frac{p^2}{2!}\delta_0^2 + \frac{p(p^2-1^2)}{2.3!}\left(\delta_{-1/2}^3 + \delta_{1/2}^3\right) + \frac{p^2(p^2-1^2)}{4!}\delta_0^4 + \frac{p(p^2-1^2)(p^2-2^2)}{2.5!}\left(\delta_{-1/2}^5 + \delta_{1/2}^5\right) + \frac{p^2(p^2-1^2)(p^2-2^2)}{6!}\delta_0^6 + \dots \qquad (2.21)$$

Vaak schrijft men:

$$\mu\delta_n^{2k+1} = \delta_n^{2k+1} = 1/2\left(\delta_{n-1/2}^{2k+1} + \delta_{n+1/2}^{2k+1}\right), \qquad (2.22)$$

$$\mu\delta_{n+1/2}^{2k} = \delta_{n+1/2}^{2k} = 1/2\left(\delta_n^{2k} + \delta_{n+1}^{2k}\right), \qquad (2.23)$$

en vervangt op deze wijze de oneven differenties in (2.20) door gemiddelden. Het is echter voor het numerieke werk beter om dit niet te doen. Men kan nu de coefficienten aflezen in een tabel en op het toetsenbord van de rekenmachine plaatsen en hetzij achter elkaar met de twee differenties vermenigvuldigen of met de uit het hoofd berekende som ervan. Is de laatste in rekening gebrachte differentie even, dan is de restterm dezelfde als in de beide formules van Gauss, dus (2.17) of (2.20). Er is dan geen enkele reden om Stirling's formule te gebruiken, want het rekenwerk is alleen maar ingewikkelder! Is de laatste differentie oneven, dan is de restterm het gemiddelde van (2.16) en (2.19), met i.h.a. verschillende ξ . Deze kan dus onder omstandigheden wel gunstiger zijn.

De differenties welke in de formule van Stirling gebruikt worden geven wij aan in het volgende schema:

$$\begin{array}{llccccccc}
x_{-1} & f_{-1} & & & & & & & \\
 & & \delta_{-1/2} & & \delta_{-1/2}^3 & & \delta_{-1/2}^5 & & \\
x_0 & f_0 & \text{---}\|\text{---} & \delta_0^2 & \text{---}\|\text{---} & \delta_0^4 & \text{---}\|\text{---} & \delta_0^6 & \\
 & & \delta_{1/2} & & \delta_{1/2}^3 & & \delta_{1/2}^5 & & \\
x_1 & f_1 & & & & & & &
\end{array}$$

De even differenties kunnen gemakkelijk uit de formule geëlimineerd worden, door te schrijven $\delta_0^2 = \delta_{1/2} - \delta_{-1/2}$; $\delta_0^4 = \delta_{1/2}^3 - \delta_{-1/2}^3$, etc. Door dit te doen verkrijgt men de formule van Steffensen:

$$f_p^* = f_0 - \binom{p}{2}\delta_{-1/2} + \binom{p+1}{2}\delta_{1/2} - \binom{p+1}{4}\delta_{-1/2}^3 + \binom{p+2}{4}\delta_{1/2}^3 - \binom{p+2}{5}\delta_{-1/2}^5 + \binom{p+3}{6}\delta_{1/2}^5 - \dots \qquad (2.24)$$

Hier komen nog slechts oneven differenties voor (afgezien van f_0 zelf):

$$\begin{array}{llccccc}
x_{-1} & f_{-1} & & & & & \\
 & & \delta_{-1/2} & & \delta_{-1/2}^3 & & \delta_{-1/2}^5 \\
x_0 & f_0 & & \delta_0^2 & & \delta_0^4 & \\
 & & \delta_{1/2} & & \delta_{1/2}^3 & & \delta_{1/2}^5 \\
x_1 & f_1 & & & & &
\end{array}$$

Natuurlijk moet men afbreken na twee differenties van gelijke orde. De formule is dan volkomen aequivalent met die van Gauss en de restterm wordt dus ook weer gelijk aan (2.17) of (2.20). Het werk is ongeveer even groot als bij toepassing van de formule van Gauss en de tafel van de te interpoleren functie behoeft slechts de differenties van oneven orde te vermelden.

Van veel groter belang voor numerieke berekeningen zijn formules, waarbij de differenties niet schommelen om de nullijn, maar een half interval verschoven zijn. Dit bereiken wij, door eerst de terugwaartse formule van Gauss (2.18) toe te passen op x_1 i.p.v. x_0, waarbij wij dan natuurlijk p moeten vervangen door p-1. Dan is

$$f_p^* = f_1 + \binom{p-1}{1}\delta_{1/2} + \binom{p}{2}\delta_1^2 + \binom{p}{3}\delta_{1/2}^3 + \binom{p+1}{4}\delta_1^4 + \binom{p+1}{5}\delta_{1/2}^5 + \binom{p+2}{6}\delta_1^6 + \dots \qquad (2.25)$$

Nu nemen wij weer een gemiddelde, nl. van (2.15) en (2.25). Dan vinden wij de formule van Bessel:

$$f_p^* = f_0 + p\,\delta_{1/2} + \frac{1}{2}\binom{p}{2}(\delta_0^2 + \delta_1^2) + \frac{p-1/2}{3}\binom{p}{2}\delta_{1/2}^3 + \frac{1}{2}\binom{p+1}{4}(\delta_0^4 + \delta_1^4) +$$
$$+ \frac{p-1/2}{5}\binom{p+1}{4}\delta_{1/2}^5 + \frac{1}{2}\binom{p+2}{6}(\delta_0^6 + \delta_1^6) + \dots \qquad (2.26)$$

$$= f_0 + p\,\delta_{1/2} + B^2(\delta_0^2 + \delta_1^2) + B^3\delta_{1/2}^3 + B^4(\delta_0^4 + \delta_1^4) + B^5\delta_{1/2}^5 + B^6(\delta_0^6 + \delta_1^6) + \dots$$

De differenties, welke in Bessel's formule gebruikt worden ziet men in het volgende schema:

$$\begin{array}{llllllll} x_0 & f_0 & & \delta_0^2 & & \delta_0^4 & & \delta_0^6 \\ & & \delta_{1/2} & \| & \delta_{1/2}^3 & \| & \delta_{1/2}^5 & \| \\ x_1 & f_1 & & \delta_1^2 & & \delta_1^4 & & \delta_1^6 \end{array}$$

Is de laatste gebruikte differentie oneven, dan is de restterm

$$R_{2k} = \binom{p+k-1}{2k} w^{2k} f^{(2k)}(\xi), \tag{2.27}$$

waarin $x_0 - (k-1)\, w < \xi < x_0 + kw$, indien x ook aan deze relatie voldoet.

Is de laatste gebruikte differentie even, dan is de restterm weer ingewikkeld. In de volgende tafel geven wij de B-coefficienten voor $p = 0\ (0{,}01)\ 1$.

Tenslotte kunnen wij hieruit weer de differenties van oneven orde verdrijven of ook direct uit (2.15). Dan volgt de formule van Everett:

$$f_p^* = (1-p)\, f_0 + p\, f_1 - \binom{p}{3}\delta_0^2 + \binom{p+1}{3}\delta_1^2 - \binom{p+1}{5}\delta_0^4 + \binom{p+2}{5}\delta_1^4 - \dots$$

$$= (1-p)\, f_0 + p\, f_1 + E_0^2\,\delta_0^2 + E_1^2\,\delta_1^2 + E_0^4\,\delta_0^4 + E_1^4\,\delta_1^4 + \dots \tag{2.28}$$

Als we weer afbreken na twee differenties van gelijke orde, wordt de restterm weer gegeven door (2.27). Wij geven ook de E-coefficienten voor $p = 0\ (0{,}01)\ 1$.

De formules van Bessel en Everett zijn de meest voor numerieke berekeningen gebruikte. Voor Everett's formule hebben we alleen even differenties nodig en daarom worden in goede moderne tafels de differenties van even orde vaak meegetabelleerd. Merk overigens op, dat

$$E_0^{2k}\,\delta_0^{2k} + E_1^{2k}\,\delta_1^{2k} = B^{2k}\left(\delta_0^{2k} + \delta_1^{2k}\right) + B^{2k+1}\,\delta_{1/2}^{2k+1} \tag{2.29}$$

Men kan dus naar willekeur de beide formules combineren. De formule van Everett vereist minder rekenwerk dan die van Bessel, maar als de laatste differentie, welke wij in rekening wensen te brengen een van even orde is, is het voordeliger te eindigen met een Besselterm. Zo is dus een goed stelsel formules met opvolgend aantal in aanmerking genomen differenties:

ρ	B^2	B^3	B^4	ρ	B^2	B^3	B^4
0,00	0,000000	-0,00000	-0,0000	0,50	-0,062500	-0,00000	+0,0117
0,01	-0,002475	+0,00081	+0,0004	0,51	-0,062475	-0,00042	+0,0117
0,02	-0,004900	+0,00157	+0,0008	0,52	-0,062400	-0,00083	+0,0117
0,03	-0,007275	+0,00228	+0,0012	0,53	-0,062275	-0,00125	+0,0117
0,04	-0,009600	+0,00294	+0,0016	0,54	-0,062100	-0,00166	+0,0116
0,05	-0,011875	+0,00356	+0,0020	0,55	-0,061875	-0,00206	+0,0116
0,06	-0,014100	+0,00414	+0,0024	0,56	-0,061600	-0,00246	+0,0115
0,07	-0,016275	+0,00467	+0,0028	0,57	-0,061275	-0,00286	+0,0115
0,08	-0,018400	+0,00515	+0,0032	0,58	-0,060900	-0,00325	+0,0114
0,09	-0,020475	+0,00560	+0,0036	0,59	-0,060475	-0,00363	+0,0113
0,10	-0,022500	+0,00600	+0,0039	0,60	-0,060000	-0,00400	+0,0112
0,11	-0,024475	+0,00636	+0,0043	0,61	-0,059475	-0,00436	+0,0111
0,12	-0,026400	+0,00669	+0,0046	0,62	-0,058900	-0,00471	+0,0110
0,13	-0,028275	+0,00697	+0,0050	0,63	-0,058275	-0,00505	+0,0108
0,14	-0,030100	+0,00722	+0,0053	0,64	-0,057600	-0,00538	+0,0107
0,15	-0,031875	+0,00744	+0,0057	0,65	-0,056875	-0,00569	+0,0106
0,16	-0,033600	+0,00762	+0,0060	0,66	-0,056100	-0,00598	+0,0104
0,17	-0,035275	+0,00776	+0,0063	0,67	-0,055275	-0,00626	+0,0102
0,18	-0,036900	+0,00787	+0,0066	0,68	-0,054400	-0,00653	+0,0101
0,19	-0,038475	+0,00795	+0,0069	0,69	-0,053475	-0,00677	+0,0099
0,20	-0,040000	+0,00800	+0,0072	0,70	-0,052500	-0,00700	+0,0097
0,21	-0,041475	+0,00802	+0,0075	0,71	-0,051475	-0,00721	+0,0095
0,22	-0,042900	+0,00801	+0,0078	0,72	-0,050400	-0,00739	+0,0092
0,23	-0,044275	+0,00797	+0,0080	0,73	-0,049275	-0,00756	+0,0090
0,24	-0,045600	+0,00790	+0,0083	0,74	-0,048100	-0,00770	+0,0088
0,25	-0,046875	+0,00781	+0,0085	0,75	-0,046875	-0,00781	+0,0085
0,26	-0,048100	+0,00770	+0,0088	0,76	-0,045600	-0,00790	+0,0083
0,27	-0,049275	+0,00756	+0,0090	0,77	-0,044275	-0,00797	+0,0080
0,28	-0,050400	+0,00739	+0,0092	0,78	-0,042900	-0,00801	+0,0078
0,29	-0,051475	+0,00721	+0,0095	0,79	-0,041475	-0,00802	+0,0075
0,30	-0,052500	+0,00700	+0,0097	0,80	-0,040000	-0,00800	+0,0072
0,31	-0,053475	+0,00677	+0,0099	0,81	-0,038475	-0,00795	+0,0069
0,32	-0,054400	+0,00653	+0,0101	0,82	-0,036900	-0,00787	+0,0066
0,33	-0,055275	+0,00626	+0,0102	0,83	-0,035275	-0,00776	+0,0063
0,34	-0,056100	+0,00598	+0,0104	0,84	-0,033600	-0,00762	+0,0060
0,35	-0,056875	+0,00569	+0,0106	0,85	-0,031875	-0,00744	+0,0057
0,36	-0,057600	+0,00538	+0,0107	0,86	-0,030100	-0,00722	+0,0053
0,37	-0,058275	+0,00505	+0,0108	0,87	-0,028275	-0,00697	+0,0050
0,38	-0,058900	+0,00471	+0,0110	0,88	-0,026400	-0,00669	+0,0046
0,39	-0,059475	+0,00436	+0,0111	0,89	-0,024475	-0,00636	+0,0043
0,40	-0,060000	+0,00400	+0,0112	0,90	-0,022500	-0,00600	+0,0039
0,41	-0,060475	+0,00363	+0,0113	0,91	-0,020475	-0,00560	+0,0036
0,42	-0,060900	+0,00325	+0,0114	0,92	-0,018400	-0,00515	+0,0032
0,43	-0,061275	+0,00285	+0,0115	0,93	-0,016275	-0,00467	+0,0028
0.44	-0,061600	+0,00246	+0,0115	0,94	-0,014100	-0,00414	+0,0024
0,45	-0,061875	+0,00206	+0,0116	0,95	-0,011875	-0,00356	+0,0020
0,46	-0,062100	+0,00166	+0,0116	0,96	-0,009600	-0,00294	+0,0016
0,47	-0,062275	+0,00125	+0,0117	0,97	-0,007275	-0,00228	+0,0012
0,48	-0,062400	+0,00083	+0,0117	0,98	-0,004900	-0,00157	+0,0008
0,49	-0,062475	+0,00042	+0,0117	0,99	-0,002475	-0,00081	+0,0004
0,50	-0,062500	+0,00000	+0,0117	1,00	0,000000	0,00000	0,0000

[illegible]	E_0^2	E_1^2	E_0^4	E_1^4	E_0^6	E_1^6
0,00	-0,0000000	-0,0000000	+0,0000000	+0,0000000	-0,0000000	-0,0000000
0,01	[illegible]	-0,0016665	+0,0004958	+0,0003333	-0,0000947	-0,0000714
0,02	-0,0064680	-0,0033320	+0,0009830	+0,0006663	-0,0001882	-0,0001428
0,03	-0,0095545	-0,0049955	+0,0014614	+0,0009989	-0,0002804	-0,0002140
0,04	-0,0125440	-0,0066560	+0,0019308	+0,0013307	-0,0003714	-0,0002851
0,05	-0,0154375	-0,0083125	+0,0023909	+0,0016615	-0,0004610	-0,0003559
0,06	-0,0182360	-0,0099640	+0,0028415	+0,0019930	-0,0005491	-0,0004265
0,07	-0,0209405	-0,0116095	+0,0032825	+0,0023191	-0,0006358	-0,0004967
0,08	-0,0235520	-0,0132480	+0,0037137	+0,0026454	-0,0007209	-0,0005665
0,09	-0,0260715	-0,0148785	+0,0041348	+0,0029697	-0,0008045	-0,0006358
0,10	-0,0285000	-0,0165000	+0,0045458	+0,0032918	-0,0008864	-0,0007046
0,11	-0,0308385	-0,0181115	+0,0049463	+0,0036113	-0,0009666	-0,0007728
0,12	-0,0330880	-0,0197120	+0,0053364	+0,0039282	-0,0010451	-0,0008404
0,13	-0,0352495	-0,0213005	+0,0057159	+0,0042421	-0,0011218	-0,0009073
0,14	-0,0373240	-0,0228760	+0,0060846	+0,0045528	-0,0011967	-0,0009735
0,15	-0,0393125	-0,0244375	+0,0064423	+0,0048600	-0,0012697	-0,0010388
0,16	-0,0412160	-0,0259840	+0,0067891	+0,0051635	-0,0013408	-0,0011033
0,17	-0,0430355	-0,0275145	+0,0071247	+0,0054631	-0,0014099	-0,0011669
0,18	-0,0447720	-0,0290280	+0,0074492	+0,0057586	-0,0014770	-0,0012295
0,19	-0,0464265	-0,0305235	+0,0077623	+0,0060496	-0,0015421	-0,0012911
0,20	-0,0480000	-0,0320000	+0,0080640	+0,0063360	-0,0016051	-0,0013517
0,21	-0,0494935	-0,0334565	+0,0083543	+0,0066175	-0,0016661	-0,0014111
0,22	-0,0509080	-0,0348920	+0,0086330	+0,0068940	-0,0017249	-0,0014693
0,23	-0,0522445	-0,0363055	+0,0089001	+0,0071651	-0,0017815	-0,0015263
0,24	-0,0535040	-0,0376960	+0,0091556	+0,0074306	-0,0018360	-0,0015821
0,25	-0,0546875	-0,0390625	+0,0093994	+0,0076904	-0,0018833	-0,0016365
0,26	-0,0557960	-0,0404040	+0,0096315	+0,0079442	-0,0019383	-0,0016895
0,27	-0,0568305	-0,0417195	+0,0098519	+0,0081918	-0,0019861	-0,0017412
0,28	-0,0577920	-0,0430080	+0,0100604	+0,0084330	-0,0020316	-0,0017913
0,29	-0,0586815	-0,0442685	+0,0102572	+0,0086676	-0,0020749	-0,0018400
0,30	-0,0595000	-0,0455000	+0,0104422	+0,0088952	-0,0021158	-0,0018871
0,31	-0,0602485	-0,0467015	+0,0106155	+0,0091159	-0,0021544	-0,0019325
0,32	-0,0609280	-0,0478720	+0,0107769	+0,0093293	-0,0021907	-0,0019764
0,33	-0,0615395	-0,0490105	+0,0109266	+0,0095352	-0,0022246	-0,0020185
0,34	-0,0620840	-0,0501160	+0,0110646	+0,0097335	-0,0022562	-0,0020590
0,35	-0,0625625	-0,0511875	+0,0111909	+0,0099240	-0,0022855	-0,0020976
0,36	-0,0629760	-0,0522240	+0,0113055	+0,0101064	-0,0023123	-0,0021345
0,37	-0,0633255	-0,0532245	+0,0114084	+0,0102806	-0,0023368	-0,0021695
0,38	-0,0636120	-0,0541880	+0,0114998	+0,0104464	-0,0023590	-0,0022026
0,39	-0,0638365	-0,0551135	+0,0115796	+0,0106056	-0,0023788	-0,0022338
0,40	-0,0640000	-0,0560000	+0,0116480	+0,0107520	-0,0023962	-0,0022630
0,41	-0,0641035	-0,0568465	+0,0117050	+0,0108915	-0,0024112	-0,0022903
0,42	-0,0641480	-0,0576520	+0,0117506	[illegible]	-0,0024239	-0,0023155
0,43	-0,0641345	-0,0584155	+0,0117850	[illegible]	-0,0024342	-0,0023387
0,44	-0,0640640	-0,0591360	+0,0118083	+0,0112548	-0,0024422	-0,0023599
0,45	-0,0639375	-0,0598125	+0,0118204	+0,0113569	-0,0024473	-0,0023789
0,46	-0,0637560	-0,0604440	+0,0118216	+0,0114493	-0,0024511	-0,0023957
0,47	-0,0635205	-0,0610295	+0,0118120	[illegible]	-0,0024521	-0,0024105
0,48	-0,0632320	-0,0615680	+0,0117915	+0,0116043	-0,0024508	-0,0024230
0,49	-0,0628915	-0,0620585	+0,0117604	+0,0116667	-0,0024473	-0,0024333
0,50	-0,0625000	-0,0625000	+0,0117188	+0,0117188	[illegible]	-0,0024414

p	E_o^2	E_1^2	E_o^4	E_1^4	E_o^6	E_1^6
0,50	00,0625000	-0,0625000	+0,0117188	+0,0117188	-0,0024414	-0,0024414
0,51	-0,0620585	-0,0628915	+0,0116667	+0,0117604	-0,0024333	-0,0024473
0,52	-0,0615680	-0,0632320	+0,0116043	+0,0117915	-0,0024230	-0,0024508
0,53	-0,0610295	-0,0635205	+0,0115318	+0,0118123	-0,0024105	-0,0024523
0,54	-0,0604440	-0,0637560	+0,0114493	+0,0118216	-0,0023957	-0,0024521
0,55	-0,0598125	-0,0639375	+0,0113569	+0,0118204	-0,0023789	-0,0024478
0,56	-0,0591360	-0,0640640	+0,0112548	+0,0118083	-0,0023599	-0,0024422
0,57	-0,0584155	-0,0641345	+0,0111430	+0,0117850	-0,0023387	-0,0024342
0,58	-0,0576520	-0,0641480	+0,0110219	+0,0117506	-0,0023155	-0,0024239
0,59	-0,0568465	-0,0641035	+0,0108915	+0,0117050	-0,0022903	-0,0024113
0,60	-0,0560000	-0,0640000	+0,0107520	+0,0116480	-0,0022630	-0,0023962
0,61	-0,0551135	-0,0638365	+0,0106036	+0,0115796	-0,0022338	-0,0023788
0,62	-0,0541880	-0,0636120	+0,0104464	+0,0114998	-0,0022026	-0,0023590
0,63	-0,0532245	-0,0633255	+0,0102806	+0,0114084	-0,0021695	-0,0023368
0,64	+0,0522240	-0,0629760	+0,0101064	+0,0113055	-0,0021345	-0,0023123
0,65	-0,0511875	-0,0625625	+0,0099240	+0,0111909	-0,0020976	-0,0022855
0,66	-0,0501160	-0,0620840	+0,0097335	+0,0110646	-0,0020590	-0,0022562
0,67	-0,0490105	-0,0615395	+0,0095352	+0,0109266	-0,0020185	-0,0022246
0,68	-0,0478720	-0,0609280	+0,0093293	+0,0107769	-0,0019764	-0,0021907
0,69	-0,0467015	-0,0602485	+0,0091159	+0,0106155	-0,0019325	-0,0021544
0,70	-0,0455000	-0,0595000	+0,0088952	+0,0104422	-0,0018871	-0,0021158
0,71	-0,0442685	-0,0586815	+0,0086676	+0,0102572	-0,0018400	-0,0020749
0,72	-0,0430080	-0,0577920	+0,0084330	+0,0100604	-0,0017913	-0,0020316
0,73	-0,0417195	-0,0568305	+0,0081918	+0,0098519	-0,0017412	-0,0019861
0,74	-0,0404040	-0,0557960	+0,0079442	+0,0096315	-0,0016895	-0,0019323
0,75	-0,0390625	-0,0546875	+0,0076904	+0,0093994	-0,0016365	-0,0018883
0,76	-0,0376960	-0,0535040	+0,0074306	+0,0091556	-0,0015821	-0,0018360
0,77	-0,0363055	-0,0522445	+0,0071651	+0,0089001	-0,0015263	-0,0017815
0,78	-0,0348920	-0,0509080	+0,0068940	+0,0086330	-0,0014693	-0,0017249
0,79	-0,0334565	-0,0494935	+0,0066175	+0,0083543	-0,0014111	-0,0016662
0,80	-0,0320000	-0,0480000	+0,0063360	+0,0080640	-0,0013517	-0,0016051
0,81	-0,0305235	-0,0464265	+0,0060496	+0,0077623	-0,0012911	-0,0015420
0,82	-0,0290280	-0,0447720	+0,0057586	+0,0074492	-0,0012295	-0,0014770
0,83	-0,0275145	-0,0430355	+0,0054631	+0,0071247	-0,0011669	-0,0014099
0,84	-0,0259840	-0,0412160	+0,0051635	+0,0067891	-0,0011033	-0,0013408
0,85	-0,0244375	-0,0393125	+0,0048600	+0,0064423	+0,0010388	-0,0012697
0,86	-0,0228760	-0,0373240	+0,0045528	+0,0060846	-0,0009735	-0,0011967
0,87	-0,0213005	-0,0352495	+0,0042421	+0,0057159	-0,0009073	-0,0011216
0,88	-0,0197120	-0,0330880	+0,0039282	+0,0053364	-0,0008404	-0,0010451
0,89	-0,0181115	-0,0308385	+0,0036113	+0,0049463	-0,0007728	-0,0009666
0,90	-0,0165000	-0,0285000	+0,0032918	+0,0045458	-0,0007046	-0,0008864
0,91	-0,0148785	-0,0260715	+0,0029697	+0,0041348	-0,0006358	-0,0008045
0,92	-0,0132480	-0,0235520	+0,0026454	+0,0037137	-0,0005665	-0,0007209
0,93	-0,0116095	-0,0209405	+0,0023191	+0,0032825	-0,0004967	-0,0006358
0,94	-0,0099640	-0,0182360	+0,0019910	+0,0028415	-0,0004265	-0,0005491
0,95	-0,0083125	-0,0154375	+0,0016615	+0,0023909	-0,0003559	-0,0004610
0,96	-0,0066560	-0,0125440	+0,0013307	+0,0019308	-0,0002851	-0,0003714
0,97	-0,0049955	-0,0095545	+0,0009989	+0,0014614	+0,0002140	-0,0002804
0,98	-0,0033320	-0,0064680	+0,0006663	+0,0009830	-0,0001428	-0,0001882
0,99	-0,0016665	-0,0032835	+0,0003333	+0,0004958	-0,0000714	-0,0000947
1,00	-0,0000000	-0,0000000	+0,0000000	+0,0000000	-0,0000000	-0,0000000

$$f_p^* = (1-p)\, f_0 + p\, f_1 = f_0 + p\,\delta_{1/2}$$

$$f_p^* = (1-p)\, f_0 + p\, f_1 + B^2\, (\delta_0^2 + \delta_1^2)$$

$$f_p^* = (1-p)\, f_0 + p\, f_1 + E_0^2\,\delta_0^2 + E_1^2\,\delta_1^2$$

$$f_p^* = (1-p)\, f_0 + p\, f_1 + E_0^2\,\delta_0^2 + E_1^2\,\delta_1^2 + B^4\, (\delta_0^4 + \delta_1^4)$$

$$f_p^* = (1-p)\, f_0 + p\, f_1 + E_0^2\,\delta_0^2 + E_1^2\,\delta_1^2 + E_0^4\,\delta_0^4 + E_1^4\,\delta_1^4 \quad ,$$

enz.

Voordelen van de interpolatie met behulp van differenties boven Lagrange interpolatie zijn onder meer:

Wanneer men een bepaalde formule gebruikt, is het aantal benodigde coëfficienten gelijk aan het aantal basispunten, maar deze hangen zelf niet van het aantal af. Overgang op meer basispunten geschiedt eenvoudig door één of meer termen aan de reeks toe te voegen. Aan de grootte van de betreffende differenties is vooraf zonder meer te zien of het opvoeren van het aantal basispunten een merkbaar effect op de uitkomst zal hebben. Voorts bezitten de hogere differenties in het algemeen zoveel minder cijfers dan de functie zelf, dat wij met veel minder cijfers in de opgegeven waarden van de coefficienten kunnen volstaan.

3. Een en ander over differenties.

Wij hebben gezien, dat voor interpolatie het nemen van de differenties van een functie van belang is. Wij nemen daarom deze grootheden eens wat nader onder de loupe. Het is nl. zo, dat hun nut geenszins beperkt is tot het gebied van de interpolatie. In de numerieke wiskunde hebben zij nog een andere betekenis, nl. voor het controleren van een tafel van een functie.

Laten wij aannemen, dat een functie getabelleerd is met een klein interval w. Klein betekent, dat de functie en haar afgeleiden langzaam veranderen van basispunt tot basispunt, dus bijv. over een gebied, dat vele basispunten bevat, monotoon veranderen. Als wij bijv. sin x tabelleren met een interval $w = \pi/2$, dan kunnen wij dit interval met de beste wil niet klein noemen. Is daarentegen $w = 0{,}01\,\pi/2$, dan is het zeker klein. Nu weten wij uit (1.20) en (2.4), dat een differentie van de k-de orde gelijk is aan w^k maal de k-de afgeleide in een naburig gelegen punt. Volgens onze veronderstellingen moeten dus ook de differenties langzaam veranderen en als w klein genoeg is moeten ze, als k toeneemt, tot nul naderen met het oog op de factor w^k. Is dus een functie numeriek gegeven in een zeker aantal cijfers en is het interval genoegzaam klein, dan zullen wij zien, dat de hogere differenties verwaarloosbaar klein zijn.

Er treedt echter een storende factor op tengevolge van de noodzakelijke afrondingsfouten, waarmee de getabelleerde functie behept is. In een ideale tafel is deze afrondingsfout in absolute waarde maximaal een halve eenheid van de laatste decimaal. De in de tafel numeriek gegeven functie is gelijk aan de som van de "echte functie" en een "afrondingsfunctie". Deze afrondingsfunctie is overigens alleen vastgelegd voor de basispunten en wij kunnen haar daartussen naar willekeur definieren. Maar hoe wij dit ook doen, het is altijd een erg grillige functie, die helemaal niet voldoet aan de eisen, die wij aan een functie hadden gesteld. Het helpt hier ook niet het interval te verkleinen, want daarmee verandert de functie zelf en wordt weer grilliger. De differenties van de getabelleerde functie zijn gelijk aan die van de "echte functie" plus die van de "afrondingsfunctie". De eerste naderen tot nul met toenemende orde. De tweede groeien daarentegen, zijn echter eerst klein. Een voorbeeldje, dat volkomen willekeurig is, geeft de differenties van zulk een afrondingsfunctie in eenheden van de laatste decimaal.

Afronding					
-0,3					
	0,2				
-0,1		-0,5			
	-0,3		+1,3		
-0,4		+0,8		-2,3	
	+0,5		-1,0		+2,8
+0,1		-0,2		+0,5	
	+0,3		-0,5		+1,0
+0,4		-0,7		+1,5	
	-0,4		+1,0		-2,2
0		+0,3		-0,7	
	-0,1		+0,3		-1,3
-0,1		+0,6		-2,0	
	+0,5		-1,7		+5,9
+0,4		-1,1		+3,9	
	-0,6		+2,2		
-0,2		+1,1			
	+0,5				
+0,3					

Natuurlijk kunnen wij alleen maar ruwe informatie geven over de differenties van de afrondingsfunctie met het oog op haar onbepaaldheid. Maar iets kunnen wij toch wel zeggen. Allereerst kunnen wij de maximale waarde van de differenties geven. Daartoe nemen wij de "ongunstigste" afrondingsfunctie, die er is. Dat is:

Afronding:

0,5					
	-1				
-0,5		2			
	1		-4		
+0,5		-2		8	
	-1		4		16
-0,5		2		-8	
	1		-4		
+0,5		-2			
	-1				
-0,5					

Wij zien, dat de grootste fout, welke door afronding in de k-de differentie kan ontstaan, gelijk is aan $\pm\ 2^{k-1}$. Dat is dus zeer aanzienlijk. Maar de kans, dat een dergelijke ongelukkige combinatie van afrondingsfouten optreedt, is natuurlijk zeer gering. Wij hebben daarom een onderzoek ingesteld naar de waarschijnlijkheid van een afwijking van bepaalde grootte. De wiskundige hulpmiddelen, die we daarbij gebruikt hebben, gaan echter het kader van deze cursus verre te boven en daarom geven wij hier slechts de resultaten van het onderzoek en verwijzen voor nadere bijzonderheden naar een nader te verschijnen publicatie over dit onderwerp.

Wij beschouwen een functie, welke afgerond is tot gehele getallen. Dit is geen beperking, want men behoeft slechts overal "eenheid van de laatste decimaal" te lezen i.p.v. 1 in een ander geval. Het eerste opmerkelijke feit is, dat de hogere differenties van de afrondingsfunctie practisch gehele getallen zijn ! Immers, de differenties van de echte functie zijn van voldoend hoge orde van de differenties $\ll 1$ en de differenties van de afgeronde functie zijn differenties van exact gehele getallen. Nu kunnen wij iets vertellen over de waarden, die de k-de differentie van de afgeronde functie aanneemt, indien de k-de differentie van de echte functie voldoet aan de betrekking:

$$1/N \ll \delta^k \ll 1, \tag{3.1}$$

waarin N het aantal waarden van δ^k is, waarover wij de uitspraak wensen te maken, dus ongeveer het aantal argumentwaarden in het beschouwde gebied.

Wij kunnen dan nl. de waarschijnlijkheid aangeven, dat de δ^k van de afgeronde functie een bepaalde waarde aanneemt.

Deze waarschijnlijkheid geven we in de onderstaande tabel. Het cijfer 0 zonder meer betekent exact nul; daarentegen 0,0000, dat de kans in vier decimalen nul is.

waarde van δ	k = 2 $P\delta^2 = d$	k = 3 $P\delta^3 = d$	k = 4 $P\delta^4 = d$	k = 5 $P\delta^5 = d$
-16	0	0	0	0
-15	0	0	0	0,0000
-14	0	0	0	0,0001
-13	0	0	0	0,0006
-12	0	0	0	0,0019
-11	0	0	0	0,0044
-10	0	0	0	0,0085
- 9	0	0	0	0,0144
- 8	0	0	0	0,0219
- 7	0	0	0,0004	0,0306
- 6	0	0	0,0061	0,0401
- 5	0	0	0,0217	0,0500
- 4	0	0	0,0477	0,0598
- 3	0	0,0185	0,0833	0,0688
- 2	0	0,1111	0,1189	0,0762
- 1	0,2500	0,2222	0,1445	0,0812
0	0,5000	0,2963	0,1545	0,0830
1	0,2500	0,2222	0,1445	0,0812
2	0	0,1111	0,1189	0,0762
3	0	0,0185	0,0833	0,0688
4	0	0	0,0477	0,0598
5	0	0	0,0217	0,0500
6	0	0	0,0061	0,0401
7	0	0	0,0004	0,0306
8	0	0	0	0,0219
9	0	0	0	0,0144
10	0	0	0	0,0085
11	0	0	0	0,0044
12	0	0	0	0,0019
13	0	0	0	0,0006
14	0	0	0	0,0001
15	0	0	0	0,0000
16	0	0	0	0

Wij hebben ter illustratie enkele experimenten genomen. Het eerste experiment betrof een tafel van e^x in zoveel decimalen, dat de tweede differentie van de echte functie ongeveer 0,04 eenheden was. Het aantal waarden van de 2-de differenties was 100. Aan (3.1) was dus voldaan, want $0{,}01 \ll 0{,}04 \ll 1$. Het experiment gaf de volgende uitslag:

-1	23 x
0	50 x
1	27 x ,

in mooie overeenstemming met de berekende waarschijnlijkheid. Het tweede experiment bestond hierin, dat wij zoveel meer decimalen nemen, dat de vierde differentie van de echte functie weer ongeveer 0,04 eenheden was. Het aantal differentiewaarden was weer 100. De uitslag was:

-5	4 x
-4	3 x
-3	8 x
-2	10 x
-1	15 x
0	19 x
1	12 x
2	17 x
3	5 x
4	3 x
5	3 x
6	1 x ,

wat ook in goede overeenstemming is met de berekende waarschijnlijkheid in onze tabel. Natuurlijk zijn de discrepanties groter, omdat het aantal mogelijkheden, waarover de 100 gevallen verdeeld zijn, zo veel groter is.

Men houde zich goed voor ogen, dat het bovenstaande slechts een allereerste leidraad geeft voor wat er te verwachten valt. Speciaal als aan de linkerongelijkheid van (3.1) niet voldaan is, d.w.z. als de tabel te kort is, kan men allerhande andere verdelingen verkrijgen. Men experimentere zelf maar eens!

De tweede belangrijke eigenschap van de differenties van een afgeronde functie is het oscillerend karakter. Zouden nl. achter elkaar een aantal positieve differenties van de afrondingen afkomstig zijn, dan zouden zij naar links opgebouwd een sterk stijgende afrondingsfunctie verwekken, wat in strijd is met de bovengrens 1/2 van deze functie. Dit betekent dus, dat de differenties tengevolge van de afrondingen doorgaans alternerend zullen zijn. Op het belang van deze opmerking komen wij dadelijk terug.

Nu gaan wij na, wat het gevolg is van een fout ter grootte van de eenheid in de functie. Dit zullen wij de foutfunctie noemen. Klaarblijkelijk is het differentie-schema :

Fout-functie ↓	δ	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5
0		0		0	
	0		0		1
0		0		1	
	0		1		-5
0		1		-4	
	1		-3		10
1		-2		6	
	-1		3		-10
0		1		-4	
	0		-1		5
0		0		1	
	0		0		-1
0		0		0	

Wij zien hier als differenties de binomiaalcoefficienten met alternerend teken optreden ! Een kleine fout in de functie geeft dus in de hogere differenties grote alternerende differenties, welke wij kunnen gebruiken om de plaats en grootte van fouten te vinden. Als voorbeeld geven wij de volgende tabel:

x	f(x)	δ	δ^2	δ^3	δ^4
400	6,00000		0		0
		7846		-49	
405	6,07846		-49		3
		7797		-46	
410	6,15643		-95		14
		7702		-32	
415	6,23345		-127		-68
		7575		-100	
420	6,30920		-227		110
		7348		10	
425	6,38268		-217		-73
		7131		-63	
430	6,45399		-280		21
		6851		-42	
435	6,52250		-322		1
		6529		-41	
440	6,58779		-363		4
		6166		-37	
445	6,64945		-400		-29
		5766		-66	
450	6,70711		-466		123
		5300		57	
455	6,76011		-409		183
		4891		240	
460	6,80902		-169		-1316
		4722		-1076	
465	6,85624		-1245		2131
		3477		1055	
470	6,89101		-190		-1434
		3287		-379	
475	6,92388		-569		361
		2718		-18	
485	6,95106		-587		6
		2131		-12	
480	6,97237		-599		2
		1532		-10	
490	6,98769		-609		4
		923		-6	
495	6,99692		-615		5
		308		-1	
500	7,00000		-616		2

Wij zien, dat de vierde differentie gering is, maar hier en daar sterk oscilleert. Zo zien wij op lijn 420 een maximum 110. Dit is ongeveer 6 x 18, hetgeen ook klopt met de beide naastliggende waarden -68 en -73, welke ongeveer -4 x 18 zijn en de daar naast liggende waarden 14 en 21, die ca. 1 x 18 zijn. Dit suggereert dus een fout van +18 eenheden in f (420). Klaarblijkelijk moest de 20, waarop het getal eindigt, 02 zijn. Dit type fout, de verwisseling van twee cijfers, is een van de meest voorkomende. In de tabel staan behalve deze fout nog drie fouten. Wij laten het aan de cursist over ze te vinden.

Deze methode van een tafel controleren is zeer belangrijk, speciaal om de grove fouten er uit te halen. Het is echter niet altijd mogelijk op deze wijze fouten ter grootte van een eenheid van de laatste decimaal te ontdekken. Immers door de afrondingen kunnen ook aanzienlijke alternerende differenties ontstaan. Wel is het vaak mogelijk om althans wantrouwen in bepaalde waarden te wekken, welke dan achteraf gecontroleerd kunnen worden. Het vervelende is, dat de effecten van afrondingen, met toenemende orde van de differenties wat harder stijgen dan die ten gevolgde van een eenheidsfout in de functie. Moeten wij dus tot de tiende differentie gaan, dan is er niet veel kans meer om een eenheidsfout met zekerheid te ontdekken.

Men kan de differenties gemakkelijk uitdrukken in de functiewaarden zelf met behulp van de binomiaalcoefficienten. Men vindt nl. gemakkelijk:

$$\delta_{1/2} = - f_0 + f_1 \qquad (3.2)$$

$$\delta_1^2 = f_0 - 2 f_1 + f_2 \qquad (3.3)$$

$$\delta_{3/2}^3 = -f_0 + 3 f_1 - 3 f_2 + f_3 \qquad (3.4)$$

$$\delta_2^4 = f_0 - 4 f_1 + 6 f_2 - 4 f_3 + f_4 \qquad (3.5)$$

....

$$\delta_{k/2}^k = (-1)^k f_0 - (-1)^k \binom{k}{1} f_1 + (-1)^k \binom{k}{2} f_2 \ldots\ldots + f_k \qquad (3.6)$$

Hiervan kan men b.v. gebruik maken, als men een differentieschema van een functie wil maken en daarin alleen die van even orde wil opnemen (voor gebruik van Everett's formule [1]). Dan kan men zich heel wat schrijfwerk sparen door (3.3) toe te passen.

Het berekenen van differenties op een gewone rekenmachine geschiedt als volgt. Men brengt f_0 negatief in het RR, zet f_1 op het IR en vermenigvuldigt met +1, leest $\delta_{1/2}$ af in RR, maakt RR schoon, vermenigvuldigt met ~~+1~~ -1 en zet f_2 op IR, enz. Alle functiewaarden hoeven dus slechts eenmaal ingeslagen te worden. Bij het berekenen van tweede differenties direct volgens (3.3) brengt men eerst de middelste term dus $-2\ f_1$ in RR, dan f_0 in RR en dan f_1 in RR. Dan leest men δ_1^2 af, maakt RR schoon en brengt f_2, die nog in IR staat, dan weer -2 maal in RR enz. Iedere functiewaarde moet nu tweemaal ingeslagen worden, maar het overschrijven is aanzienlijk beperkt.

Al met al is het maken van differenties een omslachtig en tamelijk tijdrovend werk. Bovendien komt het vaak voor dat in de differenties die de functie moeten controleren, meer fouten steken dan in de functie zelf! Daarom is het voor een modern rekenbureau van groot belang over mechanische hulpmiddelen te beschikken, welke snel en feilloos differenties kunnen maken. Daartoe kan men gebruik maken van een type commerciele machines bekend onder de naam "boekhoudmachines", eventueel van speciale wijzigingen voorzien. Een van de meest doelmatige machines is de "National, Klasse 3000". De rekenafdeling van het Mathematisch Centrum bezit een zodanige machine, speciaal voor ons gewijzigd. Deze machine kan nog heel wat meer dan differenties maken, zoals we later zullen zien. Maar we zullen hier iets erover vertellen, ook al omdat er enkele kwesties bij te pas komen die een ander licht werpen op het vormen van differenties.

Een National 3000 machine bezit 6 registers, waarin optellingen uitgevoerd kunnen worden. Deze zijn genummerd in de wat ongewone volgorde 1, 3, 4, 2, 6, 5 . In de registers 1 en 3 kan bovendien direct afgetrokken worden. Nu lijkt het wonderlijk, dat zulk een combinatie geschikt zou zijn voor het vormen van differenties, omdat daar altijd moet worden afgetrokken. Maar dit bezwaar kan door een kunstgreep worden ondervangen.

De machine bezit een wagen vergelijkbaar met die van een schrijfmachine. Aan de voorkant hiervan is een lineaal aangebracht met stoppen, te vergelijken met de tabulator van een schrijfmachine. Bij een normale bewerking springt de wagen automatisch naar de volgende positie zodat steeds een van de stoppen tegen de tabulatornok aanligt. Deze stoppen kunnen op allerlei plaatsen op de lineaal worden bevestigd. In tegenstelling tot een schrijfmachine echter hebben deze stoppen nog een andere en veel meer fundamentele betekenis. Zij bepalen nl. in welk register of in welke combinatie van registers een getal, dat op nog te verklaren wijze aangevoerd wordt, opgeteld wordt. Dit is op de stop aangegeven. Bijv. staat op de stop 2, dan wordt er een getal opgeteld in register 2. Staat op de stop -1+4, dan wordt het getal afgetrokken van register 1 maar tegelijkertijd bijgeteld in register 4. Voor een bepaald proces wordt van te voren een lineaal klaar gemaakt, wat een werkje van bijv. 10 minuten is, en op de machine bevestigd. Het getal, waarover sprake was kan op twee manieren worden gepresenteerd. Men kan het nl. op een toetsenbord inslaan en dan op de motorbedieningstoets drukken of wel men kan het van uit een ander register laten komen door op een van de registertoetsen te drukken , welke zich links van het toetsenbord bevinden en genummerd zijn. Normaal is (in onze gewijzigde uitvoering) deze bewerking subtotaliserend, d.w.z. het getal blijft in het register, waar het aan ontleend is, maar men kan door eerst een totaaltoets in te drukken, de bewerking totaliserend laten verlopen, dw.z. dat het register na afloop leeg is. Verder is onze machine geleerd om subtotaliseren van register 1(resp.3) op een stop, welke ende meer -1 (resp. -3) vermeldt, te verstaan als totaliseren.

Zodra een bedrag overgeheveld wordt in een of meer registers wordt het op het papier gedrukt, tenzij men dit drukken onderdrukt met een speciale inrichting. Er zijn ook speciale stoppen met 0 voorzien, waarbij geen overdracht in een van de registers plaats vindt, doch waarbij de machine alleen maar vermeldt (na indrukken van de betreffende registertoets) wat een register bevat of (na inslaan op het toetsenbord) een aanduiding als bijv. argument drukt. Dit zijn dus zuiver schrijfmachinestoppen.

Ten slotte is vooraan de lineaal een kantlijnstop en aan het eind een terugloopstop bevestigd, welke laatste de wagen automatisch terug laat lopen en de papieropvcer bewerkstelligt. Iedere stop kan ingericht worden om al of niet als terugloopstop te werken doordat er een draaibaar nokje aan bevestigd kan worden. Staat het nokje op, dan is het een gewone stop, waarop de wagen blijft rusten. Draait men het nokje neer, dan werkt de stop als terugloopstop. Nu zullen wij nagaan hoe men differenties tot en met de vijfde op deze machine maken kan. Men bouwt een lineaal op als volgt:

Stop :	K	0	$\pm$ 1	-1+3	-1+4	-1+2	-1+6	-1+5	-1
Hand :-	Zet	x_n	Zet $\|f_n\|$	St 1	St 3	St 4	St 2	St 6	St
Druk :-		x_n	$\|f_n\|$	∇_n^5	∇_n^4	∇_n^3	∇_n^2	∇_n	f_n

De eerste stop is de kantlijn stop, welke de wagen op de volgende stop plaatst,die een 0-stop is en waarop het argument x_n op het toetsenbord gezet en gedrukt wordt. Dan komt een $\pm$ 1 stop, dat is een stop die normaal +1 is, maar door indrukken van een knop met bajonetsluiting in een -1 stop kan worden veranderd. Hierop wordt de $|f_n|$ ingezet op het toetsenbord en al naar het teken van f_n wordt de stop als +1 of als -1 gebruikt. Men kan dus altijd een positief getal inslaan, wat het wat omslachtiger inzetten van een complementair getal onnodig maakt.

Het subtotaliseren van register 1 op de -1+3 stop betekent zoals we gezien hebben eigenlijk totaliseren van register 1 op een +3 stop.

Na afloop van deze bewerking is register 1 dus leeg en zijn inhoud is overgegaan in 3. Vervolgens wordt register 3 gesubtotaliseerd in -1 en +4 enz. Nu gaan wij bewijzen, dat de machine inderdaad de differenties drukt en de functie weer in de laatste kolom, zoals de bewering is. Daartoe nemen wij aan, dat de som van de inhouden van alle registers aan het begin van de cyclus nul is. Wij tonen allereerst aan, dat dit dan ook weer het geval is aan het eind van de cyclus, dus aan het begin van de volgende cyclus. Laten wij maar even het proces volgen. Op de 0-stop gebeurt niets. Op de $\pm$ 1 stop wordt f_n toegevoegd aan register 1, dus de som van alle registerinhouden is nu f_n. Op de -1+3 stop verandert de som niet, want register 1 raakt zijn inhoud kwijt, maar register 3 ontvangt haar. Op de volgende stoppen -1+4, -1+2, -1+6, -1+5 verandert de som ook niet, want een of ander bedrag wordt afgetrokken van register 1, maar tegelijk toegevoegd aan een ander register. Dus op de laatste stop is de som nog f_n. Nu wordt op de laatste stop register 5 afgetrokken van de som, dus na afloop van de cyclus is de som f_n - (5). Wat bevatte register 5 ? Noem de inhoud van register 1 aan het begin van de cyclus (1'), die van register 2 (2'), enz. Dan is blijkbaar $(1) = f_n + (1')$;
$(3) = f_n + (1') + (3')$;

$(4) = f_n + (1') + (3') + (4')$; $(2) = f_n + (1') + (3') + (4') + (2')$;

$(6) = f_n + (1') + (3') + (4') + (2') + (6')$ en tenslotte

$(5) = f_n + (1') + (3') + (4') + (2') + (6') + (5') = f_n$ volgens onze

veronderstelling over de som aan het begin van de cyclus. Dus de som is nu aan het eind van de cyclus ook nul. Tevens weten wij nu, dat de laatste kolom f_n reproduceert (een waardevolle controle !). Verder is de voorlaatste kolom blijkbaar ∇_n , want $(5') + (6) = (5)$ of $(6) =$ $= (5) - (5') = f_n - f_{n-1}$, enz. Hiermee hebben we bewezen, dat het proces werkt, als tenminste de registersom nul is bij de start. Dit verzekeren wij normaal, door het proces te beginnen met het schoonmaken van alle registers (door totaliseren op een 0-stop). Maar als de laatste bewerking op de National een differentievormen was, dan is de registersom nul, dus kunnen wij direct starten.

Als wij niet tot aan de 5-de differentie willen gaan, behoeven wij eenvoudig de terugloopnok van een van de stoppen neer te draaien en de zaak is voor elkaar. Willen wij bijv. voor extra copieen van de tafel te maken meerdere malen de functiekolom gedrukt hebben, dan kan dit bijv. gebeuren, door enige 0-stoppen aan het eind van de lineaal toe te voegen en daarop register 5 te subtotaliseren. Ook kan men (op onze machine) de 0-stoppen achter de $\pm$ 1 stop plaatsen en het

x	e^x	∇^5	∇^4	∇^3	∇^2	∇ —	e^x
1,40	40551999668						4055199966
141	40959554041					407554373	4095955404
142	41371204403				4095989	411650362	4137120440
143	41786991919			41165	4137154	415787516	4178699191
144	42206958170		416	41581	4178735	419966251	4220695817
145	42631145152	99999	415	41996	4220731	424186982	4263114515
146	43059595283	7	422	42418	4263149	428450131	4305959528
147	43492351411	8	430	42846	4305997	[illegible]	4349235141
148	43929456309	99995	425	43273	4349270	437105398	4392945680
149	44370955190	15	440	43713	4392983	441498381	4437095519
150	44816890703	99996	435	44149	4437132	445935513	4481689070
151	45267307943	10	446	44595	4481727	450417240	4526730794
152	45722251951	0	446	45041	4526768	454944008	4572225195
153	46181768223	9	455	45496	4572264	459516272	4618176822
154	46645902710	0	455	45951	4618215	464134487	4664590271
155	47114701826	8	463	46414	4664629	468799116	4711470182
156	47588212451	3	466	46880	4711509	473510625	4758821245
157	48066481938	7	473	47353	4758862	478269487	4806648193
158	48549558112	99999	472	47825	4806687	483076174	4854955811
159	49037489283	13	485	48310	4854997	487931171	4903748928
160	49530324244	99998	483	48793	4903790	492834961	4953032424
161	50028112278		490	49283	4953073	497788034	5002811227
162	50530903166	8	498	49781	5002854	502790888	5053090316
163	51038747185	99998	496	50277	5053131	507844019	5103874718
164	51551695122	14	510	50787	5103918	512947937	5155169512
165	52069798272	99998	508	51295	5155213	518103150	5206979827
166	52593108444	6	514	51809	5207022	523310172	5259310844
167	53121677972	11	525	52334	5259356	528569528	5312167797
168	53655559711	9996	521	52855	5312211	533881739	5365555971
169	54194807051	14	535	53390	5365601	539247340	5419480705
170	54739473917	0	535	53925	5419526	544666866	5473947391
171	55289614776	7	542	54467	5473993	550140859	5528961477
172	55845284643	6	548	55015	5529008	555669867	5584528464
173	56406539084	3	551	55566	5584574	561254441	5640653908
174	56973434227	11	562	56128	5640702	566895143	5697343422
175	57546026760	99998	560	56688	5697390	572592533	5754602676
176	58124373944	13	573	57261	5754651	578347184	5812437394
177	58708533614	1	574	57835	5812486	584159670	5870853361
178	59298564186	7	581	58416	5870902	590030572	5929856418
179	59894524664	7	588	59004	5929906	595960478	5989452466
180	60496474644	4	592	59596	5989502	601949980	6049647464
181	61104474322	8	600	60196	6049698	607999678	6110447432
182	61718584499	5	605	60801	6110499	614110177	6171858449
183	62338866585	4	609	61410	6171909	620282086	6233886658
184	62965382610	11	620	62030	6233939	626516025	6296538261
185	63598195226	2	622	62652	6296591	632812616	6359819522
186	64237367714	7	629	63281	6359872	639172488	6423736771
187	64882963993	9	638	63919	6423791	645596279	6488296399
188	65535048622	2	640	64559	6488350	652084629	6553504862
189	66193686810	10	650	65209	6553559	658638188	6619368681
190	66858944420	7	657	65866	6619425	665257613	6685894442
191	67530887985	1	658	66524	6685949	671943562	6753088798
192	68209584693	15	673	67197	6753146	678696708	6820958469
193	68895102416	99999	672	67869	6821015	685517723	6889510241
194	69587509706	11	683	68552	6889567	692407290	6958750970
195	70286875806	8	691	69243	6958810	699366100	7028687580
196	70993270652	2	693	69936	7028746	706394846	7099327065
197	71706764883	10	703	70639	7099385	713494231	7170676488
198	72427429852	11	714	71353	7170738	720664969	7242742985
199	73155337623	99997	711	72064	7242802	727907771	7315533762
2,00	73890560989	18	729	72793	7315595	735223366	7389056098

toetsenbord, dat met een herhaaltoets vastgehouden wordt thans afdrukken. Dit heeft het voordeel, dat wij steeds de absolute waarde van f drukken en niet het complement, wat register 5 doet, indien f negatief is !

De capaciteit van de machine is 12 cijfers in elk register. De duur van het proces per regel is ongeveer de tijd benodigd voor het aflezen en inslaan van f_n plus vijf seconden, dat is veel korter dan iemand nodig heeft om de differenties neer te schrijven al kende hij ze alle uit zijn hoofd. Als voorbeeld geven wij op pagina 39 een differentieschema van de functie e^x voor x lopende van 1,40 tot 2,00. Merk op, dat de 5^{de} differentie schommelt om +4 binnen de marges +20 en -12, zoals het behoort.

4. Een en ander over interpolatiecoefficienten.

Wij hebben in § 2 twee belangrijke interpolatieformules leren kennen, nl. die van Gregory-Newton, welke gebruik maakt van voorwaartse of achterwaartse differenties en de groep van formules, welke gebruik maken van centrale differenties, waarvan wij altijd als representanten die van Bessel of die van Everett zullen kiezen. Deze twee types interpolatieformules zijn zowel van een zuiver wiskundig als van numeriek standpunt bezien zeer verschillend. Wij zullen ze eerst van het numerieke standpunt uit bezien.

Het is duidelijk, dat een interpolatieformule des te bruikbaarder is in de praktijk naarmate de afzonderlijke termen des te sneller klein worden, zodat men zich tot het berekenen van weinig termen kan bepalen. Wij zullen daarom de coefficienten in beide types formules voor grote waarde n van de orde van de differenties onderzoeken. In de formule van Gregory-Newton is volgens (2.13) de coefficient van de k-de differentie gelijk aan $\binom{p}{k}$. Nu is

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{(k-p-1)\,(k-p-2)\cdots(1-p)(-p)}{k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{(k-p-1)!}{(-p-1)!\,k!} .$$

Voor de faculteitfunctie geldt de beroemde relatie

$$(-z)!\,(z-1)! = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad (4.1)$$

Met behulp hiervan vinden wij

$$\binom{p}{k} = (-1)^k \frac{p!\,\sin p\pi}{\pi\,(k-p)} \frac{(k-p)!}{k!} \qquad (4.2)$$

Deze vorm is geschikt om na te gaan, hoe $\binom{p}{k}$ zich gedraagt voor grote k. Immers voor de faculteitfunctie geldt de asymptotische ontwikkeling van Stirling:

$$z! \sim \sqrt{2\pi}\; e^{-z}.\, z^{z+1/2} \qquad \text{voor } z \gg 1. \qquad (4.3)$$

Door dit toe te passen op (k-p)! en k! vinden wij na enig rekenen:

$$\binom{p}{k} \sim (-1)^k \frac{p!\,\sin \pi p}{\pi\, k^{1+p}} . \qquad \text{voor } k \gg 1. \qquad (4.4)$$

Hieruit leren wij dat $\binom{p}{k}$ slechts langzaam met toenemende k tot nul nadert, nl. als een macht van k en wel voor kleine p ongeveer als k^{-1} en voor p in de buurt van 1 ongeveer als k^{-2}.

Nu de coefficienten van de centrale interpolatieformules. Wij gaan uit van Everett's formule (2.28):

$$E_1^{2k}(p) = \binom{k+p}{2k+1} = \frac{(k+p)(k+p-1)\ldots p(p-1)\ldots(p-k)}{(2k+1)!} =$$

$$= (-1)^k \frac{(k+p)\ldots\ldots p.(k-p)\ldots(1-p)}{(2k+1)!} = (-1)^k \frac{(k+p)!}{(p-1)!}\frac{(k-p)!}{(-p)!}\frac{1}{(2k+1)!} =$$

$$= (-1)^k \frac{\sin \pi p}{\pi\,(2k+1)} \quad \frac{(k+p)!(k-p)!}{(2k)!}$$

Met behulp van (4.~~1~~3) vinden wij nu na enig rekenen

$$E_1^{2k}(p) \sim (-1)^k \frac{\sin \pi p}{2^{2k+1}\sqrt{\pi\,k}} \qquad \text{voor } k \gg 1. \tag{4.5}$$

Omdat $E_0^{2k}(p) = -\binom{k+p-1}{2k+1}$, behoeven wij in (4.5) slechts het teken om te keren en p te vervangen door p-1. Dan vinden wij

$$E_0^{2k}(p) \sim (-1)^k \frac{\sin \pi p}{2^{2k+1}\sqrt{\pi\,k}} \qquad \text{voor } k \gg 1. \tag{4.6}$$

Dus geldt voor grote k allereerst, dat $E_0^{2k}(p) \sim E_1^{2k}(p)$ en voorts, dat ze beiden met toenemende k zeer snel tot nul naderen, nl. als $k^{-1/2}.\ 2^{-2k}$. Verder zien wij, dat voor grote k de Everettcoefficient een vaste functie van p (nl. sin π p) maal een slechts van k afhangende factor is.

Wij gaan ook nog even de Besselcoefficienten (2.26) na. Omdat $B^{2k} = \frac{1}{2}(E_0^{2k} + E_1^{2k})$, vinden wij direct uit (4.5) en (4.6), dat ook $B^{2k}(p)$ voldoet aan de relatie

$$B^{2k}(p) \sim (-1)^k \frac{\sin \pi p}{2^{2k+1}\sqrt{\pi\,k}} \qquad \text{voor } k \gg 1. \tag{4.7}$$

Voorts is $B^{2k+1}(p) = \frac{p-1/2}{k+1/2}\ B^{2k}(p)$, dus

$$\sim (-1)^k \frac{(p-1/2)\sin \pi p}{2^{2k+1}\,k\,\sqrt{\pi\,k}} \qquad \text{voor } k \gg 1. \tag{4.8}$$

In het bovenstaande hebben wij formule (4.1) en (4.3) uit de lucht laten vallen. Nu is (4.1) niet zo heel gemakkelijk aan te tonen en bovendien leert de afleiding ons niet veel, wat we elders kunnen toepassen. Daarentegen leert de afleiding van (4.3) ons een belangrijk procedé, nl. dat van het vinden van asymptotische ontwikkelingen van zekere bepaalde integralen.

Wij kennen het elementaire begrip van de faculteit, gedefinieerd door:

$$n! = n\,(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1;\ n \text{ geheel} \tag{4.9}$$

Deze $n!$ voldoet aan de relatie

$$n! = n\,(n-1)!$$

Door n=1 te stellen, volgt hieruit : $0! = 1$. (4.10)

Wij gaan nu het begrip faculteit uitbreiden tot niet gehele waarden van het argument. Daartoe stellen we:

$$z! = \int_0^\infty e^{-x}\, x^z\, dx \tag{4.11}$$

Immers voor $z=0$ volgt $z!=1$ in overeenstemming met het vorige. Verder volgt door partiele integratie uit (4.11):

$$z! = -e^{-x}\, x^z \Big|_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-x}\, x^{z-1}\, dx = z\,(z-1)!,$$

zodat ook aan (4.10) voldaan is. Voor alle gehele waarden van z stemt dus het begrip faculteit, dat door (4.11) wordt gedefinieerd, overeen met dat van (4.9). Deze faculteitfunctie $z!$ speelt een belangrijke rol in de wiskunde. Zij is ook uitvoerig getabelleerd. Vaak stelt men ook in plaats van haar de gammafunctie $\Gamma(z) = (z-1)!$.
De generalisatie van (4.9) op (4.11) is zelf eigenlijk weer een interpolatieprobleem, maar vele malen moeilijker dan wat wij tot nu toe hebben behandeld. Men kan bewijzen dat (4.11) de "gladste" interpolerende functie is, nl. de enige, die voor gehele waarden van z aan (4.9) voldoet en welker logarithme voor $z > -1$ nergens een buigpunt bezit, maar altijd een positieve kromming bezit.

Om nu uit (4.11) een asymptotische uitdrukking voor $z!$ te krijgen, geldig voor grote z, bezien wij de integrand eens. Deze stijgt eerst sterk onder invloed van de factor x^z, om later weer te verdwijnen onder invloed van de factor e^{-x}. Het maximum van de integrand is $e^{-z}.z^z$, aangenomen voor $x = z$. Is z dus groot, dan ligt het maximum bij grote waarde van z en naar weerszijden valt de integrand tot een verwaarloosbaar bedrag af. De integrand heeft dus een klokvormig verloop in de buurt van $x = z$.

Dan kunnen we schrijven $x = z+t$ en $e^{-x}\, x^z = e^{-x+z\cdot \ln x} = e^{-z-t+z\cdot \ln(z+t)}$
$= e^{-z+z\cdot \ln z}.e^{-t+z\cdot \ln(1+t/z)} = e^{-z}.z^z.e^{-t+z(t/z - t^2/2z^2+\ldots)}$
$\sim e^{-z}\, z^z\, e^{-t^2/2z}$, dus $z! = \int_0^\infty e^{-x}\, x^z\, dx \sim e^{-z}\, z^z \int_{-z}^\infty e^{-t^2/2z}\, dt$
$\sim e^{-z} z^z \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2z}\, dt = \sqrt{2}\, e^{-z} z^{z+1/2} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{2\pi}\, e^{-z} z^{z+1/2}.$

Dit is Stirling's ontwikkeling (4.3) in zijn eenvoudigste vorm. Men kan haar zonder veel moeite verfijnen.

Om nog eens goed de nadruk te leggen op het verschil in grootte-orde van de coefficienten in de twee types formules geven wij nog het volgende lijstje voor $p = 1/2$:

k	Gregory-Newton: $\binom{1/2}{k}$	Bessel: $B^k(1/2)$	$2B^k(1/2)/\binom{1/2}{k}$
2	−0,125000	−0,062500	1
3	+0,062500	0	0
4	−0,039062	+0,011719	−0,6000
5	+0,027344	0	0
6	−0,020508	−0,002441	0,2381
7	+0,016113	0	0
8	−0,013092	+0,000534	−0,0816
9	+0,010910	0	0
10	−0,009274	−0,000120	0,0259

In de derde kolom hebben wij $2B^k$ gebruikt, omdat in de interpolatie-formule van Bessel de factor van B^k voor even waarden van k de som van twee differenties is, nl. $\delta_0^k + \delta_1^k$.

Wij hebben gezien, dat de coefficienten B^{2k} zich als functie van p alle ongeveer eender gedragen, nl. als $\sin \pi p$, dwz. dat ze ten naaste bij veelvouden van elkaar zijn. Dit gaan wij nu nader onderzoeken. Wij introduceren daartoe eerst een belangrijk nieuw gezichtspunt op het gebied van benadering door polynomen, nl. dat van Tchebycheff. Een benaderingspolynoom volgens Tchebycheff is er een, dat in een gegeven interval een functie zo goed mogelijk weergeeft als met ~~haar~~ zijn graad verenigbaar is, in die zin, dat het maximum van de absolute waarde van de afwijking tussen polynoom en functie zo klein mogelijk is. In het algemeen is het bepalen van zulk een polynoom een moeilijke opgave, veel moeilijker dan de bepaling van onze bekende interpolatiepolynomen. Voor ons doel is het voorlopig voldoende, dat de te benaderen functie identiek nul is. Natuurlijk zou dan ook het gezochte polynoom identiek nul zijn, maar wij zullen de opgave nu als volgt preciseren: Gevraagd een polynoom van de graad n te bepalen, met coefficient van de term x^n gelijk aan 1, hetwelk voor $-1 \leq x \leq +1$, zo goed mogelijk nul is. In het beschouwde interval zal het polynoom een aantal maxima en minima vertonen en wij bewijzen nu eerst, dat dit er n+1 zijn en dat zij bovendien op het teken na gelijk zijn. De extrema treden op voor die waarden van x, waarvoor de afgeleide nul is en verder voor $x = -1$ en $x = +1$. Lagen nu in het interval minder dan n+1 extrema, dus minder dan n nulpunten (dwz. het maximum aantal!), dan konden wij aan het polynoom een ander polynoom van hoogstens de graad n-1 (dat dus de graad n en de term x^n onaangetast laat) toevoegen, hetwelk de zelfde nulpunten had en in elk deelinterval het tegengestelde teken had van, doch overigens in absolute waarde steeds kleiner was dan het oorspronkelijke polynoom. Deze combinatie zou ook aan de eisen voldoen en alle extrema zouden in absolute waarde kleiner zijn, zodat het oorspronkelijke polynoom geen minimaalpolynoom kon zijn. Alle n nulpunten liggen dus in het interval. Waren nu voorts niet alle extrema op het teken na aan elkaar gelijk, dan konden wij een polynoom van de graad n-2 toevoegen met de zelfde nulpunten als het oorspronkelijke polynoom op die twee na, welke aan weerszijden van het in absolute waardekleinste extreem liggen, en dat voorts in alle deelintervallen kleine waarden aanneemt met een teken, tegengesteld aan dat van het oorspronkelijke polynoom, behalve in het deelinterval, dat het absoluut kleinste extreem bevat, waar het het zelfde teken heeft. Alle extrema zouden dan in absolute waarde verkleind worden behalve het minimale, dat vergroot zou worden, zonder nochthans de andere te overtreffen, als het toegevoegde polynoom maar met een genoegzaam kleine factor vermenigvuldigd was. Dus was weer het oorspronkelijke polynoom geen minimaalpolynoom.

Nu bewijzen wij, dat er geen twee minimaalpolynomen met verschillende amplitude zijn. Immers, waren er twee, het eerste met amplitude a en het tweede met amplitude $b > a$, dan zou het verschil van beide een polynoom van hoogstens graad n-1 zijn, dat voor die waarden van x, waarvoor het tweede zijn extrema bereikt, afwisselende tekens zou hebben en dus tenminste n nulpunten zou hebben. Het verschil zou dus identiek nul moeten zijn, wat in strijd is met het gegeven verschil in amplitude. Overigens zouden ze dan toch identiek zijn. Het bewijs, dat er ook geen twee minimaalpolynomen met gelijke amplitude zijn luidt alsvolgt. Vallen geen extrema samen, dan gaat het vorige bewijs zonder meer door. Vallen k extrema van het ene polynoom samen met die van het andere, dan heeft het verschilpolynoom dus alvast 2k nulpunten, nl. k tweevoudige nulpunten. Hierbij zijn niet meegeteld de twee eindextrema, die automatisch samenvallen en ook van hetzelfde teken zijn voor de twee polynomen.

Laat het eerste polynoom tussen deze gemeenschappelijke extrema achtereenvolgens l_1, l_2, $\cdots l_p$ extrema hebben· Blijkbaar is $p \leqslant k+1$· Dan liggen tussen de gemeenschappelijke extrema ook l_1-1, l_2-1, $\cdots$ l_p-1 nulpunten van het verschil van de polynomen· Het totale aantal nulpunten van dit verschil bedraagt dus $l_1+l_2+\cdots+l_p-p+2k+2 \geqslant l_1+l_2+\cdots+l_p+k+1 = n$, waaruit volgt, dat het verschil identiek nul is· Samenvattende verkrijgen wij dus, dat er maar één minimaalpolynoom is, gekarakteriseerd door het feit, dat het alle nulpunten in het beschouwde interval heeft liggen, terwijl voorts alle extrema op het teken na gelijk zijn· Met behulp van deze stelling is het vinden ervan niet lastig meer· Wij merken op, dat cos(n arccos x) een polynoom van de n-de graad is· Immers noem $z = \arccos x$, zodat $x = \cos z$, dan is $\cos(n \arccos x) = \cos nz$, waarvoor geldt:

$$\cos nz = \mathrm{Re}\, e^{inz} = \mathrm{Re}\, (e^{iz})^n = \mathrm{Re}\, (\cos z + i \sin z)^n =$$

$$= \cos^n z - \binom{n}{2} \cos^{n-2} z \sin^2 z + \binom{n}{4} \cos^{n-4} z \sin^4 z - \cdots =$$

$$= x^n - \binom{n}{2} x^{n-2}(1 - x^2) + \binom{n}{4} x^{n-4}(1 - x^2)^2 - \cdots \qquad (4\cdot12)$$

Loopt x van -1 tot $+1$, dan loopt arccos x van π tot 0 en dus n arccos x van $n\pi$ tot 0· Maar dan loopt cos(n arccos x) van $(-1)^n$ tot 1 na intussen nog $n-1$ maal extrema ter waarde van $+1$ en -1 te hebben aangenomen· Dit is dus precies, wat wij geeist hadden voor een minimaalpolynoom, behalve dan, dat de coefficient van x^n nog gelijk is aan 2^{n-1}, wat volgt uit (4·12)· Het gezochte minimaalpolynoom is dus $y = 2^{-n+1}\cos(n \arccos x)$·

Zonder de factor 2^{-n+1} heten deze polynomen de polynomen van Tchebycheff:

$$T_n(x) \stackrel{def}{=} \cos(n \arccos x) \qquad (4\cdot13)$$

Een lijstje van de eerste zeven luidt:

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

Hogere polynomen kan men gemakkelijk vinden met behulp van de recursievergelijking:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \tag{4.14}$$

wat eenvoudig te bewijzen is.

Wij wijzigen nu de probleemstelling in zoverre, dat wij het interval vervangen door $-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2$ en tevens eisen, dat het minimaalpolynoom nul is voor $x = -1/2$ en voor $x = 1/2$. Is s_n het grootste nulpunt van $T_n(x)$, dan is het nieuwe minimaalpolynoom, afgezien van een multiplicatieve factor

$$M_n(x) = T_n(2s_n x). \tag{4.15}$$

Dit polynoom slingert ook weertussen -1 en +1. Dat het ook werkelijk het gezochte minimaalpolynoom is, volgt door overwegingen analoog aan die wij reeds gebruikt hebben. De factor s_n is gemakkelijk te berekenen, want uit de definitie volgt direct:

$$s_n = \cos\frac{\pi}{2n}. \tag{4.16}$$

Stel nu bijv. het vraagstuk om $B^k(p)$ voor $0 \leqslant p \leqslant 1$ zo goed mogelijk te benaderen door een lineaire combinatie van de lagere Besselcoefficienten $B^{k-2}(p)$, $B^{k-4}(p)$, enz. Dit betekent, dat wij een stel coefficienten ${}_{k-2}C^k_{k-2,k-4,\dots}$, ${}_{k-4}C^k_{k-2,k-4,\dots}$, ... moeten bepalen, zodat

$$T^k_{k-2,k-4,\dots}(p+1/2) = B^k(p+1/2) - {}_{k-2}C^k_{k-2,k-4,\dots}B^{k-2}(p+1/2)$$
$$- {}_{k-4}C^k_{k-2,k-4,\dots}B^{k-4}(p+1/2) - \cdots \tag{4.17}$$

minimaal is in de zin van Tchebycheff in het interval $-1/2 \leqslant p \leqslant 1/2$, met de automatisch volgende conditie, dat $T = 0$ voor $p = -1/2$ en voor $p = 1/2$, dwz. dat T op een multiplicatieve factor na identiek is met $M_k(p)$. De coefficienten C zijn dan zonder meer te bepalen.

Als voorbeeld benaderen wij B^4 zo goed mogelijk door B^2, dus moet

$$T^4_2(p+1/2) = B^4(p+1/2) - {}_2C^4_2\, B^2(p+1/2) = \text{constante maal } M_4(p). \tag{4.18}$$

= afwijking

~~Hieruit volgt:~~ Nu is het linkerlid

$$T^4_2(p+1/2) = \frac{(p+1/2)(p-1/2)(p+3/2)(p-3/2)}{2\cdot 4!} - {}_2C^4_2\,\frac{(p+1/2)(p-1/2)}{2\cdot 2!} =$$
$$= \frac{1}{768}\left\{16p^4 - (40+192\,{}_2C^4_2)p^2 + (9+48\,{}_2C^4_2)\right\}. \tag{4.19}$$

Voorts ~~Nu~~ is $s_4 = \cos\pi/8$, dus $4s_4^2 = 4\cos^2\pi/8 = 2(1+\cos\pi/4) = 2+\sqrt{2}$, weshalve

$$M_4(p) = 8(2+\sqrt{2})^2p^4 - 8(2+\sqrt{2})p^2 + 1. \tag{4.20}$$

(zie pagina 46 voor T_4)

De eis is dus

$$\frac{40 + 192\,{}_2C_2^4}{16} = \frac{8(2+\sqrt{2})}{8(2+\sqrt{2})^2},$$

waaruit volgt

$${}_2C_2^4 = -\frac{3+\sqrt{2}}{24} = -0{,}18392556510 \qquad (4\cdot21)$$

Het absolute maximum van T_2^4 is nu

$$|T_2^4|_{max} = \frac{16}{768\cdot8(2+\sqrt{2})^2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{768} = 0{,}00022340218\,. \qquad (4\cdot22)$$

Dit is maar ca. 2% van $|B^4_{max}| = \frac{3}{256} = 0{,}01171875$.

De cursist losse zelf het vraagstuk op om B^5 zo goed mogelijk te benaderen door B^3, dus de bepaling van ${}_3C_3^5$.

Op analoge wijze kunnen wij B^6 vervangen door een combinatie van B^4 en B^2. Dan vinden wij als minimaaloplossing:

$$T^6_{2,4} = B^6 + 0{,}013119656143\,B^2 + 0{,}27826920705\,B^4. \qquad (4\cdot23)$$

met een maximum

$$|T^6_{2,4}|_{max} = 0{,}000000417489, \qquad (4\cdot24)$$

hetgeen slechts ca. 0,02% is van $|B^6_{max}| = \frac{5}{2048} = 0{,}00244140625$.

Moeilijker is het vraagstuk om B^6 zo goed mogelijk te vervangen door B^2 alleen, dus de bepaling van ${}_2C_2^6$. Een exacte berekening, die wij nu maar niet meer zullen weergeven, leert, dat

$$T_2^6 = B^6 - 0{,}03806714\,B^2. \qquad (4\cdot25)$$

met een maximum

$$|T_2^6|_{max} = 0{,}000062210. \qquad (4\cdot26)$$

Een wat ruwere berekening kunnen wij uitvoeren, door eerst B^6 door B^4 en B^2 te vervangen en vervolgens weer B^4 door B^2 te vervangen, dus door combinatie van (4.18), (4.21) en (4.23). Dan vinden wij de benaring:

$$T^6_{2\,ben} = B^6 - 0{,}03806117\,B^2 \qquad (4\cdot27)$$

met een maximum

$$|T^6_{2\,ben}|_{max} = 0{,}000062583. \qquad (4\cdot28)$$

Het defect van deze ruwe methode is dus maar zeer gering.

Wij kunnen van het bovenstaande een belangrijke toepassing maken bij het interpoleren. Laten wij daarvoor maar eens nagaan hoe groot differenties van verschillende orde moeten zijn om nog van noemenswaardige invloed te zijn op het resultaat van een interpolatie met behulp van Bessel's of Everett's formule. Wij geven in het volgende tabelletje de maxima van de Besselcoefficienten en de hieruit volgende waarden, welke een differentie van bepaalde orde moet hebben om maximaal één eenheid in de laatste decimaal invloed te hebben bij interpolatie.

k	B^k_{ext}	p =	δ^k met eenheids-invloed	δ^k verwaarloosbaar
2	−0,0625	0,5	8	4
3	±0,00802...	0,211...en 0,789...	125	60
4	+0,0117...	0,5	43	20
5	∓0,000870...	0,219...en 0,781...	1150	500
6	−0,00244...	0,5	205	100
7	±0,000128...	0,221...en 0,779...	7826	3500
8	+0,000534...	0,5	936	400
9	∓0,0000216...	0,222...en 0,778...	46293	20000
10	−0,000120...	0,5	4161	2000

Wij zien allereerst dat de invloed van de oneven differenties enorm veel kleiner is dan die van de even differenties. Dat komt deels door het feit dat de even differenties dubbel in de formule van Bessel optreden maar meer nog door het feit, dat de oneven Besselcoefficienten geen grote maximumwaarden kunnen aannemen omdat ze voor $p = 1/2$ nul zijn en dus geen gelegenheid hebben om te groeien. Uit (4.7) en (4.8) kan men ook heel goed zien, dat de oneven coefficienten belangrijk kleiner zijn dan de even. In de praktijk verwaarloost men vaak hogere differenties als van zekere orde af hun invloed maximaal een halve eenheid bedraagt. De rekenaar kan ook een conservatievere limiet stellen. Dat betekent dan, dat men de k-de en hogere differenties niet meer in rekening brengt, als de δ^k een waarde heeft als in de laatste kolom gegeven. Wanneer de invloed van een zekere even differentie zeer klein is, dan is de volgende blijkbaar zeker verwaarloosbaar. Bij hoge orde hoeft het omgekeerde niet het geval te zijn.

Stel nu het geval, dat δ^3 en δ^4 niet, maar dat δ^5 en hogere δ^k wel verwaarloosd kunnen worden. Bessel's formule luidt dan dus:

$$f_p = f_o + p\,\delta_{1/2} + B^2(\delta_o^2 + \delta_1^2) + B^3\,\delta^3_{1/2} + B^4(\delta_o^4 + \delta_1^4)\,.$$

Nu stellen wij eens volgens (4.18)

$$B^4 = -0{,}184\, B^2 + T_2^4 \quad ,$$

waarbij wij weten, dat T_2^4 maximaal ca. 0,00022 bedraagt. De factor -0,184 welke eigenlijk bij de coefficient behoort, trekken wij nu bij de vierde differentie en voeren een gewijzigde tweede differentie δ^{2*} in als volgt:

$$\delta^{2*} = \delta^2 - 0{,}184\, \delta^4. \tag{4.29}$$

Deze δ^{2*} is natuurlijk in het geheel geen differentie, maar wel eenvoudig te berekenen, hetzij uit (4.29) indien de 2e en 4e differenties reeds berekend zijn of uit

$$\delta^{2*} = -0{,}184\, f_{-2} + 1{,}736\, f_{-1} - 3{,}104\, f_o + 1{,}736\, f_1 - 0{,}184\, f_2 \ , \tag{4.30}$$

indien dit niet het geval is.

De formule van Bessel gaat nu over in

$$f_p = f_o + p\,\delta_{1/2} + B^2(\delta_o^{2*} + \delta_1^{2*}) + B^3 \delta_{1/2}^3 + T_2^4\,(\delta_o^4 + \delta_1^4).$$

Principieel is hiermede nog niets gewonnen, maar de coefficient T_2^4 bedraagt hoogstens 2% van B^4_{max}, zoals we gezien hebben. Dit betekent, dat wij nu de δ^4-termen al kunnen verwaarlozen als ze vijftig maal zo groot zijn als zonder deze kunstgreep ! Met de norm, dat een differentie verwaarloosd kan worden, als haar invloed maximaal een halve eenheid bedraagt, geldt dus dat nu δ^4 verwaarloosd kan worden, als ze kleiner dan 1000 is ! Onder die omstandigheden is dus:

$$f_p = f_o + p\,\delta_{1/2} + B^2(\delta_o^{2*} + \delta_1^{2*}) + B^3 \delta_{1/2}^3 \quad , (\delta^4 < 1000). \tag{4.31}$$

Wanneer de δ^{2*} eenmaal gevormd zijn is de toepassing van (4.31) volkomen identiek met de gewone Bessel formule met verwaarloosbare vierde differenties, waarvoor echter $\delta^4 < 20$ moet zijn.

Als $\delta^4 < 1000$ is vrijwel zeker $\delta^5 < 500$ en dus kunnen wij aannmen, dat de δ^5 verwaarloosbaar is. Dit betekent, dat wij de kunstgreep ook kunnen toepassen bij Everett's formule, nl. als

$$f_p = (1-p)\, f_o + p\, f_1 + E_o^2\, \delta_o^{2*} + E_1^2\, \delta_1^{2*}, \ (\delta^4 < 1000). \tag{4.32}$$

Trouwens dit is nog beter, dan men wellicht vermoedt. Immers analoog aan de vervanging van B^4 door B^2 geldt:

$$B^5 = 0{,}108\, B^3 + T_3^5 \ ,$$

waarin T_3^5 maximaal 0,0000209 is.

Dus

$$f_p = f_o + p\delta_{1/2} + B^2(\delta_o^2+\delta_1^2) + B^3\delta_{1/2}^3 + B^4\,(\delta_o^4+\delta_1^4) + B^5\delta_{1/2}^5 =$$

$$= f_o + p\delta_{1/2} + (B^2-B^3)\delta_o^2 + (B^2+B^3)\delta_1^2 + (B^4-1{,}7\,B^5)\delta_o^4 + (B^4+1{,}7\,B^5)\delta_1^4 - 0{,}7B^5$$

$$= f_o + p\delta_{1/2} + E_o^2\delta_o^2 + E_1^2\delta_1^2 - 0{,}184(B^2+B^3)\delta_o^4 - 0{,}184(B^2+B^3)\delta_1^4 - 0{,}7\,B^5\delta_{1/2}^5 =$$

$$= f_o + p\delta_{1/2} + E_o^2\delta^2 + E_1^2\delta_1^2 - 0{,}184\,E_o^2\delta_o^4 - 0{,}184\,E_1^2\delta_1^4 - 0{,}7\,B^5\delta_{1/2}^5 =$$

$$= f_o + p\delta_{1/2} + E_o^2\delta_o^{2*} + E_1^2\delta_1^{2*} - 0{,}7\,B^5\delta_{1/2}^5\,.$$

Wij zien, dat bij het gebruik van Everett's formule ook nog het effect van δ^5 gedeeltelijk in rekening is gebracht in die zin, dat het voor 70 % te veel verdisconteerd is en het defect uiteindelijk van teken omgekeerd is, maar 30 % kleiner is dan bij de Besselformule !

De hier behandelde kunstgreep staat bekend als "terugwerpen" van differenties (throw-back, Comrie 1928). Het is de eerste wezenlijke bijdrage tot de interpolatieformules van de nieuwe aera van het wetenschappelijk rekenen.

Nu kan echter, omdat de toelaatbare δ^4 zo hoog geworden is ook zeer wel nog δ^6 een duit in het zakje doen. Immers bij $\delta^4 < 1000$ kan δ^6 zeer wel $>$ 100 zijn. Daarom verdient het aanbeveling ook δ^6 terug te werpen. Dit kan geschieden met behulp van (4.25). Een wat betere formule voor (4.29) is dus :

$$\delta^{2*} = \delta^2 - 0{,}184\,\delta^4 + 0{,}038\,\delta^6. \qquad (4.33)$$

Soortgelijke formules kunnen worden ontwikkeld voor andere differenties. Voor berekeningen met hoge graad van precisie kan men ook twee differenties tegelijk wijzigen, bijv. δ^2 en δ^4 met behulp van (4.23) als volgt

$$\begin{aligned} \delta^{2*} &= \delta^2 - 0{,}01312\,\delta^6 + 0{,}0043\,\delta^8 \\ \delta^{4*} &= \delta^4 - 0{,}27827\,\delta^6 + 0{,}0685\,\delta^8\,. \end{aligned} \qquad (4.34)$$

De verwaarloosde resttermen zijn maximaal $\pm$ 0,00000043 $(\delta_o^6+\delta_1^6)$, $\pm$ 0,0000094 δ^7 en $\pm$ 0,00000017 $(\delta_o^8+\delta_1^8)$, zodat (4.34) gebruikt kan worden tot $\delta^6 = 300000$ en $\delta^7 = 30000$. Dit is dus al een zeer machtige terugwerpmethode.

De hier ontwikkelde methoden zijn nog op verschillende wijzen voor perfectie vatbaar. Wij zullen daar hier niet verder op in gaan, maar hopen er in een volgende cursus op terug te komen.

Tenslotte nog een practische opmerking over de interpolatiecoefficienten. Wij hebben in de voorgaande pagina's allerhande tafels gegeven van enkele coefficienten, maar natuurlijk moesten wij ons beperken tot een zekere stap in het argument p, welke stap wij altijd 0,01 hebben genomen. Als wij nu willen interpoleren met een fractie p, welke niet opgegeven staat, bijv. p = 0,37485, dan moeten wij in de coefficiententafels ook weer interpoleren! Deze nieuwe interpolatie zal i.h.a. niet lineair kunnen geschieden als wij de coefficient in alle decimalen nodig hebben, welke in de tafel zijn gegeven. Maar nu is het merkwaardige, dat wij toch veelal met lineaire interpolatie kunnen volstaan, omdat het niet de coefficienten zijn, welke wij zoeken, maar het eindresultaat van onze oorspronkelijke interpolatie ! Stel nu eens, dat wij deze oorspronkelijk interpolatie uitvoerden bij p = 0,37 en vervolgens bij p = 0,38, beide waarden dus, die in de tafel zijn opgenomen. Deze twee geinterpoleerde waarden zijn nu te beschouwen als deel van een nieuwe tabel van de functie, met een stap = 0,01 w. Zoals we binnenkort zullen zien, geldt in een dergelijke tafel bij benadering dat de k-de differentie gelijk is aan de $(0,01)^k$ maal de oorspronkelijke k-de differentie. De tweede differentie is dus al 10000 maal zo klein geworden en als in de oorspronkelijke tafel de δ^2 nu maar kleiner was, dan 40000 eenheden, dan kunnen wij hem in de nieuwe tafel verwaarlozen, m.a.w. we kunnen in de nieuwe tafel lineair interpoleren ! Maar dat komt op hetzelfde neer als lineair interpoleren in de coefficienten ! Overigens is het vaak wel zo eenvoudig inderdaad de interpolatie twee keer uit te voeren met de twee naastbij liggende waarden van p, welke in de tabel zijn opgenomen en achteraf nog eenmaal lineair te interpoleren. Let op, dat bij deze laatste lineaire interpolatie natuurlijk weer een interpolatiefractie p' optreedt, welke in ons cijfervoorbeeld zou zijn p'= 0,485. Deze methode is dus te machtiger naarmate de tabellen fijner zijn. Zo mogen wij bijv. in een tafel met stap in p van 0,001 al lineair interpoleren als $\delta^2 < 4000000$ is.

Om de dubbele interpolatie te ontgaan (dus in ons voorbeeld de interpolatie voor p = 0,37 en voor p = 0,38) kan men althans bij Lagrange-interpolatie weer een foefje toepassen, dat trouwens op een zelfde grondslag berust, nl. hierop, dat het er niet op aan komt, dat alle coefficienten juist zijn, maar alleen maar op het juist zijn van het totale antwoord. In het geval van 4-punts Lagrange-interpolatie hebben wij te maken met de coefficienten

$L_{-1}(p) = -\frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{3}p$,

$L_0(p) = \frac{1}{2}p^3 - p^2 - \frac{1}{2}p + 1$,

$L_1(p) = -\frac{1}{2}p^3 + \frac{1}{2}p^2 + p$,

$L_2(p) = \frac{1}{6}p^3 - \frac{1}{6}p$.

Stel nu $p = n + m$, waarin n een in de tafel voorkomende waarde is, en m dus nooit hoger behoeft te zijn dan $\pm w/2$ (dus in ons geval $m \leqslant 0{,}005$). Door dit te substitueren in bovenstaande uitdrukkingen verkregen wij zonder meer de uitdrukkingen:

$$L_{-1}(p) = L_{-1}(n) - \frac{1}{2}n^2m - \frac{1}{2}n\,m^2 - \frac{1}{6}m^3 + n\,m + \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{3}m$$

$$L_0\ (p) = L_0\ (n) + \frac{3}{2}n^2m + \frac{3}{2}n\,m^2 + \frac{1}{2}m^3 - 2n\,m - m^2 - \frac{1}{2}m$$

$$L_1\ (p) = L_1\ (n) - \frac{3}{2}n^2m - \frac{3}{2}n\,m^2 - \frac{1}{2}m^3 + n\,m + \frac{1}{2}m^2 + m$$

$$L_2\ (p) = L_2\ (n) + \frac{1}{2}n^2m + \frac{1}{2}n\,m^2 + \frac{1}{6}m^3 \qquad - \frac{1}{6}m\ .$$

Voer nu in de grootheid $A = \frac{1}{4}m\,(2n-1) \leqslant 0{,}00125$ en vorm de volgende coefficienten:

$$L^*_{-1}(p) = L_{-1}(n) + A$$

$$L^*_0\ (p) = L_0\ (n) - A - m$$

$$L^*_1\ (p) = L_1\ (n) - A + m$$

$$L^*_2\ (p) = L_2\ (n) + A$$

en gebruik deze coefficienten $L^*_i(p)$ in de formule van Lagrange. Wat is de daardoor ontstane fout ? Blijkbaar is, als

$$Q = \frac{1}{2}n\,m - \frac{1}{12}m - \frac{1}{2}n^2m - \frac{1}{2}n\,m^2 - \frac{1}{6}m^3,$$

$$L^*_{-1}(p) = L_{-1}(p) - Q - \frac{1}{2}m^2$$

$$L^*_0\ (p) = L_0\ (p) + 3Q + m^2$$

$$L^*_1\ (p) = L_1\ (p) - 3Q - \frac{1}{2}m^2$$

$$L^*_2\ (p) = L_2\ (p) + Q\ .$$

Dus is het resultaat van de interpolatie

$$f_{-1}\,L^*_{-1} + f_0\,L^*_0 + f_1\,L^*_1 + f_2\,L^*_2 = f_p - Q\,\delta_{1/2}^{\ 3} - \frac{1}{2}m^2\,\delta_0^{\ 2}$$

$$= f_p - \frac{m^2}{4}(\delta_0^{\ 2} + \delta_1^{\ 2}) + \frac{m}{12}(1 - 6n + 6n^2 + 3m + 6m\,n + 2m^2)\,\delta_{1/2}^{\ 3}.$$

De fout is dus samengesteld uit twee delen. Het eerste deel, nl. $-m^2/4\ (\delta_0^2+\delta_1^2)$ is vergelijkbaar met de fout, welke wij op de eerste manier ook maakten door het verwaarlozen van de tweede differentie in het verkleinde interval. Het maximum van deze fout is bij beide methoden precies gelijk. Het tweede gedeelte, dat maximaal ongeveer $m/12\ \delta^3_{1/2}$ bedraagt, is aanzienlijk ongunstiger dan bij de eerste methode, maar kan onder bepaalde omstandigheden wel zeer klein zijn, nl. als de derde differentie klein is, wat meestal wel het geval zal zijn wanneer men een vierpuntsinterpolatie toepast. Het voordeel van de methode is, dat A maar een klein getal is, dat gemakkelijk berekend wordt (men hoeft er niet veel cijfers van te kennen), zodat de correcties in de coefficienten gemakkelijk en wellicht uit het hoofd berekend kunnen worden. De eigenlijke interpolatie hoeft dan slechts eenmaal te geschieden.

Ook voor hogere dan vierpuntsinterpolatie is de tweede methode mutatis mutandis bruikbaar. Wij adverteren haar niet.

5. Over de convergentie van interpolatiereeksen.

In paragraaf 1 en 2 hebben wij bij de interpolatieformules steeds bepaalde uitdrukkingen voor de restterm afgeleid. Wij willen nu eens zien wat meer hier over te weten te komen. Allereerst vragen wij ons af, wat er met onze interpolatieformules gebeurt, als wij het aantal basispunten tot oneindig laten naderen.

Eerst bezien wij de Lagrange-interpolatie. Hoe gaan de Lagrange-polynomen er uit zien als n zeer groot is ? Wij onderstellen gemakshalve, dat n oneven is en dus is:

$$L_0^{2k+1}(p) = \prod_{\substack{j=-k \\ j\neq 0}}^{k} \frac{j-p}{j} = \prod_{j=1}^{k} \left(1-\frac{p^2}{j^2}\right). \tag{5.1}$$

Dus geldt:

$$\lim_{k\to\infty} L_0^{2k+1}(p) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1-\frac{p^2}{j^2}\right) = \frac{\sin \pi p}{\pi p} \ . \tag{5.2}$$

Dat het oneindige product hetzelfde is als $\sin \pi p / \pi p$ kunnen wij hier niet bewijzen, maar de cursist kan het bewijs vinden in elk goed leerboek over analyse. Verder is nu:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=-k}^{k} f_i\, L_i^{2k+1}(p) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i \lim_{k\to\infty} L_i^{2k+1}(p) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i \frac{\sin \pi (p-i)}{\pi (p-i)}$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i \frac{\sin \pi p \cos \pi i}{\pi (p-i)} = \frac{\sin \pi p}{\pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \frac{f_i}{p-i}$$

Wij hebben ons bij deze afleidingen een aantal vrijheden veroorloofd, die uit wiskundig oogpunt zeer bedenkelijk zijn, maar onze bedoeling is alleen een heuristische afleiding van een formule, welke dan later eventueel streng op zijn juistheid kan worden gecontroleerd. Een klein beetje anders geschreven luidt de reeks:

$$\frac{\sin \pi p}{\pi} \left\{ \frac{f_o}{p} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{f_i}{p-i} + \frac{f_{-i}}{p+i} \right) \right\},$$

bekend als de cardinaal reeks. Het is niet moeilijk te zien, dat haar convergentie nogal dubieus is. Ferrar heeft bewezen, dat als ze convergeert, ook de centrale interpolatiereeksen convergeren en wel tot de zelfde som en omgekeerd, dat als de centrale interpolatiereeksen convergeren, de cardinaalreeks gesommeerd kan worden met de methode van de la Vallée Poussin en wel tot dezelfde som. Dit slechts om een uitblik te geven op een andere wereld.

Hoe staat het nu met de interpolatieformules welke differenties gebruiken, dus die van Gregory-Newton en de centrale formules. Het is heel wonderlijk, dat de formule van Newton, indien wij het aantal basispunten opvoeren, dus voortdurend meer differenties in aanmerking nemen heel wat meer kans heeft om te convergeren, dan de centrale formules niettegenstaande het feit, dat haar coefficienten zoveel langzamer convergeren ! Wij zullen weer niet de exacte theorie geven, maar aan enkele voorbeelden enige algemene gezichtspunten toelichten.

Beschouw eerst de functie $f(x) = 1/x$. Laten de basispunten zijn $x = 1,2,\dots$. Nu interpoleren wij met Newton. Daartoe moeten wij de differenties kennen. Die volgen direct uit de opmerking op pagina 6, nl. dat de gedeelde differentie $[f_o\, f_1 \dots f_n] = (-1)^n (x_o\, x_1 \dots x_n)^{-1}$ en (2.4). Blijkbaar is

$$\Delta_k^n\ \cancel{\Delta_n^k} = (-1)^n \frac{n\,!}{k(k+1)\dots(k+n)} = (-1)^n \Big/ \binom{k+n}{n}\ .$$

Wij kiezen nu eens als basispunt $x_o = 1$, dus het gevaarlijkste, nl. het dichtst gelegen bij de pool $x = 0$. Dan luidt de Gregory-Newton reeks dus, als $x = 1+p$: (2.13, $k=0$).

$$1 - \frac{p}{2!} + \frac{p(p-1)}{3!} - \frac{p(p-1)(p-2)}{4!} + \dots =$$

$$\frac{1}{p+1} \left\{ 1 - 1 + \binom{p+1}{1} - \binom{p+1}{2} + \binom{p+1}{3} - \dots \right\} = \text{mits } p > -1$$

$$\frac{1}{p+1} \left\{ 1 - (1-1)^{p+1} \right\} = \frac{1}{p+1} = \frac{1}{x}\ .$$

De reeks convergeert dus en zelfs tot de goede som ! Als wij een van de andere basispunten als uitgangspunt hadden gekozen, hadden wij hetzelfde resultaat gevonden.

Als wij centrale interpolatie willen toepassen, moeten wij de rij basispunten uitbreiden met 0, -1,.. . Maar dan bevat het differentieschema een lijn van oneindig grote differenties δ_0^k, die afdruipen van de pool bij x = 0. Dus is het evident, dat de centrale interpolatiereeksen altijd divergent zijn. Immers, onverschillig in welk interval men interpoleert met centrale differenties, men ontmoet altijd de oneindig grote differentie δ_0^k en de reeksen bevatten dus een oneindig grote term !

x	$1/x$	δ	δ^2	δ^3	δ^4
0	∞				
		$-\infty$			
1	1		∞		
		$-1/2$		$-\infty$	
2	$1/2$		$1/3$		∞
		$-1/6$		$-1/4$	
3	$1/3$		$1/12$		
		$-1/12$			
4	$1/4$				

De Gregory-Newton-reeks ontsnapt aan dit noodlot, omdat de hier gebruikte differenties voorwaartse zijn,dus parallel lopen aan de gevaarlijke rij.

Dit betekent echter geenszins, dat zelfs voor deze functie i.h.a. de Gregory-Newton-reeks te prefereren zou zijn boven de centrale formules. Dit is alleen maar het geval in de intervallen, die zeer dicht bij de pool gelegen zijn. Dit kunnen wij zien aan de hand van de restterm $R_{n+1}(x)$. Uit (1.22) volgt immers, dat in ons geval geldt, als $x = N + p$ en $n = 2k$:

$$|R_{2k+1}(x)| = p(1-p)(1+p)(2-p)(2+p)\ldots(k-p)(k+p)\ \xi^{-2k-2},$$

waarin $N - k \leqslant \xi \leqslant N + k$. De ongunstigste aanname is blijkbaar $\xi = N - k$ en $p = 1/2$. Dus is:

$$|R_{2k+1}(x)| \leqslant \frac{1^2\, 3^2\, 5^2 \ldots (2k-1)^2(2k+1)}{2^{2k+1}\,(N-k)^{2k+1}} = \frac{(2k)!^2\,(2k+1)}{2^{4k+1}\,k!^2\,(N-k)^{2k+1}}\ .$$

Met behulp van (4.3) vinden wij voor grote k

$$|R_{2k+1}(x)| <\sim 2e\left\{\frac{k}{e\,(N-k)}\right\}^{2k+1}\frac{1}{N-k}\ ,$$

Wij kiezen k zo gunstig mogelijk, nl. zo, dat R bij gegeven N minimaal is. Dus:

$$\frac{d}{dk}\left\{\begin{array}{l}(2k+1)\ \ln\dfrac{k}{e\,(N-k)}\\ \quad -\ln(N-k)\end{array}\right\} = 0 = 2\ \ln\frac{k}{e\,(N-k)} + N\,\frac{2k+1}{k(N-k)} + \frac{1}{N-k}$$

$$= 2\ \ln\frac{k}{N-k} + \frac{N+2k^2+k}{k(N-k)},$$

of ongeveer

$$\ln \frac{k}{N-k} + \frac{k}{N-k} = 0,$$

waaruit volgt $k/(N-k) = 0,567$ of $k = 0,36\ N$, zodat uiteindelijk

$$|R_{2k+1}(x)| < \sim 1,8\ e^{-1,13\ N}/N$$

Hieruit zien wij, dat bij in achtname van een geschikt aantal differenties, de restterm hoogstens gelijk is aan een met toenemende N exponentieel afnemende functie. Overigens is de hier boven gegeven schatting nog veel te pessimistisch.

Immers voor $N = 5$ levert de formule $|R| < 1,3 . 10^{-3}$ bij $k = 2$ en in werkelijkheid geldt $|R| < 2,2 . 10^{-5}$ bij $k = 3$.

De centrale interpolatiereeksen gedragen zich derhalve als asymptotische reeksen, dwz. zij zijn divergent, maar hun partiele sommen naderen eerst sterk tot de gewenste waarde om tenslotte met toenemende k weer af te gaan wijken. Om het verschijnsel nog eens nader te illustreren geven wij hieronder voor x = 5,5; 10,5 en 15,5 de numerieke waarden van de restterm volgens Bessel en volgens Gregory-Newton voor verschillende aantallen van in rekening gebrachte differenties. De getallen zijn numeriek berekend in 11 decimalen en zijn dus onderhevig aan de afrondingsfouten van de differenties.

Hoogste δ	$x = 5,5$	$x = 10,5$	$x = 15,5$ → toenemende N.
	10^{11}. Restterm bij Bessel:		
1	- 151515151	- 21645022	- 6720431
3	+ 12175325	+ 450937	+ 63533
5	- 3170657	- 27100	- 1697
7	+ 2157809	+ 3387	+ 91
9	- 4369562	- 763	- 9
11	+ ∞	+ 286	+ 1

10^{11}. Restterm bij Gregory-Newton:

1	- 151515151	- 21645022	- 6720431
3	- 10146103	- 520314	- 82359
5	- 1775567	- 39024	- 3413
7	- 480882	- 5130	- 265
9	- 168440	- 957	- 31
11	- 70006	- 228	- 5

Nu zou men nog kunnen menen, dat zelfs voor grote N voor zeer hoge precisie Gregory-Newton te prefereren zou zijn, omdat de centrale formules principieel slechts een bepaalde eindige, zij het wellicht hoge, precisie kunnen leveren en de convergente Gregory-Newton ontwikkeling een willekeurig hoge precisie zou kunnen geven. Maar ook dit is maar betrekkelijk juist. Immers de gegeven functiewaarden zijn op een zeker aantal decimalen afgerond en wij zullen even verder zien, dat dit tot afrondingsfouten in de geinterpoleerde kan leiden, die speciaal bij Gregory-Newton-interpolatie met hoge differenties zeer aanzienlijk kunnen worden.

Men kan bewijzen, dat een centrale interpolatiereeks, welke convergeert voor één waarde van x, niet samenvallend met een basispunt, in elk eindig punt van het complexe x-vlak convergeert en wel tot een gehele functie, dat is een functie welke in geen enkel eindig punt van het complexe vlak een singulariteit vertoont (dus geen polen, geen vertakkingspunten of essentieel singuliere punten). Dit is een nuttige stelling. Immers als de te interpoleren functie niet geheel is, kunnen haar centrale interpolatiereeksen voor geen enkele waarde van x - met uitzondering van de basispunten - tot de functie convergeren, als ze al convergeren. Zo is $1/x$ geen gehele functie, want $x = 0$ is een pool, dus hier kan bijv. de Besselreeks zeker niet tot $1/x$ convergeren. Overigens hebben wij gezien, dat deze reeks helemaal niet convergeert, als het stelsel basispunten het punt $x = 0$ bevat. Maar als wij een ander stelsel kiezen, bijv. de punten $x_k = k - 1/2$, dan "slaan wij de pool over" en convergeert de reeks wel en wel tot een functie, welke nul is voor $x = 0$. Dit is gemakkelijk te bewijzen, want wij behoeven het immers slechts van één enkele waarde van x aan te tonen. Kiezen wij hiervoor $x = 0$, dan is alles heel eenvoudig. Immers, de functie is oneven, dus $\delta_0^{2k} = -\delta_1^{2k}$ en $p = 1/2$, zodat $B^{2k+1} = 0$ is. Alle termen van de Besselreeks zijn dus nul, maar dit is nog niet voldoende. Immers ook de afzonderlijke deeltermen $B^{2k}\delta_0^{2k}$ moeten tot nul convergeren. Wij laten het aan de cursist over te bewijzen, dat $B^{2k}\delta_0^{2k} = 1/2\ (2k+1)$, zodat de convergentie verzekerd is.

Het hier behandelde voorbeeld van een functie met een enkelvoudige pool is daarom zo belangrijk, omdat het ons inzicht geeft hoe nauwkeurig de interpolatie in het algemeen is als een van de basispunten van de te interpoleren functie een enkelvoudige pool is. Is nl. de functie met de gewenste nauwkeurigheid voor te stellen door een polynoom van lage graad plus de term afkomstig van de pool, dan is de enige component, die niet exact wordt geinterpoleerd, deze poolterm, die op een multiplicatieve factor gelijk is aan $1/x$ en waarvan wij het gedrag nu goed kennen. Het ligt in onze bedoeling te zijner tijd tabellen te geven voor restterm fouten bij verschillende types singulariteiten, zoals polen en vertakkingspunten van verschillende orde.

Nu beschouwen wij de functie $(1+x^2)^{-1}$. Deze is niet geheel, want zij bezit polen bij $x = i$ en $x = -i$. Dus kan een centrale interpolatiereeks haar niet exact voorstellen. Dit is ernstiger dan het vorige voorbeeld, want hier vertoont de functie langs de reeele as, dus waar ze getabelleerd is, niets bijzonders. Haar hogere afgeleiden nemen echter zeer hoge waarden aan en een afspiegeling daarvan vindt men in het differentieschema van de functie, hetwelk ieder geoefend rekenaar waarschuwt voor onraad.

Als voorbeeld van een functie met een parameter, welke de convergentie beinvloedt, kiezen wij $f(x) = t^{2x}$, waarin t een of ander complexe constante is. Deze functie zij getabelleerd voor alle gehele waarden van x. De differenties ervan zijn gemakkelijk te vinden. Immers

$$\Delta_m = t^{2m+2} - t^{2m} = t^{2m}(t^2 - 1)$$

$$\Delta_m^2 = t^{2m+2}(t^2 - 1) - t^{2m}(t^2 - 1) = t^{2m}(t^2 - 1)^2,$$

waaruit men gemakkelijk raadt:

$$\Delta_m^k = t^{2m}(t^2 - 1)^k.$$

Hieruit volgt

$$\Delta_m^{k+1} = t^{2m+2}(t^2 - 1)^k - t^{2m}(t^2 - 1)^k = t^{2m}(t^2 - 1)^{k+1},$$

zodat volledige inductie de juistheid van de gissing aantoont. In centrale notatie is dus:

$$\delta_m^{2k} \,(= \Delta_{m-k}^{2k}) = t^{2m-2k}(t^2 - 1)^{2k}$$

en met het oog op (4.7) is dus voor p = ½ een deelterm van de Bessel-reeks:

$$B^{2k}(1/2).\ \delta_m^{2k} \sim (-1)^k\, 2^{-2k-1}\, (\pi k)^{-1/2}\, t^{2m-2k}\, (t^2 - 1)^{2k}. \qquad [\sin \tfrac{1}{2}\pi = 1]$$

De verhouding van twee opeenvolgende termen is dus:

$$u_{n+1}/u_n \sim -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{k+1}{k}}\ \frac{(t^2-1)^2}{t^2}$$

Voor convergentie is nodig, dat $|u_{n+1}/u_n| \to \alpha < 1$, dus

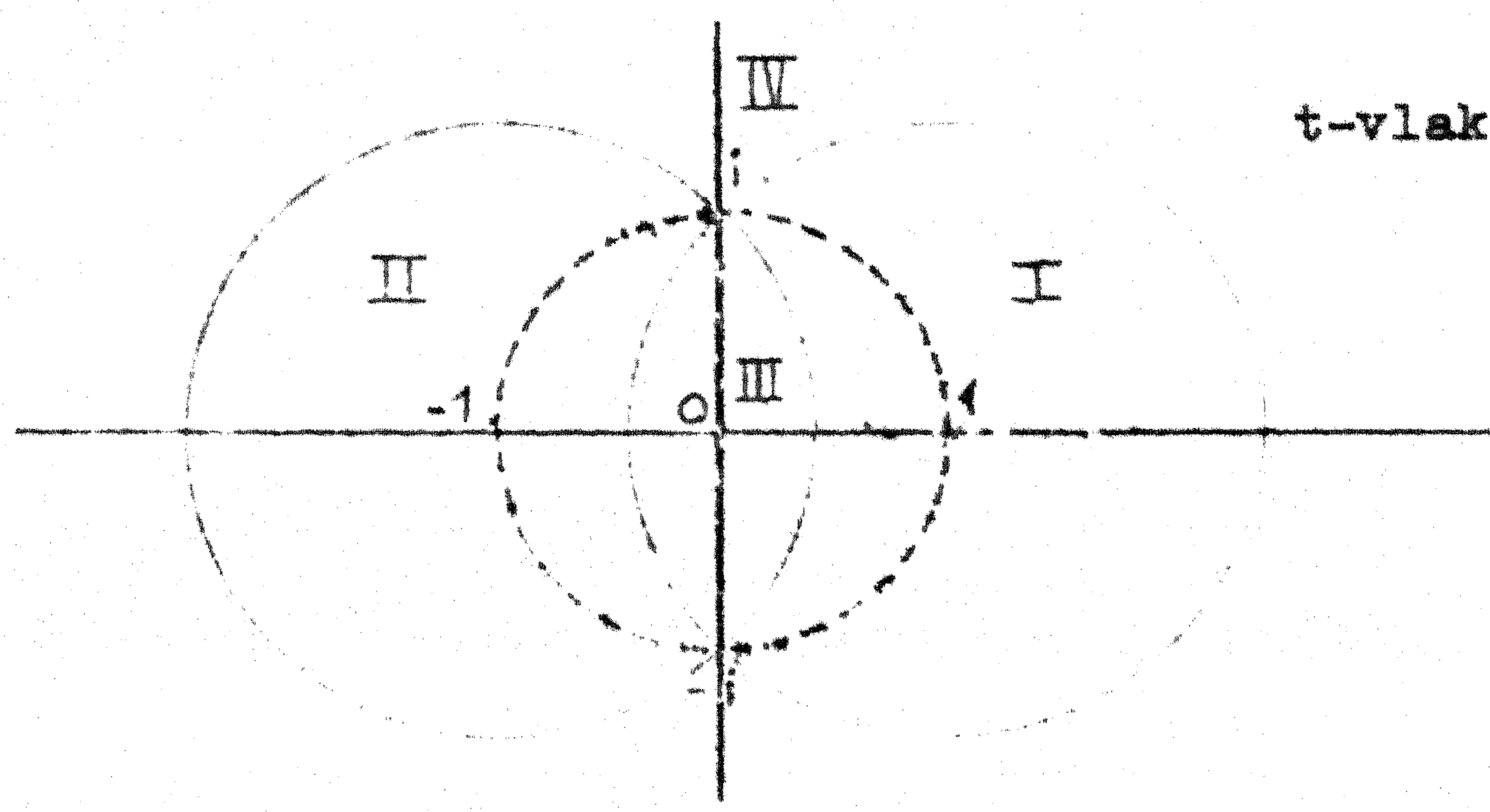
$$\left|\frac{t^2-1}{t}\right| < 2.$$

Als we nagaan, wat dit betekent, vinden wij, dat voor convergentie t moet liggen binnen één en buiten de andere van de beide cirkels in het complexe vlak met middelpunt in het punt +1 en -1 en met straal $\sqrt{2}$. Binnen en buiten beide cirkels is de reeks ~~con~~divergent.

In gebied I is de reeks dus convergent en haar som is zelfs t^{2x}. Dit laatste bewijzen wij uit de restterm. Wij denken ons daarom t reeel in de omgeving van 1.

Allereerst is

$$\frac{d^k}{dx^k}(t^{2x}) = \frac{d^k}{dx^k}(e^{x\,2\ln t}) = (2\ln t)^k . t^{2x} .$$



In de resttermformule voor 2k+1 basispunten kiezen wij voor ξ weer de ongunstigste waarde, dat is voor $t \leqslant 1$: $\xi = m - k$ en voor $t > 1$: $\xi = m + k$.

Dus is voor $t > 1$:

$$|R_{2k+1}| \leqslant \frac{p(1-p)(1+p)\ldots(k-p)(k+p)}{(2k+1)!}(2\ln t)^{2k+1}\, t^{2m+2k}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}\ldots\frac{2k-1}{2}\,\frac{2k+1}{2}}{(2k+1)!}\; 2\ln t .\; t^{2m}(2\,t\ln t)^{2k}$$

$$= \ln t .\; t^{2m}\;\frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2k-1)^2(2k+1)}{(2k+1)!}\;(t\ln t)^{2k}$$

$$= \ln t .\; t^{2m}\;\frac{(2k)!}{2^{2k}.(k!)^2}\;(t\ln t)^{2k}$$

$$\sim \frac{\ln t .\; t^{2m}}{\sqrt{\pi k}}(t\ln t)^{2k} .$$

Dit convergeert $(k\to\infty)$ tot nul als $t\ln t < 1$ of $t < 1{,}76322$. Wij hadden $t > 1$ verondersteld. Nemen wij $t < 1$, dan wordt de eis $|t^{-1}\ln t| < 1$, waaruit volgt $t > 1/1{,}76322 = 0{,}56714$.

Wij hebben dus nu bewezen, dat op een deel van de reeele as en wel voor $0{,}56714 < t < 1{,}76322$ de reeks convergeert tot t^{2x}. De gehele functie welke in gebied I door de reeks wordt voorgesteld is dus op een lijnelement gelijk aan t^{2x} en de functietheorie leert ons, dat, wanneer twee functies, welke in een gebied ~~geheel~~ analytisch zijn, over een lijnelement identiek zijn, zij ook binnen het gehele gebied identiek zijn. Aangezien t^{2x} ~~geheel~~ analytisch is in gebied I is de som van de reeks dus in gebied I inderdaad gelijk aan t^{2x}.

In gebied II is de reeks ook convergent, maar in het algemeen stelt ze niet t^{2x} voor. Immers deed ze dit over een lijninterval, dan deed ze het het overal, zoals we juist gezien hebben. Wij behoeven dus slechts aan te tonen, dat ze het in één punt niet doet. Neem daarvoor $t = -1$. Dan is $t^{2x} = (-1)^{2x}$ een functie welke voor reeele waarden van x i.h.a. complex is. Zo is bijv. voor $x = 1/4$, $(-1)^{2x} = i$. Op de basispunten is zij echter reeel en wel overal 1. Het interpolatieresultaat is dus identiek 1 en dus niet gelijk aan t^{2x}.

In gebied III is de reeks divergent maar heeft een asymptotisch karakter. Dit ziet men duidelijk voor $t = 0$. Immers, dan is van alle $x > 0$, $t^{2x} = 0$; van alle $x < 0$, $t^{2x} = \infty$ en voor $x = 0$, $t^{2x} = 1$. Wanneer men de basiswaarden beschouwt vindt men dus .... , ∞, ∞, ∞, 1, 0, 0, 0, 0,.... . Als men niet te dicht bij de singulariteit interpoleert en niet te veel differenties (die alle nul zijn !) in aanmerking neemt, verkrijgt men het juiste resultaat. Pas als men zover doorgaat tot men aan de oneindig grote differenties komt divergeert de reeks.

In gebied IV is de reeks essentieel divergent. Het interval is te groot en de differenties stijgen te hard.

In de figuur hebben we ook de eenheidscirkel getekend. Daarop is $t = e^{i\varphi}$ en dus is $t^{2x} = e^{2i\varphi x} = \cos 2\varphi x + i \sin 2\varphi x$. Zolang $\varphi < \pi/2$ kunnen wij dus de goniometrische functie interpoleren. Geven wij dus van $\sin x$ de waarden voor $x = k. 179^0$, dan interpoleert de centrale interpolatiereeks er nog de sinus uit, zij het met pijn.

Uit de resttermformule kunnen wij nog een belangrijke gevolgtrekking maken, nl. dat wij onder alle omstandigheden met iedere gewenste precisie kunnen interpoleren met vooraf voorgeschreven aantal in rekening gebrachte differenties, mits wij het interval w maar klein genoeg kiezen. Vele tafels worden met een zo fijn interval uitgevoerd, dat men lineair mag interpoleren. Voor vaklieden kan men tafels met groter interval geven, waarbij men zekere hogere differenties in rekening moet brengen. Het is prettig voor de gebruiker, indien deze differenties mee afgedrukt worden. Speciaal als terugwerpen van de differenties toegepast wordt, kan men op deze wijze zeer compacte tafels maken. Als voorbeeld geven wij een sinustafel in gewone graden:

x	$\sin x$	δ^{2x}
0^0	0,00000	0
15^0	0,25882	-1786
30^0	0,50000	-3450
45^0	0,70711	-4880
60^0	0,86603	-5976
75^0	0,96593	-6666
90^0	1,00000	-6899

Zie (4,31).

Deze kan men met Bessel interpoleren en is ongeveer gelijkwaardig met een schooltafel van circa 30 pagina's !

Tenslotte nog iets over de afrondingsfouten bij interpolatie. Deze zijn van verschillende aard:

a) Fouten ontstaan door het gebruiken van afgeronde interpolatiecoefficienten.
b) Fouten ontstaan door het afgerond zijn van de functiewaarden in de tafel.
c) Fouten ontstaan door het terugafronden van het resultaat van de interpolatie.

De fouten onder a) genoemd heeft men in de hand door genoeg cijfers in de interpolatiecoefficienten te gebruiken. Bij interpolatie mét behulp van differenties is dat al spoedig het geval, omdat de bijdragen van de hogere differenties gering zijn en het aantal benodigde cijfers dus klein is. Bij Lagrange interpolatie moeten de coefficienten alle in minstens zoveel cijfers gegeven zijn als de functie zelf. De beste tafels geven 10 decimalen, dus dat kan wel moeilijkheden opleveren als de functie veel cijfers heeft. Men kan bewijzen, dat de fout zo klein mogelijk is, als de coefficienten zo afgerond worden dat hun som exact 1 is.

De fouten onder b) genoemd zijn niet te ondervangen. Wij hebben de statistische verdeling van de hierdoor ontstane fouten berekend, die wij hier niet zullen behandelen wegens de wiskundige moeilijkheden maar evenals bij de differenties is het niet moeilijk de maximale grenzen van de fout aan te geven. Daartoe merken wij eerst op, dat het er (bij exacte coefficienten) niet toe doet of wij Lagrange interpolatie of interpolatie met differenties toepassen, want zodra de afgeronde functiewaarden gegeven zijn volgen de differenties hieruit zonder nieuwe afrondingsfouten. Wat hier volgt geldt dus ook voor interpolatie met differenties, hoewel wij de theorie afleiden met Lagrange-interpolatie.

Op de functie is gesuperponeerd een foutfunctie, welke in de basispunten waarde E_j aanneemt, waarvoor geldt $-1/2 \leqslant E_k \leqslant 1/2$. Door interpolatie veroorzaakt dit een fout $\sum E_j L_j (p)$. Wat is het maximum hiervan ? Daartoe zoeken wij de ongunstigste verdeling van de E_j's. Bij gegeven p verkrijgen wij deze blijkbaar door E_j altijd hetzelfde teken te geven als $L_j(p)$, wat dan worden alle termen van de som positief en verder E_j altijd $\pm 1/2$ te kiezen, want dan worden alle termen maximaal. Dan volgt van de maximale fout

$$|E_{max}| = \frac{1}{2} \sum |L_j (p)| .$$

Bij gegeven aantal basispunten en gegeven p kan men deze maximale fout dus direct vinden als de halve som van de absolute waarden van de Lagrange-coefficienten.

Wij zullen dit nu eens nader onderzoeken voor centrale interpolatie en voor Gregory-Newton interpolatie.

Voor centrale interpolatie beschouwen wij het geval van een even aantal 2 n basispunten, dus dat, wat wij kregen bij interpolatie volgens Everett of volgens Bessel als wij sluiten met een term $B^{2k+1}\delta^{2k+1}_{1/2}$ of volgens Lagrange met een even aantal basispunten. In het interval $0 < p < 1$ zijn L_o en L_1 positief, L_{-1} en L_2 negatief, L_{-2} en L_3 positief, enz. Dus zijn E_o en E_1 beide $1/2$, E_{-1} en E_2 beide $-1/2$, E_{-2} en E_3 beide $1/2$, enz. Nu wij dit eenmaal weten, interpoleren wij weer het gemakkelijkst met differenties.

j	E_j	δ	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5	δ^6
-2	1/2		-2		8		-31
		-1		4		-15	
-1	-1/2		2		-7		25
		1		-3		10	
0	1/2		-1		3		-10
		0		0		0	
1	1/2		-1		3		-10
		-1		3		-10	
2	-1/2		2		-7		25
		1		-4		15	
3	1/2		-2		8		-31

De differenties, welke wij nodig hebben voor de centrale interpolatie zijn eenvoudig uit te drukken, nl. als

$$\delta^{2k}_o = \delta^{2k}_1 = (-1)^k \tfrac{1}{2}\binom{2k}{k} \text{ en } \delta^{2k+1}_{1/2} = 0 .$$

Het bewijs laten wij aan de cursist over.

Het is duidelijk, dat de maximale fout optreedt bij $p = 1/2$. Zo vinden wij bij 2-puntsinterpolatie: $E_{o2m} = 0{,}5$, bij 4-puntsinterpolatie: $E_{o4m} = 0{,}625$, bij 6-puntsinterpolatie 0,695, enz. Hoe gedraagt deze maximale fout zich bij grote n ?

Exact geldt:

$$E_{o2nm} = \sum_{k=0}^{n-1} B^{2k}(1/2)\,(\delta^{2k}_o + \delta^{2k}_1) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} 2^{-4k}\binom{2k}{k}^2$$

en

$$\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi}\,.\, e^{-2k}\,(2k)^{2k+1/2}}{2\pi\; e^{-2k}\, k^{2k+1}} = \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}} \;.$$

Nu is:

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n + C, \qquad (C = 0{,}577215665\ldots.,\ \text{constante van Euler}),$$

dus

$$E_{c2nm} = \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-4k-1} \binom{2k}{k}^2 + \sum_{k=m}^{n-1} 2^{-4k-1} \binom{2k}{k}^2$$

of

$$E_{c2nm} \sim \frac{1}{2\pi} \ln n + C' \qquad (C' = 0{,}53).$$

Wij zien, dat de maximale fout slechts uiterst langzaam met n toeneemt. De constante C' in de formule bepaalden wij numeriek. Zij is ongeveer 0,53.

Een geheel ander beeld verkrijgen wij voor Gregory-Newton-interpolatie. Wij beschouwen n basispunten, nl. 0,1,...,n-1. Dan is $E_o = E_1 = 1/2$; $E_1 = -1/2$; $E_2 = 1/2$, enz. Wij kunnen dus weer het bovenstaande differentieschema gebruiken en vinden zonder moeite, dat

$$\Delta^{k}_{o} = (-1)^{k+1}\,(2^{k-1} - 1).$$

En dus is de ongunstigste fout in dit geval:

$$E_{gn+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}\,(2^{k-1}-1)\,\binom{p}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} 2^{k-1} \binom{p}{k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{p}{k}.$$

De tweede som is van veel kleinere grootteorde dan de eerste, dus als wij ons bepalen tot grote n, kunnen wij haar verwaarlozen. Bij de eerste spelen alleen de eindtermen asymptotisch een rol, dus geldt:

$$E_{gn+1} \sim \sum^{n} (-1)^{k+1}\, 2^{k-1} \binom{p}{k} \sim \sum^{n} (-1)^{k+1}\, 2^{k-1} (-1)^{k+1} \frac{p!\sin\pi p}{\pi\, k^{1+p}}$$

$$= \frac{p!\ \sin\pi p}{2\pi} \sum^{n} 2^{k}\, k^{-1-p} =$$

$$= \frac{p!\ \sin\pi p}{2\pi} \left\{ \frac{2^{n}}{n^{1+p}} + \frac{2^{n-1}}{(n-1)^{1+p}} + \frac{2^{n-2}}{(n-2)^{1+p}} + \ldots. \right\}$$

$$\sim \frac{p!\ \sin\pi p}{2\pi\ n^{1+p}} \left\{ 2^{n} + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots. \right\}$$

$$\sim \frac{p!\ \sin\pi p}{\pi\ n^{1+p}}\ 2^{n}.$$

Deze uitdrukking hangt nog van p af. Zij wordt als functie van p maximaal als $p! \sin \pi p . n^{-p}$ maximaal is, dus als de d/dp ervan = 0 is. Dit geeft:

$$\frac{dp!}{dp} \sin \pi p\, n^{-p} + \pi p! \cos \pi p\, n^{-p} - p! \sin \pi p n^{-p} \ln n = 0$$

en dit gaat na invoering van de psi-functie

$$\Psi(p) = \frac{d \ln p!}{dp} = \frac{dp!/dp}{p!}$$

over in:

$$\Psi(p) + \pi \cot \pi p = \ln n.$$

Hieruit kan men de bij een bepaalde n behorende p bepalen. Men vindt bijv. voor n = 10 een bijbehorende p = 0,287.

Wij zien, dat deze foutzeer snel stijgt met n. Om weer een goede vergelijking te treffen tabelleren wij hieronder de maximale afrondingsfout in centrale en Gregory-Newton-interpolatie van enkele waarden van n.

n	E_{cnm}	bij p	E_{gnm}	bij p
2	0,500	0,5	0,500	0,5
4	0,625	0,5	0,816	0,45
6	0,695	0,5	1,503	0,39
8	0,744	0,5	3,45	0,34
10	0,782	0,5	8,9	0,32

De fouten onder c) genoemd zijn hoogstens $\pm$ 1/2 eenheid. De in bovenstaande tabel gegeven waarden moeten dus in het geval van terugafronding vermeerderd worden met 0,5.

Tenslotte geven wij nog enkele resultaten uit onze statistische theorie over dit onderwerp. Wij stellen het probleem daartoe als volgt: Interpoleer uit de afgeronde tabelwaarden en rond het verkregen resultaat weer af. Vergelijk dit resultaat met de afgeronde waarde van het getal, dat wij zouden hebben gekregen, als wij uit de echte (d.i. niet afgeronde) functiewaarden hadden geinterpoleerd. Wij kunnen dan een verschil tussen beide resultaten vinden, gelijk aan een geheel aantal eenheden en wij vragen naar de kans, dat dit een bepaald getal is.

Beschouwen wij 2-puntsinterpolatie (dus lineaire !) met een p in de buurt van 0,5 dan vinden wij een kans op een verschil 0 gelijk 0,83 en een kans op een verschil + 1 of -1 gelijk 0,17. Dit geldt dus zowel voor centrale als voor Gregory-Newton-interpolatie, want deze zijn dan identiek. Bij 4-puntsinterpolatie vinden wij bij de centrale interpolatie een kans op een verschil 0 gelijk 0,81 en op een verschil +1 of -1 gelijk 0,19; daarentegen bij interpolatie volgens Gregory-

Newton een kans op een verschil 0 gelijk 0,75 en een kans op een verschil +1 of -1 gelijk 0,25. Bij 6-puntsinterpolatie volgens Gregory-Newton kunnen al verschillen van +2 of -2 optreden terwijl dit bij centrale interpolatie pas op kan treden bij 20-puntsinterpolatie.

Wij hebben hierboven bij lineaire interpolatie gezegd: "p in de buurt van 0,5 ". Als wij p exact 0,5 nemen treedt er door een merkwaardig getallentheoretisch effect een wijziging op ! Dan vinden wij nl. 0,75 inplaats van 0,83 en 0,25 inplaats van 0,17. Een dergelijk effect treedt op voor elk rationaal getal en elk aantal basispunten, maar is alleen maar belangrijk bij $p = 0,5$ en $n = 2$.

6. Subtabellatie.

In het voorgaande hebben wij methoden ontwikkeld welke ons in staat stellen functiewaarden door interpolatie te bepalen uit een tafel van een functie, ook wanneer hogere differenties dan de eerste een min of meer belangrijke rol spelen bij dit proces. Derhalve behoeft door of voor ons een functie niet noodzakelijkerwijs met een klein interval berekend te worden. Evenwel is het interpoleren met inachtname van differenties van hoge orde toch wel tamelijk tijdrovend en vereist tevens vakkennis van de rekenaar. Dus zal men trachten tafels te maken met klein interval, wanneer de tabel veelvuldig geraadpleegd moet worden en/of dit dient te geschieden door minder geschoold personeel. Het vervelende van de berekening van zulke fijne tafels is natuurlijk het werk. Als afschrikwekkend voorbeeld noem ik de functie, welke de Rekenafdeling van het M.C. onlangs in opdracht berekende, waarbij de berekening van elke functiewaarde ca. zes weken werk voor een rekenaarster betekende. Het is duidelijk, dat men in dergelijke gevallen uiterste zuinigheid betracht wat het aantal te berekenen functiewaarden betreft. Wil men dan toch een voor de gebruiker (evt. zichzelf) gemakkelijker te hanteren tafel vervaardigen, dan kan men uit de berekende tafel door interpolatie een andere produceren met kleiner interval. In tegenstelling tot de gewone interpolatie, die wij in het voorgaande behandeld hebben, waarbij het ging om de bepaling van een enkele geinterpoleerde waarde voor een willekeurige waarde van de intervalfractie p, hebben wij hier te maken met stelselmatige interpolatie, zg. subtabellatie, waarbij grote aantallen geinterpoleerde waarden dienen te worden bepaald voor opvolgende ronde waarden van p, bijv. voor p = 0; 0,1; 0,2; 0,3;.... .

Natuurlijk zou men elke functiewaarde afzonderlijk kunnen interpoleren metbehulp van de in de vorige paragrafen behandelde methodes, bijv. met de formule van Bessel of Everett, maar men kan het werk enorm vereenvoudigen door gebruik te maken van de regelmatige opklimming van p.

De berekende uitgangswaarden van de functie noemen wij in het vervolg de "scharnierwaarden" en geven ze als gewoonlijk aan met f_0, f_1, f_2,... . Wij nemen aan, dat er buiten het gebied, waarin gesubtabelleerd moet worden nog enkele scharnierwaarden uitgerekend zijn, zodat alle centrale differenties, welke bij de interpolatie van belang zijn in het subtabellatiegebied bekend zijn. Verder zij p = 1/n, waarin n meestal een rond getal is, bijv. 2;5; 10; 12; 20; 50; 60; 100. De nieuwe argumentwaarden $x_0 + kw/n$ geven wij aan met $x_{k/n}$. Van de nieuwe tabel met interval w/n kunnen wij natuurlijk weer differenties maken, welke wij subdifferenties noemen. Om ze te onderscheiden van de oorspronkelijke differenties geven wij ze aan met d i.p.v. δ of met D i.p.v. Δ. Als voorbeeld beschouwen we eens het geval n = 10. Bij gebruikmaking van Everett's formule ziet het schema van de subdifferenties in formulevorm er als volgt uit:

x	$f(x)$	d	d^2	d^3
x_0	f_0			
		$0{,}1\delta_{1/2}-0{,}0285\delta_0^2-0{,}0165\delta_1^2\ldots$		
$x_{0,1}$	$0{,}9f_0+0{,}1f_1-0{,}0285\delta_0^2-0{,}0165\delta_1^2\ldots$		$0{,}01\delta_0^2+0{,}001\delta_{1/2}^3\ldots$	
		$0{,}1\delta_{1/2}-0{,}0195\delta_0^2-0{,}0155\delta_1^2\ldots$		$0{,}001\delta_{1/2}^3\ldots$
$x_{0,2}$	$0{,}8f_0+0{,}2f_1-0{,}0480\delta_0^2-0{,}0320\delta_1^2\ldots$		$0{,}01\delta_0^2+0{,}002\delta_{1/2}^3\ldots$	
		$0{,}1\delta_{1/2}-0{,}0115\delta_0^2-0{,}0135\delta_1^2\ldots$		$0{,}001\delta_{1/2}^3\ldots$
$x_{0,3}$	$0{,}7f_0+0{,}3f_1-0{,}0595\delta_0^2-0{,}0455\delta_1^2\ldots$		$0{,}01\delta_0^2+0{,}003\delta_{1/2}^3\ldots$	
		$0{,}1\delta_{1/2}-0{,}0045\delta_0^2-0{,}0105\delta_1^2\ldots$		
$x_{0,4}$	$0{,}6f_0+0{,}4f_1-0{,}0640\delta_0^2-0{,}0560\delta_1^2\ldots$			

De bovenste subdifferenties, dus $D_0 \equiv d_{0,05}$; $D_0^2 \equiv d^2_{0,1}$; $D_0^3 \equiv d^3_{0,15}$, etc.) noemen we de leidende subdifferenties.

Uit het schema zien we allereerst, dat ruwweg gesproken de eerste subdifferenties een tiende (i.h.a. $1/n$) zijn van de eerste differenties, de tweede subdifferenties een honderdste (i.h.a. $1/n^2$) zijn van de tweede differenties, de derde subdifferenties een duizendste (i.h.a. $1/n^3$) zijn van de derde differenties, enz. Dit volgt trouwens direct uit (1.20) en (2.4). Immers deze twee formules leren dat i.h.a. $\delta^k_{k/2} = w^k f^{(k)}(\xi)$, waarbij ξ ergens tussen de basispunten gelegen is. Maken wij het interval n maal zo klein, dan wordt de k-de subdifferentie dus ongeveer $1/n^k$ maal de k-de differentie. Blijkbaar zijn dus de hogere subdifferenties zeer klein.

Dit leidt tot het idee om $f(x)$ te bepalen door opbouwen uit haar subdifferenties. Men berekent de leidende subdifferenties, totdat men oordeelt, dat ze verder verwaarloosbaar zijn. Deze volgende stelt men dan nul en dan kan men het subdifferentieschema volbouwen. Men moet voldoende extra decimalen meenemen om te zorgen, dat de volgende scharnierwaarde exact gereproduceerd wordt. In het bovenstaande voorbeeld zijn daarvoor vier extra decimalen nodig, als we precies de uitgeschreven termen in aanmerking nemen.

Veelal wordt nu dit subdifferentieschema verder opgebouwd en wel zolang tot het verschil van de op deze wijze gevormde scharnierwaarden en de gegeven scharnierwaarden ontoelaatbaar dreigt te worden, nl. zo groot, dat de afronding naar het oorspronkelijk aantal decimalen afwijkingen dreigt op te leveren. Men berekent dan nieuwe differenties en begint opnieuw.

Dit systeem is inferieur. Allereerst is de methode niet efficient want telkens moet men vervelende leidende differenties berekenen, wat niet eens systematisch van te voren kan geschieden, omdat wij niet weten, waar wij ze nodig hebben, tenzij men ze voor iedere scharnierwaarde berekent, wat het beste is maar zeer omslachtig. In de tweede plaats is er geen voldoende controle omdat de scharnierwaarden niet exact behoeven te worden gereproduceerd en derhalve kunnen bijv. twee fouten, die elkaar uiteindelijk zo ongeveer opheffen onopgemerkt blijven. Tenslotte is het proces discontinu. Een fout in een bepaald gedeelte treedt niet meer in de volgende berekeningen op. Dit lijkt misschien een voordeel, maar is inwerkelijkheid een geweldig nadeel. Immers het is mogelijk, dat een fout insluipt in een van de eerste cijfers van de functie, bijv. doordat een zodanige fout gemaakt wordt in een scharnierwaarde of in een leidende subdifferentie. Zulk een fout is natuurlijk veel ernstiger dan een in de laatste cijfers, maar ontsnapt toch eerder aan de controle van de volgende scharnierwaarde, omdat een minder conscientieuze rekenaar meer aandacht zal schenken aan het kloppen van de laatste cijfers, dan van de eerste, die immers"altijd wel goed zijn". Bij het starten van een nieuwe subtabellatie na berekenen van nieuwe leidende subdifferenties is deze fout begraven en kan nooit meer ontdekt worden dan door achteraf nog eens alle scharnierwaarden te controleren. De oorzaak van ontelbare fouten in de tafels van Hayashi is gelegen in deze foutieve wijze van subtabelleren.

Alle hier genoemde moeilijkheden worden geelimineerd door de invoering van zg. overbruggingsdifferenties. In de hier gegeven gewijzigde vorm van het oorspronkelijke idee van Comrie zijn dit de grootheden welke men aan de subdifferenties $D^k_{1,0}$ moet toevoegen om de juiste leidende subdifferenties D^k_1 voor het nieuwe interval te krijgen. Wij zullen een en ander uiteenzetten door in extenso het reeds genoemde voorbeeld door te rekenen. Wij stellen vast, welke differenties niet meer van belang zijn bij de interpolatie binnen een interval. Laat dit de vierde en hogere zijn. Vervolgens voeren wij zoveel schijndecimalen in, dat de interpolatiecoefficienten exact in rekening gebracht worden. Wij spreken van schijndecimalen, want het is alleen onze bedoeling achter de scharnierwaarden en de differenties zoveel nullen toe te voegen, dat alle subdifferenties gehele getallen zijn, geheel natuurlijk in de zin van eenheden van de laatste schijndecimaal. Aan de coefficienten 0,0285 enz., zien wij dat er vier schijndecimalen nodig zijn. Als de oorspronkelijke functiewaarden dus als geheel beschouwd worden (in eenheden van de laatste echte decimaal), moeten ze met 10^4 vermenigvuldigd worden voor de subtabellatie. Het subtabellatieschema ziet er nu als volgt uit:

x	f(x)	d	d^2	d^3
x_0	$10000f_0$			
		$1000\delta_{1/2}-285\delta_0^2-165\delta_1^2$		
$x_{0,1}$	$9000f_0+1000f_1-285\delta_0^2-165\delta_1^2$		$90\delta_0^2+10\delta_1^2$	
		$1000\delta_{1/2}-195\delta_0^2-155\delta_1^2$		$10\delta^3_{1/2}$
$x_{0,2}$	$8000f_0+2000f_1-480\delta_0^2-320\delta_1^2$		$80\delta_0^2+20\delta_1^2$	
		$1000\delta_{1/2}-115\delta_0^2-135\delta_1^2$		$10\delta^3_{1/2}$
$x_{0,3}$	$7000f_0+3000f_1-595\delta_0^2-455\delta_1^2$		$70\delta_0^2+30\delta_1^2$	
		$1000\delta_{1/2}-45\delta_0^2\ -105\delta_1^2$		$10\delta^3_{1/2}$
	....		$60\delta_0^2+40\delta_1^2$	
		....		$10\delta^3_{1/2}$
	....		....	
		....		.....
$x_{0,8}$	$2000f_0+8000f_1-320\delta_0^2-480\delta_1^2$		....	
		$1000\delta_{1/2}+155\delta_0^2+195\delta_1^2$		.....
$x_{0,9}$	$1000f_0+9000f_1-165\delta_0^2-285\delta_1^2$		$10\delta_0^2+90\delta_1^2$	
		$1000\delta_{1/2}+165\delta_0^2+285\delta_1^2$		$10\delta^3_{1/2}$
x_1	$10000f_1$	+ A	$100\delta_1^2$	
		$1000\delta_{3/2}\ -285\delta_1^2-165\delta_2^2$	+ B	$10\delta^3_{1/2}$
$x_{1,1}$	$9000f_1+1000f_2-285\delta_1^2-165\delta_2^2$		$90\delta_1^2+10\delta_2^2$	+ B
		$1000\delta_{3/2}\ -195\delta_1^2-155\delta_2^2$		$10\delta^3_{3/2}$
	....		$80\delta_1^2+10\delta_2^2$	
		....		$10\delta^3_{3/2}$
			....	
				.....

Wij gaan dus opbouwen tot wij de lijn f_1, D_1, D_1^2, D_1^3 hebben gevormd. Dan is de scharnierwaarde f_1 goed, maar de leidende differenties zijn niet goed. Die maken wij nu eerst goed door er bedragen bij te tellen, de <u>overbruggingsdifferenties.</u> Hoe groot zijn deze ? Allereerst de eerste overbruggingsdifferentie A. De normale opbouw levert een $D_{1,0} = 1000\delta_{1/2} + 165\delta_0^2 + 385\delta_1^2$. Het moest zijn $D_1 = 1000\delta_{3/2} - 285\delta_1^2 - 165\delta_2^2$. Blijkbaar is $A = 1000\,\delta_1^2 - 165\delta_0^2 - 670\delta_1^2 - 165\delta_2^2 = -165\delta_0^2 + 330\delta_1^2 - - 165\delta_2^2 = -165\delta_1^4$.

Nu de tweede overbruggingsdifferentie B. De normale opbouw levert een $D^2_{1,0} = -10\,\delta^2_o + 110\,\delta^2_1$. Het moest zijn $D^2_1 = 90\,\delta^2_1 + 10\,\delta^2_2$, dus blijkbaar is $B = 10\,\delta^2_o - 20\,\delta^2_1 + 10\,\delta^2_2 = 10\delta^4_1$.

Tenslotte zien wij direct dat de derde overbruggingsdifferentie ook B is !

Het proces is dus als volgt: Bereken één enkele keer de leidende subdifferenties en ga opbouwen. Iedere keer als wij de lijn D^k_m hebben geproduceerd tellen wij bij deze subdifferenties de uiterst eenvoudig te berekenen grootheden A, B, B op en gaan door. In werkelijkheid is zelfs δ^4_1 noodzakelijk klein, want anders was ze van invloed op de interpolatie, dus het loont de moeite een klein tabelletje te maken, waarin alle in aanmerking komende veelvouden van 165 staan. Dan behoeft er dus in het geheel niet gerekend te worden. Het proces is volkomen continu over een willekeurig groot aantal intervallen. Iedere scharnierwaarde moet exact gereproduceerd worden. Een onopgemerkte fout blijft permanent aanwezig en kan op de duur nooit onopgemerkt blijven. Het proces is dus niet alleen veel sneller maar ook veel beter dan het eerstbeschrevene.

Het subtabellatieproces kan schitterend gemechaniseerd worden door gebruikmaking van een National-machine (Vgl. pag. 36-40). Het operatieschema voor het gegeven voorbeeld is:

	Stop:	K	0	0	1	± 3	4,2	T,2
Normale regel	Hand:	-	Zet x_m	1	3	4	2	T
	Druk:	-	x_m	f_m	D_m	D^2_m	D^3_m	←
Na iedere 10e regel	Hand:	-	Tab	Tab	Tab	Zet A	Zet B	-
	Druk:	-	→	→	→	A	B	←
Start	Hand:	-	Tab	Tab	Zet f_o	Zet D_o	Zet D^2_o	-
	Druk:	-	→	→	f_o	D_o	D^2_o	←
	Hand:	-	T 2	Tab	Tab	Tab	Tab	Zet D^3_o
	Druk:	-	D^2_o	→	→	→	→	D^3_o

Er is een trucje toegepast met de 4,2-stop. Als we nl. register 2 op deze stop subtotaliseren werkt de stop als een gewone 4 stop, doch bij het inzetten van B natuurlijk als 4,2 stop.

De registers 5 en 6 zijn niet gebruikt en kunnen desgewenst gebruikt worden om het argument op te bouwen. Dit vereist één extra toetsindruk per regel. Omdat het argument ingeslagen kan worden terwijl de wagen terugloopt, betekent dit tijdsverlies, zodat wij dit niet prefereren.

Voorts is het voor de operatrice prettiger iets anders te doen dan alleen op volgorde toetsen in te drukken, terwijl ten slotte het aanslaan van het cijfer 9 een sein is, dat de extra regel in aantocht is !

Als illustratie geven wij het volgende vraagstuk. Een functie is gegeven in 7 decimalen. Gevraagd haar in tienen te subtabelleren met inachtname van derde differenties, daarbij de gesubtabelleerde waarden afrondende in 6 decimalen.

De functie en haar differentieschema is:

x	f(x)	δ	δ^2	δ^3	δ^4
1,60	4,9530324		4953		1
		497788		50	
1,61	5,0028112		5003		0
		502791		50	
1,62	5,0530903		5053		1
		507844		51	
1,63	5,1038747		5104		0
		512948		51	
1,64	5,1551695		5155		1
		518103		52	
1,65	5,2069798		5207		1

Nu de startgrootheden:

50000

Functie: 495303240000

D_o : 495550900

D_o^2 : 495800

D_o^3 : 500

Nu kan de subtabellatie starten. Na de gemaakte voorbereidingen gaat dit zeer snel, ca. 400 functiewaarden per uur. Alleen moet de afronding in orde gemaakt worden. Dit is heel eenvoudig. Wij tellen nl. 50000 op bij de beginfunctie, dan komen alle afrondingen automatisch in orde ! Om de gesubtabelleerde tabel te gebruiken moet men de laatste vijf cijfers wegschrappen. Vooral niet nog eens afronden ! De tabel staat op pag. 73. A propos, $f(x) = e^x$.

Natuurlijk is het bovenstaande slechts een bijzonder geval. Het aantal in aanmerking te nemen differenties kan hoger of lager zijn en n kan andere waarden hebben. Het is een sport voor elk geval van voldoende grootte de beste manier van opzetten van het proces te verzinnen. Wij zien, dat de National met haar 6 registers nog twee differenties meer in rekening kan brengen, dus kan subtabelleren met inachtname van 5^e differenties. Vaak kan men ook met vrucht gebruik maken

x_m	f_m	D_m	D_m^2	D_m^3
			A	B
1600	495303290000	495550900	495800	500
1	495798840900	496046700	496300	500
2	496294887600	496543000	496800	500
3	496791430600	497039800	497300	500
4	497288470400	497537100	497800	500
5	497786007500	498034900	498300	500
6	498284042400	498533200	498800	500
7	498782575600	499032000	499300	500
8	499281607600	499531300	499800	500
9	499781138900	500031100	500300	500
			0	0
1610	500281170000	500531400	500300	500
1	500781701400	501032200	501300	500
2	501282733600	501533500	501800	500
3	501784267100	502035300	502300	500
4	502286302400	502537600	502800	500
5	502788840000	503040400	503300	500
6	503291880400	503543700	503800	500
7	503795424100	504047500	504300	500
8	504299471600	504551300	504800	500
9	504804023400	505056600	505300	500
			165	10
1620	505309080000	505561735	505810	510
1	505814641735	506067545	506320	510
2	506320709280	506573865	506830	510
3	506827283145	507080695	507340	510
4	507334363840	507588035	507850	510
5	507841951875	508095885	508360	510
6	508350047760	508604245	508870	510
7	508858652005	509113115	509380	510
8	509367765120	509622495	509890	510
9	509877387615	510132385	510400	510
			0	0
1630	510387520000	510642785	510910	510
1	510898162785	511153695	511420	510
2	511409316480	511665115	511930	510
3	511920981595	512177045	512440	510
4	512433158640	512689485	512950	510
5	512945848125	513202435	513460	510
6	513459050560	513715895	513970	510
7	513972766455	514229865	514480	510
8	514486996320	514744345	514990	510
9	515001740665	515259335	515500	510
			165	10
1640	515517000000	515774670	516020	520
1	516032774670	516290690	516540	520
2	516549065360	516807230	517060	520
3	517065872590	517324290	517580	520
4	517583196880	517841870	518100	520
5	518101038750	518359970	518620	520
6	518619398720	518878590	519140	520
7	519138277310	519397730	519660	520
8	519657675040	519917390	520180	520
9	520177592430	520437570	520700	520
			165	10
1650	520698030000	520958105	521230	530
1	521218988105	521479335	521760	530

van het terugwerpen van hogere differenties. Hierbij treedt iets zeer eigenaardigs op. Laten wij het geval beschouwen van het terugwerpen van vierde differenties op tweede differenties met behulp van de formule

$$\delta^{2*} = \delta^2 - 0{,}184\,\delta^4,$$

waarmede zo ongeveer te werken valt tot $\delta^4 = 1000$ eenheden, zoals wij weten. Nu zou men kunnen menen, dat wij in het bovenstaande alleen maar δ^2 door δ^{2*} hadden te vervangen. Maar dit is niet geheel juist. Immers bij de berekening van de overbruggingsdifferenties treedt een verschil op. Allereerst de eerste overbruggingsdifferentie A. De normale opbouw levert een $D_{1,0} = 1000\,\delta_{1/2} + 165\,\delta_0^{2*} + 385\,\delta_1^{2*}$. Het moest zijn $D_1 = 1000\,\delta_{3/2} - 285\,\delta_1^{2*} - 165\,\delta_2^{2*}$. Blijkbaar is $A = 1000\,\delta_1^2 - 165\,\delta_0^{2*} - 670\,\delta_1^{2*} - 165\,\delta_2^{2*} = 1000\,\delta_1^2 - 165\,\delta_0^2 - 670\,\delta_1^2 - 165\,\delta_2^2 + 165\,R_0^2 + 670\,R_1^2 + 165\,R_2^2 = -165\,\delta_1^4 + 1000\,R_1^2 + 165\,\delta_1^2\,R^2$, waarin R^2 de afgeronde waarde van $0{,}184\,\delta^4$ betekent. Dus is

$A = -165\,(\delta_1^4 - \delta_1^2\,R^2) + 1000\,R_1^2$. Evenzo vinden wij $B = 10(\delta_1^4 - \delta_1^2\,R^2)$.

Speciale tafels zijn gemaakt om het berekenen van de overbruggingsdifferenties te omzeilen. Men bedenke, dat $\delta^2\,R^2$ slechts een zeer kleine grootheid is, nl. enkele eenheden. Voor B behoeft dus geen tafel gemaakt te worden. Voor A heeft de tafel als argument $\delta^4 - \delta^2\,R^2$, terwijl voor R^2 de afgeronde waarde van $0{,}184\,(\delta^4 - \delta^2\,R^2)$ genomen is, welke ook naast A staat opgegeven. Voor elke eenheid, die R^2 meer is dan deze opgegeven waarde, telle men eenvoudig 1000 eenheden bij A op.

Een andere kunstgreep is het in cascade schakelen van twee subtabellaties voor grote n, bijv. n = 100. Stel, dat men eerst in tienen zou subtabelleren, en deze nieuwe tabel opnieuw in tienen, dan zou men bij deze tweede subtabellatie zeker minder differenties in rekening behoeven te brengen dan eerst het geval was door de drastische verlaging van de subdifferenties. Dit betekent een grote tijdwinst. Voorts is het een grote besparing in het aantal schijndecimalen. Wij voeren de twee subtabellaties niet na elkaar uit, maar tegelijkertijd. Op deze wijze berekende de Rekenafdeling van het M.C. een hele serie tafels elk voor 10000 waarden van het argument. Uitgerekend werden 100 functiewaarden en in twee cascades van 1 : 10 werd de tafel verdicht tot 10000 waarden. De functiewaarden waren in twee extra decimalen berekend, terwijl op de beschreven wijze het eindresultaat automatisch op het juiste aantal decimalen werd afgerond. In dit geval was het doorgaans bij de eerste trap voldoende tweede differenties met Bessel in rekening te brengen en bij de tweede trap kon de subtabellatie lineair geschieden. Daardoor was de productiesnelheid hoog, ca. 500 functiewaarden per uur. De tolerantie van een aldus berekende tafel is als volgt te bepalen:

a) Tengevolge van afrondingsfouten in de scharnierwaarden en interpolatie met 4 basispunten een maximale fout van 0,625 maal de afrondingsfouten van de scharnierwaarden. Deze waren weer met twee extra decimalen berekend, dus totaal maximaal ca. 0,75 eenheden van de tweede extra decimaal.

b) Fout door verwaarlozing van de derde differenties in de eerste trap is maximaal 0,008 maal de grootste derde differentie. Laat deze bedragen 20, dan is de maximale fout 0,15 eenheden.

c) Fout door verwaarlozing van de tweede differenties in de tweede trap is maximaal 0,125 maal de grootste tweede differentie. Laat deze bedragen in de oorspronkelijk tabel 600 eenheden, dus na de eerste trap 6 eenheden. Dan is maximale fout 0,75 eenheden.

d) Fout door terugafronding op juiste aantal eenheden maximaal 50 eenheden. Totale fout dus zeker kleiner dan 0,75 + 0,15 + 0,75 + 50 = 51,65 eenheden van de tweede extra decimaal. In de eenheden van de goede decimalen is dus de tolerantie, welke wij kunnen garanderen 0,52 eenheden. Een ideale tafel heeft een tolerantie van 0,50 eenheden.

7. Sommatie van reeksen

Een andere belangrijke toepassing van differentiemethodes kunnen wij maken bij het bepalen van de som van bepaalde types van eindige of oneindig voortlopende reeksen. In sommige gevallen kan men met andere methoden der wiskunde meer succes bereiken, maar als de formule, waardoor de termen bepaald zijn maar ingewikkeld genoeg is, is men op numerieke methoden aangewezen. Bij een reeks met eindig aantal termen is er formeel wel geen bezwaar om alle termen te berekenen en te sommeren, maar als het aantal termen groot is, is deze methode zeer tijdrovend. Bij een convergente oneindig voortlopende reeks liggen voor ons de zaken principieel eender, omdat uit de definitie van convergentie volgt, dat men om de som met een voorgeschreven eindige precisie te bepalen slechts een eindig, zij het wellicht buitensporig hoog aantal termen nodig heeft.

Wij zullen ons bepalen tot twee belangrijke groepen reeksen, n.l. $u_n = f(n)$ en $u_n = (-1)^n f(n)$, waarin $f(x)$ een gladde, d.w.z. slechts geleidelijk met x veranderende functie is. Gemakshalve duiden wij ze aan als niet alternerende resp. alternerende reeksen.

In het geval van een niet alternerende reeks kunnen wij een grote besparing op het rekenwerk verkrijgen door niet alle benodigde termen te berekenen, maar ze om de n, dus bijv. om de 10 of om de 100 te berekenen. De ontbrekende termen kunnen wij daar tussen geinterpoleerd denken en vervolgens kan de som opgemaakt worden. Maar in werkelijkheid behoeft men de interpolatie niet echt uit te voeren, doch slechts in formule, waarna de sommatie ook in formule kan worden uitgevoerd.

Zij te bepalen $\sum\limits_{k=a}^{b} u_k$. Eventueel berekenen wij alvast zoveel termen van de reeks aan het begin of eind, dat b-a een veelvoud van n is, waarin n een geheel getal is, zo groot als mogelijk, d.w.z. zodat in een tabel van u_k met interval n nog met voldoende precisie kan worden geinterpoleerd. Wij maken nu deze tabel met bijbehorend differentieschema. Voorts berekent men nog enige waarden buiten [ab] zodat ook de benodigde centrale differenties in het interval [ab] alle bekend zijn. De differenties in deze tabel noemen wij nu superdifferenties (vgl. de nomenclatuur subdifferenties in 6). Beschouw nu het interval $x_0 = a + mn$ tot $x_1 = a + (m+1)n$. Hierin interpoleren wij in gedachte een willekeurige term voor $x_{j/n} = a + mn + j$. De intervalfractie p is blijkbaar j/n. Dan is volgens Bessel:

$$f_{j/n} = f_0 + \frac{j}{n}\delta_{1/2} + B^2(\tfrac{j}{n})(\delta_0^2 + \delta_1^2) + B^3(\tfrac{j}{n})\delta^3_{1/2} + B^4(\tfrac{j}{n})(\delta_0^4 + \delta_1^4) + \dots \qquad (7.1)$$

De coefficienten B^3, B^5... zijn antisymmetrisch om het intervalmidden. Sommeert men dus van 0 tot n, dan vervallen deze termen automatisch. De rest kan met wat rekentechniek gesommeerd worden. Zo vinden wij bijv.:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} B^2(\tfrac{j}{n}) = -\frac{1}{24}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (7.2)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} B^4\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{11}{1440}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{11\,n^2}\right) \qquad (7.3)$$

Om de formule in een geschikte vorm te krijgen sommeren wij nu als volgt:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}f_o + f_{1/n} + f_{2/n} + \dots f_{1-2/n} + f_{1-1/n} + \frac{1}{2}f_1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(f_o+f_1) - \frac{1}{24}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)(\delta_o^2+\delta_1^2) + \frac{11}{1440}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{11\,n^2}\right)(\delta_o^4+\delta_1^4)\dots \qquad (7.4)$$

Nu sommeren wij over al deze intervallen, waarvan wij een willekeurig exemplaar beschouwd hebben. Dan volgt:

$$\frac{1}{n}(f_a+f_{a+1}+f_{a+2}+\dots f_{b-2}+f_{b-1}+f_b) = \frac{1}{2n}(f_a+f_b) + \left(\frac{1}{2}f_a+f_{a+n}+f_{a+2n}+\right.$$

$$\left.\dots f_{b-2n}+f_{b-n}+\frac{1}{2}f_b\right) - \frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{1}{2}\delta_a^2+\delta_{a+n}^2+\delta_{a+2n}^2+\dots\delta_{b-2n}^2+\delta_{b-n}^2+\frac{1}{2}\delta_b^2\right)$$

$$+\frac{11}{720}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{11\,n^2}\right)\left(\frac{1}{2}\delta_a^4+\delta_{a+n}^4+\delta_{a+2n}^4+\dots\delta_{b-2n}^4+\delta_{b-n}^4+\frac{1}{2}\delta_b^4\right)\dots \qquad (7.5)$$

Met de notatie $\delta_a^{2k+1} = \frac{1}{2}(\delta^{2k+1}_{a-n/2}+\delta^{2k+1}_{a+n/2})$, enz. vinden wij uiteindelijk:

$$\frac{1}{n}(f_a+f_{a+1}+\dots f_{b-1}+f_b) = \frac{1}{2n}(f_a+f_b) + (\delta_b^{-1}-\delta_a^{-1}) -$$

$$-\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)(\delta_b-\delta_a) + \frac{11}{720}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{11\,n^2}\right)(\delta_b^3-\delta_a^3)\dots \qquad (7.6)$$

Dit is de sommatieformule, welke wij zochten. Het is de centrale variant van de formule van Lubbock. De variant met voorwaartse differenties van a en achterwaartse differenties van b luidt:

$$\frac{1}{n}(f_a+f_{a+1}+\dots f_{b-1}+f_b) = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)(f_a+f_b) + (\nabla_b^{-1}-\Delta_a^{-1}) -$$

$$-\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)(\nabla_b-\Delta_a) - \frac{1}{24}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)(\nabla_b^2+\Delta_a^2) - \frac{19}{720}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{19\,n^2}\right)(\nabla_b^3-\Delta_a^3)$$

$$-\frac{3}{160}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{9n^2}\right)(\nabla_b^4+\Delta_a^4)\dots \qquad (7.7)$$

Deze variant biedt het voordeel, dat geen termen buiten [ab] berekend behoeven te worden, wat natuurlijk ten koste gaat van de convergentiesnelheid, eenvoud en precisie.

Als toepassing van het bovenstaande bepalen wij $S = \sum_{n=1000}^{2000} \frac{\log^2 n}{\sqrt{n}+5}$. Wij krijgen n = 100 en berekenen het volgende tabelletje, waarin willekeurig $\delta^{-1}_{a-n/2} = 0$ gesteld is.

k	δ^{-1}	u_k	δ	δ^2	δ^3	δ^4
800		1.342 497				
			- 20423			
900		1.322 074		1284		
	0		- 19139		- 98	
1000		1.302 935		1186		- 6
	1.302 935		- 17953		- 104	
1100		1.284 982		1082		4
	2.587 917		- 16871		- 100	
1200		1.268 111		982		10
	3.856 028		- 15889		- 90	
1300		1.252 222		892		7
	5.108 250		- 14997		- 83	
1400		1.237 225		809		10
	6.345 475		- 14188		- 73	
1500		1.223 037		736		9
	7.568 512		- 13452		- 64	
1600		1.209 585		672		6
	8.778 097		- 12780		- 85	
1700		1.196 805		614		6
	9.974 902		- 12166		- 52	
1800		1.184 639		562		9
	11.159 541		- 11604		- 43	
1900		1.173 035		519		0
	12.332 576		- 11085		- 43	
2000		1.161 950		476		9
	13.494 526		- 10609		- 34	
2100		1.151 341		442		
			- 10167			
2200		1.141 174				

Formule (7.6) en (7.7) leveren resp.:

$$S = 100\,(0.01232442 + 12.262084 - 0.0006415 + 0.0000011) = 1227.3768$$

$$S = 100\,(-1.2201176 + 12.494526 - 0.0005723 - 0.0000667 - 0.0000015 - 0.0000004) = 1227.3768$$

Als men zeker wenst te zijn van de nauwkeurigheid van dit resultaat, kan men de 6-de afgeleide van $f(x)$ bepalen en met behulp van de resttermformules een bovengrens van de fout vinden. Dat is moeizaam werk, dus dat laten wij aan de cursist over. Toch is het altijd nog aanzienlijk eenvoudiger dan het berekenen van 1001 termen van de reeks!

Nu het tweede geval, n.l. dat waarin $u = (-1)^n f(n)$, dus dat van de alternerende reeks. Wij beschouwen alleen de oneindig voortlopende reeks. De reeks kan als volgt getransformeerd worden:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 \ldots = f_0 - f_1 + f_2 \ldots = \tfrac{1}{2} f_0 - (-\tfrac{1}{2} f_0 + \tfrac{1}{2} f_1) +$$

$$+ (-\tfrac{1}{2} f_1 + \tfrac{1}{2} f_2) - (-\tfrac{1}{2} f_2 + \tfrac{1}{2} f_3) \ldots =$$

$$= \tfrac{1}{2} f_0 - \tfrac{1}{2}(\Delta_0 - \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 \ldots) = \tfrac{1}{2} f_0 - \tfrac{1}{4}\Delta_0 + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}\Delta_0 + \tfrac{1}{2}\Delta_1) -$$

$$-\tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}\Delta_1 + \tfrac{1}{2}\Delta_2) + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}\Delta_2 + \tfrac{1}{2}\Delta_3) \ldots = \tfrac{1}{2} f_0 - \tfrac{1}{4}\Delta_0 + \tfrac{1}{4}(\Delta_0^2 - \Delta_1^2 + \Delta_0^3 \ldots)$$

Door voortzetting van dit proces volgt:

$$S = f_0 - f_1 + f_2 - f_3 \ldots = \tfrac{1}{2} f_0 - \frac{1}{\underset{4}{\cancel{2}}}\Delta_0 + \frac{1}{\underset{8}{\cancel{4}}}\Delta_0^2 - \frac{1}{\underset{16}{\cancel{8}}}\Delta_0^3 + \frac{1}{\underset{32}{\cancel{16}}}\Delta_0^4 \ldots \qquad (7.8)$$

Dit is de transformatie van Euler. Het toepassen ervan noemen wij "euleren". Het euleren is een even eenvoudig als machtig middel om langzaam convergerende alternerende reeksen de baas te worden. Is de oorspronkelijke reeks alternerend en convergent, dan is de geeuleerde reeks ook convergent. Of ze beter convergent is, hangt van de omstandigheden af.

Als eerste voorbeeld bezien wij de meetkundige reeks $a - ar + ar^2 - ar^3 \ldots$ Uit het differentieschema

$$\begin{array}{llll}
a & & & \\
 & a(r-1) & & \\
ar & & a(r-1)^2 & \\
 & ar(r-1) & & a(r-1)^3 \\
ar^2 & & ar(r-1)^2 & \\
 & ar^2(r-1) & & \\
ar^3 & & &
\end{array}$$

volgt, dat de geeulerde reeks luidt:

$$\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}(r-1)a + \tfrac{1}{8}(r-1)^2 a - \tfrac{1}{16}(r-1)^3 a \ldots$$

Dit is ook een meetkundige reeks met reden $(r-1)/2$ i.p.v. r, maar niet meer alternerend als de reeks het oorspronkelijk wel was, dus als $r > 0$. De convergentie is verbeterd als $|\tfrac{1}{2}(r-1)| < |r|$, dus als $r > \tfrac{1}{3}$ en verslechterd, als $r < \tfrac{1}{3}$.

Dit is natuurlijk niet zo'n belangrijk geval. Duidelijker komt de methode tot haar recht bij langzamer dan meetkundig convergente reeksen. Als voorbeeld de alternerende, harmonische reeks van Brouncker:

$$\log 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} \ldots \qquad (7.9)$$

De differenties zijn $\Delta_0^k = (-1)^k/(k+1)$. Eulering van (7.9) geeft:

$$\log 2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{16} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32} \cdot \tfrac{1}{5} + \ldots \qquad (7.10)$$

Dit is een zeer bruikbare reeks. Als wij 10 termen nemen is de restterm 0.000082. Wij kunnen ook eerst een of meer termen van de reeks gewoon sommeren en dan pas gaan euleren. Nemen we eerst één term, dan is de restterm na totaal 10 termen - 0.000015. Eerst twee termen geeft 0.000006; drie termen - 0.000005; vier termen 0.000005; vijf termen - 0.000008; zes termen 0.000017; zeven termen 0.000057. Wij zien dat het aanbeveling verdient om eerst wat termen gewoon te nemen en dan pas te gaan euleren. Wensen wij zeer hoge precisie, dus veel termen in totaal, dan moet men ook wat verder pas gaan euleren. Voor een precisie van 5 decimalen zijn 10 termen blijkbaar voldoende. Om met de oorspronkelijke reeks deze nauwkeurigheid te halen zijn 200000 termen nodig.

Convergeert de reeks nog langzamer, dan boeken wij nog veel meer succes, want dan convergeert de geeulerde reeks nog beter. Als voorbeeld nemen wij

$$S = \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} - \frac{1}{\log 5} \quad \cdots \qquad (7.11)$$

Het schema ziet er als volgt uit:

n	f(n)	δ	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5	δ^6	δ^7	δ^8
2	1.4426950								
		- 5324558							
3	0.9102392		3435641						
		- 1888917		- 2546850					
4	0.7213475		888791		2025942				
		- 1000126		- 520908		- 1682797			
5	0.6213349		367883		343145		1439418		
		- 632243		- 177763		- 243379		- 1257718	
6	0.5581106		190120		99766		181700		1116843
		- 442123		- 77997		- 61679		- 140875	
7	0.5138983		112123		38087		40825		112442
		- 330000		- 39910		- 20854		- 28433	
8	0.4808983		72213		17233		12392		20601
		- 257787		- 22677		- 8462		- 7832	
9	0.4551196		49536		8771		4560		5193
		- 208251		- 13906		- 3902		- 2639	
10	0.4342945		35630		4869		1921		
		- 172621		- 9037		- 1981			
11	0.4170324		26593		2888				
		- 146028		- 6149					
12	0.4024296		20444						
		- 125584							
13	0.3898712								

Met deze 12 termen komen wij tot de snelst convergerende uitdrukking door de eulering te beginnen bij $n = 5$. Dan vinden wij:

$$S = 1{,}4426950 - 0{,}9102392 + 0{,}7213475 - (0{,}3106675 + 0{,}015806 + 0{,}0023765 + 0{,}0004875 + 0{,}0001190 + 0{,}0000326 + 0{,}0000097 + 0{,}0000031 + 0{,}0000010) = 0{,}92430.$$

Om deze precisie van vijf decimalen te bereiken, met de oorspronkelijke reeks hadden we e^{200000} termen moeten nemen, dus een aantal, dat met 86000 cijfers wordt geschreven! Vindt men dit resultaat niet sprekend genoeg, dan neme men log log n i.p.v. log n in (7.11). Van de oorspronkelijke reeks heeft men voor een precisie van 5 decimalen dan exp exp 200000 termen nodig, dat is een getal geschreven met meer cijfers dan mogelijk is op het op aarde beschikbare papier. Na eulering heeft men weer aan een dozijn termen genoeg.

De betekenis van het euleren is echter nog veel groter. Zij zet vaak divergente reeksen in convergente om! Natuurlijk heeft een divergente reeks zonder meer geen betekenis. Er is echter een belangrijke stelling van Knopp, die ons hierover iets leert:

Zij een analytische functie $f(z)$ gedefinieerd door de machtreeks $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ binnen de cirkel met de convergentiestraal $a > 0$. Wanneer men deze reeks p-maal eulert, gaat zij over in een reeks, welke in een gebied G_p convergeert tot de analytische voortzetting van $f(z)$ en daarbuiten divergeert. Het gebied G_p is alsvolgt bepaald: Trek door de oorsprong de voerstralen r_k door alle singulariteiten z_k van $f(z)$. Construeer nu de cirkels C_k, gaande door z_k, met middelpunt op r_k op afstand $2^p|z_k|$ van z_k, waar de oorsprong binnen ligt. Dan is G_p het gemeenschappelijk gebied (doorsnede) van alle cirkels C_k.
Laten wij p tot oneindig naderen, dan nadert G_p tot G, dat is het polygoon begrensd door de normalen door z_k op r_k.
Als wij dat toepassen, bv. op

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots\dots, \tag{7.12}$$

waarvan (7.9) een bijzonder geval is, kunnen wij (7.12) sommeren ook voor waarden van $x > 1$, waarvoor de rechterzijde divergeert. Immers $\log(1+x)$ heeft maar één singulariteit $x = -1$ en door een of meer malen te euleren, kunnen wij (7.12) dus convergent maken voor elke waarde van $x > -1$ (beter $Rx > -1$).

Eenmaal euleren maakt de reeks convergent tot $x = 3$. Dus $x = 2$ moet log 3 opleveren. Wij vinden $\Delta_0^{2k+1} = 0$ en $\Delta_0^{2k} = 2/(2k+1)$. Dan volgt:

$$\log 3 = 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{7} + \dots \tag{7.13}$$

Om log 100 op deze wijze te berekenen moet men zes maal euleren. Op het ogenblik wordt door het Mathematisch Centrum belangrijk werk verricht van de toepassing van eulering op asymptotische reeksen.Het blijkt mogelijk te zijn om volkomen "onbruikbare" reeksen tot precisie-instrumenten voor berekening om te vormen.