MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
AMSTERDAM-O.

CR 12

Cursus Wetenschappelijk Rekenaar(ster)

Onderwerp: Lineaire Algebra

door

F.J.M. Barning

1957

CURSUS WETENSCHAPPELIJK REKENAAR(STER)

Lineaire Algebra

§1. Vectoren in de ruimte en in het platte vlak

Definitie: Een vector is een gericht lijnstuk, gegeven door een beginpunt A en een eindpunt B. Notatie $\overrightarrow{AB}$ of kortweg $\overline{AB}$. Een vector wordt ook aangeduid door een letter: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{v}$, $\overline{x}$, enz. Een vector, waarvan begin en eindpunt samenvallen heet een nulvector. Twee vectoren zijn gelijk, als zij dezelfde richting (niet tegengestelde richting) en dezelfde lengte hebben. Men kan dus een vector desgewenst vervangen door een gelijke vector met een gegeven beginpunt. Alle nulvectoren zijn gelijk; notatie $\overline{0}$.

Op vectoren kan men twee bewerkingen uitvoeren:

I. Optelling.

Definitie: De som van twee vectoren $\overline{AB}$ en $\overline{CD}$ wordt als volgt gevonden:

Als $\overline{BE} = \overline{CD}$, dan is $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AE}$ (dus door middel van de "parallelogramregel").

II. Vermenigvuldiging van een vector met een (reëel)getal:

Definitie: Het product $\alpha\overline{a}$ van de vector $\overline{a}$ en het getal α wordt als volgt gevonden:

$\alpha\overline{a}$ is gericht langs dezelfde lijn als $\overline{a}$. De lengte van $\alpha\overline{a}$ is $|\alpha|$ maal de lengte van $\overline{a}$. Is $\alpha > 0$ dan heeft $\alpha\overline{a}$ dezelfde richting als $\overline{a}$, is $\alpha < 0$ dan heeft $\alpha\overline{a}$ tegengestelde richting als $\overline{a}$.

Twee vectoren $\overline{a}$ en $\overline{b}$ heten evenwijdig als er getallen α en β (niet beide 0) bestaan met $\alpha\overline{a} = \beta\overline{b}$. De nulvector is dus met iedere vector evenwijdig.

Uit I volgt:

(1.1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (optelling is commutatief)

(1.2) $(\overline{a}+\overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b}+\overline{c})$ (optelling is associatief)

(1.3) $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$ (voor iedere $\overline{a}$).

Bij elke vector $\overline{a}$ behoort een vector $(-1)\overline{a}$, zodat

(1.4) $\overline{a} + (-1)\overline{a} = \overline{0}$.

Voor $(-1)\bar{a}$ schrijven we kort: $-\bar{a}$ (tegengestelde vector van $\bar{a}$);
algemeen voor $(-\alpha)\bar{a}$ kort: $-\alpha\bar{a}$.
(1.3) en (1.4) volgen direct uit de algemene vergelijking $\bar{a} + \bar{x} = \bar{b}$, die (eenduidig) oplosbaar is in x voor elk tweetal gegeven vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$, nl. $\bar{x} = \bar{b} - \bar{a}$.
(1.1) t/m (1.4) houden in, dat de vectoren tegenover de optelling een Abelse (= commutatieve) groep vormen.

Uit II volgt:

(1.5) $(\alpha\beta)\bar{a} = \alpha(\beta\bar{a})$

(1.6) $1.\bar{a} = \bar{a}$; $0.\bar{a} = \bar{0}$; $\alpha.\bar{0} = \bar{0}$

terwijl uit I en II tezamen volgt:

(1.7) $\alpha(\bar{a}+\bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$ (1e distributieve eigenschap).

(1.8) $(\alpha+\beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$ (2e distributieve eigenschap).

<u>Definitie</u>: De vector $\bar{b}$ heet <u>een lineaire combinatie</u> van $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$ als er twee reële getallen α_1 en α_2 bestaan, zodanig, dat

(1.9) $\bar{b} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2$.

Men zegt ook, dat $\bar{b}$ dan <u>lineair afhankelijk</u> is van $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$.
<u>Algemeen</u>: $\bar{b}$ is lineair afhankelijk van $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, als er n getallen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ bestaan, zodanig, dat

(1.10) $\bar{b} = \alpha_1\bar{a}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n$.

Opmerking. De nulvector $\bar{0}$ is lineair afhankelijk van elk willekeurig n-tal vectoren $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$; neem n.l. $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

<u>Definitie</u>: Het <u>stelsel</u> vectoren $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ heet <u>lineair afhankelijk</u> als minstens één vector ervan lineair afhankelijk is van de overige, d.w.z. minstens één ervan is een lineaire combinatie van de overige.

<u>Stelling 1.1</u>. Als $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ een lineair afhankelijk stelsel vormen, dan is er een lineaire betrekking $\alpha_1\bar{a}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{0}$, waarbij de getallen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ niet allemaal nul zijn. Omgekeerd: als er zo'n lineaire betrekking bestaat, dan is het stelsel $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ lineair afhankelijk, (m.a.w. de gegeven lineaire betrekking met $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ niet alle gelijk aan 0, is een nodige en voldoende voorwaarde voor de afhankelijkheid der vectoren).
Dus een aequivalente definitie voor lineaire afhankelijkheid van een

stelsel vectoren $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$ luidt:
Er zijn coëfficiënten $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ (niet alle 0) te vinden, zodanig dat

(1.11) $\alpha_1\bar{a}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{0}$.

Definitie: Een stelsel vectoren heet lineair onafhankelijk als het stelsel niet lineair afhankelijk is.

Stelling 1.2. Als $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$ een lineair onafhankelijk stelsel vormen en als $\alpha_1\bar{a}_1+\ldots+\alpha_n\bar{a}_n=\bar{0}$, dan moet $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$.

Stelling 1.3. Wanneer tot een stelsel vectoren de nulvector behoort, dan is het stelsel lineair afhankelijk.

Stelling 1.4. Drie vectoren in de ruimte zijn dan en slechts dan lineair afhankelijk, als zij evenwijdig lopen aan eenzelfde vlak.

Stelling 1.5. In de ruimte resp. het platte vlak, zijn 4 resp. 3 vectoren steeds lineair afhankelijk.

Is in de ruimte een punt O, de oorsprong, gegeven, dan behoort bij ieder punt P een vector $\overline{OP}$, de plaatsvector van P. Omgekeerd behoort bij iedere vector $\bar{p}$ een punt P, zodat $\overline{OP}=\bar{p}$. Een plaatsvector is aan plaats gebonden, namelijk in dit geval het punt O als beginpunt.
Een plaatsvector en een punt, die met elkaar in bovengenoemde correspondentie staan, worden weergegeven door dezelfde letter: de plaatsvector van A is $\bar{a}$ enz.
Wij geven nu in de ruimte de oorsprong O en drie niet in een vlak gelegen vectoren: $\overline{OE_1} \stackrel{def}{=} \bar{e}_1$, $\overline{OE_2} \stackrel{def}{=} \bar{e}_2$, en $\overline{OE_3} \stackrel{def}{=} \bar{e}_3$ (dus $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ en $\bar{e}_3$ lineair onafhankelijk).

Definitie: Het punt O met de drie plaatsvectoren $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ en $\bar{e}_3$ vormen een coordinatenstelsel in de ruimte. De rechten door O langs $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ en $\bar{e}_3$ heten de assen van het coordinatenstelsel. $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ en $\bar{e}_3$ heten de grondvectoren (of basisvectoren).

Stelling 1.6. Iedere vector $\bar{a}$ is op één en slechts één wijze te schrijven als

(1.12) $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$ (Men zegt: in het coordinatenstelsel bestaat een eeneenduidige afbeelding tussen de punten van de ruimte en de drietallen reële getallen).

Definitie: In de ruimte zijn α_1, α_2 en α_3 in (1.12) de coordinaten van het eindpunt A van $\bar{a}$ in het coordinatenstelsel, waarvan de assen langs $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ en $\bar{e}_3$ vallen. In dit coordinatenstelsel heten deze getallen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de kentallen van $\bar{a}$; de drie vectoren $\alpha_1\bar{e}_1$, $\alpha_2\bar{e}_2$ en $\alpha_3\bar{e}_3$ de componenten van $\bar{a}$.
Schrijfwijze

$$\overline{OA} = \bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

In dit coordinatenstelsel geldt:

Stelling 1.7. $\bar{e}_1 = (1,0,0)$; $\bar{e}_2 = (0,1,0)$; $\bar{e}_3 = (0,0,1)$ en $\bar{0} = (0,0,0)$

Stelling 1.8. Als $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, dan is $\lambda\bar{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)$ (in het bijzonder: $-\bar{a} = (-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3)$).

Stelling 1.9. Als $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ en $\bar{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, dan is $\bar{a}+\bar{b} = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3)$.

Platte vlak: Neem in het platte vlak twee vectoren $\bar{e}_1$ en $\bar{e}_2$ (beide $\neq\bar{0}$) in een vast punt O, zo dat zij niet langs dezelfde lijn vallen. Men zegt dan dat de lineair onafhankelijke vectoren $\bar{e}_1$ en $\bar{e}_2$ in het platte vlak de grondvectoren vormen van het coordinatenstelsel bepaald door O, $\bar{e}_1$ en $\bar{e}_2$. Elke vector $\bar{a}$ is op één en slechts één manier te schrijven als $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1+\alpha_2\bar{e}_2$ (de beide termen zijn de componenten van $\bar{a}$). Schrijfwijze $\overline{OA} = \bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ (α_1 en α_2: kentallen van $\bar{a}$ en ook coordinaten van A in het betreffende coordinatenstelsel). Weer is $\lambda\bar{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2)$ als $\bar{b} = (\beta_1, \beta_2)$; $\bar{a}+\bar{b} = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2)$; $\bar{0} = (0,0)$.

Een rechte lijn l kan gegeven worden door een punt P op l en een vector $\bar{a}$, die evenwijdig is met l.
P wordt gegeven door zijn plaatsvector $\bar{p} = \overline{OP}$.
Een punt X op l heeft de plaatsvector $\bar{x} = \overline{OX}$.
Dan geldt als $\bar{x}-\bar{p} = \lambda\bar{a}$:

(1.13) $\qquad \bar{x} = \bar{p} + \lambda\bar{a}$.

Laat men in (1.13) λ alle reële waarden doorlopen, dan doorloopt X de lijn l.

Definitie: (1.13) met $-\infty < \lambda < \infty$ is een parametervoorstelling van de rechte lijn l op punt en richting.

Opmerking. (1.13) geldt zowel voor de meetkunde op de rechte lijn als voor die in het platte vlak als voor die in de ruimte. In het eerste geval heeft iedere vector één kental, in het tweede geval twee, in het derde drie kentallen.

Is l gegeven door twee punten $P(\overline{p})$ en $Q(\overline{q})$, dan kan men in (1.13) voor $\overline{a}$ nemen $\overline{q}-\overline{p}$. We vinden dan

(1.14) a) $\overline{x}=(1-\lambda)\overline{p}+\lambda\overline{q}$ of b) $\overline{x}=\alpha\overline{p}+\beta\overline{q}$ met $\alpha+\beta=1$.

Laat men in (1.14) λ of α en β (met $\alpha+\beta=1$) alle reële waarden doorlopen, dan doorloopt X de lijn l.

<u>Definitie</u>: (1.14) a) of b) is een <u>parametervoorstelling</u> van l <u>uit twee punten</u>.

<u>Stelling 1.10.</u> De meetkundige betekenis van de getallen α en β in (1.14) b) is dat $\overline{PX} : \overline{QX} = -\beta:\alpha$ (dus X tussen P en Q als α en β beide positief of α en $\beta < 1$. Het midden van PQ behoort bij $\lambda=\beta=\frac{1}{2}$).

Een vlak α kan gegeven worden door een punt $P(\overline{p})$ en twee onderling niet evenwijdige vectoren $\overline{a}$ en $\overline{b}$, die evenwijdig zijn met α.
Op grond van stelling 1.4 is de voorwaarde, opdat $X(\overline{x})$ in α ligt, deze, dat $\overline{x}-\overline{p}$ geschreven kan worden in de vorm $\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}$, dus $\overline{x}-\overline{p}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}$ of

(1.15) $\overline{x}=\overline{p}+\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}$.

<u>Definitie</u>: (1.15) is een <u>parametervoorstelling</u> van α <u>op punt en vlakstelling.</u>

Is α gegeven door drie punten $P(\overline{p})$, $Q(\overline{q})$, $R(\overline{r})$, dan kan men in (1.15) $\overline{a}$ vervangen door $\overline{q}-\overline{p}$ en $\overline{b}$ door $\overline{r}-\overline{p}$, zodat

(1.16) a) $\overline{x}=(1-\lambda-\mu)\overline{p}+\lambda\overline{q}+\mu\overline{r}$ of b) $\overline{x}=\alpha\overline{p}+\beta\overline{q}+\gamma\overline{r}$ met $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Laat men in (1.16) λ en μ of α, β en γ (met $\alpha+\beta+\gamma=1$) alle reële waarden doorlopen, dan doorloopt X het vlak α.

<u>Definitie</u>: (1.16)(met $-\infty<\lambda,\mu<\infty$ resp. $-\infty<\alpha,\beta<\infty$ en $\alpha+\beta+\gamma=1$)is een <u>parametervoorstelling</u> van het vlak α <u>uit drie punten</u>.

§ 2. Vectorruimte van willekeurige dimensie

In de gewone ruimte kan men de vector $\bar{a}$ en het coördinatendrietal $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ (zie (1.12)) met elkaar identificeren, we schrijven $\bar{a} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. Met de coördinatendrietallen kan men rekenen als met de vectoren zelf. Omdat het hier om drietallen gaat, noemt men de ruimte driedimensionaal. Schrijfwijze: R_3. Op dezelfde wijze zijn vectoren $\bar{a}$ in het platte vlak te identificeren met coördinatentweetallen (α_1,α_2). Om eenheid in de terminologie te krijgen, noemt men een plat vlak een tweedimensionale ruimte. Schrijfwijze: R_2.

De methode van de analytische meetkunde bestaat hierin, dat men van deze correspondentie tussen meetkundige en algebraïsche begrippen systematisch gebruik maakt om een meetkundig vraagstuk in een algebraïsch om te zetten. De algebraïsche theorie der vectoren is ook om haar zelfs wil van belang, omdat het in sommige gevallen voordeliger is haar onafhankelijk van de meetkunde te bestuderen. Men behoeft zich dan b.v. niet tot reële getallen te beperken. De theorie geldt evenzeer b.v. voor complexe getallen. Wij zullen voorlopig echter onderstellen, dat de beschouwde getallen alle reëel zijn. Bij berekeningen met de twee- of drietallen kan men geheel van de meetkundige interpretatie afzien. Het ligt voor de hand nu ook coördinatenviertallen, vijftallen enz. te beschouwen en daarmede overeenkomstig te rekenen.

Wij geven hier de beginselen van de algebraïsche theorie der vectoren, geleid door de analogie met de meetkundige beschouwingen uit § 1.

Def.: Een rij van n getallen $\alpha_1,\alpha_2, \dots ,\alpha_n$ in een bepaalde volgorde genomen, noemen wij een algebraïsche n-vector of, als geen misverstand te vrezen is, een vector. De vector $(\alpha_1,\alpha_2, \dots ,\alpha_n)$ wordt geschreven als $\bar{a}$. De n getallen waaruit een vector bestaat, heten de kentallen van de vector. De vector, waarvan alle componenten nul zijn heet de nulvector en wordt voorgesteld door $\bar{0}$. Twee vectoren zijn gelijk, als ieder kental van de eerste gelijk is aan de overeenkomstige component van de tweede.

Is $\bar{a} = (\alpha_1, ---- ,\alpha_n)$ en $\bar{b} = (\beta_1, --- ,\beta_n)$ dan is de <u>som</u>

$\bar{a} + \bar{b} \stackrel{def}{=} (\alpha_1 + \beta_1, ----- , \alpha_n + \beta_n)$

Is λ een gehele dan is $\lambda\,\bar{a} \stackrel{def}{=} (\lambda\alpha_1, --- , \lambda\alpha_n)$.

Al deze vectoren tezamen vormen de n-dimensionale ruimte R_n.
De begrippen "lineaire combinatie" en "lineaire afhankelijkheid" kunnen met behulp der definiërende vergelijkingen (1.10) en (1.11) en bovenstaande definities eenvoudig algebraïsch geinterpreteerd worden.

Een stelsel vectoren is per definitie weer lineair onafhankelijk als het niet afhankelijk is. Het is gemakkelijk na te gaan, dat de regels (1.1) t/m (1.8) uit §1 ook voor deze n-vectoren gelden.

We geven aan enige vectoren uit R_n een speciale naam:

$(1,0, --- , 0) \stackrel{def}{=} \bar{e}_1$, $(0,1,0, --- , 0) \stackrel{def}{=} \bar{e}_2$ enz. tot

$(0, --- , 0,1) \stackrel{def}{=} \bar{e}_n$:

(resp. 1^e, 2^e, --- , n^e grondvector)

<u>Stelling 2.G. De grondvectoren $\bar{e}_1, --- , \bar{e}_n$ zijn lineair onafhankelijk.</u>

Een willekeurige vector $\bar{a} = (\alpha_1, ---- ,\alpha_n)$ is altijd lineair afhankelijk van $\bar{e}_1, ---- , \bar{e}_n$, n.l. $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + --- + \alpha_n\bar{e}_n$.

Er zijn nog andere systemen waarin optelling en vermenigvuldiging met een getal gedefinieerd zijn en waar dezelfde rekenregels gelden.

1.) Alle veeltermen $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + --- + \alpha_{n-1}x^{n-1}$ van graad $\leq n - 1$. Als f en g twee zulke veeltermen zijn, dan wordt $h = f + g$ gedefinieerd door $h(x) = f(x) + g(x)$, terwijl als λ een getal is, het product $k = \lambda f$ gedefinieerd wordt door $k(x) = \lambda f(x)$. (een veelterm heet de 0-veelterm slechts dan als alle α's = 0).

2.) Alle (reële) functies f(x), g(x), --- , die gedefinieerd zijn in het interval $0 \leq x \leq 1$. Optelling en vermenigvuldiging met λ gedefinieerd als bij het vorige voorbeeld (0-functie als $f(x) \equiv 0$)

Dit voert tot twee definities:
Def.: Lineaire ruimte Een verzameling van elementen heet een lineaire ruimte als optelling en vermenigvuldiging met een getal λ in die ruimte gedefinieerd zijn en voldoen aan de rekenregels (1.1) t/m (1.8) uit § 1. Van elk tweetal elementen behoort de som tot de verzameling, terwijl dit eveneens het geval is met ieder element, dat gevormd wordt door vermenigvuldiging van een willekeurig element van de verzameling met een getal λ . De elementen heten dan vectoren.

Def. Vectorruimte Een lineaire ruimte (die niet alleen uit de nulvector bestaat) heet een vectorruimte als een eindig aantal vectoren bestaat, waarvan alle andere lineair afhankelijk zijn. Zo'n eindig stelsel vectoren (waarvan dus alle andere lineair afhankelijk zijn) heet een basis van de vectorruimte.
Opm.: De vectoren in een basis behoeven niet lineair onafhankelijk te zijn.

Stelling 2.1 De n-dimensionale ruimte R_n is een vectorruimte. De grondvectoren $\bar{e}_1, ---, \bar{e}_n$ vormen een basis.

Stelling 2.2 De verzameling der veeltermen van graad $\leq n - 1$ (zie blz.7,1.)) is een vectorruimte. De "vectoren" $\bar{e}_1 = 1$, $\bar{e}_2 = x$, $\bar{e}_3 = x^2$, ... $\bar{e}_n = x^{n-1}$ vormen een basis.

Stelling 2.3 Als in een vectorruimte $\bar{a}_1, ---, \bar{a}_p$ een basis is, en elk dezer vectoren is lineair afhankelijk van $\bar{b}_1, ---, \bar{b}_q$ dan is ook $\bar{b}_1, ---, \bar{b}_q$ een basis.

Stelling 2.4 (Uitwisselingsstelling van Steinitz). Laat in een vectorruimte $\bar{a}_1, ---, \bar{a}_p$ een basis zijn. Laat verder de vectoren $\bar{v}_1, ---, \bar{v}_q$ lineair onafhankelijk zijn.
Dan is $q \leq p$ en verder is er een basis te vinden bestaande uit $\bar{v}_1, ---, \bar{v}_q$ en nog $p - q$ der oorspronkelijke basisvecto-

ren $\bar{a}_1$ t/m $\bar{a}_p$.

<u>Def.</u> Als $\bar{a}_1$, --- , $\bar{a}_p$ een basis is, en de vectoren $\bar{a}_1$, --- , $\bar{a}_p$ zijn bovendien lineair onafhankelijk, dan heet deze basis een <u>lineair onafhankelijke basis</u>.

<u>Stelling 2.5</u> Als in een vectorruimte de basis $\bar{a}_1$, --- , $\bar{a}_n$ niet lineair onafhankelijk is, dan kan er door weglating van een aantal dezer vectoren een lineair onafhankelijke basis van gemaakt worden.

<u>Stelling 2.6</u>. In een vectorruimte bestaat minstens één lineair onafhankelijke basis.

<u>Stelling 2.7</u> Vormen in de vectorruimte zowel $\bar{a}_1$, --- , $\bar{a}_p$ als $\bar{b}_1$, --- , $\bar{b}_q$ een lineair onafhankelijke basis, dan is $p = q$.
Uit stelling 2.7 volgt, dat in een vectorruimte het aantal vectoren in een lineair onafhankelijke basis, dus onafhankelijk is van de keuze van die basis.

<u>Def.:</u> Het aantal vectoren in een lineair onafhankelijke basis van een vectorruimte, welk aantal dus niet afhangt van de keuze van die basis, heet de <u>dimensie</u> van de vectorruimte. Als deze dimensie n bedraagt spreekt men van een n-dimensionale vectorruimte.

<u>Stelling 2.8</u> Laat een vectorruimte n-dimensionaal zijn. Dan geldt:

1) Als $\bar{a}_1$, --- , $\bar{a}_n$ lineair onafhankelijk zijn, dan vormen zij een basis.
2) Elk $(n + 1)$-tal vectoren $\bar{b}_1$, --- , $\bar{b}_{n+1}$ is lineair afhankelijk.

<u>Stelling 2.9</u> Is $\bar{a}_1$, --- , $\bar{a}_n$ een lineair onafhankelijke basis van een vectorruimte, dan is een willekeurige vector $\bar{a}$ op één en slechts een manier te schrijven als een lineaire combi-

natie van $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$:

$$\bar{a} = \alpha_1\bar{a}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n. \qquad \text{(zie (1.10))}$$

Als we een n-dimensionale vectorruimte hebben, kiezen we de vectoren van de een of andere lineair onafhankelijke basis $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ als grondvectoren. Een willekeurige vector $\bar{a}$ is dan volgens stelling 2.9 op één manier te schrijven als een lineaire combinatie der grondvectoren $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$.
De getallen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ heten de kentallen van $\bar{a}$ en de vectoren $\alpha_1\bar{e}_1, \ldots, \alpha_n\bar{e}_n$ heten de componenten van $\bar{a}$.
We schrijven:

$$\bar{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

In wezen is dus elke n-dimensionale vectorruimte identiek met de ruimte R_n, die in het begin van deze paragraaf gedefinieerd werd.

<u>vb. 1)</u> De beide verzamelingen van functies, op blz. 7 onder 1.) en 2.) gedefinieerd vormen een lineaire ruimte.
De verzameling van veeltermen, gedefinieerd onder 1.) vormen volgens stelling 2.2. een vectorruimte met een basis gevormd door de "vectoren" $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ (gedefinieerd in stelling 2.2). Deze basis is lineair onafhankelijk. De beschouwde vectorruimte is dan n-dimensionaal.

<u>vb. 2)</u> De verzameling van alle (reële) functies $f(x)$, $g(x)$ --- die gedefinieerd zijn in $0 \leq x \leq 1$ (zie 2.) op blz. 7) is een lineaire ruimte. Eenvoudig valt in te zien, dat deze lineaire ruimte geen vectorruimte is.

<u>Def.:</u> Een deelverzameling W van de n-dimensionale vectorruimte R_n, met de eigenschap, dat wanneer $\bar{a}$ tot W behoort ook $\lambda\bar{a}$ (voor alle getallen λ) tot W behoort en dat, als $\bar{a}$ en $\bar{b}$ tot W behoren, ook $\bar{a} + \bar{b}$ tot W behoren, heet een <u>lineaire deelruimte</u>

<u>Stelling 2.10</u> Als een lineaire deelruimte van R_n een vectorruimte is van de dimensie k, dan is $k \leq n$.
Opm.: Een (n-1)-dimensionale vectorruimte R_{n-1} in R_n, door een vast punt in R_n, wordt wel een <u>hypervlak</u> in R_n genoemd.

<u>Stelling 2.11</u> Als een k-dimensionale vectorruimte R_k een deelruimte is van R_n en $\overline{v}_1, --- , \overline{v}_k$ een basis is van R_k, dan kan deze aangevuld worden tot een basis $\overline{v}_1, --- , \overline{v}_n$ voor R_n.
Als $\overline{a}_1, --- , \overline{a}_p$ vectoren (desnoods lin. afh.) in R_n zijn, dan is de verzameling van al hun lineaire combinaties een lineaire deelruimte. We spreken van de door $\overline{a}_1, --- , \overline{a}_p$ bepaalde deelruimte of van de door $\overline{a}_1, ---- , \overline{a}_p$ <u>opgespannen deelruimte</u>.

<u>Stelling 2.12</u> De in R_n door $\overline{a}_1, --- , \overline{a}_p$ opgespannen deelruimte heeft een lineair onafhankelijke basis, bestaande uit een aantal van deze vectoren. De dimensie van de deelruimte (die dus een vectorruimte is) is het maximale aantal lineaire onafhankelijke vectoren in het stelsel $\overline{a}_1, --- , \overline{a}_p$.

<u>Stelling 2.13</u> Als in R_n $\overline{a}_k$ een willekeurige vector uit gegeven vectoren $\overline{a}_1$ t/m $\overline{a}_p$ is, dan is de deelruimte bepaald door $\overline{a}_1, --- , \overline{a}_k, --- , \overline{a}_p$ identiek met de deelruimte bepaald door $\overline{a}_1, ---- , \lambda\overline{a}_k, -- \overline{a}_p$, als $\lambda \neq 0$.

<u>Stelling 2.14</u> Als in R_n $\overline{a}_k$ en $\overline{a}_l$ twee willekeurige vectoren uit de gegeven vectoren $\overline{a}_1$ t/m $\overline{a}_p$ zijn, dan is de deelruimte bepaald door $\overline{a}_1, --- , \overline{a}_k, --- , \overline{a}_l, --- , \overline{a}_p$ identiek met de deelruimte bepaald door
$\overline{a}_1, --- , \overline{a}_k + \overline{a}_l, --- , \overline{a}_l, --- , \overline{a}_p$ en dus wegens stelling 2.13 met de deelruimte bepaald door
$\overline{a}_1, --- , \overline{a}_k + \lambda\overline{a}_l, ----- , \overline{a}_l, --- , \overline{a}_p$.

§ 3. <u>Lineaire transformaties.</u>

<u>Def.:</u> Een stelsel betrekkingen van de vorm

$$(3.1) \quad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + --- + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + --- + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + --- + a_{mn}x_n \end{cases}$$

heet een <u>homogene lineaire</u> (m,n)-<u>transformatie</u>

verkort geschreven:

$$(3.2) \qquad y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \qquad (i = 1, --- , m)$$

Door (3.1) wordt aan iedere n-vector $\bar{x}$ een m-vector $\bar{y}$ toegevoegd. (3.1) is volkomen bepaald door het schema der coëfficiënten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & --- & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & --- & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zulk een schema van mn getallen, gerangschikt in m rijen, ieder van n getallen, noemt men een <u>(m,n)-matrix</u>. Bovenstaande matrix stellen we voor door de letter A.

We merken hierbij op, dat aan (3.1) ook nog een andere interpretatie gegeven kan worden:
Laat in m-dimensionale vectorruimte R_m de n vectoren

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (a_{11}, a_{21}, --- , a_{m1}), \\ \bar{a}_2 &= (a_{12}, a_{22}, --- , a_{m2}), \\ &\vdots \\ \bar{a}_n &= (a_{1n}, a_{2n}, --- , a_{mn}) \end{aligned}$$

en ook de vector $\bar{y} = (y_1, --- , y_m)$ gegeven zijn en laat $\bar{b}$ een lineaire combinatie van $\bar{a}_1, --- , \bar{a}_n$ zijn, dus

$$(3.3) \qquad \bar{y} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + --- + x_n\bar{a}_n$$

dan is (3.3) uitgeschreven in de kentallen identiek met het stelsel lineaire vergelijkingen (3.1).
Zijn omgekeerd $\bar{a}_1, --- , \bar{a}_n$ gegeven, dan kan men vragen of $\bar{y}$ een lineaire combinatie van $\bar{a}_1, --- \bar{a}_n$ is. Men vraagt dan dus of er getallen $x_1, ---- x_n$ bestaan, zodanig, dat aan (3.1)

voldaan is, m.a.w. of die m vergelijkingen met n onbekenden $x_1,\ldots,x_n$, die in (3.1) opgesomd staan, een oplossing hebben. Als dit stelsel inderdaad voor $x_1,\ldots,x_n$ een oplossing heeft, dan kan men deze oplossing opvatten als een oplossingsvector $\overline{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ in een n-dimensionale ruimte R_n. Op de lineaire vergelijkingen zullen wij later nader ingaan.
Wij hebben gezien, dat de homogene lineaire (m,n)-transformatie (3.1) volkomen bepaald is door de matrix A. Ook omgekeerd geldt:
Stelling 3.1. Hebben twee homogene lineaire (m,n)-transformaties de eigenschap, dat iedere vector $\overline{x}$ bij beide dezelfde beeldvector $\overline{y}$ heeft, dan hebben zij dezelfde matrix (m.a.w. de matrix is door de transformatie bepaald).

Voor het bewijs van deze stelling is het voldoende om de beeldvectoren van de n grondvectoren te beschouwen. Deze laatste geven getransformeerd n vectoren van ieder m kentallen. Deze $m \times n$ kentallen, geplaatst in een schema van m rijen en n kolommen vormen juist de matrix, die bij de transformatie behoort. Omdat de beeldvectoren bepaald zijn, is dit met de matrix eveneens het geval.

De homogene lineaire (m,n)-transformatie, voorgesteld door het stelsel betrekkingen (3.1) kunnen we verkort aanduiden door middel van de vectornotatie:

(3.4) $\overline{y} = A\overline{x}$.

Wegens stelling 3.1 spreken we nu naast de matrix A ook van de transformatie A.
Opmerking. In (3.4) is $\overline{x}$ een n-vector en $\overline{y}$ een m-vector. Van een onderscheid in notatie tussen de vectoren uit ruimten van verschillende dimensie zullen wij afzien zolang, zoals bijv. in (3.4) geen misverstand kan optreden.
Gemakkelijk is in te zien, dat geldt:

(I) $A(\overline{p}+\overline{q}) = A\overline{p} + A\overline{q}$
(II) $A(c\overline{x}) = cA(\overline{x})$

De eigenschappen (I) en (II) karakteriseren een lineaire transformatie volkomen blijkens:
Stelling 3.2. Een transformatie T, die iedere n-vector in een m-vector overvoert en de eigenschappen (I) en (II) heeft (dus steeds $T(\overline{p}+\overline{q})=T(\overline{p})+T(\overline{q})$ en $T(c\overline{x})=cT(\overline{x})$) is een homogene lineaire transformatie.

Voor het bewijs van deze stelling stellen we dat de basisvectoren $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$ overgevoerd worden in $\overline{a}_1=(a_{11},a_{21},\ldots,a_{m1})$, $\overline{a}_2=(a_{12},a_{22},\ldots,a_{m2}),\ldots,\overline{a}_n=(a_{1n},a_{2n},\ldots,a_{mn})$, dan geldt voor een vector $\overline{x}=x_1\overline{e}_1+x_2\overline{e}_2+\ldots+x_n\overline{e}_n$:

$$\overline{y}=T\overline{x}=T(x_1\overline{e}_1+x_2\overline{e}_2+\ldots+x_n\overline{e}_n) = x_1T\overline{e}_1+x_2T\overline{e}_2+\ldots+x_nT\overline{e}_n=$$

$$= x_1\overline{a}_1+x_2\overline{a}_2+\ldots+x_n\overline{a}_n,$$

dus de vergelijking (3.3), welke identiek is met het stelsel lineaire vergelijkingen (3.1), dat per definitie een homogene lineaire transformatie voorstelt.

Een ander eenvoudig te bewijzen gevolg van de eigenschappen (I) en (II) is:

Stelling 3.3. Een homogene lineaire transformatie laat alle betrekkingen van lineaire afhankelijkheid tussen vectoren bestaan.

Opmerking. Deze stelling is niet algemeen geldig als men "afhankelijk" door "onafhankelijk" vervangt, bijv. als $\overline{y}=A\overline{x}$ met $A = \begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ toegepast wordt op de onafhankelijke basis vectoren (1,0) en (0,1), dan geeft deze transformatie de afhankelijke beeldvectoren: (1,2) en (2.4). Later op blz. 20 zullen we zien, dat niet-singuliere matrices steeds onafhankelijke vectoren in onafhankelijke vectoren overvoeren.

Is naast de homogene lineaire (m,n)-transformatie A een andere soortgelijke transformatie B gegeven, dan geldt als

$$\overline{y}_1 = A\overline{x} \text{ en } \overline{y}_2 = B\overline{x} \;:\; \overline{y}_1+\overline{y}_2=A\overline{x}+B\overline{x}.$$

Stellen we $\overline{y}_1+\overline{y}_2=C\overline{x}$, dan geldt in verband met stelling 3.1 dus

$$(3.5) \qquad c_{hk} = a_{hk} + b_{hk} \quad (h=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,n).$$

Definitie. De transformatie C heet de somtransformatie van A en B. Elk element c_{hk} van de matrix C wordt volgens (3.5) berekend door de som te nemen van de overeenkomstige elementen a_{hk} en b_{hk} van de matrices A en B.

Naast het begrip "somtransformatie" definiëren we ook het begrip "producttransformatie".

Beschouw hiertoe de transformatie (3.1) en daarnaast nog een (p,m)-transformatie, die de m-vector $\overline{y}$ in de p-vector $\overline{z}$ overvoert. De (m,n)-transformatie, die $\overline{x}$ in $\overline{y}$ overvoert, geven wij door (3.2)

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad (i=1,\dots,m) \qquad \text{of } \bar{y} = A\bar{x} .$$

De (p,m)-transformatie, die $\bar{y}$ in $\bar{z}$ overvoert, door

$$z_h = \sum_{i=1}^{m} b_{hi}y_i \quad (h=1,\dots,p) \quad \text{of } \bar{z} = B\bar{y} .$$

Dan kunnen wij $\bar{z}$ in $\bar{x}$ uitdrukken door substitutie:

$$z_h = \sum_{i=1}^{m} b_{hi} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} b_{hi}a_{ik}x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{hi}\, a_{ik}\right) x_k \quad (h=1,\dots,p).$$

Stellen we $z_h = \sum_{k=1}^{n} c_{hk}x_k$, of $\bar{z} = C\bar{x}$, dan geldt in verband met stelling 3.1.

(3.6) $$c_{hk} = \sum_{i=1}^{m} b_{hi}\, a_{ik} \; (h=1,\dots,p,\ k=1,\dots,n).$$

Definitie. De transformatie C heet de productransformatie van B en A (eerst A en dan B toepassen).
Elk element c_{hk} van de matrix C wordt volgens (3.6) berekend door ieder element uit de h-de rij van de matrix B te vermenigvuldigen met het overeenkomstige element uit de k-kolom van de matrix A en de verkregen producten op te tellen. Men drukt dit kort uit door te zeggen, dat c_{hk} het inwendig product is van de h-de rij van B en de k-de kolom van A.

§ 4. Matrices

Het begrip "matrix" is gedefinieerd op blz.12. Een matrix met m rijen en n kolommen heet van de orde m bij n of een (m,n)-matrix. Is het aantal rijen gelijk aan het aantal kolommen dan heet de matrix vierkant. De homogene lineaire transformaties beschouwd in § 3 geven aanleiding tot de volgende definities:

Definitie. Twee matrices A en B zijn gelijk als ze van dezelfde orden zijn en corresponderende elementen gelijk. A=B geldt dan en slechts dan als $a_{ij}=b_{ij}$.

Definitie. Een matrix A wordt met een getal α vermenigvuldigd door ieder element van die matrix met het getal α te vermenigvuldigen (uit (II) blz. 13). Men schrijve hiervoor αA of $A\alpha$. Is $\alpha A=A\alpha=C$, dan $c_{ij}=\alpha a_{ij}$. Is $c=0$, dan ontstaat een matrix, waarvan alle elementen gelijk zijn aan nul. Deze matrix heet de <u>nulmatrix</u> en wordt aangeduid met O .

<u>Definitie</u>. De <u>sommatrix</u> van twee matrices A en B wordt verkregen door de overeenkomstige elementen van A en B op te tellen. Men schrijve C=A+B. Dit geldt dan en slechts dan als $c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$ (zie (3.5)).

$$A-\alpha B \overset{\text{def}}{=} A+(-\alpha)B.$$

Voorbeeld. $2\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-2&0\\0&-1\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}-2&7\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&0\\0&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10&-35\\-10&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-31\\-4&0\end{pmatrix}.$

Uit deze definities volgen de volgende eigenschappen :

(4.1) A+B=B+A (optelling is commutatief)

(4.2) (A+B)+C=A+(B+C) (optelling is associatief)

(4.3) A+O =A

Er is een tegengestelde matrix (-)A of -A, met elementen tegengesteld aan de overeenkomstige in A, waarvoor (4.4)

(4.4) A+(-1)A=O

(4.5) $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$

(4.6) $1.A=A$; $0.A=O$; $\alpha O=O$

(4.7) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ (1e distributieve eigenschap)

(4.8) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ (2e distributieve eigenschap)

Dat de vergelijkingen (1.1) t/m (1.8) bijzondere gevallen zijn van de vergelijkingen (4.1) t/m (4.8) ziet men in door matrices met 1 rij te beschouwen, die te identificeren zijn met vectoren.

Opmerking. Uit (4.1) t/m (4.8) volgt, dat de verzameling van alle (m,n)-matrices (voor vaste m en n) een lineaire ruimte vormen. Ze vormen zelfs een vectorruimte.

<u>Definitie</u>. De <u>productmatrix</u> C van een (p,m)-matrix B met een (m,n) - matrix A is de matrix met elementen c_{hk}($h=1,\dots,p$, $k=1,\dots,n$) uit de elementen van B en A verkregen met behulp van (3.6).
Men schrijve C=BA.

Voorbeeld. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & -8 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} (4x2)-(2x3)-(1x1)+(2x3), & (4x3)+(2x0)-(1x5)+(2x1) \\ (3x2)+(7x3)+(1x1)-(8x3), & (3x3)-(7x0)+(1x5)-(8x1) \\ (2x2)-(4x3)-(3x1)+(1x3), & (2x3)+(4x0)-(3x5)+(1x1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 6 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$$

Opmerking. Het matrixproduct BA is alleen dan gedefinieerd als het aantal rijen van A gelijk is aan het aantal kolommen van B.

Is n=p, dan heeft men dus een (m,n)-matrix en een (n,m)-matrix, dan is dus zowel AB als BA gedefinieerd, maar deze matrices zijn in het algemeen niet aan elkaar gelijk, ook niet als m=n.

Voorbeeld: niet commutativiteit: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} (1x3)-(2x2), & (1x4)-(2x1) \\ (2x3)-(5x2), & (2x4)-(5x1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3x1)+(4x2), & (3x2)+(4x5) \\ -(2x1)-(1x2), & -(2x2)-(1x5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 26 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}$$

dus $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

wel commutativiteit:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Opmerking. Het is duidelijk, dat voor iedere matrix A geldt OA=AO=O. Het product van twee matrices kan O zijn, zonder dat een van beide O is. Dus behalve t.o.v. de commutativiteit is er ook in dit opzicht afwijking met de gewone getallenvermenigvuldiging.

Voorbeeld. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 0$.

Geldt de commutatieve wet voor matrices dus in het algemeen niet, de associatieve wet is steeds van kracht. Dit ziet men het gemakkelijkst in met behulp van de homogene lineaire transformaties.

Laat A een (m,n)-matrix, B een (p,m)-matrix en C een (q,p)-matrix zijn. Laat verder $\overline{x}$ een willekeurige n-vector zijn. Zij $\overline{y}=A\overline{x}$, $\overline{z}=B\overline{y}$, $\overline{u}=C\overline{z}$. Is CB=D, dan is $\overline{u}=CB\overline{y}=D\overline{y}$, dus $\overline{u}=DA\overline{x}$.
Is verder BA=F, dan is $\overline{z}=B\overline{y}=BA\overline{x}=F\overline{x}$, dus $\overline{u}=C\overline{z}=CF\overline{x}$. Dus $DA\overline{x}=CF\overline{x}$ voor iedere $\overline{x}$. Volgens stelling 3.1 is dan

$$DA = CF \text{ of } (CB)A = C(BA).$$

Dit is de associatieve wet, dus

(4.9) $\quad (CB)A = C(BA).$

Zonder gevaar voor dubbelzinnigheid kunnen we dus schrijven CBA.
Ook is nu het product van meer factoren ondubbelzinnig bepaald. Bijv.: ABCDEF=A(BC)(DE)F=(AB)(CD)(EF) enz.

Verder gelden nog de volgende eigenschappen:

(4.10) $\quad (\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$
(4.11) $\quad A(B+C) = AB+AC$
(4.12) $\quad (B+C)A = BA+CA$

Bijzondere matrices:
a) Kolom en rijmatrices. Een matrix met n elementen in 1 kolom, dus een (n,1)-matrix, heet een <u>kolommatrix</u>. Notatie $\{x\} \overset{\text{def}}{=} \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(3.1) of (3.4) kunnen we met behulp van het begrip kolommatrix nu ook geheel in matrices uitdrukken, nl. $\{y\} = A\{x\}$.
Het rechterlid stelt hier een normale matrixvermenigvuldiging voor, gedefinieerd op blz. 16.
Een matrix met een enkele rij heet een <u>rijmatrix</u>, dus een (1,n)-matrix.
Notatie: $\lfloor y \rfloor \overset{\text{def}}{=} \lfloor y_1, y_2, \ldots, y_n \rfloor \overset{\text{def}}{=} (y_1 \; y_2 \ldots y_n)$.

Voorbeelden van producten van rij- en kolom matrices:

1) $\lfloor 5 \;\; 2 \;\; -3 \rfloor \{2 \;\; -1 \;\; 4\} = (5 \;\; 2 \;\; -3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = (-4)$, te identificeren met het getal -4.

2) $\{2 \;\; -1 \;\; 4\} \lfloor 5 \;\; 2 \;\; -3 \rfloor = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} (5 \;\; 2 \;\; -3) = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -6 \\ -5 & -2 & 3 \\ 20 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

3) $\{5 \;\; 2\} \lfloor 2 \;\; -1 \;\; 4 \rfloor = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} (2 \;\; -1 \;\; 4) = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 20 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

Algemeen geldt voor producten van speciale matrices:

matrix x kolom = kolom

rij x matrix = rij

rij x kolom = één element (wordt in dit verband wel scalar genoemd)

kolom x rij = matrix met evenredige rijen en evenredige kolommen.

b) De <u>getransponeerde</u> A^T van een matrix A wordt gedefinieerd als de matrix, waarvan de rijen identiek zijn met de kolommen van A, dus $a_{ij}=a^T_{ji}$. In het bijzonder is de getransponeerde van een rij matrix een kolom matrix en omgekeerd.

Voorbeeld. Als $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, dan $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Gemakkelijk is in te zien, dat geldt

<u>Stelling 4.1</u>: $(AB)^T = B^T A^T$, als het product AB zin heeft.

c) Een vierkante matrix, waarvan alle elementen buiten de hoofddiagonaal 0 zijn, heet een <u>diagonaal matrix</u>

Voorbeeld. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) De <u>eenheidsmatrix</u> I is een diagonaal matrix, waarvan alle elementen in de hoofddiagonaal 1 zijn:

Voorbeeld. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

De naam eenheidsmatrix wordt gerechtvaardigd door de eigenschap:

(4.12) $\quad IA = AI = A.$

e) Een vierkante matrix A heet <u>symmetrisch</u> als $a_{ij}=a_{ji}$ (zodat $A=A^T$), <u>scheefsymmetrisch</u> of <u>alternerend</u> als $a_{ij}=-a_{ji}$ (voor alle i en j dus zeker geldt $a_{ii}=0$).

Voorbeeld. Symmetrisch: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; alternerend: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Een matrix A heet <u>scheef</u> als $a_{ij}=-a_{ji}$ voor $i \neq j$, terwijl de elementen van het type a_{ii} niet alle 0 zijn.

Voorbeeld. Scheef: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 8 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

f) Geldt voor twee vierkante matrices A en B, dat $AB=BA=I$, dan heten zij (evenals de bijbehorende transformaties) elkanders <u>inverse</u>.
Een matrix heeft hoogstens één inverse.

<u>Stelling 4.2.</u> Is namelijk zowel B als C een inverse van A, dan is $BAC=IC=C$, maar ook $BAC=BI=B$, dus $B=C$.

De inverse van A wordt, zo zij bestaat, voorgesteld door A^{-1}.
Dus: Heeft de matrix A een inverse A^{-1}, dan is

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Opmerking. Later zullen we zien, dat uit $A\,A^{-1}=I$ altijd $A^{-1}A=I$ volgt. Bij de definitie van de inverse kunnen we dus met een van de vergelijkingen $AB=I$ of $BA=I$ volstaan.

<u>Definitie</u>. Een vierkante matrix A, die geen inverse heeft, wordt <u>singulier</u> genoemd. Is er wel een inverse, dan heet A: niet-singulier.

<u>Stelling 4.3.</u> Is de matrix A niet-singulier, dan voert de transformatie A onafhankelijke vectoren in onafhankelijke vectoren over.

Als de getransformeerde van onafhankelijke vectoren namelijk afhankelijk zouden zijn, dan zouden deze door de transformatie A^{-1} volgens stelling 3.3 weer in afhankelijke vectoren overgevoerd worden, doch deze zijn weer de vectoren waar we van uit zijn gegaan, die onafhankelijk ondersteld waren.

<u>Stelling 4.4.</u> $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, (A en B vierkante matrices van dezelfde orde).
Dit volgt direct uit $B^{-1}A^{-1}AB=B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB=B^{-1}B=I$ en stelling 4.2.

§ 5. Stelsels lineaire vergelijkingen.

Beschouw in een m-dimensionale vectorruimte R_m de n+1 vectoren:

$$(5.1)\quad \begin{cases} \bar{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) \\ \bar{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) \\ \vdots \\ \bar{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}), \end{cases}$$

en

$$\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m).$$

Wij onderzoeken nu of er n getallen $x_1, x_2, \dots, x_n$ bestaan, zodanig, dat

$$(5.2)\qquad \bar{b} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \dots + x_n\bar{a}_n,$$

of uitgeschreven in de kentallen:

$$(5.3)\quad \begin{cases} b_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ b_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ b_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n\ , \end{cases}$$

verkorte notatie:

$$(5.4)\qquad b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i=1,\dots,m).$$

(5.3) of (5.4) is een stelsel van m lineaire vergelijkingen met n onbekenden $x_1, x_2, \dots, x_n$. De getallen $b_i (i=1,\dots,m)$ heten de bekende termen. De getallen a_{ij} $(i=1,\dots,m\ ;\ j=1,\dots,n)$ (eveneens bekend) heten de coefficienten der onbekenden . De (m,n)-matrix A van de coefficienten a_{ij}

$$(5.5)\quad A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heet de (coefficienten)-matrix of kleine matrix, behorende bij het stelsel lineaire vergelijkingen (5.3); a_{ij} is het getal of het element uit de i^e rij en de j^e kolom van A. Elke rij bestaat uit n getallen. Aan elke rij kunnen wij dus een vector toevoegen uit een n-dimensionale vectorruimte R_n. De vector $(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$ heet de i^e rijvector. De kolommen zijn voor te stellen door de n vectoren $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$, waar wij in het begin van deze paragraaf vanuit zijn gegaan. De vector $(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj})$ heet de j^e kolomvector.

Zijn in (5.3) de bekende termen alle 0, dan noemt men het stelsel lineaire vergelijkingen homogeen; zijn de bekende termen niet alle 0, dan heet het stelsel niet-homogeen of (inhomogeen).

Wij zullen nu de voorwaarden onderzoeken waaronder het stelsel (5.3) oplosbaar is naar $x_1,x_2,\ldots,x_n$ en daarna een manier aangeven om de oplossing(en) te bepalen. Wij merken direct op:

Stelling 5.1. Het lineair afhankelijk zijn van $\bar{b}$ van de kolomvectoren $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ (vergel.(5.2)) is een nodige en voldoende voorwaarde voor de oplosbaarheid van het stelsel (5.3).

Voorbeeld 1. Gegeven het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}.$$

Met behulp van de kolomvectoren $\bar{a}_1=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $\bar{a}_2=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$, $\bar{a}_3=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ en $\bar{b}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ is het stelsel te schrijven in de vorm:

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 = \bar{b}.$$

De vectoren $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ en $\bar{b}$ zijn vectoren in R_2. Geven wij aan de onbekende x_1 een willekeurige waarde, dan kunnen wij, daar $\bar{a}_2$ en $\bar{a}_3$ een lineair onafhankelijke basis in R_2 vormen, de vector $\bar{b}-x_1\bar{a}_1$ op één en slechts één manier schrijven als een lineaire combinatie van $\bar{a}_2$ en $\bar{a}_3$. Bij elke waarde van x_1 vinden wij dus één stel waarden voor x_2 en x_3 zó, dat $\bar{b}-x_1\bar{a}_1=x_2\bar{a}_2+x_3\bar{a}_3$, m.a.w. het gegeven stel vergelijkingen heeft oneindig veel oplossingen. Waren de vectoren $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ en $\bar{b}$ alle vier lineair afhankelijk van elkander geweest, dan zouden wij in dit geval in het algemeen twee der onbekenden x_1,x_2 en x_3 willekeurig hebben kunnen kiezen.

Voorbeeld 2. Gegeven het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2x_1 = b_1 \\ x_1+3x_2=b_2 \\ 3x_1+2x_2=b_3 \end{cases}$$

Met behulp van de kolomvectoren $\bar{a}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\bar{a}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$ en $\bar{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ is het stelsel te schrijven in de vorm

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 = \bar{b}.$$

De vectoren $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$ vormen een lineair onafhankelijk stelsel in R_3. Zij spannen dus een lineaire deelruimte D_2 van R_3 op. Ligt $\bar{b}$ niet in D_2, dan is $\bar{b}$ niet lineair afhankelijk van $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$. Het stelsel vergelijkingen heeft dan geen oplossing en wordt onoplosbaar of strijdig genoemd.

Ligt $\bar{b}$ wel in D_2, dan is $\bar{b}$ op één en slechts één manier te schrijven als een lineaire combinatie van $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$, die een lineair onafhankelijke basis van D_2 vormen. Het stelsel vergelijkingen heeft dan één oplossing. Waren de drie vectoren $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ en $\bar{b}$ afhankelijk van elkander geweest, dan zouden wij in dat geval in het algemeen één der onbekenden x_1 en x_2 willekeurig hebben kunnen kiezen, zodat dan het stelsel oneindig veel oplossingen gehad zou hebben.

Beschouwen we weer het algemene stelsel vergelijkingen (5.3) of in vectornotatie (5.2) en onderstellen wij, dat het maximale aantal lineair onafhankelijke vectoren onder de n vectoren

(I) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$

gelijk is aan k, dan spannen deze vectoren, die vectoren zijn van R_m, volgens stelling 2.12 een lineaire deelruimte D_k van de dimensie k in R_m op.

Er zijn nu twee mogelijkheden:

1°. $\bar{b}$ ligt in D_k, dus $\bar{b}$ is lineair afhankelijk van de vectoren (I). In dit geval is het stelsel (5.3) oplosbaar. De deelruimte, opgespannen door de n+1 vectoren

(II) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, \bar{b}$

is dan identiek met de deelruimte D_k opgespannen door de n vectoren (I). Het maximale aantal vectoren van (II), dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt is dan eveneens gelijk aan k.

2^o. $\bar{b}$ ligt niet in D_k, dus $\bar{b}$ is lineair onafhankelijk van de vectoren (I). Het stelsel (5.3) is dan onoplosbaar. Het maximale aantal vectoren van (II) dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt, is nu gelijk aan k+1. Uit het bovenstaande volgt:

Stelling 5.2. Het stelsel (5.3) of in vectornotatie (5.2) is dan en slechts dan oplosbaar als het maximale aantal vectoren, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt van (I) en (II) hetzelfde is.

Met behulp van de volgende definities kunnen wij deze nodige en voldoende voorwaarde voor het oplosbaar zijn van het stelsel een eenvoudiger uitdrukking geven:

Definitie. Rang van een matrix. Hieronder verstaan we het maximale aantal kolomvectoren van de matrix, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt. De rang van een matrix is dus volgens stelling 2.12 gelijk aan de dimensie van de deelruimte, opgespannen door de kolomvectoren.

Definitie. Aangevulde matrix (of grote matrix), behorende bij het stelsel (5.3). Dit is de (m,n+1)-matrix B uit A verkregen door randing met de vector $\bar{b}$, dus

$$(5.6) \qquad B \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix} .$$

Uit stelling 5.2 volgt dan:

Stelling 5.3. Het stelsel lineaire vergelijkingen (5.3) is oplosbaar als de rang van de grote matrix B gelijk is aan de rang van de kleine matrix A en onoplosbaar als de rang van B één hoger is dan de rang van A.

Opmerking. Uit stelling 5.3 volgt direct, dat het stelsel (5.3) oplosbaar is als $\bar{b}$ nulvector is. Een homogeen stelsel is dus steeds oplosbaar. Dit resultaat is overigens triviaal, aangezien de nulvector steeds oplossing is van een homogeen stelsel. Men spreekt van de nuloplossing.

Wij zullen nu eerst een algemene methode geven voor het bepalen van de rang van een matrix:

Beschouw hiertoe weer de matrix A in de algemene gedaante, gegeven door (5.5):

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Als de rang van deze matrix gelijk is aan k, dan is k per definitie het maximale aantal kolomvectoren, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt.

Stel nu, dat r het maximale aantal rijvectoren van de matrix A is, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt.

Nu geldt <u>r=k</u>.

Om dit te bewijzen merken we eerst op, dat de m rijvectoren, die we voor de eenvoudigheid even voorstellen door $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_m$, een deelruimte in een n-dimensionale vectorruimte R_n bepalen, waarvan de dimensie volgens stelling 2.12 gelijk is aan het maximale aantal lineair onafhankelijke vectoren in $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_m$, dus gelijk aan r.

Op de matrix A kunnen we nu zekere bewerkingen toepassen, zonder dat het getal r verandert:

<u>Stelling 5.4.</u> De volgende bewerkingen mogen op een matrix toegepast worden, zonder dat het getal r (het maximale aantal rijvectoren van de matrix, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt) verandert:

1^{o}. Het vermenigvuldigen van een rij met een getal $\lambda \neq 0$, d.w.z. één der rijvectoren $\overline{v}_i$ wordt vervangen door $\lambda \overline{v}_i (\neq \overline{0}$, als $\overline{v}_i \neq \overline{0})$;

2^{o}. Het optellen van een met een getal vermenigvuldigde rij bij een andere rij, d.w.z. $\overline{v}_i$ wordt vervangen door $\overline{v}_i + \lambda \overline{v}_j$;

3^{o}. Het weglaten van een rij, die geheel uit nullen bestaat, d.w.z. als $\overline{v}_i = \overline{0}$, dan kan $\overline{v}_i$ weggelaten worden;

4^{o}. Het verwisselen van twee rijen.

Bewijs: 1^{o} en 2^{o} volgen direct uit stelling 2.13 resp. 2.14.

3^{o}: als $\overline{v}_i = \overline{0}$ verandert de door $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_m$ bepaalde deelruimte niet, als men $\overline{v}_i$ weglaat.

4^{o}: onmiddellijk duidelijk.

<u>Voorbeeld 3</u>. Bepaal r van de matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

Oplossing: Twee maal eerste rij aftrekken van de derde rij geeft:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. In deze nieuwe matrix drie maal tweede rij optellen bij de derde rij geeft: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De oorspronkelijke matrix heeft dus dezelfde r als $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, waarvan de twee rijvectoren lineair onafhankelijk zijn, dus r=2.

<u>Stelling 5.5</u>. Het getal k (het maximale aantal kolomvectoren van de matrix dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt) verandert niet, als we op de rijen een van de bewerkingen uit stelling 5.4 toepassen.

Bewijs: 1°. Gemakshalve (doch zonder de algemeenheid te schaden) onderstellen we, dat we de elementen van de eerste rij met $\lambda(\neq 0)$ vermenigvuldigen. De kolomvectoren (5.1):

$$\begin{cases} \bar{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) \\ \vdots \\ \bar{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) \end{cases}$$

gaan dan over in geheel andere vectoren:

$$\begin{cases} \bar{b}_1 = (\lambda a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) \\ \vdots \\ \bar{b}_n = (\lambda a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) \end{cases}$$

Het is echter wel zo, dat elke betrekking $\mu_1\bar{a}_1+\ldots+\mu_n\bar{a}_n=\bar{0}$ tot gevolg heeft, dat ook $\mu_1\bar{b}_1+\ldots+\mu_n\bar{b}_n=\bar{0}$, en omgekeerd (vanwege $\lambda\neq 0$). Elke lineaire afhankelijkheid, die eventueel bestaat tussen de vectoren $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$ weerspiegelt zich dus bij de vectoren $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n$ en omgekeerd. Het maximale aantal lineair onafhankelijke vectoren in $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$ is dus gelijk aan het maximale aantal in $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n$.

2°. Stel, dat wij bijv. de tweede rij van de matrix na vermenigvuldiging met een getal λ optellen bij de eerste rij. De kolomvectoren $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$ gaan dan over in geheel andere vectoren:

$$\begin{cases} \bar{c}_1 = (a_{11}+\lambda a_{21}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) \\ \vdots \\ \bar{c}_n = (a_{1n}+\lambda a_{2n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) \end{cases},$$

echter zo, dat elke betrekking $\mu_1\bar{a}_1+\ldots+\mu_n\bar{a}_n=\bar{0}$ tussen de oorspronkelijke kolomvectoren tot gevolg heeft de betrekking $\mu_1\bar{c}_1+\ldots+\mu_n\bar{c}_n=\bar{0}$ tussen de nieuwe kolomvectoren en omgekeerd.

3^o en 4^o. Gemakkelijk is in te zien, dat k niet verandert als we een rij weglaten, die uitsluitend uit nullen bestaat, en dat k eveneens niet verandert, als we twee rijen verwisselen.

Overeenkomstig stelling 5.4 en 5.5 geldt natuurlijk ook:

<u>Stelling 5.6.</u> Het getal k verandert niet als we op de kolommen van de matrix soortgelijke bewerkingen toepassen als op de rijen worden toegepast in stelling 5.4.

en

<u>Stelling 5.7.</u> Het getal r verandert niet als we op de kolommen de bewerkingen uit stelling 5.6 toepassen.

Samenvattende komen we dus tot de volgende stelling:

<u>Stelling 5.8.</u> De volgende bewerkingen mogen op een matrix toegepast worden, zonder dat de getallen r en k veranderen:

1^o. Het vermenigvuldigen van een rij of kolom met een getal $\lambda\neq0$.

2^o. Het optellen van een rij of kolom, vermenigvuldigd met een getal λ bij een andere rij of kolom.

3^o. Het weglaten van een rij of kolom, die geheel uit nullen bestaat.

4^o. Het verwisselen van twee rijen of twee kolommen.

Nu bewijzen we, dat voor elke matrix A (zie (5.5)) k=r:

Met behulp van stelling 5.8 kunnen wij zonder dat k of r verandert, matrix A als volgt vereenvoudigen:

1^o. Elke kolom en elke rij, die uitsluitend uit nullen bestaat wordt weggelaten.

2^o. Zo nodig worden de rijen zo verwisseld, dat a_{11} (aanduiding voor het element in de linkerbovenhoek, eventueel na verwisseling der rijen op deze plaats terecht gekomen) ongelijk is aan 0.

3^o. De elementen van de eerste rij worden door a_{11} gedeeld.

4^o. De elementen van de tweede rij worden verminderd met a_{21} maal de overeenkomstige elementen van de eerste rij; dan is de nieuwe $a_{21}=0$. Op soortgelijke wijze worden de nieuwe $a_{31},a_{41},\ldots,a_{m1}$ gelijk aan nul gemaakt. De eerste kolom is nu $(1,0,0,\ldots,0)$.

Men noemt dit proces het <u>schoonvegen</u> van de eerste kolom van een matrix met behulp van de eerste rij.

5^o. Indien er nu een rij is ontstaan, die uitsluitend uit nullen bestaat, dan wordt deze weggelaten.

Nadat de eerste kolom is schoongeveegd, gaan we de tweede kolom schoonvegen en wel als volgt:
6^o. Zo nodig verwisselen we de tweede rij met een volgende rij, zodat a_{22} (d.i. aanduiding voor het element in de 2^e rij en de 2^e kolom eventueel na verwisseling op deze plaats gekomen) ongelijk is aan 0. (Zijn de tweede en volgende kentallen van de tweede kolomvector alle 0, dan laten we deze kolomvector eenvoudig weg, omdat deze dan een veelvoud is van de 1^e kolomvector; we gaan dan verder met de derde, eventueel vierde kolomvector, enz.).
Daarna delen we de elementen van de tweede rij door a_{22}, waarna de nieuwe $a_{22}=1$ is. Tenslotte verminderen we de elementen van de eerste de derde t/m de laatste rij resp. met a_{12}, a_{32}, enz. maal de overeenkomstige elementen van de tweede rij.
Door deze bewerkingen is de tweede kolom nu $(0,1,0,\ldots,0)$.
7^o. Eventuele nieuwe nulrijen worden weer weggelaten.
Schoonvegen van de derde, vierde,... kolom geeft tenslotte een matrix van de gedaante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{1,q+1} & \ldots b_{1p} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{2,q+1} & \ldots b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{q,q+1} & \ldots b_{qp} \end{pmatrix}$$

of een van getransponeerde gedaante.
In ieder geval komt men op een eenheidsmatrix, bijv. van de q^e orde, links of boven, als deel van de resulterende matrix.
Het maximale aantal rijvectoren en ook het maximale aantal kolomvectoren van deze matrix, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt, is dan gelijk aan q. Doch de bewerkingen, die geleid hebben tot deze matrix hebben de getallen k en r van de oorspronkelijke matrix, onveranderd gelaten, zodat $\begin{matrix} q=k \\ q=r \end{matrix}$, en dus $r=k$.
Dus:
<u>Stelling 5.9.</u> De rang van een matrix is niet alleen gelijk aan het maximale aantal kolomvectoren, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt, maar ook gelijk aan het maximale aantal rijvectoren, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt.

De bewerkingen in het bewijs van deze stelling doen een middel aan de hand om op systematische wijze de rang van een matrix te bepalen.
Opmerking. In het voorgaande is dit gebeurd door het schoonvegen van kolommen; men kan echter natuurlijk ook de rang bepalen door de rijen schoon te vegen, zoals in het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 4. Bepaal de rang r van de matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Oplossing: 1°. Schoonvegen van de eerste rij m.b.v. tweede kolom geeft de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} .$$

2°. Schoonvegen van de tweede rij m.b.v. eerste kolom geeft de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -4 & 4 \\ -3 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} .$$

3°. Delen van derde en vierde kolom door 4 geeft de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

4°. Schoonvegen van de derde rij m.b.v. derde kolom geeft de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

5°. Weglaten van de vierde kolom geeft de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

De laatste matrix heeft drie rijvectoren (en ook drie kolomvectoren) die een lineair onafhankelijk stelsel vormen. De rang r van de matrix is derhalve 3.

Opmerking. Onder $A \sim B$, A en B matrices, zullen wij in het vervolg verstaan, dat de rang van de matrix A gelijk is aan de rang van de matrix B.

Het oplossen van een niet-homogeen stelsel lineaire vergelijkingen.

Twee stelsels vergelijkingen zijn gelijkwaardig als beide stelsels dezelfde oplossing bezitten, d.w.z. dat een oplossing van het ene stelsel tevens oplossing is van het andere stelsel en omgekeerd. Gemakkelijk valt in te zien, dat een stelsel lineaire vergelijkingen overgaat in een ander gelijkwaardig stelsel lineaire vergelijkingen, als men op de vergelijkingen van het eerste stelsel bewerkingen toepast overeenkomstig die genoemd in stelling 5.4, daar toegepast op de rijen van een matrix, dus door de volgende bewerkingen:
1^o. het vervangen van een der vergelijkingen door een vergelijking, die ontstaat door alle termen met een getal $\lambda \neq 0$ te vermenigvuldigen;
2^o. het vervangen van een vergelijking door een vergelijking, die ontstaat door bij elke term van die vergelijking λ maal de overeenkomstige term van een andere vergelijking op te tellen;
3^o. het weglaten van een vergelijking waarvan alle coefficienten en de bekende term gelijk aan nul zijn;
4^o. het verwisselen van twee vergelijkingen.

Als we dus van een stelsel lineaire vergelijkingen de rangen van de bijbehorende kleine en grote matrix bepalen door van de grote matrix kolommen schoon te vegen met rijen d.m.v. de bewerkingen in stelling 5.4, dan herleiden we de matrices tot andere, die behoren bij een stelsel lineaire vergelijkingen, dat gelijkwaardig is met het oorspronkelijke. Zodoende kunnen we nadat de matrices voldoende vereenvoudigd zijn:
1^o. Met behulp van stelling 5.3 constateren of het stelsel strijdig is of niet.
2^o. Met behulp van het meer eenvoudige gelijkwaardige stelsel vergelijkingen, de eventuele oplossing(en) bepalen.
Stellen we, dat r'=rang van de grote matrix en r=rang van de kleine matrix dan geldt dus:
als $r'=r$, dan oplossing(en);
$r'=r+1$, geen oplossing.

Hoewel het uit de behandelde theorie direct volgt, zullen wij hier nog even de formulering en het bewijs geven van de stelling waar het hier om gaat, in de algemene gedaante:

<u>Stelling 5.10.</u> Het stelsel lineaire vergelijkingen (5.3) heeft dan en slechts dan minstens één oplossing als $r'=r$.

Bewijs: 1°. Laat (5.3) minstens één oplossing hebben en laat $x_1=\lambda_1, x_2=\lambda_2, \dots, x_n=\lambda_n$ zo'n oplossing zijn, dan geldt dus $\bar{b}=\lambda_1\bar{a}_1+\dots+\lambda_n\bar{a}_n$. De vector $\bar{b}$ ligt dus in de deelruimte bepaald door $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n$, d.w.z.: de deelruimte, bepaald door $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n,\bar{b}$ is identiek met de deelruimte bepaald door $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n$. Voor de dimensies r' en r van deze deelruimten geldt dus $r'=r$.

2°. Laat nu omgekeerd $r'=r$. Onder de kolomvectoren van de bijbehorende matrix A zijn maximaal r lineaire onafhankelijke vectoren aanwezig en $\bar{b}$ is een lineaire combinatie van deze r vectoren, aangezien $r=r'$. Als bijv. $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_r$ r lineair onafhankelijke kolomvectoren in A zijn, dan is dus:

$$\bar{b}=\lambda_1\bar{a}_1+\dots+\lambda_r\bar{a}_r=\lambda\bar{a}_1+\dots+\lambda_r\bar{a}_r+0.\bar{a}_{r+1}+\dots+0.\bar{a}_n,$$

d.w.z. $x_1=\lambda_1,\dots,x_r=\lambda_r, x_{r+1}=0,\dots,x_n=0$ is een oplossing van (5.3).

<u>Voorbeeld 5.</u> Gevraagd voor verschillende waarden van a het volgende stelsel vergelijkingen op te lossen:

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=1 \\ x_1+(a-1)x_2+2x_3+x_4=a \\ 2x_1-2x_2+(a+3)x_3+2x_4=3a-1 \\ -3x_1+3x_2-6x_3+(a-4)x_4=2a-5 \end{cases}.$$

Oplossing: De kleine en de grote matrix zijn:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & : & 1 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 & : & a \\ 2 & -2 & a+3 & 2 & : & 3a-1 \\ -3 & 3 & -6 & a-4 & : & 2a-5 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & : & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 & : & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & : & 3a-3 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & : & 2a-2 \end{pmatrix}$$

(schoonvegen van de eerste kolom met de eerste rij).

Stel $a\neq0$ en $a\neq1$. Na deling van de tweede rij door a en de vierde rij door $a-1$ ontstaat:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & {}^{a-1}/_{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & -{}^{6a+1}/_{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & {}^{a-1}/_{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{pmatrix}.$$

De tweede kolom is met de tweede rij, de derde kolom met de derde rij en de vierde kolom met de vierde rij schoongeveegd. Uit de laatste matrix blijkt, dat $r=r'=4$, zodat volgens stelling 5.3 het stelsel voor $a\neq 0$, $a\neq 1$, oplosbaar is, n.l. $x_1=-{}^{6a+1}/a$, $x_2={}^{a-1}/a$, $x_3=3$ en $x_4=2$.
Voor a=0 en a=1 wordt de tweede matrix resp.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & : & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & : & -2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

Voor a=0 is $r=3$ en $r'=4$, zoals eenvoudig is te verifiëren. Het stelsel heeft dan dus geen oplossing.
Voor a=1 is $r=r'=2$. Het stelsel is dan oplosbaar. Er zijn oneindig veel oplossingen, n.l. de oplossingen van het gelijkwaardige stelsel:

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=1 \\ \quad x_2 \qquad\quad =0 \end{cases} .$$

Dus $x_2=0$ en als we stellen $x_3=\lambda$ en $x_4=\mu$ dan is $x_1=1-2\lambda-\mu$.
Beschouwen we de getallen x_1, x_2, x_3 en x_4 als de kentallen van een vector in R_4, dan is een vectorvoorstelling van de oplossing:

$$\overline{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4) = (1-2\lambda-\mu, 0, \lambda, \mu)$$

of

$$\overline{x}= (x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,0,0,0)+\lambda(-2,0,1,0)+\mu(-1,0,0,1).$$

Worden deze vectoren (de zgn. oplossingsvectoren) opgevat als plaatsvectoren vanuit een vast punt O in R_4, dan beschrijven de uiteinden dus een R_2 in R_4, niet door O.
Opmerking. Onder de oplossingsvectoren van een niet-homogeen stelsel komt niet de nulvector voor, zodat deze vectoren in ieder geval dus geen lineaire deelruimte vormen.

Het oplossen van homogeen stelsel lineaire vergelijkingen.

We beschouwen een stelsel van m homogeen lineaire vergelijkingen met n onbekenden:

$$(5.7) \quad \begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} ,$$

ook wel geheten het bij het niet-homogene stelsel (met bekende termen niet alle 0) behorende homogene of <u>gereduceerde</u> stelsel.
Opmerking. We zien direct dat 1^o. als $\overline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ een oplossing is, dan is $\lambda\overline{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)$ ook een oplossing en 2^o. als $\overline{x}$ e $\overline{x}'=(x_1',x_2',\ldots,x_n')$ oplossingen zijn, dan is $\overline{x}+\overline{x}'=(x_1+x_1',x_2+x_2',\ldots,x_n+x$ ook een oplossing, zodat alle oplossingsvectoren van een homogeen stelsel tezamen een lineaire deelruimte van R_n vormen.
Voor het homogene stelsel geldt uiteraard $r'=r$. Dus (5.7) heeft altijd een oplossing, al was het alleen maar de nuloplossing.
Onderstel, dat de rang van de bijbehorende matrix A (zie (5.5)) gelijk is aan r.
Analoog aan (5.2) geldt, als we de kolomvectoren van A voorstellen door $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_n$ (zie (5.1)):

(5.8) $\quad x_1\overline{a}_1+x_2\overline{a}_2+\ldots+x_n\overline{a}_n=\overline{0}$.

We onderscheiden nu twee gevallen:

1^o. $r=n$. De kolomvectoren vormen een lineair onafhankelijk stelsel, zodat aan (5.8) of (5.7) alleen de nuloplossing $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ voldoet;

2^o. $r<n$. De kolomvectoren vormen een lineair afhankelijk stelsel, zodat aan (5.8) ook voldaan wordt voor niet elke $x=0$.

Om de dimensie van de lineaire ruimte gevormd door de oplossingsvectoren van (5.7) te bepalen, nemen wij gemakshalve aan, dat de eerste r kolomvectoren $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_r$ (r=rang van A) een lineair onafhankelijke basis vormen van de deelruimte door de vectoren $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n$ opgespannen.
Wij schrijven (5.8) nu in de vorm:

(5.9) $\quad x_1\overline{a}_1+x_2\overline{a}_2+\ldots+x_r\overline{a}_r=-x_{r+1}\overline{a}_{r+1}-\ldots-x_n\overline{a}_n$.

Bij elke keuze van de getallen $x_{r+1},\ldots,x_n$ is de vector in het rechterlid van (5.9) op één en slechts één manier in de lineair onafhankelijke basis uit te drukken, zodat bij elke keuze van $x_{r+1},\ldots,x_n$ de getallen $x_1,x_2,\ldots,x_r$ ondubbelzinnig bepaald zijn.
Stellen we dat $\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_{n-r}$ de n-r oplossingsvectoren zijn als achtereenvolgens:

$$\begin{cases} x_{r+1}=1, & x_{r+2}=x_{r+3}=\ldots=x_n=0 \\ x_{r+2}=1, & x_{r+1}=x_{r+3}=\ldots=x_n=0 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ x_n\ \ =1, & x_{r+1}=x_{r+2}=\ldots=x_{n-1}=0 \end{cases} ,$$

dan is, als we stellen $x_{r+1}=\lambda_1$, $x_{r+2}=\lambda_2,\dots,x_n=\lambda_{n-r}$, de bijbehorende oplossingsvector van (5.8):

$$\overline{v} = \lambda_1\overline{v}_1 + \lambda_2\overline{v}_2 + \dots + \lambda_{n-r}\overline{v}_{n-r} \ .$$

Elke oplossingsvector is dus in de lineair onafhankelijke basis $\overline{v}_1,\overline{v}_2,\dots,\overline{v}_{n-r}$ (alle $\neq\overline{0}$) uit te drukken.

Opmerking. De oplossing $\overline{v}$ wordt dan van de n-r oplossingen $\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_{n-r}$ lineair afhankelijk genoemd. Is van een of ander stelsel lineaire vergelijkingen een oplossing $\overline{x}$ niet te schrijven als een lineaire combinatie van p oplossingen $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_p$, dan heet de oplossing $\overline{x}$ van de p oplossingen lineair onafhankelijk.

q oplossingen heten lineair afhankelijk als minstens één dier oplossingen afhankelijk is van de overige, anders lineair onafhankelijk.

De oplossingsvectoren vormen dus een (n-r)-dimensionale deelvectorruimte van R_n en aangezien ieder stel van (n-r) lineair onafhankelijke vectoren van deze (n-r)-dimensionale ruimte volgens stelling 2.8 een basis voor deze ruimte vormt, geldt

Stelling 5.11. Is van een stelsel homogeen lineaire vergelijkingen met n onbekenden de rang van de bijbehorende matrix gelijk aan r, dan vormen de oplossingsvectoren van het stelsel een (n-r)-dimensionale deelruimte van R_n. Uit ieder stel van n-r lineair onafhankelijke oplossingsvectoren kan een willekeurige oplossingsvector door lineaire combinatie verkregen worden.

Wij noemen een stel van n-r onafhankelijke oplossingsvectoren een volledige oplossing.

Dat iedere oplossing een lineaire combinatie is van n-r onafhankelijke oplossingen geeft men wel weer door te zeggen, dat er ∞^{n-r} oplossingen zijn.

Uit stelling 5.11 volgt:

1°. Als van een homogeen lineair stelsel het aantal onbekenden n groter is dan het aantal vergelijkingen m, dus $n > m$, dan is ook $n > r=$ de rang van de bijbehorende matrix, omdat de rang r hoogstens gelijk is aan het aantal vergelijkingen m. Dan is dus $n - r > 0$, zodat er in dit geval altijd oplossingen verschillend van de nuloplossing zijn.

2°. Een homogeen lineair stelsel heeft alleen/dan slechts de nuloplossing, als het aantal onbekenden gelijk is aan de rang van de bijbehorende matrix.

3^o. In verband met stelling 5.10 geldt, dat als voor een niet-homogeen stelsel lineaire vergelijkingen: $r=r'$, altijd $n-r$ der onbekenden willekeurig gekozen kunnen worden, want elke oplossing van het niet-homogene stelsel is te verkrijgen door bij een vaste oplossing hiervan een oplossing van het bijbehorende gereduceerde stelsel op te tellen. Immers:
De algemene oplossing van het gereduceerde stelsel is volgens stelling 5.11 vastgelegd zodra $(n-r)$ onafhankelijke oplossingen bekend zijn. Zijn deze dus bekend en 1 oplossing van het niet-homogene stelsel, dan kunnen we door combinatie alle oplossingen van een niet-homogeen stelsel verkrijgen. We lichten dit toe aan een voorbeeld:
Voorbeeld 6. Bepaal alle oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases},$$

nadat reeds bekend is, dat $\overline{x}^o = (1,2,3)$ een oplossing is.

Oplossing: We behoeven nog slechts alle oplossingen van het bijbehorende gereduceerde stelsel op te schrijven. Eenvoudig valt in te zien, dat voor zo'n oplossing:

$$x_1 = 2/3x_2 \text{ en } x_3 = 5/3x_2, \text{ zodat } \overline{x}^r = (2/3,1,5/3)$$

een oplossing is. Elke oplossing van het gereduceerde stelsel is van de vorm $\lambda\overline{x}^r$, waarin λ willekeurig. De algemene oplossing van het gegeven stelsel is dus: $\overline{x} = \overline{x}^o + \lambda\overline{x}^r$ of

$$\overline{x} = (1,2,3) + \lambda(2/3,1,5/3) = (1+2/3\lambda,\ 2+\lambda,\ 3+5/3\lambda) \text{ of}$$

meetkundig: De oplossingsvectoren $\overline{x}$ in R_3 liggen op de lijn l, die gaat door het punt (1,2,3), evenwijdig aan

$$\overline{x}^r = (2/3,1,5/3) \text{ of aan } (2,3,5).$$

We geven nu een voorbeeld van het oplossen van een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen:
Voorbeeld 7. De kentallen x_1, x_2, x_3 en x_4 van een vector $\overline{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ uit R_4 voldoen aan:

$$\begin{cases} a^2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ ax_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Bepaal voor verschillende waarden van a de dimensie en een lineair onafhankelijke basis van de deelruimte der oplossingsvectoren.

Oplossing: We herleiden de matrix van het stelsel als volgt:

$$\begin{pmatrix} a^2 & -4 & 2 & 2 \\ a & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} a^2-2 & -4 & 0 & 0 \\ a-1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} a^2-2a & 0 & 0 & 0 \\ a-1 & -2 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eerst is de vierde kolom met de vierde rij schoongeveegd en daarna de tweede kolom met de tweede rij.

We onderscheiden nu de volgende gevallen:

1^o. $a\neq 0$, $a\neq 2$: $r=4$, dus alleen de nuloplossing (0-dimensionale deelruimte).

2^o. $a=2$: $r=3$. De deelruimte der oplossingsvectoren is dus een ééndimensionale deelruimte van R_4. Stellen we $x_1=2\lambda$, dan is $x_2=\lambda$, $x_3=-\lambda$ en $x_4=-\lambda$.
De deelruimte bestaat dus uit de vectoren $\overline{x}=\lambda(2,1,-1,-1)$ en hiervan is $(2,1,-1,-1)$ een basis. De deelruimte is dan dus 1-dimensionaal. De verhouding der onbekenden is in dit geval bekend.

3^o. $a=0$: $r = 2$. De oplossingsruimte is dus een tweedimensionale deelruimte van R_4.
Stellen we $x_1=2\lambda$ en $x_3=\mu$, dan is $x_2=-\lambda$ en $x_4=-2\lambda-\mu$.
De deelruimte der oplossingsvectoren bestaat dus uit de vectoren:

$$\overline{x} = \lambda(2,-1,0,-2) + \mu(0,0,1,-1).$$

Hiervan is $(2,-1,0,-2)$ en $(0,0,1,-1)$ een lineair onafhankelijke basis. De deelruimte der oplossingsvectoren is dan dus 2-dimensionaal.

Voor het geval, dat het aantal vergelijkingen van het homogeen lineaire stelsel gelijk is aan het aantal onbekenden n, dus m=n, geldt de volgende stelling:

<u>Stelling 5.12.</u> Laat het niet-homogene stelsel en het bijbehorende gereduceerde stelsel zijn:

$$\text{(I)} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad (i=1,\dots,n)$$

$$\text{(II)} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = 0 \qquad (i=1,\dots,n)\ ,$$

dan geldt:

1^o. Als (II) slechts de nuloplossing heeft, dan heeft (I) één enkele oplossing.

2^o. Als (II) meer oplossingen heeft dan de nuloplossing, dan is (I) of onoplosbaar, of (I) heeft meer dan één oplossing.
Bewijs: 1^o. (II) alleen de nuloplossing, wil volgens het 2^e gevolg van stelling 5.11 zeggen, dat $r=n$ en dus $r=r'=n$. Er is dus voor (I) volgens stelling 5.3 minstens één oplossing.
Stel er zijn minstens twee oplossingen van (I), dan is de verschilvector van deze oplossingen oplossingsvector van (II), dus de nuloplossing, zodat de twee oplossingen van (I) dan identiek zijn. Er is dus slechts één oplossing van (I).

2^o. We bewijzen, dat als (I) één enkele oplossing heeft, (II) slechts de nuloplossing heeft. Stel, dat (I) slechts één oplossing $x_1,\dots,x_n$ heeft en dat toch (II) een oplossing verschillend van de nuloplossing heeft, dan is de som van deze twee oplossingen tevens oplossing van (I), die dus verschillend van $x_1,\dots,x_n$ is, in tegenspraak met het ondersteldе. Dus als (I) één oplossing heeft, dan heeft (II) slechts de nuloplossing. Heeft (II) dus meer oplossingen dan de nuloplossing, dan kan (I) niet één enkele oplossing hebben. (I) is dus óf onoplosbaar (als $r'=r+1$, volgens stelling 5.3) óf heeft meer dan één oplossing (als $r=r'\leq n-1$, volgens het derde gevolg van stelling 5.11).

Nog enkele toepassingen:
1. Met behulp van het begrip "rang van een matrix" kunnen wij een nieuwe voorwaarde afleiden voor lineaire afhankelijkheid van een stelsel vectoren.
Om de gedachten te bepalen, nemen we $n=4$ en 3 vectoren $\bar{a},\bar{b}$ en $\bar{c}$. Volgens de definitie van lineaire afhankelijkheid gegeven in § 1 zijn $\bar{a},\bar{b}$ en $\bar{c}$ afhankelijk als er getallen α,β en γ bestaan, niet alle 0, zó dat $\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}=\bar{0}$, of

$$\begin{cases}\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = 0\\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = 0\\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = 0\\ \alpha a_4 + \beta b_4 + \gamma c_4 = 0\end{cases}$$

Deze vier homogeen lineaire vergelijkingen in de drie onbekenden α, β en γ hebben volgens het eerste en tweede gevolg van stelling 5.11 dan en slechts dan een andere dan de nuloplossing, wanneer de rang van de coefficientenmatrix kleiner dan 3 is. Deze matrix heeft dezelfde rang als de matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

die de gegeven vectoren als rijen heeft. Deze matrix heet de <u>matrix der vectoren</u> $\overline{a},\overline{b}$ en $\overline{c}$.

Algemeen kunnen we dan de volgende stelling uitspreken:

<u>Stelling 5.13</u>. m vectoren zijn dan en slechts dan onafhankelijk, als de rang van hun matrix m is.

Gevolg: (n+1) n-vectoren zijn dus steeds afhankelijk, in overeenstemming met stelling 2.8 [2].

2.

<u>Stelling 5.14.</u> Uit m vectoren kan men hoogstens m onafhankelijke lineaire combinaties vormen.

Bewijs: We beschouwen weer het vereenvoudigde geval van 3 vectoren $\overline{a},\overline{b}$ en $\overline{c}$ en vormen daarmee de vier lineaire combinaties:

$$\begin{cases} \overline{d} = \alpha_1\overline{a} + \beta_1\overline{b} + \gamma_1\overline{c} \\ \overline{e} = \alpha_2\overline{a} + \beta_2\overline{b} + \gamma_2\overline{c} \\ \overline{f} = \alpha_3\overline{a} + \beta_3\overline{b} + \gamma_3\overline{c} \\ \overline{g} = \alpha_4\overline{a} + \beta_4\overline{b} + \gamma_4\overline{c} \end{cases} .$$

De drie homogene vergelijkingen met vier onbekenden

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0 \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 = 0 \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 = 0 \end{cases}$$

hebben altijd een andere dan de nuloplossing wegens het eerste gevolg van stelling 5.11; vermenigvuldigt men de vectoren $\overline{d},\overline{e},\overline{f}$ en $\overline{g}$ met de waarden x_1, x_2, x_3 en x_4 van zulk een oplossing, dan vinden we na optelling:

$$x_1\overline{d} + x_2\overline{e} + x_3\overline{f} + x_4\overline{g} = 0.\overline{a} + 0.\overline{b} + 0.\overline{c} = \overline{0} .$$

De vier lineaire combinaties $\overline{d},\overline{e},\overline{f}$ en $\overline{g}$ zijn dus afhankelijk.

Opmerking. We spreken ook van lineaire afhankelijkheid van vergelijkingen. Enige <u>vergelijkingen</u> van een homogeen lineair stelsel heten <u>afhankelijk</u>, resp. <u>onafhankelijk</u>, als hun coefficientenvectoren afhankelijk resp. onafhankelijk zijn.

Stellen we de vergelijkingen van het stelsel kortweg voor door :

$L_1=0$, $L_2=0,\ldots,L_m=0$, dan heten deze vergelijkingen dus afhankelijk, als een identieke betrekking van de vorm:

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_m L_m \equiv 0$$

bestaat, waarin $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ niet alle 0 zijn. Ook noemt men dan de m homogene <u>lineaire functies</u> $L_1,L_2,\ldots,L_m$ <u>afhankelijk</u>. Bestaat de identieke betrekking alleen voor $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$, dan heten de vergelijkingen en evenzo de functies <u>onafhankelijk</u>. De begrippen afhankelijk en onafhankelijk kunnen we ook definieren voor vergelijkingen van een niet-homogeen lineair stelsel. We beschouwen dan de op nul herleide vergelijkingen van dit stelsel en passen op deze dan de bovenstaande definities voor afhankelijk - en onafhankelijkheid toe, geldig voor vergelijkingen van een homogeen lineair stelsel. (Onoplosbaarheid van het stelsel is hier niet uitgesloten).

3. Stel U en V zijn twee lineaire deelruimten van R_n. <u>Definities</u>: De <u>doorsnede</u> van U en V (notatie: $U\cap V$) is de deelruimte, die alle vectoren bevat, die zowel tot U als tot V behoren. De <u>vereniging</u> van U en V (notatie: $U\cup V$) is de deelruimte, die bestaat uit alle vectoren $\overline{u}+\overline{v}$, waarbij $\overline{u}$ tot U en $\overline{v}$ tot V behoort.

<u>Voorbeeld 8</u>. Gegeven zijn in R_4 de vectoren:

$$\overline{a} = (2,1,-3,-1),\ \overline{b} = (3,2,-1,2),\ \overline{c} = (1,2,3,1) \text{ en}$$

$$\overline{d} = (2,2,-2,p) \text{ en de twee deelruimten :}$$

$$U : \overline{x} = \lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} \ ; \quad V : \overline{x} = \mu_1\overline{c} + \mu_2\overline{d}.$$

Bepaal voor verschillende waarden van p de doorsnede $U\cap V$ en de vereniging $U\cup V$, alsmede van beide de dimensie en een lineair onafhankelijke basis.

Oplossing: Een basis van $U\cup V$ is $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ en $\overline{d}$. We passen stelling 5.13 toe en vinden dan de dimensie en een lineair onafhankelijke basis als volgt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & p \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 9 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & p+2 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 7 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & p-6 \end{pmatrix}.$$

Voor $p\neq-3$ is dus $U\cup V$ de gehele R_4; voor $p=-3$ is de dimensie van $U\cup V$ gelijk aan 3. In dit laatste geval wordt een lineair onafhankelijke basis gevormd door de vectoren: $(0,1,7,7)$, $(-1,0,5,4)$ en $(0,0,-6,-9)$.

Om $U\cap V$ te bepalen, zoeken we alle vectoren $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$,waarvan de kentallen voldoen aan:

$$\begin{cases} x_1 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = \mu_1 + 2\mu_2 \\ x_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 = 2\mu_1 + 2\mu_2 \\ x_3 = -3\lambda_1 - \lambda_2 = 3\mu_1 - 2\mu_2 \\ x_4 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 = \mu_1 + p\mu_2 \end{cases}$$

Eliminatie van λ_1 en λ_2 geeft twee voorwaarden waaraan μ_1 en μ_2 moeten voldoen, namelijk:

$$\begin{cases} 21\mu_1 + (18-p)\mu_2 = 0 \\ 21\mu_1 + (12-3p)\mu_2 = 0\ . \end{cases}$$

Is $p \neq -3$, dan voldoet alleen $\mu_1 = \mu_2 = 0$; de doorsnede $U \cap V$ is dan alleen de nulvector (was direct in te zien aangezien voor $p \neq -3$: $U \cup V$ een R_4 vormt).
Voor $p=-3$ is $\mu_1 + \mu_2 = 0$. De doorsnede $U \cap V$ bestaat dan dus uit de vectoren: $\overline{x} = \mu(-1,0,5,4)$.
De dimensie van de doorsnede is dus 1 en een basis is $(-1,0,5,4)$.
(Dit klopt want de doorsnede kan hoogstens 1 dimensionaal zijn, omdat $U \cup V$ 3-dimensionaal is voor $p=-3$ en is juist 1 wegens: $-2\overline{a}+\overline{b}=\overline{c}-\overline{d}=$
$=(-1,0,5,4)$ voor $p=-3$).

Door herleiding van een gegeven stelsel lineaire vergelijkingen tot een van eenvoudiger gedaante waren we in staat de oplosbaarheid van het stelsel vast te stellen en eventuele oplossingen te bepalen.
De gevolgde weg, hoe nuttig ook voor de theorie, zal in de practijk voor het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen dikwijls te omslachtig zijn.
Met behulp van de determinantentheorie echter, die wij in de volgende paragraaf zullen ontwikkelen, zullen we tot oplosbaarheidsvoorwaarden en oplossingsmethoden komen van eenvoudiger karakter. Deze kunnen we - en dit is een belangrijk voordeel - direct laten werken op het stelsel in de gegeven vorm.
Herleiding van het stelsel tot een van eenvoudiger gedaante is niet noodzakelijk.

§ 6. Determinanten

Zij gegeven 2 vergelijkingen met 2 onbekenden:

$$(6.1) \quad \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = a_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = b_3 \end{cases}$$

en wordt gevraagd deze vergelijkingen op te lossen, dan vindt men, als $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ ondersteld wordt, als oplossing

$$(6.2) \qquad x_1 = \frac{a_3b_2-a_2b_3}{a_1b_2-a_2b_1} \quad , \qquad x_2 = \frac{a_1b_3-a_3b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \quad .$$

De uitdrukking $a_1b_2-a_2b_1$ in de noemers speelt blijkbaar bij het oplossen van het stelsel (6.1) een belangrijke rol. Voor deze uitdrukking gaan we nu een andere schrijfwijze invoeren:

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ is het symbool voor de uitdrukking $a_1b_2-a_2b_1$.

Men noemt dit getal de determinant van de (2,2)-matrix $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.

Ook de tellers van de rechterleden van (6.2) zijn nu in determinantenvorm te schrijven en wel geldt: $\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = a_3b_2-a_2b_3$ en $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_3-a_3b_1$, zodat als weer $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, de oplossing (6.2) van het stelsel (6.1) ook te schrijven is in de vorm:

$$(6.2)' \qquad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \quad , \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \quad .$$

Wenst men het stelsel

$$(6.3) \quad \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_4 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_4 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c_4 \end{cases}$$

op te lossen, dan kan dit gebeuren door eliminatie van eerst een en daarna nog een tweede onbekende. Het is echter ook mogelijk twee onbekenden tegelijk te elimineren. Doen we dit met de onbekenden

x_2 en x_3, dan proberen we twee getallen p en q te vinden, die voldoen aan:

$$(6.4)\quad \begin{cases} a_2p + b_2q = c_2 \\ a_3p + b_3q = c_3 \end{cases}$$

(6.4) is van dezelfde vorm als (6.1), zodat als $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$ geldt:

$$p = \frac{\begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \quad , \qquad q = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \quad .$$

Daar $(a_1p+b_1q-c_1)\, x_1 = a_4p + b_4q - c_4$ geldt:

$$\left(a_1 \begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right) x_1 = a_4 \begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} .$$

Aangezien $\begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ en $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

geldt eveneens:

$$\left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\right) x_1 = a_4 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_4 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_4 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} .$$

We definiëren nu op dezelfde wijze als bij een (2,2)-matrix de determinant van de (3,3)-matrix $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, als de coefficiënt van x_1 in het linkerlid van bovenstaande vergelijking:

$$(6.5)\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 .$$

<u>Voorbeeld 1</u>. De determinant $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ heeft de waarde $a_1b_2c_3$; alle

andere producten, waaruit de determinant volgens (6.5) gevormd wordt, zijn nul.

Opmerking. Sarrus gaf een regel aan om direct een determinant van een (3.3)-matrix te berekenen. Hij schreef namelijk het volgende schema op

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}$$

en vormde er de 6 door lijnen aangegeven producten uit. De drie producten in de richting $a_1b_2c_3$ krijgen elk het teken +, de andere drie het teken -, in overeenstemming met het laatste lid van (6.5).

We gaan nu over tot de algemene definitie van een determinant van een (n,n)-matrix (zgn. determinant van de n^e orde). Daarna zullen we in deze paragraaf een eenvoudige determinantentheorie ontwikkelen en vervolgens deze theorie toepassen, o.a. bij het oplossen van lineaire vergelijkingen.

Om een eenvoudige uitdrukking te kunnen geven vooreen determinant van de n^e orde, voeren we eerst het begrip permutatie in. We beschouwen hiertoe een eindig aantal, bijv. n elementen. Deze elementen kunnen we op verschillende wijzen in een rij rangschikken.

Onder een <u>permutatie</u> van de n elementen verstaan we nu een zekere rangschikking van deze elementen. Zo bezitten 3 elementen a_1,a_2 en a_3 de 6 permutaties $a_1a_2a_3$, $a_3a_1a_2$, $a_2a_3a_1$, $a_2a_1a_3$, $a_1a_3a_2$ en $a_3a_2a_1$. Zijn de elementen, zoals hier genummerd, dan kunnen we ons tot getallenpermutaties beperken, dus bij 3 elementen tot de zgn 3-permutaties: 1 2 3, 3 1 2, 2 3 1, 2 1 3, 1 3 2 en 3 2 1 (bij n elementen spreken we van n-permutaties).

Twee willekeurige getallen in een getallenpermutatie vormen een <u>inversie</u>, wanneer het grootste getal in deze permutatie voor het kleinste staat.

<u>Voorbeeld 2</u>. De 5-permutatie 2 3 5 1 4 heeft de 4 inversies: 2 1, 3 1, 5 1 en 5 4.

Analoog voor een permutatie van de elementen $a_1,\dots,a_n$: een tweetal elementen in een permutatie $a_{\lambda_1}a_{\lambda_2}\dots a_{\lambda_n}$ van $a_1,a_2,\dots,a_n$ vormt een inversie, als het element met hogere index voorafgaat aan die met lagere index. Ook hier kunnen we ons beperken tot de getallenpermutatie $\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$ der indices, gevormd uit de getallen 1,2,...,n.

Men noemt een permutatie <u>even</u>, als het aantal inversies in die permutatie even is, anders oneven (nul is per definitie even, zodat de permutatie $a_1a_2...a_n$ (indices in de natuurlijke volgorde) even is: men spreekt in dit geval wel van de grondpermutatie).

<u>Voorbeeld 3</u>. De permutatie $a_2a_3a_5a_1a_4$ is even, daarentegen $a_3a_5a_4a_1a_2$ oneven.

Twee even of twee oneven permutaties heten van <u>dezelfde soort</u> of van <u>dezelfde pariteit</u>; een even en een oneven permutatie van <u>verschillende soort</u> (of pariteit).

Eenvoudig is in te zien, dat permutaties de volgende eigenschappen bezitten:

a) Verwisselt men in een permutatie twee opeenvolgende elementen (ook wel geheten het uitvoeren van een transpositie), dan gaat zij in een permutatie van de andere soort over.

<u>Voorbeeld 4</u>. De even permutatie $a_2a_3a_5a_1a_4$ gaat door verwisseling van a_3 en a_5 over in de oneven permutatie $a_2a_5a_3a_1a_4$.

b) Verwisselt men in een permutatie twee willekeurige elementen, dan gaat zij in een permutatie van een andere soort over.

<u>Voorbeeld 5</u>. De even permutatie $a_2a_3a_5a_1a_4$ gaat door verwisseling van a_3 en a_1 over in de oneven permutatie $a_2a_1a_5a_3a_4$.

c) Er zijn evenveel even als oneven permutaties.

<u>Voorbeeld 6</u>. Bij drie elementen a_1, a_2 en a_3 zijn de permutaties

$a_1a_2a_3$, $a_3a_1a_2$ en $a_2a_3a_1$ even en de permutaties

$a_2a_1a_3$, $a_1a_3a_2$ en $a_3a_2a_1$ oneven (deze laatste zijn ontstaan door verwisseling der eerste twee elementen der even permutaties).

Met behulp hiervan geven we nu de definitie volgens Leibniz van de determinant van een n-matrix (determinant van de n^e orde):

<u>Definitie</u>. Onder de <u>determinant van een n-matrix A</u> (d.i. een (n,n)-matrix; algemeen element a_{ik}) verstaan we het eindresultaat (in het algemeen het getal), verkregen volgens het volgende voorschrift (<u>eerste determinantenregel</u>):

Vorm alle n! producten van n factoren, die een element uit iedere rij en een element uit iedere kolom van A als factor bevatten. Rangschik de factoren van ieder product naar de rijen, in de natuurlijke volgorde. Voorzie het product van het teken + of -, al naar

de kolom-indices een even of een oneven permutatie vormen. Tel daarna de resultaten op.
Notatie: det. A of $|A|$. In formule:

$$(6.6)\qquad \det. A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^j a_{1\lambda_1} a_{2\lambda_2} \cdots a_{n\lambda_n}$$

De som wordt uitgestrekt over alle permutaties $\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_n$ der getallen 1,2,...,n.
Een bepaald product in deze som krijgt het teken $(-1)^j$, waarin j het aantal inversies is in de getallenpermutatie gevormd door de kolomindices van de a's in dit product.

Opmerking 1) De bovengegeven defintics van de determinant van de 2^e en 3^e orde zijn bijzondere gevallen van (6.6). (Een 1-matrix bevat 1 element en de waarde van de determinant van deze matrix, een 1^e orde determinant, is juist dat element).

Voorbeeld 7. De determinant van de 4^e orde $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ is:

$$(6.7)\left\{\begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}\ + \\ + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\ + \\ + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}\ + \\ + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}\ + \\ + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}\ + \\ + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}\ . \end{array}\right.$$

Het rechterlid van (6.7) bestaat uit $4!$ (=24) producten, ieder van 4 factoren, waarvan 12 het teken + krijgen en 12 het teken -, in overeenstemming met de eigenschap c) der permutaties op blz.44. Het is duidelijk, dat men in het algemeen alle producten, die nodig zijn om de determinant van een n-matrix te berekenen, verkrijgt door de kolomindices alle n-permutaties te laten doorlopen met de rij indices in een bepaalde vaste volgorde, bijv. de natuurlijke volgorde. Dan ontstaan n! producten, waarvan de helft het teken + en de helft het teken - krijgt.

2) De definitie van de determinant van een matrix geldt alleen voor vierkante matrices. Aan niet-vierkante matrices wordt geen determinant toegevoegd.

3) De elementen van een matrix behoeven niet noodzakelijk getallen voor te stellen. Voldoende is het, dat de elementen van die aard zijn, dat de bewerkingen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen kunnen worden uitgevoerd en de gewone rekenregels gelden (bijv. in de vorm van functies).
Tenzij anders vermeld zullen wij in het volgende aannemen, dat de elementen getallen voorstellen.

4) Hoewel de determinant van een matrix, gevormd uit getallen, niets anders is dan een getal, spreken we toch van een bepaalde rij of kolom van de determinant, daarmee bedoelende die bepaalde rij of kolom van de matrix, waarbij de determinant behoort. Evenzo spreken we van rij- en kolomvectoren van de determinant.

Verwisselen we in een product twee factoren, dan gaat volgens eigenschap b) der permutaties op blz.44, zowel de permutatie van de rij-indices, als die van de kolom-indices in een van een andere soort over.
Zijn de rij-indices in de natuurlijke volgorde (even permutatie), dan krijgt dit product volgens de eerste determinantenregel het teken + dan wel het teken -, al naar de permutatie der kolom-indices even of oneven is, zodat we kunnen concluderen tot de volgende regel, de tweede determinantenregel:

Definitie. Onder de determinant van een n-matrix A (algemeen element a_{ik}) verstaan we het getal, dat berekend wordt volgens het volgende voorschrift:

> Vorm alle n! producten van n factoren, die een element uit iedere rij en een element uit iedere kolom van A bevatten.
> Voorzie het product van het teken +, als de rij- en kolom-indices permutaties van dezelfde soort vormen, anders het teken -.
> Tel de resultaten op.

In formule:

$$(6.8)\quad \det.A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{i+j}\, a_{\mu_1\lambda_1} a_{\mu_2\lambda_2}\cdots a_{\mu_n\lambda_n}\,.$$

De som wordt uitgestrekt over alle permutaties $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$ der getallen 1,...,n. Omdat n! producten gevormd moeten worden, houden we

bij alle producten de permutatie $\mu_1\mu_2\ldots\mu_n$ vast (echter wel willekeurig). De term $a_{\mu_1\lambda_1}a_{\mu_2\lambda_2}\ldots a_{\mu_n\lambda_n}$ heeft het teken $(-1)^{i+j}$ als i resp. j het aantal inversies voorstelt in de getallenpermutaties $\mu_1\mu_2\ldots\mu_n$ (vast) resp. $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$ (lopend).
Willen we in de som in het rechterlid van (6.8) naast de λ's ook de μ's alle permutaties der getallen $1,\ldots,n$ laten doorlopen, dan moet deze som nog gedeeld worden door $n!$

Opmerking. Een <u>term</u> van een determinant is een der producten met behulp waarvan de determinant volgens de eerste of de tweede determinantenregel berekend wordt, zonder teken.
Zo is bijv. $a_{12}\,a_{24}\,a_{31}\,a_{43}$ een term van de determinant uit vb.7. Deze term krijgt bij de berekening van de determinant het teken $-$, omdat de rij-indices in de natuurlijke volgorde staan en de permutatie der kolom-indices 2 4 1 3 een oneven permutatie is (3 inversies). De term kan ook geschreven worden als bijv. $a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}$. Hiervan vormen de rij-indices 3 2 4 1 een even permutatie (4 inversies) en de kolom-indices 1 4 3 2 een oneven permutatie (3 inversies); beide permutaties zijn dus van verschillende soort, zodat de term $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ bij de berekening van de determinant het teken $-$ krijgt in overeenstemming met het bovenstaande.
Uit de tweede determinantenregel volgt direct, dat bij de berekening van een determinant de rijen hierin volkomen dezelfde rol spelen als de kolommen, zodat

<u>Stelling 6.1</u>. De determinant van een matrix verandert niet als men de matrix wentelt om zijn hoofddiagonaal (dus bij verwisseling van overeenkomstige rijen en kolommen) of in formule:

$$\text{det.}A^T = \text{det.}A. \tag{6.9}$$

<u>Voorbeeld 8</u>. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Vanwege de symmetrie van de tweede determinantenstelling geldt bovendien, dat iedere stelling, die voor de rijen van een determinant bewezen is, noodzakelijk ook voor de kolommen geldt, en omgekeerd. De stellingen, die we in het volgende zullen uitspreken voor rijen en ook voor kolommen, zullen we daarom in het algemeen slechts behoeven te bewijzen voor de rijen of voor de kolommen alleen.

We merken op, dat de determinant van een n-matrix A een <u>homogene lineaire functie</u> is van zijn rij- en kolomvectoren.
Stellen we een zekere rij-(kolom-)vector of kortweg gezegd, een rij (kolom) van A voor door $\overline{x}$ en laten we de andere rijen (kolommen) constant, dan is de determinant van A een homogene lineaire functie van de kentallen $x_1, x_2, \ldots x_n$ van $\overline{x}$ (de elementen van de rij (kolom)), d.w.z. voor te stellen door

$$\det.A = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\overline{x}) \text{ , waarbij geldt:}$$

10) $$f(\lambda \overline{x}) = \lambda f(\overline{x}) \quad , \quad f(\overline{x}+\overline{y}) = f(\overline{x}) + f(\overline{y})$$

zodat de volgende stellingen gelden:
<u>Stelling 6.2.</u> Vermenigvuldigt men alle elementen van een rij (kolom) van A met λ, dan wordt det. A met λ vermenigvuldigd.

<u>Voorbeeld 9.</u> $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Dit geldt ook als $\lambda = 0$, zodat in het algemeen geldt:
Een determinant met een rij (of kolom) nullen, is gelijk aan nul.
<u>Stelling 6.3.</u> Is een rij (kolom) van A de som van twee vectoren $\overline{a}$ en $\overline{b}$, dan is det.A de som van de determinanten der matrices, die uit A ontstaan, door de rijen (kolommen) achtereenvolgens door $\overline{a}$ en $\overline{b}$ te vervangen.

<u>Voorbeeld 10.</u> $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} .$$

Opmerking bij stelling 6.2. Vermenigvuldigt men alle elementen van A met λ, dan wordt <u>elke</u> rij met λ vermenigvuldigd, zodat

(6.11) $$\det.(\lambda A) = \lambda^n \det. A.$$

Is nu A een alternerende matrix, dus $A^T = -A$, en is n oneven, dan geldt volgens (6.9)

$$\det.A = \det.A^T = \det.(-A) = (-1)^n \det.A = -\det.A$$

en dus det.A = 0 of
<u>Stelling 6.4.</u> De determinant van een alternerende matrix van oneven orde is nul.

Verwisselen we twee rijen van de matrix A met elkander, zodat een nieuwe matrix A' ontstaat, dan merken we op, dat elke term van det.A ook voorkomt als term van det.A' en omgekeerd. Voorts geldt, volgens de determinantenregels, dat iedere term in det.A het tegengestelde teken krijgt als diezelfde term in det.A'. Dit op grond van de eigenschap b) der permutaties op blz.44. Daarom geldt:

Stelling 6.5. Verwisselt men in een matrix twee willekeurige rijen (kolommen), dan gaat de determinant van zijn matrix in zijn tegengestelde over.

Voorbeeld 11.
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} .$$

Beschouwen we het bijzondere geval, dat de matrix twee gelijke rijen (kolommen) heeft, dan volgt uit stelling 6.5 bij verwisseling van de twee gelijke rijen (kolommen): det.A=-det.A'=-det.A, zodat det.A=0 en dus

Stelling 6.6. De determinant van een matrix met twee gelijke rijen (kolommen) is nul.

Uit de stellingen 6.2, 6.3 en 6.6 volgt nu:

Stelling 6.7. Telt men bij een rij (kolom) van een matrix een andere rij (kolom) vermenigvuldigd met een getal λ op, dan behoudt de determinant van de matrix dezelfde waarde.

Voorbeeld 12.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10. & 5 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} ,$$

want (10,5,5) = (2,1,3) + 2(4,2,1),

en

Stelling 6.8. Vormen de rij (kolom)-vectoren van een matrix een lineair afhankelijk stelsel, dan is de determinant van die matrix nul.

Voorbeeld 13.
$$\begin{vmatrix} 0 & 6a & 3b \\ -a & 0 & c \\ -b & -2c & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ want } c(0,6a,3b) - 3b(-a,0,c) + 3a(-b,-2c,0) = \overline{0}.$$

(als a=b=c=0 volgt direct: det. is 0).

Uit stelling 6.8 volgt:

Stelling 6.9. Is de waarde van een determinant ongelijk aan nul, dan vormen de rij (kolom)-vectoren een lineair onafhankelijk stelsel.

Deze stelling is ook omkeerbaar:

<u>Stelling 6.10.</u> Als van een determinant de rij (kolom)-vectoren een lineair onafhankelijk stelsel vormen, dan is de waarde van de determinant ongelijk aan nul.
<u>Bewijs:</u> We bewijzen de stelling uitgaande van lineair onafhankelijke rijen. Stel de rijen van de determinant $|A|$ (van de n^e orde) voor door $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$. Deze vormen volgens het gegeven een lineair onafhankelijk stelsel, en dus een lineair onafhankelijke basis van een R_n. We gaan nu de grondvectoren $\overline{e}_1 \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ in deze basis uitdrukken.
Stel, dat voor de eerste grondvector geldt:

$$\overline{e}_1 = \lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_r \overline{a}_r + \ldots + \lambda_n \overline{a}_n \ .$$

Minstens één der λ's moet $\neq 0$ zijn. Stel $\lambda_r \neq 0$.
Vervangen we nu in A de r^e rijvector door $\overline{e}_1$, dan blijkt op grond van de stellingen 6.2 en 6.7, dat de nieuwe matrix een determinant heeft, waarvan de waarde gelijk is aan $\lambda_r \times \text{det.}A$.
Deze nieuwe determinant heeft weer n lineair onafhankelijke rijvectoren. Een der rijvectoren ($\neq \overline{e}_1$) vervangen we nu in deze determinant door $\overline{e}_2$. $\overline{e}_2$ is een lineaire combinatie van $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{r-1}, \overline{e}_1, \overline{a}_{r+1}, \ldots, \overline{a}_n$. De determinant, die nu ontstaan is, bevat dan twee rijen $\overline{e}_1$ en $\overline{e}_2$. Op deze wijze doorgaande, kunnen we alle rijvectoren uit det.A vervangen door de grondvectoren uit R_n. Door eventuele verwisseling van rijen blijkt tenslotte:

$$\text{det. } A = \text{const.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{vmatrix} = \text{constante} \ .$$

De constante is $\neq 0$ dus det.$A \neq 0$.
Gevolg:
<u>Stelling 6.11.</u> Als de waarde van een determinant gelijk is aan nul, dan vormen de rij (kolom)-vectoren van die determinant een lineair afhankelijk stelsel.
De stellingen 6.8 t/m 6.11 kunnen we samenvatten tot:
<u>Stelling 6.12.</u> De rijen (kolommen) van een determinant vormen dan en slechts dan een lineair onafhankelijk stelsel, als de waarde van die determinant ongelijk is aan nul.
Stelling 6.12 kunnen we nog een andere vorm geven:

Aangetoond kan namelijk worden, dat geldt:

Stelling 6.13. Een vierkante matrix is dan en slechts dan singulier als de bijbehorende determinant gelijk is aan nul.

Bewijs: 1) Indien we de n-matrix voorstellen door A, dan moet eerst worden aangetoond, dat uit det.A=0 volgt, dat A geen inverse heeft. Om dit te bewijzen, merken we op, dat de kolomvectoren, die we voorstellen door $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$, volgens stelling 6.11 een lineair afhankelijk stelsel vormen. Minstens één dier vectoren is dan in de andereuit te drukken. Stel $\overline{v}_r = \lambda_1\overline{v}_1 + \ldots + \lambda_{r-1}\overline{v}_{r-1} + \lambda_{r+1}\overline{v}_{r+1} + \ldots + \lambda_n\overline{v}_n$.
Interpreteren we A als een homogeen lineaire (n,n)-transformatie, dan geldt voor de transformatie van de basisvectoren:

$$\overline{v}_1 = A\,\overline{e}_1,\ \overline{v}_2 = A\,\overline{e}_2\ ,\ldots \overline{v}_r = A\,\overline{e}_r, \ldots, \overline{v}_n = A\,\overline{e}_n\ ,$$

zodat

$$A\,\overline{e}_r = \overline{v}_r = A(\lambda_1\overline{e}_1 + \lambda_2\overline{e}_2 + \ldots + \lambda_{r-1}\overline{e}_{r-1} + \lambda_{r+1}\overline{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n\overline{e}_n)\ .$$

Stel A heeft een inverse, dan geldt dus

$$\overline{e}_r = A^{-1}A\,\overline{e}_r = \lambda_1\overline{e}_1 + \lambda_2\overline{e}_2 + \ldots + \lambda_{r-1}\overline{e}_{r-1} + \lambda_{r+1}\overline{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n\overline{e}_n\ .$$

zodat de basisvectoren afhankelijk zouden zijn, m.a.w. A heeft geen inverse.

2) Aangetoond moet nog worden, dat als A geen inverse heeft det.A = 0.
Om dit te bewijzen stellen we de rang van A gelijk aan n. De matrixvergelijking AX = I is dan echter volgens stelling 5.10 of 5.12 oplosbaar, zodat A dan wel een inverse heeft, m.a.w. de rang van A is $< n$; de kolomvectoren vormen dus een lineair afhankelijk stelsel en dus volgens stelling 6.8 geldt, dat det.A=0.

Opmerking. Met behulp van de productstelling voor determinanten die we zo dadelijk zullen behandelen, zal het bewijs van stelling 6.13 langs zeer eenvoudige weg gegeven kunnen worden.

Uit stelling 6.12 en stelling 6.13 volgt:

Stelling 6.14. De rijen (kolommen) van een vierkante matrix vormen dan en slechts dan een lineair afhankelijk stelsel als de matrix singulier is.

Een andere belangrijke stelling, die uit de ontwikkelde theorie kan worden afgeleid, is de volgende:

Stelling 6.15. Als van de n-matrices A en B de matrix A niet-singulier is en B willekeurig, dan geldt: de rang van AB= de rang van BA = de rang van B.

Bewijs: Stel $AB=C$.

De stelsels vergelijkingen

$$(I)\quad B\overline{x} = \overline{0} \text{ en } (II)\ C\overline{x} = \overline{0}$$

(matrix opgevat als een homogene lineaire transformatie) hebben dezelfde oplossingen, want uit

$$B\overline{x} = \overline{0} \text{ volgt } AB\overline{x} = C\overline{x} = \overline{0} \text{ en uit}$$
$$C\overline{x} = \overline{0} \text{ volgt } A^{-1}C\overline{x} = B\overline{x} = \overline{0}\ .$$

Is r de rang van B, dan heeft (I) volgens stelling 5.11 $(n-r)$ lineair onafhankelijke oplossingsvectoren, (II) heeft dus eveneens dit aantal lineair onafhankelijke oplossingsvectoren, zodat de rang van C dan ook gelijk is aan r.
We moeten nu nog aantonen, dat de rang van $BA = D$ gelijk is aan r.
Stel, dat $(n-r)$ lineair onafhankelijke oplossingen van (I) gevormd worden door de vectoren $\overline{v}_1,\ldots,\overline{v}_{n-r}$.
Stel $A^{-1}\overline{v}_i=\overline{w}_i$ $(i=1,\ldots,n-r)$.
De vectoren $\overline{w}_i$ zijn nu lineair onafhankelijk volgens stelling 4.3.
Laat $\overline{p}$ een oplossing zijn van (III) $D\overline{x} = \overline{0}$.
Dan is $D\overline{p}=\overline{0}$, dus $BA\overline{p}=\overline{0}$, zodat $A\overline{p}$ aan (I) voldoet. $A\overline{p}$ is dan een lineaire combinatie van $\overline{v}_1,\ldots,\overline{v}_{n-r}$, zodat

$$A\overline{p} = \lambda_1\overline{v}_1 + \ldots + \lambda_{n-r}\,\overline{v}_{n-r}$$

$$\text{en dus}\quad \overline{p} = \lambda_1 A^{-1}\overline{v}_1 + \ldots + \lambda_{n-r}A^{-1}\overline{v}_{n-r}$$

$$\text{of}\quad \overline{p} = \lambda_1\overline{w}_1 + \ldots + \lambda_{n-r}\overline{w}_{n-r}\ .$$

Iedere oplossing van (III) is dus een lineaire combinatie van de lineair onafhankelijke vectoren $\overline{w}_1,\ldots,\overline{w}_{n-r}$, zodat D dan volgens stelling 5.11 eveneens de rang r heeft.

Uit stelling 6.13 en stelling 6.14 volgt nog:

Stelling 6.16. De rang van een n-matrix is dan en slechts dan gelijk aan n als:

a) De matrix niet-singulier is,

of (hiermede aequivalent)

b) De bij de matrix behorende determinant ongelijk is aan nul.

en in verband met stelling 6.15:

Stelling 6.17. 1) Het product van twee niet-singuliere n-matrices is niet-singulier.

2) Het product van een niet-singuliere en een singuliere n-matrix is singulier.

Opmerking. In stelling 6.17 werd ondersteld, dat de singuliere en niet-singuliere matrices vierkante matrices van de n^e orde waren. Dit werd uitsluitend gedaan om productvorming der matrices mogelijk te maken. Het vierkant zijn volgde reeds uit de definitie (§ 4, blz. 20). In het vervolg evenwel, zullen we telkens, wanneer matrixproducten worden gebruikt in gevallen, waarin omtrent de aard der factoren niets expliciet is vermeld, als vanzelfsprekend aannemen, dat productvorming mogelijk is, zodat dan toevoegingen als bovenbedoeld, achterwege kunnen blijven. Stelling 6.17 bijv. kan dan geformuleerd worden voor singuliere en niet-singuliere matrices zonder meer. Dat deze matrices vierkante matrices zijn van dezelfde orde wordt dan stilzwijgend aangenomen.

Stelling 6.18. De rang van het product van twee matrices is kleiner dan of gelijk aan de rang van iedere factor.
Bewijs: Uit de definitie van een matrixproduct volgt, dat de rijvectoren van het product AB der matrices A en B lineaire combinaties zijn van de rijvectoren van B. Bijv. als $A=(a_{ij})$ en de rijvectoren van B: $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n$, dan is de eerste rijvector van AB: $a_{11}\bar{b}_1+a_{12}\bar{b}_2+\ldots+a_{1n}\bar{b}_n$. Volgens stelling 5.14 kan men uit m lineaire onafhankelijke vectoren hoogstens m onafhankelijke lineaire combinaties vormen, zodat de rang van AB kleiner dan of gelijk is aan die van B, de tweede factor in het product. Beschouw vervolgens $(AB)^T=B^TA^T$. Volgens het voorgaande geldt: rang$(AB)^T \leq$ rang A^T en dus ook rang AB $\leq$ rang A, want bij transponeren van een matrix verandert de rang niet.
Hiermede is het bewijs voltooid.
Opmerking. Heeft A een inverse A^{-1}, dan geldt volgens stelling 6.18 enerzijds: rang AB $\leq$ rang B, doch ook anderzijds, daar $B=A^{-1}(AB)$: rang AB $\geq$ rang B, zodat rang AB=rang B. Evenzo is rang CA=rang C. Zijn A en B beide n-matrices, dan vinden we als bijzonder geval stelling 6.15 terug.

Bestaat bij een matrix A een matrix B met de eigenschap, dat AB=BA eenheidsmatrices zijn, dan kan worden aangetoond, dat dit impliceert, dat de beide eenheidsmatrices matrices zijn van dezelfde orde, en dus, dat de matrices A en B vierkant zijn.
Onderstel namelijk, dat A van het type (m,n) is en dat $m \leq n$. De producten AB en BA zijn beide gedefinieerd, zodat dan B van het type (n,m) moet zijn. Hieruit volgt, dat BA een eenheidsmatrix is van de

n^e orde. Willen we onderscheid maken in de notatie voor eenheidsmatrices van verschillende orde, dan kan dit bijv. gebeuren door het symbool I een index te geven, overeenkomende met de orde der eenheidsmatrices. Hier geldt dus $BA=I_n$.
Als A de rang r heeft, dan geldt $r \leq m \leq n \leq r$; de laatste ongelijkheid volgt uit stelling 6.18, daar de rang van I_n gelijk is aan n. Dus m=n=r. Hetzelfde resultaat geldt als $n \leq m$. We maken dan gebruik van de vergelijking $AB=I_m$.

De matrix B met bovengenoemde eigenschappen, hebben we in § 4 de inverse A^{-1} van de matrix A genoemd. Er werd daar uitgegaan van vierkante matrices. Dit was volgens het bovenstaande een overbodig gegeven, omdat de definierende vergelijkingen dit reeds impliceerden. Gaan we echter in de definitie van een inverse matrix wel uit van een vierkante matrix, dan kan worden volstaan met één der vergelijkingen $AA^{-1}=I$ of $A^{-1}A=I$ (zie opm. blz.20). Immers uit bijv. $A^{-1}A=I$ volgt, dat de rijen van I lineaire combinaties zijn van de rijen van A, zodat A dan volgens stelling 5.14 noodzakelijk een rang moet hebben gelijk aan de orde. Er bestaat dan dus een matrix B met de eigenschap AB=I. Doch dan geldt ook $A^{-1}(AB)=A^{-1}I=A^{-1}$, zodat $B=A^{-1}$ en dus $AA^{-1}=I$.

In § 4 definieerden we een singuliere matrix als een vierkante matrix, die geen inverse heeft. Ook niet-vierkante matrices hebben volgens het bovenstaande geen inverse.
Indien we nu voor het vervolg afspreken, dat een singuliere matrix, een matrix is (vierkant of niet-vierkant) die geen inverse bezit, dan bestaat de verzameling der singuliere matrices dus uit de verzameling der niet-vierkante matrices, aangevuld met de verzameling der vierkante matrices, die geen inverse bezitten.
Deze zelfde verzameling verkrijgen we als we de matrices beschouwen, waarvan het stelsel der rijvectoren en dat der kolomvectoren niet beide lineair onafhankelijk zijn. Ook op deze wijze hadden de singuliere matrices dus gedefinieerd kunnen worden.
Een niet-singuliere matrix kunnen we als gevolg hiervan, definieren als een matrix, waarvan zowel het stelsel der rijvectoren als dat der kolomvectoren lineair onafhankelijk zijn. Een niet-singuliere matrix wordt dan dus gedefinieerd als een vierkante matrix met rang gelijk aan de orde. Deze matrix heeft een inverse. Een

niet-singuliere matrix is dus een (volgens het bovenstaande noodzakelijk vierkante) matrix, die een inverse bezit (onze oude definitie van § 4).

We merken nog op, dat de stellingen 6.13 t/m 6.17 van deze paragraaf ook geldig blijven als we de nieuwe definitie van een singuliere matrix gebruiken. Het product van singuliere matrices behoeft niet singulier te zijn. Wel geldt, zoals gemakkelijk valt te verifieren:

Stelling 6.19. Het product van singuliere n-matrices is singulier.

Een nulmatrix O definieerden we als een matrix, waarvan alle elementen nul zijn. Voor iedere matrix A geldt, dat $AO=OA=O$, waarbij ondersteld wordt, dat de nulmatrices in de producten van zodanige typen zijn, dat matrixvermenigvuldiging mogelijk is. Dus als A van het type (m,n) is, dan zijn de drie O's in de bovenstaande vergelijking onderscheidenlijk van het type (n,n), (m,m) en (m,n). Opgemerkt dient te worden, dat terwijl een eenheidsmatrix altijd vierkant is, dit voor een nulmatrix niet het geval behoeft te zijn.

Definitie. Een matrix $A\neq O$ heet nuldeler, indien er een matrix $B\neq O$ bestaat, zodanig, dat $AB=O$ en/of een matrix $C\neq O$, zodanig dat $CA=O$.

Een nuldeler is een singuliere matrix en omgekeerd, m.a.w.
Stelling 6.20. Een matrix $\neq O$ is nuldeler dan en slechts dan als deze singulier is.
Bewijs: Laat $A=(a_{ij})$ een singuliere matrix $\neq O$ zijn van het type (m,n) en onderstel eerst, dat $m \leqslant n$. Volgens stelling 5.11 geldt, dat het stelsel vergelijkingen

$$(6.11)' \quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

altijd andere dan de nuloplossingen bezit. Laat B een matrix zijn van het type (n,r), waarvan alle kolomvectoren oplossingsvectoren ($\neq$ nulvector) zijn van $(6.11)'$. Dan is $B\neq O$ en $AB=O$, zodat A dan nuldeler is.
Als $n<m$ beschouwen we de matrix A^T, waarvan het aantal rijen kleiner is dan het aantal kolommen. Er bestaat dan dus volgens het voorgaande een matrix $C^T\neq O$, zó dat $A^TC^T=O$, dus $(CA)^T=O$ en $CA=O$, zodat A

dan ook nuldeler is.
Opmerking. Als $m=n$, dan is er zeker een matrix B en een matrix C, beide $\neq 0$, zó dat $AB=0$ en $CA=0$.

Het omgekeerde van de stelling volgt uit het feit, dat de matrixvergelijking $AB=0$ impliceert, dat iedere kolomvector van B oplossing is van (6.11)'. Als A niet-singulier is, dan heeft dit stelsel alleen de nuloplossing en dan zou gelden $B=0$. Geldt $CA=0$ en A niet-singulier, dan zou eveneens $C=0$ moeten zijn. A kan dus slechts singulier zijn. Overigens volgt dit resultaat ook reeds uit de vergelijkingen $AB=0$ en $CA=0$, indien we beide leden van deze vergelijkingen vóór resp. achter met A^{-1} vermenigvuldigen. Uit deze vergelijkingen volgt dan $B=0$ en $C=0$, zodat A dan geen nuldeler kan zijn.

<u>Voorbeeld 14</u>. De matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ is singulier, omdat $2(2,-5,3) + 3(1,4,-1) = (7,2,3)$.

Aan de vergelijking $AB=0$ en $CA=0$ kan dan worden voldaan door de niet-nulmatrices $B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ of door

$B=C= \begin{pmatrix} 14 & 21 & -7 \\ -10 & -15 & 5 \\ -26 & -39 & 13 \end{pmatrix}$, zodat A dus zeker een nuldeler is, in overeenstemming met stelling 6.20.

Na deze korte uitweiding over matrices keren we thans weer terug tot de algemene determinantentheorie.
We voeren eerst enige nieuwe begrippen in:

<u>Definities</u>. Een <u>submatrix</u> of <u>deelmatrix</u> van een matrix A, is een matrix, die uit A ontstaat door in A enige rijen en/of kolommen, weg te laten. Bijzonder belangrijk zijn de vierkante deelmatrices; hun determinanten heten <u>onderdeterminanten</u> van de matrix A.
Onder de <u>deelmatrix</u> A_{ij} verstaan we de matrix, die uit A ontstaat door de i^e rij en de j^e kolom weg te laten.
Is de matrix A vierkant, dan is A_{ij} eveneens vierkant. Det. A_{ij} heet de <u>onderdeterminant van A bij het element</u> a_{ij}.

We hebben reeds opgemerkt, dat det.A een homogene lineaire functie is van zijn element a_{ij}. Beschouwen we in het bijzonder een bepaalde rij, bijv. de i^e rij, dan kunnen we voor det.A schrijven:

$$\text{(6.12)} \qquad \det.A = m_{i1}a_{i1}+\ldots+m_{ij}a_{ij}+\ldots+m_{in}a_{in}.$$

m_{ij} heet de coefficient van a_{ij} in det.A of de minor van A bij het element a_{ij}.
Wat is het verband tussen de det.A_{ij} en m_{ij}?
Om dit te vinden gaan we in det.A de i^e rij achtereenvolgens met alle erboven staande rijen verwisselen tot zij bovenaan staat, en daarna de j^e kolom met alle links daarvoor staande kolommen tot zij vooraan staat. De matrix, die nu ontstaat, noemen we B. Deze matrix heeft het element a_{ij} linksbovenaan. Volgens stelling 6.5 geldt dan (wegens i-1 rijverwisselingen en j-1 kolomverwisselingen)

(6.13) $$\det.B = (-1)^{i+j-2}\det.A = (-1)^{i+j}\det.A.$$

Nu is duidelijk, dat in det.B de som der producten, die a_{ij} bevatten, juist gelijk is aan a_{ij} det.A_{ij}.
Volgens (6.13) is dan in det.A de som der producten, die a_{ij} bevatten, gelijk aan $(-1)^{i+j}a_{ij}$ det.A_{ij}, dus volgens (6.12) geldt:

(6.14) $$m_{ij} = (-1)^{i+j}\det.A_{ij} ,$$

waarmede het verband gevonden is. De coëfficiënt van a_{ij} in det.A is dus $(-1)^{i+j}$det.A_{ij}. Schrijven we nu weer voor det.A: $|A|$ en voor det.A_{ij}: $|A_{ij}|$, dan geldt dus volgens (6.12) en (6.14), als A een vierkante matrix is:

(6.15) $$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}|+(-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}|+\ldots+(-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}| ,$$

en evenzo, bij verwisseling van de rol der rijen en die der kolommen:

(6.15)' $$|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}|A_{1j}|+(-1)^{2+j}a_{2j}|A_{2j}|+\ldots+(-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}| .$$

Wij hebben hier det.A ontwikkeld naar de i^e rij (vgl.(6.15)), resp. naar de j^e kolom (vgl.(6.15)').
Bewezen is dus:

Stelling 6.21. De determinant van een matrix is gelijk aan de som der producten, die men verkrijgt door ieder element van zekere rij of kolom met zijn eigen minor te vermenigvuldigen.

Een belangrijke aanvulling van stelling 6.21 geeft:

Stelling 6.22. Vermenigvuldigt men de elementen uit zekere rij (kolom) van een matrix met de minoren der overeenkomstige elementen van een andere rij (kolom), dan is de som der producten nul.

Bewijs: Stel, dat wij van de matrix A de som van de producten bepalen van de elementen van de i^e rij met de minoren van de overeenkomstige elementen uit de k^e rij ($i \neq k$), dan is de uitkomst volgens stelling 6.21 gelijk aan de determinant van de matrix A', die uit A ontstaat door de k^e rij te vervangen door de i^e rij en de i^e rij zo te laten. A' heeft dus twee gelijke rijen en dus geldt volgens stelling 6.6, det.A'=0, waarmede het bewijs geleverd is.
Het bewijs verloopt analoog voor kolommen i.p.v. rijen.
In formule, als $i \neq k$:

$$(6.16) \quad (-1)^{k+1} a_{i1} \left|A_{k1}\right| + (-1)^{k+2} a_{12} \left|A_{k2}\right| + \ldots + (-1)^{k+n} a_{in} \left|A_{kn}\right| = 0$$

en analoog, als $j \neq k$

$$(6.16)' \quad (-1)^{1+k} a_{1j} \left|A_{1k}\right| + (-1)^{2+k} a_{2j} \left|A_{2k}\right| + \ldots + (-1)^{n+k} a_{nj} \left|A_{nk}\right| = 0.$$

Stelling 6.21 en 6.22 kan zeer kort in formule worden weergegeven door invoering van het Kronecker delta-symbool δ_{ij}, gedefinieerd als 1 voor $i=j$ en 0 voor $i \neq j$. Dan geldt dus volgens de vergelijkingen (6.15), (15)', (16), (16)':

$$(6.17) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, m_{jk} = |A|\, \delta_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, m_{ik} = |A|\, \delta_{jk} \end{cases}$$

<u>Berekening van de inverse A^{-1} van een matrix A.</u>

1. Het inwending product van de i^e rij van A met de i^e kolom van A^{-1} moet 1 zijn, dus $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a^{-1}_{ki} = 1$.

2. Het inwendig product van de i^e rij van A met de j^e kolom van A^{-1} moet 0 zijn voor $i \neq j$, dus $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a^{-1}_{kj} = 0$.

Uit (6.17) volgt, dat hieraan voldaan is, als men

$$(6.18) \quad a^{-1}_{kj} = \frac{m_{jk}}{|A|}$$

neemt, dus als men voor de j^e <u>kolom</u> van A^{-1} kiest de minoren van de elementen der j^e <u>rij</u> van A, alle elementen gedeeld door $|A|$.
$|A|$ is ongelijk aan 0, wegens stelling 6.13.
Eenzelfde redenering geldt als men de rol der rijen en die der kolommen verwisselt.

Daar A volgens § 4, blz.20, hoogstens één inverse kan hebben, volgt hieruit:

Stelling 6.23. De j^e kolom (rij) van de inverse van een niet-singuliere matrix A bestaat uit de minoren van de elementen der j^e rij (kolom) van A, alle gedeeld door $|A|$.

Berekening van een determinant. Toepassing van de determinantenregels hierop geeft zeer veel rekenwerk, omdat reeds bij betrekkelijk kleine orden van de determinant het aantal termen zeer groot wordt (zie bijv. (6.7)). Door stelling 6.21 wordt nu de berekening van een determinant van de n^e orde teruggebracht tot de berekening van de minoren der elementen van zekere rij of kolom, dus tot determinanten van de $(n-1)^e$ orde. Combineert men deze methode met de toepassing van stelling 6.7, dan kan deze methode zeer veel verbeterd worden. Het streven is, zoveel mogelijk elementen uit een bepaalde rij of kolom nul te maken, waardoor een groot aantal termen van de determinant zal wegvallen. Aan het volgende voorbeeld zullen we dit verduidelijken.

Voorbeeld 15.
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \\ 6 & -5 & -5 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 4 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -5 & -5 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} 4 \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 21 & 5 & -5 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=}$$

$$\overset{(5)}{=} -4 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 21 & 5 \end{vmatrix} = -4(-10+21) = -44,$$

waarbij de bewerkingen (1) t/m (5) resp. voorstellen:

(1): rij 1-rij 2; rij 4 - 2x rij 2 (stelling 6.7);
(2): ontwikkelen naar de tweede kolom (stelling 6.21);
(3): factor 2 uit de tweede rij (stelling 6.2);
(4): kolom 1-3 kolom 3; kolom 2-2 kolom 3 (stelling 6.7);
(5): ontwikkelen naar de tweede rij (stelling 6.21).

Definitie. Als r de rang van de matrix A is, dan wordt onder een hoofdmatrix van A verstaan, elke deelmatrix van A van de r^e orde, waarvan de determinant $\neq 0$ is.

Opmerking. Als deelmatrix van een matrix A kan hier en in het vervolg (zo niet anders is vermeld), eventueel ook optreden de matrix A zelf. Men spreekt dan van een oneigenlijke deelmatrix.

Dat een matrix met rang r wel steeds een hoofdmatrix bezit, doch nimmer een matrix van orde $> r$, waarvan de determinant $\neq 0$ is, is de inhoud van de volgende stelling:

Stelling 6.24. Een matrix A heeft dan en slechts dan de rang r, als A minstens één niet-singuliere deelmatrix van de orde r bezit, doch niet een niet-singuliere deelmatrix van hogere orde.

Bewijs: Laat B een niet-singuliere deelmatrix van A zijn, van zo groot mogelijke orde s. We zullen bewijzen, dat $s=r$ (=rang van A).

De s rijen van A, die de s rijen van B bevatten, moeten lineair onafhankelijk zijn, want als ze lineair afhankelijk zouden zijn, dan waren de rijvectoren van B dat ook, waardoor B singulier.
A bevat dus minstens s lineair onafhankelijke rijvectoren, zodat geldt $s \leq r$.
We gaan nu aantonen, dat ieder stelsel van s+1 rijen van A lineair afhankelijk is. Laat namelijk C een deelmatrix van A zijn, gevormd uit s+1 rijen van A. De rang van C is kleiner dan s+1, want anders zou C juist s+1 lineair onafhankelijke kolomvectoren bevatten, zodat er dan een niet-singuliere deelmatrix van A zou moeten bestaan van orde s+1 in strijd met hetgeen, waar we vanuit zijn gegaan. s+1 rijen moeten dus lineair afhankelijk zijn. Ieder stelsel van s+1 rijen van A is dus lineair afhankelijk en daarom geldt $r < s+1$, zodat samenvattend geldt: $s \leq r < s+1$ en dus $s=r$, hetgeen te bewijzen was.

Opmerking. Veelal wordt de rang van een matrix A gedefinieerd als de orde van de grootst mogelijke niet-singuliere deelmatrix van A. Stelling 6.24 geeft weer, dat deze definitie aequivalent is met de onze.
Stelling 6.24 wordt toegepast bij het zoeken naar een hoofdmatrix van een gegeven matrix A. Deze hoofdmatrix moet volgens genoemde stelling een niet-singuliere matrix zijn van zo hoog mogelijke orde. Willen we onderzoeken, of een niet-singuliere deelmatrix van A hoofdmatrix is, dan moet dus worden nagegaan of alle vierkante deelmatrices van A, waarvan de orde 1 hoger is, singulier zijn of,hier-

mede aequivalent, een determinant hebben gelijk aan 0. Is dit het geval, dan geeft de orde van die niet-singuliere deelmatrix van A dus juist de rang van A aan. Op deze wijze kan dus ook de rang van een matrix worden bepaald.
De volgende stelling zal het rekenwerk belangrijk kunnen vereenvoudigen:

Stelling 6.25. Is D een vierkante deelmatrix van A van de r^e orde, zodanig, dat det.$D \neq 0$, waarbij iedere $(r+1)$-matrix, die uit D door randen met een rij en een kolom uit A ontstaat, de determinant 0 heeft, dan geldt, dat iedere $(r+1)$-matrix van A de determinant 0 heeft (D is dan dus een hoofdmatrix van A).
Opmerking. Is A een (m,n)-matrix, dan wordt ondersteld, dat r niet gelijk is aan m of n.

Bewijs: Gemakshalve zullen we onderstellen, dat D gevormd wordt door de eerste r rijen en eerste r kolommen van A. We zullen nu aantonen, dat een willekeurige rij van A, stel de k^e, een lineaire combinatie is van de eerste r rijen van A, voorgesteld door:

$$\begin{matrix} a_{11}\dots a_{1r}\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1}\dots a_{rr}\dots a_{rn} \end{matrix}$$

Het volgende stelsel vergelijkingen in $p_1, p_2, \dots, p_r$:

$$\begin{cases} p_1 a_{11} + \dots + p_r a_{r1} = a_{k1} \\ \dots\dots\dots \\ p_1 a_{1r} + \dots + p_r a_{rr} = a_{kr} \\ \dots\dots\dots \\ p_1 a_{1n} + \dots + p_r a_{rn} = a_{kn} \end{cases}$$

heeft volgens stelling 5.10 altijd een oplossing.
Iedere rij van A is dus een lineaire combinatie van r rijen en dus geldt volgens stelling 5.14, dat ieder stelsel van r+1 rijen afhankelijk is. Volgens stelling 6.24 is dan ook iedere onderdeterminant van A met r+1 rijen gelijk aan 0, hetgeen te bewijzen was.

Voorbeeld 16. De matrix $A \equiv \begin{pmatrix} 12 & 5 & 9 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 8 & 19 \\ 13 & 6 & 7 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ heeft de rang 3, aangezien bijv. de onderdeterminant van de 3^e orde rechtsonder $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ ongelijk is aan 0, terwijl alle 6 determinanten, die uit randing van deze ontstaan met 1 rij en 1 kolom, n.l.

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 13 & 7 & 9 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 19 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 & 8 & 19 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 9 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

en $\begin{vmatrix} 12 & 9 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ gelijk zijn aan 0, zoals gemakkelijk is na te gaan. Een hoofdmatrix van A is dus bijv. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Opmerking. A bevat $\binom{6}{4} \times \binom{5}{4} = 75$ onderdeterminanten van de 4^e orde. We behoeven hier dus slechts van 6 determinanten het nul zijn te verifieren om tot het nul zijn van de overige 69 determinanten automatisch te kunnen besluiten.

In dit voorbeeld is gebruik gemaakt van de volgende stelling, die direct uit de stellingen 6.24 en 6.25 volgt:

Stelling 6.26. Een matrix A heeft dan en slechts dan de rang r als er een vierkante deelmatrix D bestaat van de orde r met det.$D \neq 0$, zodanig, dat geen der $(r+1)$-matrices, die uit D door randen met een rij en een kolom uit A ontstaan, een determinant $\neq 0$ heeft.

Opmerking. Ondersteld is $r > 0$. Het geval, dat $r=0$ treedt slechts op bij een nulmatrix.

Volgens de definitie op blz.59 is in stelling 6.26 D een hoofdmatrix van A. Stelling 6.26 houdt dus een zeer eenvoudig voorschrift in om een hoofdmatrix en dus ook de rang van een matrix te bepalen.

We zullen nu de ontwikkelde determinantentheorie toepassen op de theorie van stelsels lineaire vergelijkingen.

Eerst geven we een opsomming van de voor ons doel belangrijkste eigenschappen van deze stelsels, afgeleid in de vorige paragraaf:

E1. Een homogeen stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden, heeft dan en slechts dan een andere dan de nul-(of triviale) oplossing, als de kleine (of coëfficiënten-) matrix van het stelsel singulier is, d.i. als de determinant van deze matrix nul is.

E2. De oplossingsruimte van een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen met n onbekenden heeft de dimensie n-r, waarin r de rang van de kleine matrix is.

E3. Een niet-homogeen stelsel van lineaire vergelijkingen heeft dan en slechts dan een oplossing, als de rang van de kleine matrix gelijk is aan de rang van de grote (of aangevulde) matrix.

E4. Is $\bar{s}$ een vaste oplossingsvector van een niet-homogeen stelsel lineaire vergelijkingen en is $\bar{t}$ een oplossingsvector v.h.bijbehorende homogene (of gereduceerde) stelsel, dan is $\bar{s}+\bar{t}$ een oplossingsvector van het niet-homogene stelsel. Als $\bar{t}$ alle oplossingsvectoren van het gereduceerde stelsel doorloopt, dan doorloopt $\bar{s}+\bar{t}$ alle oplossingsvectoren van het niet-homogene stelsel.

E5. Een niet-homogeen stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden heeft dan en slechts dan één oplossing als de kleine matrix niet-singulier is.

De eigenschappen E1 t/m E5 zouden existentietheorema kunnen worden genoemd voor stelsels lineaire vergelijkingen, daar zij slechts voorwaarden aangeven voor het bestaan van oplossingen van deze stelsels, en ons niets vertellen over de methode om deze oplossingen te vinden.
De meeste methoden om een stelsel lineaire vergelijkingen op te lossen zijn variaties van de methode van successieve eliminatie der onbekenden. De determinantenstellingen 6.21 en 6.22 doen ons een middel aan de hand om langs systematische weg de oplossingen van een stelsel door middel van eliminatie der onbekenden te bepalen:

Beschouw eerst een stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden:

$$(6.19)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases} .$$

Is m_{ij} weer de uitdrukking voor de coëfficiënt van het element a_{ij} in de determinant van de coëfficiëntenmatrix A van het stelsel (6.19), dan vermenigvuldigen we de eerste vergelijking van (6.19) met m_{11}, de tweede vergelijking met m_{21},..., de n^e vergelij-

king met m_{n1} en tellen de resulterende vergelijkingen op.
Volgens (6.17) geldt nu, als $|A| = \det.A$:

(6.20) $$|A|x_1 = c_1m_{11}+c_2m_{21}+\ldots+c_nm_{n1}\ .$$

Het rechterlid van vergelijking (6.20) is de uitdrukking, die we krijgen, indien we de volgende determinant ontwikkelen naar de 1^e kolom:

$$A_1 = \begin{vmatrix} c_1a_{12}\ldots a_{1n} \\ c_2a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots \\ c_na_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}\ .$$

Indien we als vermenigvuldigers voor de vergelijkingen (6.19) achtereenvolgens nemen de coëfficiënten van de elementen van de tweede, derde,...,n^e kolom van $|A|$, ontstaan n-1 vergelijkingen, die samen met (6.20) als volgt kunnen worden uitgedrukt:

(6.21) $$|A|x_i = |A_i| \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

waarin A_i de matrix A is, als daarin de i^e kolom vervangen wordt door de kolomvector $\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ van de bekende termen van (6.19). Op deze wijze zijn alle onbekenden op één na (vergelijk blz.42 voor het geval n=3) tegelijk geëlimineerd.
Als nu $|A| \neq 0$, geven de vergelijkingen (6.21), indien we beide leden delen door $|A|$, de oplossing van het stelsel (6.19), omdat er in dit geval volgens eigenschap E5 (blz.63) juist één oplossing bestaat en iedere oplossing van (6.19) zeker een oplossing is van (6.21). Beschouw nu het algemene geval van een stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden:

(6.22) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = c_i \qquad (i=1,2\ldots,m).$$

Als de rang van de kleine matrix A en die van de grote matrix, aangeduid met A', niet gelijk zijn, zijn er volgens E3 geen oplossingen. Het stelsel is dan strijdig.
Onderstel nu, dat A en A' dezelfde rang hebben. Volgens stelling 6.24 heeft A een niet-singuliere deelmatrix van de orde r. Door zonodig de vergelijkingen van het stelsel anders te ordenen en de onbekendenanders te nummeren, kan worden aangenomen, dat de (r,r)-matrix in de linkerbovenhoek van A niet-singulier is. Aangezien de

matrix B, gevormd door de eerste r rijen van A' ook deze niet-singuliere deelmatrix bezit, volgt uit stelling 6.24, dat B de rang r heeft. Aangezien ook A' de rang r heeft zijn de laatste m-r rijen van A' lineaire combinaties van de eerste r, zodat de laatste m-r vergelijkingen van (6.22) lineaire combinaties zijn van de eerste r. Dus iedere oplossing van deze eerste r vergelijkingen is een oplossing van het gehele stelsel (6.22). Als we in de eerste r vergelijkingen van (6.22) aan $x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n$ willekeurige waarden toekennen, ontstaat een stelsel van r vergelijkingen in r onbekenden $x_1,x_2,\ldots,x_r$, waarvan de coëfficiëntenmatrix niet-singulier is en dat dus volgens E5 één oplossing heeft, welke oplossing bepaald kan worden met behulp van determinanten, zoals in het voorgaande is uiteengezet. De gevonden waarden van $x_1,x_2,\ldots,x_r$ tezamen met de toegekende waarden aan $x_{r+1},\ldots,x_n$ geven een oplossing van de eerste r vergelijkingen en dus van het stelsel (6.22).

We krijgen dan voor elke keuze van waarden voor $x_{r+1},\ldots,x_n$ een oplossing. $x_1,x_2,\ldots,x_r$ kunnen worden uitgedrukt in $x_{r+1},\ldots,x_n$ (d.m.v. lineaire (d.z. 1^e graads) functies), terwijl <u>alle</u> oplossingen van (6.22) worden verkregen door $x_{r+1},\ldots,x_n$ alle mogelijke waarden te geven. (vergelijk E2 en E4, blz.63).

De gevolgde methode voor het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen kan zowel worden toegepast op homogene als op niet-homogene stelsels. De vorm van de oplossing staat bekend als de <u>regel van Cramer</u>. Bij numerieke behandeling zal men vaak en in ieder geval als het aantal vergelijkingen vrij groot is, afwijken van deze oplossingsmethode. In de practijk namelijk zal de uitwerking der determinanten niet zelden buitengewoon bewerkelijk worden, zodat dan de directe oplossingsmethode door eliminatie op de gebruikelijke wijze, sneller tot het doel voert. Vaak ook gebruikt men geraffineerde directe methoden (bijv. de relaxatie-methode), die met minder werk de oplossing leveren. Bij de behandeling van de numerieke wiskunde wordt op deze zaak nader ingegaan.

Zoals we gezien hebben is een stelsel lineaire vergelijkingen dan en slechts dan oplosbaar als de rang van A gelijk is aan de rang r' van A'. Heeft A de rang r, dan bezit A volgens stelling 6.24 een niet-singuliere deelmatrix, die we H zullen noemen, van de orde r. Door deze matrix te randen met een rij en een kolom van A ontstaan matrices waarvan de determinant gelijk is aan 0. Volgens stelling 6.26

heeft dus A' dan en slechts dan een rang r', die gelijk is aan r, als alle matrices, die uit H ontstaan door randing met een rij van A' en de kolomvector, gevormd door de bekende termen, de determinant 0 hebben.
We geven nu de volgende definitie:
Definitie. Onder een karakteristieke matrix van een stelsel lineaire vergelijkingen verstaan we een matrix, die uit een hoofdmatrix H van de coëfficiëntenmatrix A ontstaat, door H te randen aan de onderkant met de coëfficiënten van een der vergelijkingen, waarvan geen coëfficiënten in H staan, en aan de rechterkant met de bekende termen.
De determinant van een karakteristieke matrix is een karakteristieke determinant.

Bij een bepaalde hoofdmatrix behoren dus m-r karakteristieke determinanten.
Uit het voorgaande volgt, dat het nul zijn van alle karakteristieke determinanten een nodige en voldoende voorwaarde is, voor het oplosbaar zijn van een stelsel lineaire vergelijkingen.

Samengevat geldt dus:

Stelling 6.27. Is gegeven een stelsel lineaire vergelijkingen en is H een hoofdmatrix van de coëfficiëntenmatrix A, dan geldt:

a) Is een der karakteristieke determinanten niet nul, dan heeft dit stelsel geen oplossing (de vergelijkingen zijn strijdig).
b) Zijn wel alle karakteristieke determinanten nul, dan heeft het stelsel oplossingen en wel kan men aan n-r onbekenden, waarvan geen coëfficiënten in H staan, willekeurige waarden toekennen; de overige r onbekenden, waarvan wel coëfficiënten in H staan, zijn lineaire functies van de eerstgenoemde n-r.

Deze stelling wordt wel de stelling van Rouché genoemd.
Om de oplossingen van het stelsel te vinden, behoeft men slechts de r vergelijkingen te beschouwen, waarvan de coëfficiënten in H staan. In deze vergelijkingen brengt men alle onbekenden waarvan geen coëfficiënten in H staan, naar het rechterlid en lost daarna met behulp van de regel van Cramer, de overige onbekenden op.

Voorbeeld 17.

Los op het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ \quad\;\; 5x_2 - x_3 = -9 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} .$$

Oplossing: Men heeft hier

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10;$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ -9 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -30; \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & -9 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20;$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & -9 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 10.$$

De regel van Cramer levert dus:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 3; \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = -2 \text{ en } \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = -1.$$

Voorbeeld 18.

Los op het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\;\; x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \quad\;\;\quad\;\; x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} .$$

Oplossing:

De coëfficiëntenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ heeft de rang 3, een

hoofdmatrix is $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, de determinant hiervan is gelijk aan 1.

x_1, x_2 en x_3 kunnen we dan in x_4 en x_5 als volgt uitdrukken: (regel van Cramer):

$$x_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -x_4 & 1 & -1 \\ 2x_4-x_5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x_5 \; ;$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x_4 & -1 \\ 0 & 2x_4-x_5 & 1 \end{vmatrix} = x_4 - x_5 \; ;$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -x_4 \\ 0 & 0 & 2x_4-x_5 \end{vmatrix} = 2x_4 - x_5 .$$

Dus $x_1=-x_5$; $x_2=x_4-x_5$; $x_3=2x_4-x_5$.
Een tweetal onbekenden kan steeds willekeurig gekozen worden, behalve echter x_1 en x_5 beide tegelijk, want aan $x_1+x_5=0$ moet noodzakelijk voldaan worden. ($1^e+2x2^e+3^e$ vergelijking $\longrightarrow x_1+x_5=0$).

Voorbeeld 19. Los op het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 1 \\ bx_1 + cx_2 + dx_3 + ax_4 = 1 \\ cx_1 + dx_2 + ax_3 + bx_4 = 1 \\ dx_1 + ax_2 + bx_3 + cx_4 = 1 \end{cases} .$$

Oplossing:

De determinant $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$ blijkt bij uitwerking gelijk te zijn aan $-(a+b+c+d)(a-b+c-d)\left\{(a-c)^2+(b-d)^2\right\}$.

a) Is $a+b+c+d \neq 0$ en $a-b+c-d \neq 0$, terwijl niet gelijktijdig $a=c$ en $b=d$, dan is $|A| \neq 0$ (bij reëel ondersteIde coëfficiënten). Er is dan één oplossing en daar de vergelijkingen bij cyclische verwisseling der onbekenden niet veranderen, is de oplossing dan:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{a+b+c+d} .$$

b) Is $a+b+c+d=0$, dan is het stelsel strijdig, zoals direct blijkt bij optelling der 4 vergelijkingen.

c) Is $a+c=b+d\neq 0$, dus $d=a-b+c$, dan is $|A|=0$ en $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & a \end{vmatrix} =$
$= -(a+c)\left\{ (a-b)^2+(b-c)^2 \right\}$, welke determinant dus $\neq 0$ is (hoofddeterminant van A), tenzij $a=b=c$ (en dus $=d$). Zijn dus a,b,c en d niet alle gelijk, dan kan men x_4 willekeurig kiezen (het stelsel is oplosbaar want de 4e vergelijking is de som van de eerste en de derde verminderd met de tweede vergelijking, karakteristieke determinant dus 0). Men vindt dan: $x_1=x_3=\frac{1}{a+c}-x_4$; $x_2=x_4$. Even goed had men x_1 of x_3 willekeurig kunnen kiezen.

d) Is $a=c$ en $b=d$, terwijl $a^2\neq b^2$, dan vindt men, dat de karakteristieke determinanten 0 zijn en $x_1+x_3=x_2+x_4=\frac{1}{a+b}$, waarin x_1 of x_3 willekeurig kan worden aangenomen en evenzo x_2 of x_4.

e) Is $a=b=c=d\neq 0$, dan heeft men $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{a}$. Drie der onbekenden kunnen willekeurig worden aangenomen.

In het geval van een homogeen stelsel zijn alle karakteristieke determinanten steeds nul, zodat dit stelsel dan steeds oplosbaar is (een triviaal resultaat, want altijd is er de nuloplossing). Een belangrijk bijzonder geval treedt bij een homogeen stelsel op als $r=m=n-1$. Een der onbekenden kan dan willekeurig gekozen worden. Stel bijv. x_n. De andere onbekenden worden homogene lineaire functies van x_n, dus $x_i=Cx_n$. Hierdoor is de verhouding der onbekenden dus bepaald.

Voorbeeld 20.
Los op het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases},$$

Oplossing: $n=3$; $m=2$, $r=2$; een hoofdmatrix is $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

We vinden dan, volgens de regel van Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & 2 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5}x_3;\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 3 & x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{5}x_3,$$

zodat $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 2 : 5$.

Hetzelfde treedt uiteraard op bij een stelsel, waarvan de coëfficiëntenmatrix vierkant is, met rang 1 lager dan de orde, zoals bijv. in het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 21.

Los op het stelsel:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} .$$

Oplossing: De determinant van de matrix

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{is } 0.$$

Een hoofdmatrix van A is $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dan geldt dus volgens de regel van Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -x_3 & -5 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{3} x_3 ; \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -x_3 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3} x_3 ,$$

dus $x_1 : x_2 : x_3 = 2 : 1 : 3$.

Stelsels lineaire vergelijkingen kunnen door middel van matrices zeer kort worden uitgedrukt:

Het stelsel vergelijkingen $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = c_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$ is op grond van de definitie van het matrixproduct (blz.16) gelijkwaardig aan de matrixvergelijking:

$$(6.23) \qquad AX^T = C^T,$$

waarin A weer de coëfficiëntenmatrix (a_{ij}) voorstelt, X de matrix is, die we op willen lossen, bestaande uit 1 rij van n elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, te identificeren met de (rij)vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en C de matrix, bestaande uit 1 rij van m elementen $c_1, c_2, \ldots, c_m$, te identificeren met de (rij)vector $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ (vergelijk § 3, (3.4)). X^T en C^T zijn dus matrices met 1 kolom (kolomvectoren).

Het oplossen van het stelsel vergelijkingen is hiermede teruggebracht tot het oplossen van de matrixvergelijking (6.23) naar X als A en C gegeven zijn. Als m=n en A niet-singulier, dan kan dit gebeuren door de beide leden van (6.23) te vermenigvuldigen met A^{-1}, die we op blz.58 hebben leren berekenen. De oplossing van (6.23) is dan

$$X^T = A^{-1}C^T \quad (\text{of } X=C(A^{-1})^T) \quad . \tag{6.24}$$

Uit (6.18) en (6.24) volgt:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-1} c_j = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} m_{ji} c_j \quad (i,j=1,2,\ldots,n) \; .$$

$\sum_{j=1}^{n} m_{ji} c_j$ is de waarde van de determinant van de matrix, die men uit A verkrijgt door hierin de i^e kolom te vervangen door de kolomvector C^T, welke determinant we genoemd hebben $|A_i|$, zodat $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$, in overeenstemming met (6.21).

De regel van Cramer kan ook toegepast worden bij het oplossen van een stelsel vectorvergelijkingen. Het is duidelijk, dat indien gevraagd wordt om het stelsel vectorvergelijkingen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j = \bar{c}_i \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

op te lossen naar de vectoren $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n$ bij gegeven vectoren $\bar{c}_1,\bar{c}_2,\ldots,\bar{c}_m$ en coëfficiënten a_{ij}, dat de vectoren $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n$ met behulp van de regel van Cramer op analoge wijze berekend kunnen worden als de $x_1,x_2,\ldots,x_n$ uit het stelsel (6.22). Verkeren we bijv. in het geval, dat de matrix (a_{ij}) niet-singulier is, dan is het resultaat dat de vectoren $\bar{x}_j$ homogeen lineair kunnen worden uitgedrukt in de vectoren $\bar{c}_i$. We lichten dit toe aan een voorbeeld:

Voorbeeld 22. Laat $\bar{e}_1=(1,0,0)$, $\bar{e}_2=(0,1,0)$ en $\bar{e}_3=(0,0,1)$ basisvectoren zijn van een R_3. Als gegeven is het stelsel vectorvergelijkingen:

$$\begin{cases} 2\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3 = \bar{f}_1 \\ \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 = \bar{f}_2 \\ 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 = \bar{f}_3 \end{cases}$$

dan kunnen we met behulp van de regel van Cramer de basisvectoren uitdrukken in $\bar{f}_1,\bar{f}_2$ en $\bar{f}_3$ en wel als volgt:

$$\bar{e}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{f}_1 & 5 & -3 \\ \bar{f}_2 & -1 & 2 \\ \bar{f}_3 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} \; ; \quad \bar{e}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \bar{f}_1 & -3 \\ 1 & \bar{f}_2 & 2 \\ 3 & \bar{f}_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} \; ,$$

$$\bar{e}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & \bar{f}_1 \\ 1 & -1 & \bar{f}_2 \\ 3 & -2 & \bar{f}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} \; .$$

De betekenis van de determinanten in de tellers der rechterleden, die elk een kolom vectoren bevatten, is duidelijk. Berekening geschiedt overeenkomstig de berekening van gewone getallendeterminanten
We vinden dan:

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{28}\,(3\bar{f}_1+\bar{f}_2+7\bar{f}_3);\quad \bar{e}_2 = \frac{1}{28}\,(5\bar{f}_1+11\bar{f}_2-7\bar{f}_3);\quad \bar{e}_3 = \frac{1}{28}(\bar{f}_1+19\bar{f}_2-7\bar{f}_3).$$

In de analytische meetkunde wordt veelvuldig gebruik gemaakt van determinanten. Is bijv. in een R_3 een parametervoorstelling van een plat vlak α op punt en vlakstelling (vergelijk (1.15)):

$$\bar{x} = \bar{p} + \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} \; .$$

Dit betekent hetzelfde als de drie getallenvergelijkingen:

$$\begin{cases} a_1\lambda + b_1\mu - x_1 + p_1 = 0 \\ a_2\lambda + b_2\mu - x_2 + p_2 = 0 \\ a_3\lambda + b_3\mu - x_3 + p_3 = 0 \end{cases} \; .$$

Een punt X ligt dan en slechts dan in α als dit stelsel vergelijkingen in λ en μ een oplossing heeft. ($OX = \bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$).
Zijn $\bar{a}$ en $\bar{b}$ niet evenwijdig, dan is de rang van de kleine matrix

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ gelijk aan 2.

De voorwaarde voor het oplosbaar zijn is dan volgens stelling 6.2

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x_1-p_1 \\ a_2 & b_2 & x_2-p_2 \\ a_3 & b_3 & x_3-p_3 \end{vmatrix} = 0$$. Dit is de vergelijking van het vlak α.

Ontwikkelt men deze determinant naar de laatste kolom, dan blijkt dat de vergelijking van een plat vlak een vergel. van de 1^e graad is in de veranderlijken x_1, x_2 en x_3. Het is gemakkelijk te bewijzen, dat ook iedere vergelijking van de eerste graad een plat vlak voorstelt.

Is α door drie vrijgelegen punten P,Q en R gegeven, dan nemen we $\overline{a}=\overline{q}-\overline{p}$ en $\overline{b}=\overline{r}-\overline{p}$, waardoor de vergelijking van het platte vlak overgaat in

$$\begin{vmatrix} q_1-p_1 & r_1-p_1 & x_1-p_1 \\ q_2-p_2 & r_2-p_2 & x_2-p_2 \\ q_3-p_3 & r_3-p_3 & x_3-p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Door de determinant in het linkerlid om te vormen, vinden we voor de vergelijking van het vlak PQR in R_3 de vergelijking:

$$(6.25) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & x_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad .$$

(Het linkerlid van (6.25) is een functie van de 1e graad in x_1, x_2 en x_3; (6.25) stelt dus een plat vlak voor en aangezien aan deze vergelijking voldaan kan worden door voor x_i te substitueren p_i, q_i of r_i (de determinant in het linkerlid van (6.25) heeft dan 2 gelijke kolommen) liggen de punten P,Q en R in dat vlak, zodat (6.25) dus inderdaad het vlak PQR voorstelt).

Opmerking. De in deze paragraaf beschreven methode voor het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen met behulp van determinanten, geniet bij niet al te grote stelsels (zie opm. blz.65) soms de voorkeur boven de gewone eliminatie-methode ("schoonvegen" van kolommen van de bij het stelsel behorende matrices, § 5 blz.30 e.v.). Met name zal de determinantenmethode met vrucht kunnen worden toegepast bij het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen van niet te ingewikkelde vorm, waarbij de coëfficiënten en/of de bekende termen variabele grootheden voorstellen, die in onderling verband staan, en waarbij het de bedoeling is de bijzondere gevallen, die zich kunnen voordoen nader te onderscheiden, zoals dit bijv. het geval was in Voorbeeld 19, blz.68. De bij de oplossing van het in dit voorbeeld optredende stelsel te onderscheiden gevallen a) t/m e) zouden veel minder eenvoudig zijn afgeleid indien de gewone eliminatie-methoden waren toegepast. De determinanten-methode heeft in het algemeen dat voordeel, dat bij toepassing van stelsels lineaire vergelijkingen op systematische wijze de oplossingen (zo deze bestaan) kunnen worden afgeleid. Bovendien kan volgens een eenvoudig procédé het stelsel op strijdigheid worden onderzocht, namelijk door berekening van de karakteristieke determinanten.

Alvorens nu over te gaan tot het bewijs van de productstelling van determinanten (de determinant van het product van twee vierk. matrices is het product van de determinanten van die matrices), voeren we eerst nog enige nieuwe begrippen in.

We definiëren zes typen van operaties op een matrix A, die we zullen noemen elementaire transformaties. Hieronder worden verstaan de volgende transformaties:

1a. verwisseling van twee rijen van A;
1b. verwisseling van twee kolommen van A;
2a. optelling van een met een factor vermenigvuldigde rijvector van A bij een andere;
2b. optelling van een met een factor vermenigvuldigde kolomvector van A bij een andere;
3a. vermenigvuldiging van een rijvector van A met een factor $\neq 0$;
3b. vermenigvuldiging van een kolomvector van A met een factor $\neq 0$.

Zoals we gezien hebben in § 5 laten deze elementaire transformaties de rang van een matrix invariant.

Definitie. Een matrix A heet gelijkwaardig (of equivalent) met een matrix B als A in B getransformeerd kan worden door een eindig aantal achter elkaar uitgevoerde elementaire transformaties. We schrijven $A \sim B$ als A gelijkwaardig is met B.

Stelling 6.28. a) voor elke matrix A geldt $A \sim A$;
b) als $A \sim B$, dan $B \sim A$;
c) als $A \sim B$ en $B \sim C$ dan $A \sim C$.

Bewijs: a) en c) zijn direct duidelijk vanwege de definitie van gelijkwaardigheid. Om b) te bewijzen hebben we slechts aan te tonen, dat elke elem. transformatie T "opgeheven" kan worden door een elementaire transformatie T^{-1}, de inverse van T. Bijv. is de inverse van de transformatie, die twee rijen verwisselt de transformatie die dezelfde verwisseling uitvoert. Als T de transformatie is die k maal de j^e rijvector optelt bij de i^e, dan bestaat de inverse transformatie T^{-1} uit de optelling van $-k$ maal de j^e rijvector bij de i^e. Als T de transformatie is die een rijvector vermenigvuldigt met een factor $k \neq 0$, dan is T^{-1} de transformatie die dezelfde rijvector met $\frac{1}{k}$ vermenigvuldigt. Als A nu wordt getransformeerd in B door achtereenvolgens de transformaties $T_1, T_2, \ldots, T_m$ uit te voeren, dan voeren de elementaire transformaties $T_m^{-1}, T_{m-1}^{-1}, \ldots, T_1^{-1}$ blijkbaar B in A over, zodat dus b) geldt.

De drie wetten a), b) en c) van stelling 6.28 heten resp. de reflexieve, de symmetrische en de transitieve wet. Iedere betrekking, gedefinieerd voor een stelsel getallen of voor andere mathematische grootheden, die zowel reflexief als symmetrisch en transitief is, heet een equivalentie-relatie. De eenvoudigste equivalentie-relatie is uiteraard de gelijkheidsrelatie, doch er zijn vele andere. Gelijkwaardigheid van matrices is volgens de voorgaande stelling een equivalentie-relatie.

Voorbeeld 23. Een matrix heet congruent met een matrix B als er een niet-singuliere matrix P bestaat zodanig, dat $PAP^T = B$.
Bewijs, dat deze congruentie van matrices een equivalentie-relatie is.

Bewijs: a) $IAI^T = A$ (I = eenheidsmatrix);
b) Uit $PAP^T = B$ volgt, daar P bij een congruentie een inverse heeft: $A = P^{-1}B(P^T)^{-1} = P^{-1}B(P^{-1})^T$ (zie opgave 41);
c) Uit $PAP^T = B$ en $QBQ^T = C$ volgt

$QPAP^TQ^T = C$ of $QPA(QP)^T = C$ (op grond van stelling 4.1, blz.19).

Als P en Q niet-singulier zijn, is QP ook niet-singulier, volgens stelling 6.17, blz.52.

In § 5 hebben we de rang van een matrix systematisch bepaald door schoonvegen van rijen of kolommen. Het principe was de matrix door toepassing van elementaire operaties en schrapping der nulrijen en nulkolommen te transformeren in een matrix van eenvoudige gedaante (blz.28). Indien we de nulrijen en de nulkolommen niet schrappen, is volgens § 5 iedere (m,n)-matrix A van de rang r door elementaire transformaties over te voeren in een matrix B van de volgende gedaante:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ eveneens samengesteld uit}$$

m rijen en n kolommen met de eerste r elementen in de hoofddiagonaal (gevormd door de elementen $b_{11}, b_{22}, b_{33}, \ldots$) gelijk aan 1; alle andere elementen van de matrix B zijn gelijk aan 0. Deze matrix B heet de <u>canonische vorm</u> van A die eenduidig bepaald is. De rang van een matrix is dus gelijk aan het aantal enen in de hoofddiagonaal van de bijbehorende canonische vorm.

De (5,4)-matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ heeft volgens Voorbeeld 4, § 5, blz.29

de rang 3. De canonische vorm van deze matrix is derhalve

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Stelling 6.29</u>. Twee matrices van hetzelfde type zijn dan en slechts dan gelijkwaardig als ze dezelfde rang hebben (of dezelfde canonische vorm).

<u>Bewijs</u>: Als $A \sim B$, dan hebben A en B volgens het voorgaande dezelfde rang. Omgekeerd geldt, dat als A en B dezelfde rang hebben met A' resp.

B' als canonische vormen, dat rang A'=rang A =rang B=rang B'. Doch vanwege de vorm van A' en B' moet gelden A'=B'. Op grond van stelling 6.28 c) volgt dan uit $A \sim A'$ en $B' \sim B$: $A \sim B$.

<u>Stelling 6.30</u>. Iedere elementaire transformatie van een matrix A kan verkregen worden door A te vermenigvuldigen met een niet-singuliere matrix.

<u>Bewijs</u>: Onderstel dat A een matrix is van het type (m,n).

a) Laat E_r een matrix voorstellen, die uit I_r (zie blz.54) ontstaat door verwisseling van de i^e en de j^e rij.

De matrix E_mA is dan de matrix, die uit A ontstaat door verwisseling van de i^e en de j^e rij; AE_n is de matrix, die uit A ontstaat bij verwisseling van de i^e en de j^e kolom. De matrices E_m en E_n zijn niet-singulier. Iedere elementaire transformatie van het type 1a kan dus verkregen worden door linksvermenigvuldiging van A met een niet-singuliere matrix; iedere elementaire transformatie van het type 1b kan verkregen worden door rechtsvermenigvuldiging van A met een niet-singuliere matrix.

b) Laat F_r een vierkante matrix van de orde r voorstellen met alle elementen van de hoofddiagonaal gelijk aan 1, het element in de i^e rij en de j^e $(i \neq j)$ kolom gelijk aan k en alle andere elementen gelijk aan 0. De matrix F_mA is dan de matrix, die uit A ontstaat door optelling van k maal de j^e rij van A bij de i^e; AF_n is de matrix, die uit A ontstaat door optelling van k maal de i^e kolom van A bij de j^e. De matrices F_m en F_n zijn niet-singulier. Iedere elementaire transformatie van het type 2a kan dus verkregen worden door linksvermenigvuldiging van A met een niet-singuliere matrix; iedere elementaire transformatie van het type 2b kan verkregen worden door rechtsvermenigvuldiging van A met een niet-singuliere matrix.

c) Laat G_r een vierkante matrix van orde r voorstellen met alle elementen van de hoofddiagonaal gelijk aan 1, uitgezonderd het element in de i^e rij en de i^e kolom, dat gelijk is aan k; alle andere elementen zijn gelijk aan 0.

De matrix G_mA is dan de matrix, die uit A ontstaat door vermenigvuldiging van de i^e rij met k; AG_n is de matrix, die uit A ontstaat door vermenigvuldiging van i^e kolom met k. Als $k \neq 0$ zijn G_m en G_n niet-singulier. Iedere elementaire transformatie van het type 3a kan dus verkregen worden door linksvermenigvuldiging van A met een niet-singuliere matrix; iedere elementaire transformatie van het type 3b

kan verkregen worden door rechtsvermenigvuldiging van A met een niet-singuliere matrix.
Hiermede is het bewijs geleverd.

Aangezien het product van twee niet-singuliere matrices weer niet-singulier is (stelling 6.17) geldt bovendien:

Stelling 6.31. Is A een willekeurige matrix, dan bestaan er niet-singuliere matrices P en Q, zodat $PAQ=A'$, waarin A' de canonische vorm is van A.

We merken op, dat de matrices P en Q in stelling 6.31 niet eenduidig bepaald zijn. Is bijv. R een niet-singuliere matrix, waarbij geldt $A'R=RA'$, dan geldt: $(R^{-1}P)A(QR)=R^{-1}A'R=A'$. Als A niet-singulier is, is $A'=$ zodat $(R^{-1}P)\ A(QR) = A'$ voor iedere niet-singuliere matrix R.

Definitie. Onder een elementaire matrix verstaan we iedere matrix van het type E,F of G $(k\neq 0)$, omschreven in het bewijs van stelling 6.30.

Stelling 6.32. Een matrix is dan en slechts dan niet-singulier als hij geschreven kan worden als het product van elementaire matrices.

Bewijs: Als A niet-singulier is, is zijn canonische vorm een eenheidsmatrix I. Volgens stelling 6.28 b) kan I in A getransformeerd worden door elementaire transformaties en dus geldt volgens stelling 6.31 $A=PIQ=PQ$, waarin P en Q de producten zijn van elementaire matrices.
Het omgekeerde geldt wegens stelling 6.17.

Stelling 6.33. Een matrix A is dan en slechts dan gelijkwaardig met een matrix B als er niet-singuliere matrices M en N bestaan, zodat $MAN=B$.

Bewijs: Als $A\sim B$, hebben beide matrices volgens stelling 6.29 dezelfde canonische vorm. Er bestaan dan dus niet-singuliere matrices P,Q,R en S zodanig, dat $PAQ=RBS$. Dus $B=R^{-1}PAQS^{-1}=MAN$, waarin $M=R^{-1}P$ en $N=QS^{-1}$ niet-singulier zijn, op grond van stelling 6.17. Volgens stelling 6.32 geldt omgekeerd dat als $B=MAN$, waarbij M en N niet-singulier zijn, M en N producten zijn van elementaire matrices, zodat A getransformeerd kan worden in B door een eindig aantal elementaire transformaties toe te passen, en dus $A\sim B$.

We kunnen nu op eenvoudige wijze de genoemde productstelling bewijzen. Eerst bewijzen we een speciaal geval:

Stelling 6.34. Als B een elementaire matrix van de orde n is en A een willekeurige vierkante matrix van de orde n, dan geldt

$$|AB| = |BA| = |A|\;|B|\;.$$

Bewijs: a) Als B een elementaire matrix is van het type E (blz:77), dan is $|B|=-1$ en $|AB|=|BA| = -|A|$, daar vermenigvuldiging van A met B verwisseling geeft van twee rijen of kolommen van A. De stelling geldt dus in dit geval.

b) Als B van het type F is, geldt $|B|=1$ en vermenigvuldiging van A met B heeft tot gevolg dat bij een rij of kolom van A een met een getal vermenigvuldigde andere rij of kolom wordt opgeteld. Dus $|AB| = |BA| = |A| = |A|\;|B|$.

c) Als B is van het type G, dan is $|B|=k$ en vermenigvuldiging van A met B heeft tot gevolg dat een rij of kolom van A met de constante k vermenigvuldigd wordt. Dus

$$|AB| = |BA| = k|A| = |B|\,|A|\;.$$

Hiermede is het bewijs voor het bijzondere geval geleverd.

Opmerking. Volgens stelling 6.28 b)en 6.31 is elke matrix A te schrijven in de vorm:

$$A = C_s \ldots C_1 A' D_1 \ldots D_t\;,$$

waarin de C's en D's elementaire matrices zijn en A' de canonische vorm van A.
Herhaalde toepassing van stelling 6.34 geeft

$$|A| = |C_s| \ldots |C_1|\;|A'|\;|D_1| \ldots |D_t|\;.$$

Daar elke C en elke D een determinant heeft $\neq 0$, geldt $|A| \neq 0$, dan en slechts dan als $|A'| \neq 0$. Nu geldt $|A'| \neq 0$ dan en slechts dan als de rang r van A gelijk is aan n (orde van A), dus dan en slechts dan als A niet-singulier is, zodat bewezen is, dat een matrix dan en slechts dan niet-singulier is als $|A| \neq 0$, zoals reeds eerder is aangetoond (stelling 6.13).

Nu de productstelling voor determinanten algemeen:

Stelling 6.35. Als A en B vierkante matrices zijn van de n^e orde, dan geldt $|AB| = |A|\,|B|$.

Bewijs: a) Als A en B beide singulier zijn, is AB dat eveneens, zodat dan geldt: $|A|=0$, $|B|=0$ en $|AB|=0$ en dus $|AB|=|A||B|$;

b) Als A niet-singulier is, dan geldt volgens stelling 6.32: $A=C_1C_2\dots C_r$, waarin $C_1,C_2,\dots,C_r$ elementaire matrices zijn. Herhaalde toepassing van stelling 6.34 geeft dan

$$|AB|=|C_1C_2\dots C_rB| = |C_1||C_2|\dots|C_r|\;|B|=|C_1C_2\dots C_r||B|=|A||B|;$$

c) Als A singulier, B niet-singulier, dan geldt analoog als in b) bij toepassing van stelling 6.34: $|AB| = |BA| = |A|\;|B|$.

De productstelling bevestigt het feit, dat het product van twee matrices dan en slechts dan niet-singulier is, als beide factoren niet-singulier zijn. We zien ook, dat $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$. Heeft een matrix dus een inverse, dan geldt, dat de determinant van de inverse matrix gelijk is aan het omgekeerde van de determinant van de matrix.

De productstelling voor determinanten kan ook op andere wijze worden afgeleid:
Beschouw de determinant, die gevormd is uit 4 vakken: in het vak links boven staat de matrix A, rechts onder de matrix B voor welke matrices we de productstelling willen aantonen; verder staat in D rechts boven O en links onder -I, dus

$$D = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -1 & & O & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ O & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right| .$$

Iedere term uit D is ook wat het teken betreft, gelijk aan het product van een term uit $|A|$ en een term uit $|B|$; omgekeerd komt elk dezer producten in D voor. Hieruit volgt $D=|A|\;|B|$.
Vermenigvuldig nu de $(n+1)^e$ rij van D met a_{11}, de $(n+2)^e$ met a_{12}, enz. en tel ze daarna bij de eerste rij op. Vermenigvuldig vervolgens de $(n+1)^e$ rij met a_{21}, de $(n+2)^e$ met a_{22} enz. en tel ze daarna bij de 2^e rij op. Zo doorgaande bereiken we, dat links boven O komt te staan, terwijl rechts boven de matrix C=AB komt. Nu geldt dus:

$$D = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ \hline -1 & & O & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ O & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right| .$$

Breng de eerste n kolommen geheel naar rechts, dan geldt

$$D = (-1)^n |C| (-1)^{n(2n-1)} = (-1)^{2n^2} |C| = |C|.$$

dus $D = |A||B| = |C| = |AB|$.

Voorbeeld 24. Bewijs, dat
$$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & (a_1+b_2)^2 & (a_1+b_3)^2 & (a_1+b_4)^2 \\ (a_2+b_1)^2 & (a_2+b_2)^2 & (a_2+b_3)^2 & (a_2+b_4)^2 \\ (a_3+b_1)^2 & (a_3+b_2)^2 & (a_3+b_3)^2 & (a_3+b_4)^2 \\ (a_4+b_1)^2 & (a_4+b_2)^3 & (a_4+b_3)^2 & (a_4+b_4)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Bewijs:
$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 & 0 \\ a_3^2 & a_3 & 1 & 0 \\ a_4^2 & a_4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 & 2b_4 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Uitwerking van het linkerlid geeft juist de determinant, waarvan we het nulzijn wilden aantonen.

Voorbeeld 25.
$$\begin{vmatrix} \sin(\alpha+\alpha') & \sin(\alpha+\beta') & \sin(\alpha+\gamma') \\ \sin(\beta+\alpha') & \sin(\beta+\beta') & \sin(\beta+\gamma') \\ \sin(\gamma+\alpha') & \sin(\gamma+\beta') & \sin(\gamma+\gamma') \end{vmatrix} = 0 .$$

Bewijs:
$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \sin\alpha' & \sin\beta' & \sin\gamma' \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Uitwerking van het linkerlid geeft juist de determinant waarvan we het nulzijn wilden aantonen.

Voorbeeld 26. Bewijs, dat
$$\begin{vmatrix} 1+a^2+a^4 & 1+ab+a^2b^2 & 1+ac+a^2c^2 \\ 1+ab+a^2b^2 & 1+b^2+b^4 & 1+bc+b^2c^2 \\ 1+ac+a^2c^2 & 1+bc+b^2c^2 & 1+c^2+c^4 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2.$$

Bewijs: Het linkerlid is
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}^2 .$$

$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ is een determinant van Vandermonde en gelijk aan

$(c-a)(c-b)(b-a)$, waarmede het bewijs geleverd is.

Opmerking. De algemene gedaante van een determinant van Vandermonde

is
$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \ldots a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 \ldots a_2^{n-1} \\ - & - & - - - - - \\ 1 & a_n & a_n^2 \ldots a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Deze is gelijk aan het product van $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ termen: $\prod_{1 \leq i < k \leq n} (a_k - a_i)$.

De productstelling kan worden uitgebreid tot rechthoekige matrices. Is A een (m,n)- en B een (n,m)-matrix, dan is AB een (m,m)-matrix. Het heeft dan zin te vragen naar det.AB. We onderscheiden de gevallen $m > n$ en $m < n$.

1. Is $m > n$, dan verandert AB niet, wanneer wij A aan de rechterkant met $(m-n)$ kolommen, geheel uit nullen bestaande, en B aan de onderkant met $(m-n)$ rijen uit nullen tot (m,m)-matrices aanvullen. De determinanten van de zo gevormde (m,m)-matrices zijn nul, en dus geldt volgens de productstelling: det.AB=0 (vergelijk Voorbeeld 24 en 25).

Stelling 6.36. Is A een (m,n)-matrix en B een (n,m)-matrix en is $m > n$, dan is det.AB=0.

Opmerking. De juistheid van deze stelling kan direct worden ingezien door op te merken, dat de rijen van de productmatrix AB lineaire combinaties zijn van de rijen van B. Volgens stelling 5.14 bevat AB dus hoogstens n lineair onafhankelijke vectoren. Daar $n < m$ is $\det|AB|=0$, volgens stelling 6.8.

2. Voor het geval $m < n$ kunnen we de volgende stelling uitspreken:

Stelling 6.37. Is A een (m,n)-matrix en B een (n,m)-matrix en is $m < n$, dan is det.AB gelijk aan de som van de producten van overeenkomstige onderdeterminanten uit A en B (d.i. een som van $\binom{n}{m}$ producten).

Onderdeterminanten van de m^e orde van de (m,n)-matrix A en de (n,m)-matrix B heten overeenkomstig als de kolommen van A, waaruit de eerste onderdeterminant gevormd is, dezelfde nummers dragen, als de rijen van B, waaruit de tweede onderdeterminant bestaat.

We zullen de stelling toelichten aan een voorbeeld. Het bewijs van de stelling zullen we achterwege laten, aangezien dit ons op dit ogenblik te ver zou voeren.

Voorbeeld 27. Bewijs de identiteit van Lagrange:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)=(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 +$$

$$+(a_1b_2-a_2b_1)^2+\ldots+(a_1b_n-a_nb_1)^2+\ldots+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2.$$

Of $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 + \sum_{1\le i<k\le n} (a_ib_k-a_kb_i)^2.$

Bewijs: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2\ldots a_n \\ b_1 & b_2\ldots b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 & \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_ib_i & \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \end{pmatrix}$.

Toepassing van stelling 6.37 geeft dat de determinant van het linkerlid gelijk is aan $\sum_{1\le i<k\le n} (a_ib_k-a_kb_i)^2$, zodat

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 = \sum_{1\le i<k\le n} (a_ib_k-a_kb_i)^2.$$

Het rechter lid is de som van $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ termen. De juistheid van de identiteit is ook gemakkelijk rechtstreeks te verifiëren.
Uit de identiteit van Lagrange volgt direct de ongelijkheid (voor reëele getallen): $(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$ genaamd de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.

Opmerking. Zijn a en b vectoren in R_n en a_i en b_i kentallen van deze vectoren op een Cartesisch coördinatenstelsel , dan is de betekenis van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz: (zie blz.15)
het inwendig product van $\bar{a}$ en $\bar{b}$ $\le$ het product der lengten van $\bar{a}$ en $\bar{b}$.
Het linkerlid gedeeld door het rechterlid van deze ongelijkheid is per definitie de cosinus van de hoek die de vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$ insluiten. Het gelijkteken geldt dan en slechts dan als de vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$ in dezelfde richting vallen (cos 0=1). Is het inwendig product 0, dan zijn de vectoren orthogonaal ($\cos\frac{\pi}{2}=0$) en omgekeerd.

§7. 1. Eigenwaarden en eigenvectoren

Laat τ een homogene lineaire (n,n)-transformatie (§3) zijn in een R_n (reële n-dimensionale vectorruimte) met vierkante n-matrix A (reële elementen a_{ik}) met betrekking tot de basis $\bar{e}_1=(1,0,\ldots,0)$, $\bar{e}_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,\bar{e}_n=(0,0,\ldots,1)$.
We zullen in R_n de een-dimensionale deelruimten bepalen, die invariant blijven bij de transformatie τ. Het is duidelijk, dat een een-dimensionale deelruimte van R_n dan en slechts dan invariant blijft bij τ, als deze deelruimte opgespannen wordt door een vector X (gegeven in matrixvorm als een matrix van 1 rij met n elementen gelijk aan de resp. reële kentallen $x_1,x_2,\ldots,x_n$, zie blz.70), die door τ getransformeerd wordt in een reëel veelvoud (dat eventueel 0 mag zijn) van zichzelf. We dienen daarom te zoeken naar alle vectoren van R_n, ongelijk de nulvector, zodat $XA^T=kX$, waarin k een reëel getal is. Dit houdt in dat moet gelden $AX^T=kX^T$, of in matrixnotatie:

(7.1) $\qquad (A-kI)X^T=0 \qquad$ (0=nulmatrix, I= eenheidsmatrix).

Deze vergelijking is equivalent met het stelsel van n homogene lineaire getallenvergelijkingen:

$$(7.2)\quad \begin{cases} (a_{11}-k)x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n &=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-k)x_2+\ldots+a_{2n}x_n &=0\\ - - - - - - - - - - - - - - - - & \\ a_{n1}x_1 \quad +a_{n2}x_2+\ldots+(a_{nn}-k)x_n &=0 \end{cases}$$

met coëfficiëntenmatrix A-kI.
Dit stelsel heeft dan en slechts dan een andere dan de nuloplossing, als A-k I een singuliere matrix is (vergelijk bijv. blz.62 E1). k moet een reële oplossing zijn van de vergelijking

$$(7.3)\qquad |A-kI| = \begin{vmatrix} (a_{11}-k) & a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21} & (a_{22}-k)\ldots a_{2n}\\ - - - & - - - - - -\\ a_{n1} & a_{n2}\ldots(a_{nn}-k) \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Voor iedere reële waarde van k, die aan (7.3) voldoet, kan minstens één reële oplossingsvector X ongelijk de nulvector, gevonden worden, die voldoet aan (7.1). Al deze vectoren spannen ieder voor zich een een-dimensionale deelruimte van R_n op, die invariant is bij de transformatie τ.

De ontwikkeling van de determinant $|A-k\,I|$ in het tweede lid van (7.3), is een veelterm van de n^e graad in k met reële coëfficiënten. Volgens de hoofdstelling van de algebra heeft (7.3) (ook als A een complexe matrix is) n oplossingen voor k in het complexe vlak, die niet onderling verschillend behoeven te zijn; eventueel komen onder deze dus meervoudige wortels voor. Het is gemakkelijk in te zien, dat alleen de reële oplossingen voor k bij een reële matrix A kunnen leiden tot reële oplossingsvectoren van (7.2), ongelijk de nuloplossing. Want stel dat $k=a+ib$, dan zou de existentie van een reële oplossing van de eerste vergelijking van (7.2) leiden tot $x_1b=0$, bij nulstelling van het imaginaire deel van het linkerlid. De overige vergelijkingen geven analoog: $x_2b=x_3b=\ldots=x_nb=0$, zodat òf $b=0$ en dus k reëel òf $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, hetgeen niet kan optreden, omdat we de nuloplossing hebben buitengesloten.

In de practijk is het nuttig om ook evt. de niet-reële wortels van (7.3) in de beschouwingen te betrekken. Deze niet-reële wortels zullen bij subsitutie voor k in (7.2) niet-reële oplossingsvectoren leveren, die voldoen aan $AX^T=kX^T$.

Stelt nu A een complexe matrix voor van een homogene lineaire (n,n)-transformatie (in deze paragraaf verder kortweg aangeduid met lineaire transformatie) in een complexe n-dimensionale vectorruimte C_n (verzameling van alle vectoren met n complexe kentallen), dan spannen alle oplossingsvectoren van (7.2), ongelijk de nuloplossing, invariante een-dimensionale deelruimten van C_n op.

Deze resultaten zullen we samenvatten in stelling 7.1, doch om de formulering hiervan zoveel mogelijk te vereenvoudigen, voeren we eerst enkele definities in.

<u>Definities</u>. Als A een vierkante matrix is van de n^e orde met elementen in het complexe vlak, heet de determinant $|A-xI|$ de <u>karakteristieke determinant</u> van A. De ontwikkeling van deze determinant is een veelterm van de n^e graad in x, de <u>karakteristieke veelterm</u> van A. De vergelijking $|A-xI|=0$ heet de <u>karakteristieke vergelijking</u> (eigenwaardevergelijking, seculaire vergelijking of S-vergelijking) van A, en de n wortels van deze vergelijking de <u>karakteristieke wortels</u> van A. Deze wortels worden gewoonlijk de <u>eigenwaarden</u> (eigenvalues, characteristic values (roots), latent roots) van A genoemd.

Is k een eigenwaarde van A, dan wordt iedere complexe vector X van C_n die ongelijk is aan de nulvector en die voldoet aan de vergelijking $(A-kI)X^T=0$ een <u>eigenvector</u> van A genoemd (X^T heet ook wel eigenkolom).
We merken op, dat wegens het singulier zijn van de matrix A-kI, bij elke eigenwaarde van A minstens één eigenvector van A behoort, en dat iedere scalaire vermenigvuldiging ($\neq 0$) van een eigenvector een eigenvector oplevert, die met dezelfde eigenwaarde correspondeert, zodat

<u>Stelling 7.1.</u> a) Laat A de matrix zijn van een lineaire transformatie τ van C_n met betrekking tot de basis $(1,0,...,0)$, $(0,1,0...,0),...,(0,0,...,0,1)$. Bij elke eigenwaarde van A behoort minstens één eigenvector van A en iedere eigenvector van A spant een een-dimensionale deelruimte van C_n op, die invariant blijft bij τ.

b) Laat A de matrix zijn van een lineaire transformatie τ van R_n met betrekking tot de in a) genoemde basis.
Bij elke reële eigenwaarde van A, en alleen bij deze, behoort minstens één reële eigenvector van A en iedere reële eigenvector van A spant een een-dimensionale deelruimte van R_n op, die invariant blijft bij τ.

<u>Voorbeeld</u> 1. Laat A zijn $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. De karakteristieke vergelijking, die bij A behoort, vinden we door de karakteristieke determinant $\begin{vmatrix}1-k & 1\\ -1 & 1-k\end{vmatrix}$ gelijk aan nul te stellen: $\begin{vmatrix}1-k & 1\\ -1 & 1-k\end{vmatrix}=0 \rightarrow (1-k)^2+1=0$.
Dit geeft de eigenwaarden $k=1\pm i$.
Bij $k=1+i$ vinden we de eigenvectoren uit: $\begin{cases}-ix_1+x_2=0\\ -x_1-ix_2=0\end{cases}$.
De algemene oplossing is $x_1=t$, $x_2=it$. De een-dimensionale deelruimte, die bij $k=i+i$ behoort, wordt dus in een C_2 opgespannen door de eigenvector $(1,i)$.
Evenzo behoort bij de eigenwaarde $k=1-i$ in de C_2 een een-dimensionale deelruimte, die wordt opgespannen door de eigenvector $(1,-i)$.

De deelruimte van R_n of C_n, die bestaat uit alle vectoren, die bij een lineaire transformatie overgevoerd worden in de nulvector, heet de <u>kern</u> van deze transformatie.
Als nu τ een lineaire transformatie is, met bijbehorende matrix A singulier (τ is dan een zgn. singuliere transformatie), dan heeft A een eigenwaarde, die gelijk is aan 0. Iedere corresponderende

eigenvector spant een invariante deelruimte op, die door $\mathcal{T}$ overgevoerd wordt in de nulvector. Dus als $\mathcal{T}$ singulier is met matrix A, dan spannen de lineair onafhankelijke eigenvectoren van A, die corresponderen met de eigenwaarde 0, tezamen met de nulvector, juist de kern van $\mathcal{T}$ op.
Het is verder duidelijk, dat een lineaire transformatie dan en slechts dan een vector, ongelijk de nulvector, invariant laat, als deze transformatie bij een matrix behoort, die een eigenwaarde bezit, die gelijk is aan 1.

<u>Stelling 7.2</u>. Bij verschillende eigenwaarden behoren lineair onafhankelijke eigenvectoren.

Bewijs: Laten we aannemen, dat $k_1, k_2, \ldots, k_m$ twee aan twee verschillende eigenwaarden van een vierkante matrix A zijn van de n^e orde, en dat X_1 een eigenvector is bij k_1, X_2 een bij $k_2, \ldots$, X_m een bij k_m.
Het bewijs voeren we uit het ongerijmde: Stel, dat $X_1, X_2, \ldots, X_m$ afhankelijk zijn. Er is dan altijd een getal r te vinden $(1 \leq r < m)$ zodanig, dat $X_1, X_2, \ldots, X_{r+1}$ lineair afhankelijk zijn, terwijl $X_1, X_2, \ldots, X_r$ lineair onafhankelijk zijn.
Laat nu de volgende relatie bestaan tussen $X_1^T, X_2^T, \ldots, X_{r+1}^T$:
I $c_1X_1^T + c_2X_2^T + \ldots + c_{r+1}X_{r+1}^T = 0$, met $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ niet alle 0.
Vermenigvuldigen we deze vergelijking links met A, dan geldt volgens (7.1): II $c_1k_1X_1^T + c_2k_2X_2^T + \ldots + c_{r+1}k_{r+1}X_{r+1}^T = 0$. Vermenigvuldig verder I met k_{r+1} en trek het resultaat van II af, dan ontstaat: $c_1(k_1 - k_{r+1})X_1^T + c_2(k_2 - k_{r+1})X_2^T + \ldots + c_r(k_r - k_{r+1})X_r^T = 0$.
Daar $X_1, X_2, \ldots, X_r$ lineair onafhankelijk zijn en $k_i \neq k_{r+1}$ voor $i = 1, 2, \ldots, r$ volgt uit de laatste vergelijking $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$.
X_{r+1} is ongelijk de nulvector, zodat uit I volgt $c_{r+1} = 0$, in strijd met de onderstelling, dat $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ niet alle 0 zijn. De vectoren $X_1, X_2, \ldots, X_m$ zijn dus lineair onafhankelijke eigenvectoren, zoals te bewijzen was.

2. <u>Equivalentie</u>

Volgens stelling 6.33 blz.78 is een matrix A dan en slechts dan equivalent met een matrix B, als er niet-singuliere matrices M en N bestaan, zodanig, dat B=MAN. Een equivalentie in engere zin treedt op als de matrices M en N zodanig gekozen kunnen worden, dat ze elkaars inverse zijn, dus als er een niet-singuliere matrix P bestaat, zodat

(7.4) $$B = P^{-1}AP .$$

Zoals we zullen zien is het juist deze "speciale" equivalentie van matrices, die in de eigenwaardetheorie een belangrijke rol speelt. Teneinde voor het vervolg van deze paragraaf de terminologie niet nodeloos ingewikkeld te maken, zullen we nu kortweg spreken van equivalentie zonder meer als we de speciale equivalentie bedoelen. In gevallen, waarin de equivalentie dient te worden opgevat in de ruimere betekenis (blz. 75 e.v.) zal dit expliciet erbij vermeld worden. Dus:

Definitie. Een matrix B is equivalent met een matrix A als er een niet-singuliere matrix P bestaat, zodat $B=P^{-1}AP$. De transformatie van A in $P^{-1}AP$ heet een equivalentie-transformatie; $P^{-1}AP$ wordt wel de getransformeerde van A genoemd met betrekking tot de matrix P.

Opmerking. Op grond van de definiërende vergelijking $B=P^{-1}AP$ moeten A en B vierkante matrices zijn van dezelfde orde.
Later zullen we zien, dat als van dezelfde lineaire transformatie A en B de matrices zijn met betrekking tot twee (lineair onafhankelijke) bases in een C_n, er een niet-singuliere matrix P bestaat, zodat $B=P^{-1}AP$ (zie ook opgave 83). De bij de transformatie behorende matrices A en B zijn dus equivalent.

Stelling 7.3. Equivalentie van matrices is een "equivalentie-relatie" in de zin van § 6, blz.75 (reflexief, symmetrisch en transitief).

Bewijs: Neem $P=I$, dan is A equivalent met zichzelf; equivalentie van matrices is daarom reflexief. Als $B=P^{-1}AP$, dan is $A=PBP^{-1}= Q^{-1}BQ$ met $Q=P^{-1}$. Ook de symmetrische eigenschap is dus van kracht. Tenslotte geldt, als $B=P^{-1}AP$ en $C=R^{-1}BR$, dat $C=R^{-1}P^{-1}APR=S^{-1}AS$ met $S=PR$, waarmede de transitiviteit is aangetoond.
Op grond van de symmetrie in het equivalentie-begrip kunnen we zonder dubbelzinnigheid spreken van "equivalente matrices A en B".

Stelling 7.4. Equivalente matrices hebben gelijke determinant, dezelfde karakteristieke vergelijking (veelterm) en dezelfde eigenwaarden.
Bewijs: a) Als $B=P^{-1}AP$, dan geldt volgens de productstelling voor determinanten $|B|=|P^{-1}||A||P|=|P^{-1}||P||A|=|A|$.

b) $|A-xI| = |P^{-1}(A-xI)P| = |P^{-1}AP-xP^{-1}IP| =$
$= |P^{-1}AP-xI|$. A en $P^{-1}AP$ hebben dus dezelfde karakteristieke veelterm, dus dezelfde karakteristieke vergelijking en dus ook

c) dezelfde eigenwaarden.

Opmerking a) A en B behoeven niet noodzakelijk dezelfde eigenvectoren te bezitten, want als X een eigenvector is van een matrix A, behorende bij een eigenwaarde k en P een willekeurige niet-singuliere matrix, dan is volgens (7.1) $XA^T=kX$: $X(P^{-1})^T P^T A^T (P^{-1})^T = kX(P^{-1})^T$, of $X(P^{-1})^T(P^{-1}AP)^T = kX(P^{-1})^T$. $X(P^{-1})^T$ is dus een eigenvector van $P^{-1}AP$ behorende bij dezelfde eigenwaarde k als waartoe X behoort met betrekking tot de matrix A. Daar P een willekeurige niet-singuliere matrix is, treedt $X(P^{-1})^T$ in het algemeen niet als eigenvector van A op.

b) Zoals reeds opgemerkt bestaat er tussen de matrices A en B, die behoren bij eenzelfde lineaire transformatie met betrekking tot verschillende (lineair onafhankelijke) bases in een C_n, een relatie van de vorm $B=P^{-1}AP$. Op grond van stelling 7.4 kunnen we nu dus spreken van de eigenwaarden van een lineaire transformatie in een zekere ruimte, daarmee bedoelende de eigenwaarden van de matrix, behorende bij T met betrekking tot een willekeurige (lineair onafhankelijke) basis. De eigenwaarden zijn immers onafhankelijk van de keuze van de basis.

Voorbeeld 2. Laat A de matrix zijn $\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ en P de matrix $\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, dan is de matrix $B=P^{-1}AP$:

$$B=P^{-1}AP = \begin{pmatrix}-1/3 & -2/3\\ -1/3 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3 & -2/3\\ -1/3 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 10\\ -1 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}.$$

Nu geldt inderdaad a) $|A| = |B| = -5$;

b) $\begin{vmatrix}-3-k & 4\\ 2 & -1-k\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-k & 0\\ 0 & -5-k\end{vmatrix} = k^2+4k-5$;

c) A en B dezelfde eigenwaarden 1 en -5.

3. Matrices, equivalent met diagonaalmatrices

Een diagonaalmatrix is een vierkante matrix, waarvan de elementen buiten de hoofddiagonaal gelijk zijn aan 0 (een matrix met 1 element is ook een diagonaalmatrix). Een dergelijke matrix heeft, zoals men zegt, de diagonaalvorm.

Het probleem, dat we zullen behandelen, betreft de reductie van een gegeven matrix tot een diagonaalmatrix door middel van een equivalentie-transformatie (vergelijk Voorbeeld 2). Deze reductie zal niet altijd mogelijk zijn.

Onderstel eerst, dat een vierkante matrix A van de n^e orde equivalent is met een diagonaalmatrix D, dus dat er een niet-singuliere matrix S bestaat zodanig, dat $S^{-1}AS=D$. Volgens stelling 7.4 hebben A en D dan dezelfde eigenwaarden. De eigenwaarden van een diagonaalmatrix zijn de elementen in de hoofddiagonaal. De diagonaalelementen van D zijn dus juist de eigenwaarden van A, zodat geldt:

<u>Stelling 7.5.</u> Als een matrix A equivalent is met een diagonaalmatrix D, dan is

$$D = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & k_n \end{pmatrix},$$

waarin $k_1, k_2, \dots, k_n$ de eigenwaarden zijn van A.

Uit $S^{-1}AS = D$ volgt $AS=SD$. (D is een diagonaalmatrix).

Laat $A=(a_{ij})$, $S=(s_{ij})$ zijn en $k_1, k_2, \dots, k_n$ de eigenwaarden van A, dus de diagonaalelementen van D. Dan geldt dus: (vergl. blz. 77 onder c))

$$(7.5)\quad AS=SD=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 s_{11} & k_2 s_{12} & \dots & k_n s_{1n} \\ k_1 s_{21} & k_2 s_{22} & \dots & k_n s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1 s_{n1} & k_2 s_{n2} & \dots & k_n s_{nn} \end{pmatrix}$$

Als nu $S_1^T, S_2^T, \dots, S_n^T$ de kolomvectoren van S zijn, zijn die van SD volgens (7.5): $k_1S_1^T, k_2S_2^T, \dots, k_nS_n^T$; die van AS zijn: $AS_1^T, AS_2^T, \dots, AS_n^T$. Gelijkstelling van deze vectoren geeft

$$(7.6)\qquad AS_i^T = k_iS_i^T \quad (i = 1,2,\dots,n)\ .$$

De vergelijking (7.6) drukt volgens (7.1) uit, dat de i^e kolom van S een eigenvector van A is, die correspondeert met de eigenwaarde k_i. Omgekeerd geldt, dat iedere matrix S, waarvan de i^e kolom een eigenvector van A is, die correspondeert met de eigenwaarde k_i $(i=1,2,\dots,n)$ voldoet aan de matrixvergelijking AS=SD met D een diagonaalmatrix waarvan de elementen gelijk zijn aan de eigenwaarden k_i. Als S niet-singulier is, dus als S n lineair onafhankelijke kolom (eigen) vectoren bezit, geldt $S^{-1}AS=D$, zodat A equivalent is met een diagonaalmatrix, m.a.w.

Stelling 7.6. Een nodige en voldoende voorwaarde voor het equivalent zijn van een complexe matrix A van de n^c orde met een diagonaalmatrix, is dat A n lineair onafhankelijke eigenvectoren bezit in een ruimte C_n. Bovendien geldt, dat $S^{-1}AS$ dan en slechts dan een diagonaalmatrix is als de kolomvectoren van S lineair onafhankelijke eigenvectoren van A zijn. De diagonaalelementen van de diagonaalmatrix zijn de eigenwaarden van A.

Opmerking. Als A een reële vierkante matrix is van de n^e orde, behoeven de diagonaalmatrix en de diagonaliserende matrix S (zo deze bestaan), niet reëel te zijn, tenzij alle eigenwaarden van A reëel zijn. Alleen in dit geval is interpretatie van de resultaten mogelijk in een R_n.

Voorbeeld 3. Volgens voorbeeld 2 geldt, dat $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix is als $S=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ en $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ en wel de diagonaalmatrix $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}$. De eigenwaarden van A zijn 1 en -5. Volgens stelling 7.6 moeten de kolomvectoren van S (-1,-1) en (-2,1) eigenvectoren zijn van A. Inderdaad geldt, dat $\begin{cases}-3.-1+4.-1=1.-1\\ 2.-1+-1.-1=1.-1\end{cases}$ en $\begin{cases}-3.-2+4.1=-5.-2\\ 2.-2+-1.1=-5.1\end{cases}$.

Voorbeeld 4. Reduceer de volgende matrix $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ -5 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}$ tot een diagonaalmatrix door middel van een equivalentie-transformatie.

Oplossing: De eigenwaarden van A vinden we uit de karakteristieke vergelijking:

$$\begin{vmatrix}4-k & 2 & -2\\ -5 & 3-k & 2\\ -2 & 4 & 1-k\end{vmatrix}=0 \text{ of } k^3-8k^2+17k-10=(k-1)(k-2)(k-5)=0.$$

De eigenwaarden zijn $k_1=1$; $k_2=2$; $k_3=5$.

Nu zijn, zoals direct is te verifiëren, (2,1,4), (1,1,2) en (0,1,1) eigenvectoren bij resp. k_1,k_2 en k_3. Volgens stelling 7.6 zal de transformatie $S^{-1}AS$ met $S=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$, A reduceren tot de diagonaalmatrix $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

Uit stelling 7.2 en 7.6 volgt direct:

Stelling 7.7. Als de eigenwaarden van een matrix A alle verschillend zijn (karakteristieke veelterm product van verschillende lineaire factoren), dan is A equivalent met een diagonaalmatrix.

Stel, dat bij deze matrix A bij de n verschillende eigenwaarden k_i de n eigenvectoren X_i behoren, dan geldt dus volgens (7.1):

I $AX_i^T = k_iX_i^T$ $(i=1,\dots,n)$.

Stel dat Y_j $(j=1,\dots,n)$ n rijvectoren zijn, alle ongelijk de nulvector, die voldoen aan de vergelijkingen:

II $Y_jA = k_jY_j$ $(j=1,\dots,n)$ (Y_j worden wel de eigenrijen bij A genoemd).

Dan geldt volgens I:

Ia) $Y_jAX_i^T=k_iY_jX_i^T$ $(i,j=1,\dots,n)$ en volgens II:

IIa) $Y_jAX_i^T=k_jY_jX_i^T$ $(i,j=1,\dots,n)$.

Uit Ia) en IIa) volgt als $i\neq j$, daar $k_i\neq k_j$:

III $Y_jX_i^T=0$ $(i,j=1,\dots,n;\ i\neq j)$.

Als nu $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ (n rijen van eigenrijen) en $X^T= (X_1^TX_2^T\dots X_n^T)$

(n kolommen van eigenkolommen), geldt volgens II:

IV $$YA = \begin{pmatrix} k_1Y_1 \\ k_2Y_2 \\ \vdots \\ k_nY_n \end{pmatrix}.$$

Als nu voor zekere i geldt $Y_iX_i^T=0$ $(i=1,\dots,n)$, dan geldt op grond van III en stelling 7.2, dat $Y_i=0$ in strijd met de aanname. Dus voor elke i geldt $Y_iX_i^T\neq 0$.

Eigenvectoren zijn op een multiplicatieve constante na bepaald.

Normeer nu zo dat

V $Y_iX_i^T=1$ $(i=1,\dots,n)$, dan geldt dus volgens III, IV en V:

$$Y\,A\,X^T = \begin{pmatrix} k_1 & & O \\ & k_2 & \\ & \ddots & \\ O & & k_n \end{pmatrix} \quad \text{(diagonaalmatrix).}$$

Dit resultaat is in overeenstemming met stelling 7.6, daar Y en X^T volgens III en V elkaars inverse zijn (na normering).

De inverse van X^T, die gevormd is uit n kolommen van eigenkolommen is dus een matrix, die gevormd is uit n rijen van eigenrijen.

Een gevolg van stelling 7.7 is nog (zie opm.op blz.88) dat in een [illegible]$_n$ de bij een lineaire transformatie (t.o.v. een zekere (lineair onafhankelijke) basis) behorende matrix A, van de orde n met n verschillende eigenwaarden, door geschikte keuze van de (lineair onafhankelijke) basis zo door een equivalentie-transformatie kan worden getransformeerd, dat de resulterende matrix de diagonaalvorm heeft.

Als de eigenwaarden van een matrix niet twee aan twee verschillend zijn, behoeft de matrix niet equivalent te zijn met een diagonaalmatrix. De matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ bijv. heeft de 2-voudige eigenwaarde 0. De eigenvectoren zijn van de vorm $(c,-c)$. A bezit dus niet 2 lineair onafhankelijke eigenvectoren en kan dus volgens stelling 7.6 niet equivalent zijn met een diagonaalmatrix.

Iedere matrix is echter wel steeds equivalent met een matrix, die de driehoeksvorm heeft (dat is een matrix met slechts nullen onder of boven de hoofddiagonaal, zie opg.45), blijkens de volgende stelling:

<u>Stelling 7.8</u>. Laat A een vierkante matrix zijn van de n^e orde met complexe elementen en met eigenwaarden $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Dan is er een matrix P met complexe elementen, zodat

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & b_{12} \ldots b_{1n} \\ 0 & k_2 \ldots b_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots k_n \end{pmatrix} .$$

Bewijs: Laat S_1 een eigenvector van A zijn, die correspondeert met de eigenwaarde k_1 van A, en S een niet-singuliere n-matrix, waarvan S_1^T de eerste kolomvector is. De eerste kolomvector van AS is $AS_1^T = k_1S_1^T$; die van $S^{-1}AS$ is derhalve gelijk aan $S^{-1}(k_1S_1^T)$, welke ook de eerste kolomvector is van $S^{-1}k_1S$: $\begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Nu geldt dus, dat $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} k_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$.

Hierin is k_1 een getal, B_1 een $(1,n-1)$-matrix, 0 een $(n-1,1)$-nulmatrix en A_1 een $(n-1,n-1)$-matrix.

Daar volgens stelling 7.4 $S^{-1}AS$ en A dezelfde eigenwaarde hebben en $|S^{-1}AS-xI| = (k_1-x)|A_1-xI|$, geldt, dat $k_2, k_3, \ldots, k_n$ de eigenwaarden van A_1 zijn.

De stelling is dus bewezen voor het geval n=2.

Het bewijs van stelling 7.8 voor algemene n (> 2) zullen we nu leveren volgens het principe van volledige inductie, waarbij we dus aannemen, dat de stelling bewezen is voor vierkante matrices van de $(n-1)^e$ orde.

Voor de matrix A_1, die juist van een dergelijk type is, kunnen we dus aannemen, dat er een niet-singuliere matrix Q bestaat, zodanig dat $Q^{-1}A_1Q$ de driehoeksvorm heeft met $k_2, k_3, \ldots, k_n$ als diagonaalelementen, dus $Q^{-1}A_1Q=\begin{pmatrix} k_2 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & k_3 & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & k_n \end{pmatrix}$.

Als nu $R=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ (waarin 0 nulmatrices), dan geldt

$$(SR)^{-1}A(SR)=R^{-1}(S^{-1}AS)R=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} k_1 & B_1Q \\ 0 & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & k_2 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & k_n \end{pmatrix}.$$

Hiermede is de stelling bewezen, want de getransformeerde matrix $P^{-1}AP$ van A met $P=SR$ is een matrix, die de driehoeksvorm heeft met de eigenwaarden van A als de diagonaalelementen.

Opmerkingen:

a) Omdat kan worden aangetoond, dat iedere matrix equivalent is met zijn getransponeerde, geldt eveneens, dat elke matrix ook equivalent is met een matrix, die de driehoeksvorm heeft met nullen boven in plaats van onder de hoofddiagonaal.

b) Uit het bovenstaande volgt, dat geldt:

$$(7.7)\qquad P^{-1}AP-xI=\begin{pmatrix} (k_1-x) & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & (k_2-x) & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & (k_n-x) \end{pmatrix}.$$

Daar $P^{-1}(A-xI)P=P^{-1}AP-xI$ heeft de matrix in het rechterlid van (7.7) volgens stelling 6.29 dezelfde rang als $A-xI$ en wel voor iedere waarde van x.

Is k_1 een s-voudige eigenwaarde van A of, zoals men wel zegt, een eigenwaarde met multipliciteit s (d.w.z. dat k_1 een s-voudige wortel is van de karakteristieke vergelijking $|A-xI|=0$, of $(x-k_1)$ een juist s maal optredende lineaire factor in de factorontbinding van de karakteristieke veelterm $|A-xI|$; als $s=1$, dan is k_1 enkelvoudig, anders meervoudig (2,3,...-voudig)), dan komen in de diagonaal van de matrix in het rechterlid van (7.7) juist s elementen k_1-x voor (onder $k_2,k_3,\dots,k_n$ zijn dus juist $s-1$ elementen die gelijk zijn aan k_1). Substitutie van k_1 voor x in deze matrix geeft dus een matrix van de rang $\geq n-s$. De rang van $A-k_1I$ is dus ook $\geq n-s$. Dit betekent, dat alle eigenvectoren, die corresponderen met de s-voudige eigenwaarde k_1, tezamen met de nulvector, een vectorruimte vormen van dimensie p met $1 \leq p \leq s$ (p-dimensionale <u>eigenruimte</u>, behorende bij de eigenwaarde k_1). Hieruit volgt in het bijzonder, dat bij een enkelvoudige eigenwaarde van een matrix steeds een 1-dimensionale eigenruimte behoort.

Het kan voorkomen, dat bij een s-voudige eigenwaarde van een matrix A een eigenruimte behoort, die een dimensie heeft kleiner dan s ($s>1$) Een matrix wordt wel <u>defect</u> genoemd, als niet bij alle eigenwaarden van de matrix een eigenruimte behoort van een dimensie, die gelijk is aan de multipliciteit der bijbehorende eigenwaarde (zie voorbeeld 5 en 7).

In verband met stelling 7.2 geldt, dat een n-matrix dan en slechts dan defect is, als het maximale aantal lineair onafhankelijke eigenvectoren kleiner dan n is of op grond van stelling 7.6 als er geen equivalentie bestaat met een diagonaalmatrix. Zoals we straks zullen zien, zijn reële symmetrische matrices nooit defect en dus steeds equivalent met een diagonaalmatrix. Bij een s-voudige eigenwaarde van een reële symmetrische matrix behoort dus altijd juist een s-dimensionale eigenruimte (stelling van Weierstrasz).

<u>Voorbeeld 5</u>. De matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ heeft de karakteristieke vergelijking: $\begin{vmatrix} 1-k & 0 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0$. Hieruit volgt $k_1=k_2=1$. Bij deze $\underline{\underline{2}}$-voudige eigenwaarde 1 behoren de eigenvectoren $(0,t)$, dus een $\underline{\underline{1}}$-dimensionale eigenruimte. De matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ is dus defect en daarom niet equivalent met een diagonaalmatrix.

<u>Voorbeeld 6</u>. De matrix $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ heeft de karakteristieke vergelijking:

$$\begin{vmatrix} (1-k) & 4 & 6 \\ 1 & (1-k) & -3 \\ -1 & 2 & (6-k) \end{vmatrix} = 0. \text{ Hieruit volgt } (k-3)^2(k-2)=0, \text{ dus}$$

$k_1=k_2=3$; $k_3=2$.

Bij de $\underline{\underline{2}}$-voudige eigenwaarde 3 vinden we de eigenvectoren uit de vergelijking $-2x_1+4x_2+6x_3=0$. Bij deze $\underline{\underline{2}}$-voudige eigenwaarde behoort dus wel een $\underline{\underline{2}}$-dimensionale eigenruimte (opgespannen door bijv. de eigenvectoren $(2,1,0)$ en $(3,0,1)$). De matrix $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ is dus niet defect en daarom wel equivalent met een diagonaalmatrix.

Voorbeeld 7. Bewijs, dat de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ niet equivalent is met een diagonaalmatrix (dus defect). Zoek een matrix P, die A door middel van een equivalentie-transformatie transformeert in een matrix, die de driehoeksvorm heeft.

Oplossing: a) Volgens stelling 7.6 zal A slechts dan equivalent zijn met een diagonaalmatrix als A 3 lineair onafhankelijke eigenvectoren bezit. De eigenwaarden van A vinden we uit de karakteristieke vergelijking:

$$\begin{vmatrix} (1-k) & 2 & -4 \\ 0 & (-1-k) & 6 \\ 0 & -1 & 4-k \end{vmatrix} = 0 \text{ of } (k-1)^2(k-2)=0 \quad k_1=k_2=1;\ k_3=2.$$

De eigenvectoren, die bij de eigenwaarde 1 behoren zijn alle van het type (t,0,0) en vormen dus een 1-dimensionale eigenruimte. A is dus defect en dus niet equivalent met een diagonaalmatrix.

b) Indien we voor P een matrix nemen, waarvan de eerste kolom de eigenvector (1,0,0) van A is :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$ en wel zó, dat (b_{22}, b_{32}) een eigenvector is van de deelmatrix $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ van A, dan is $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix (zie bewijs van stelling 7.8). $(b_{22}, b_{32})=(2,1)$ is een eigenvector van $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Voor P kunnen we dus bijv. nemen:

$$\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 2 & b_{23} \\ 0 & 1 & b_{33} \end{pmatrix}$$, b's willekeurig, doch zó, dat P niet-singulier is.

Als we bijv. nemen $b_{12}=b_{13}=b_{23}=0$; $b_{33}=1$, dan geldt inderdaad, dat

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ de driehoeksvorm heeft.

Als $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$ een veelterm is in x en A een vierkante matrix, dan definieren we f(A) als

$$f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \ldots + a_mI .$$

(Toelichting: Als n een positief geheel getal is en A een vierkante matrix, dan wordt het symbool A^n, evenals in het geval, dat we met getallen te maken hebben, gebruikt om het product AA...A van n factoren A uit te drukken. Als A niet-singulier is, geldt $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$. Aan de hand hiervan kunnen we negatieve en nulmachten van een singuliere matrix A definieren en wel door $A^{-n}=(A^{-1})^n$ en $A^0=I$. Voor iedere niet-singuliere matrix A en gehele getallen m en n geldt dus $A^m \cdot A^n=A^{m+n}$ en $(A^m)^n=A^{mn}$).

Nu gelden de volgende stellingen:

Stelling 7.9. Als $k_1,k_2,\dots,k_n$ de eigenwaarden zijn van een n-matrix A en f(x) een veelterm, dan zijn de eigenwaarden van f(A) juist $f(k_1),f(k_2),\dots,f(k_n)$.

Bewijs: Laat de n-matrices B en C de driehoeksvorm hebben met de nulelementen onder de hoofddiagonaal. Laat verder de diagonaalelementen resp. zijn: $b_1,b_2,\dots,b_n$ en $c_1,c_2,\dots,c_n$. Dan geldt, dat BC en B+C eveneens de driehoeksvorm hebben, ook met nulelementen onder de hoofddiagonaal, en wel met resp. de diagonaalelementen $b_1c_1,b_2c_2,\dots,b_nc_n$, en $b_1+c_1,b_2+c_2,\dots,b_n+c_n$ (hetzelfde geldt als we "onder" door "boven" vervangen. Als nu P een niet-singuliere matrix is met $P^{-1}AP$ de driehoeksvorm (steeds mogelijk om zo'n P te vinden volgens stelling 7.8), dan heeft $f(P^{-1}AP)$ eveneens de driehoeksvorm, en wel, daar $P^{-1}AP$ de eigenwaarden $k_1,k_2,\dots,k_n$ van A in de hoofddiagonaal heeft, met diagonaalelementen $f(k_1),f(k_2),\dots,f(k_n)$. Daar $(P^{-1}AP)^m=P^{-1}A^mP$ voor ieder geheel getal m, geldt $f(P^{-1}AP)=P^{-1}f(A)P$. Door de matrix P wordt dus f(A) door middel van een equivalentie-transformatie getransformeerd in een matrix, die de driehoeksvorm heeft met diagonaalelementen $f(k_1),f(k_2),\dots,f(k_n)$. Deze diagonaalelementen moeten dan volgens stelling 7.4 de eigenwaarden van f(A) zijn, zoals te bewijzen was.

Stelling 7.10. Als A een n-matrix is, die equivalent is met een diagonaalmatrix en f(x) de karakteristieke veelterm van A, dan geldt dat f(A)=0 (nulmatrix).

Bewijs: Laat $D=P^{-1}AP$ een diagonaalvorm van A zijn. De elementen in de hoofddiagonaal van D zijn de eigenwaarden $k_1,k_2,\dots,k_n$ van A. Nu geldt, evenals in het bewijs van de vorige stelling, dat $P^{-1}f(A)P=$ $=f(P^{-1}AP)=f(D)$.

$f(D)$ is een diagonaalmatrix met als diagonaalelementen de eigenwaarden van $f(A)$, dus volgens stelling 7.9: $f(k_1), f(k_2), \ldots, f(k_n)$. Doch daar $k_1, k_2, \ldots, k_n$ de eigenwaarden van A zijn geldt: $f(k_1)=f(k_2)=\ldots=f(k_n)=0$ en dus $f(D)=0$. Daar $f(A)=Pf(D)P^{-1}$ is $f(A)=0$, zoals te bewijzen was.

We toetsen deze stelling aan het volgende voorbeeld:
Voorbeeld 8. Neem voor A de matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Zoals reeds opgemerkt en straks bewezen zal worden, is elke reële symmetrische matrix door een equivalentie-transformatie in de diagonaalvorm te brengen ($P^{-1}AP$ met $P=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ heeft de diagonaalvorm $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$).
$f(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = x^2-4x+3$. Nu geldt inderdaad $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 -4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} +$

$$3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stelling 7.10 is een bijzonder geval van de stelling van Cayley-Hamilton, welke zegt, dat als A een willekeurige vierkante matrix is met karakteristieke veelterm $f(x)$, geldt $f(A)=0$ of: iedere vierkante matrix voldoet aan zijn eigen karakteristieke vergelijking.
Het bewijs van deze algemene stelling zullen we achterwege laten. De stelling van Cayley-Hamilton geldt dus ook voor matrices die niet equivalent zijn met een diagonaalmatrix (defecte matrices).
Dit toetsen we aan de defecte matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ van voorbeeld 7.
De karakteristieke veelterm is $(x-1)^2(x-2)=0$. Inderdaad geldt, dat

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}^2 \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opmerking. De stelling van Cayley-Hamilton stelt ons in staat elke gehele macht van een n-matrix A, en dus ook elke veelterm van A, uit te drukken in $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$.[x] In voorbeeld 8 bijv. geldt voor de positieve machten A^2 en A^3:

[x] als een lineaire combinatie hiervan.

$$A^2 = 4A - 3I$$
$$A^3 = 4A^2-3A = 4(4A-3I)-3A=13A-12I, \text{ enz.}$$

Uit $A^2=4A-3I$ volgt tevens $A-4I+3A^{-1}=0$ (A heeft een inverse), hetgeen ons in staat stelt ook de negatieve gehele machten van A te schrijven als een lineaire combinatie van A en I.

Voorbeeld 9. Bereken langs deze weg de inverse van

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Oplossing: De karakteristieke veelterm van A is $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 4 & 1-x & 5 \\ 6 & 2 & 3-x \end{vmatrix} =$
$= -x^3+5x^2+29x+35$, zodat volgens de stelling van Cayley-Hamilton geldt: $-A^3+5A^2+29A+35I=0$ en dus als A^{-1} bestaat:

$$A^{-1}= \frac{1}{35} (A^2-5A-29I)= \frac{1}{35}\left\{\begin{pmatrix} 27 & 10 & 22 \\ 38 & 19 & 32 \\ 32 & 20 & 37 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -10 & -15 \\ -20 & -5 & -25 \\ -30 & -10 & -15 \end{pmatrix}\right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} -29 & 0 & 0 \\ 0 & -29 & 0 \\ 0 & 0 & -29 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 18 & -15 & 7 \\ 2 & 10 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 0 & 1/5 \\ 18/35 & -3/7 & 1/5 \\ 2/35 & 2/7 & -1/5 \end{pmatrix}, \text{ welke}$$

matrix ook blijkt te voldoen.

Opmerking. Is A een niet-singuliere n-matrix, die door een equivalentie-transformatie in de diagonaalvorm te brengen is, dan kunnen we A^{-1} bijv. ook berekenen uit $P^{-1}AP=D$ (diagonaalmatrix).
Hieruit volgt namelijk $A^{-1}=P\,D^{-1}P^{-1}$. P is volgens stelling 7.6 een matrix met als kolomvectoren lineair onafhankelijke eigenvectoren van A. (P^{-1} bestaat uit n lineair onafhankelijke eigenrijen van A, zie blz.92). D^{-1} is een diagonaalmatrix met diagonaalelementen $\frac{1}{k_i}$.
In het algemeen zal het bepalen van de matrices P en P^{-1} minstens zoveel werk geven als het bepalen van A^{-1} langs directe weg. Dit laatste geldt in het algemeen ook voor de bepaling van A^{-1} uit positieve gehele machten van A, zoals boven uiteengezet. Met name in voorbeeld 9 bracht de berekening van de karakteristieke veelterm en A^2 relatief vrij veel rekenwerk met zich mee.
Bij defecte matrices is, zoals we gezien hebben op blz. 95, volledige diagonalisatie onmogelijk. Wel kan iedere vierkante matrix door middel van een equivalentie-transformatie in de driehoeksvorm worden gebracht (stelling 7,8), Eveneens kan worden aangetoond (het bewijs zullen we niet geven), dat iedere vierkante matrix A door middel van een equivalentie-transformatie getransformeerd kan wor-

den in een zgn. "canonische matrix", d.i. een matrix met de volgende eigenschappen:

1. alle elementen onder de hoofddiagonaal zijn 0;
2. de diagonaalelementen zijn de eigenwaarden van A;
3. alle elementen buiten de hoofddiagonaal zijn 0, uitgezonderd eventueel die elementen, die direct grenzen aan twee gelijke diagonaalelementen;
4. deze laatste elementen (die dus direct grenzen aan twee gelijke diagonaalelementen) zijn 0 of 1.

Een matrix, die deze vier eigenschappen heeft, heet een Jordan-canonische matrix. Iedere matrix A met complexe elementen is dus equivalent met een matrix J van de driehoeksvorm:

$$\begin{pmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & F_r \end{pmatrix}$$

, de zgn. Jordan-canonische (of klassieke) vorm van A (0 in J zijn nulmatrices).

Elk "kastje" F_i in J door de hoofddiagonaal is een vierkante matrix en heeft de vorm:

$$\begin{pmatrix} k_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_i \end{pmatrix}$$

, $k_1, k_2, \dots, k_r$ zijn de eigenwaarden van A.

In rij $k_1, k_2, \dots, k_r$ komen alle eigenwaarden een of meer malen voor. Gelijke eigenwaarden kunnen in de rij minder vaak voorkomen dan de bijbehorende multipliciteit bedraagt. Een F_i van de 1^e orde bestaat alleen uit het element k_i. De Jordan-canonische vorm heeft slechts dan de diagonaalvorm als alle optredende matrices F_i van de 1^e orde zijn. We illustreren het bovenstaande aan een matrix van de 5^e orde, waarvoor $k_1=k_2=k_3$ en $k_4=k_5$, doch $k_1 \neq k_4$. De Jordan-canonische vorm is van het type

$$\begin{pmatrix} k_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix}.$$

Er doen zich de volgende gevallen voor:

1) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$: bij k_1 behoort een 3-dimensionale eigenruimte;

2) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ of $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$: bij k_1 behoort een 2-dimensionale eigenruimte;

3) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$: bij k_1 behoort een 1-dimensionale eigenruimte;

4) $\alpha_3 = 0$: bij k_4 behoort een 2-dimensionale eigenruimte;

5) $\alpha_3 = 1$: bij k_4 behoort een 1-dimensionale eigenruimte.

Voor bijv. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$ is

$$J = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix} .$$

De drie kastjes F_1, F_2 en F_3 zijn dan resp.: $\begin{pmatrix} k_1 & 1 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix}$, (k_1), $\begin{pmatrix} k_4 & 1 \\ 0 & k_4 \end{pmatrix}$.

De bij een matrix behorende Jordan-canonische vorm is bepaald op de volgorde der kastjes $F_1, F_2, \ldots, F_r$ door de hoofddiagonaal na. Ook geldt, dat twee matrices dan en slechts dan equivalent zijn als ze dezelfde canonische vorm hebben (afgezien van de volgorde der matrices F_i).[1] Het bewijs van deze eigenschappen zullen we achterwege laten.
Ook op de reductie van matrices tot andere standaardvormen zal niet nader worden ingegaan.

4. Reële symmetrische matrices.

In dit gedeelte zullen we ons bezighouden met een zeer belangrijke klasse van matrices: de reële symmetrische. Zoals reeds vermeld zijn deze matrices steeds door een equivalentietransformatie in de diagonaalvorm over te brengen.

Een symmetrische matrix A is een matrix waarvoor $A^T = A$. Eigenschappen, die vaak worden toegepast, zijn de volgende:

a) Als A symmetrisch is, is A^{-1}, zo deze bestaat, eveneens symmetrisch $(A^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T)$;

b) Het product AB van twee symmetrische matrices A en B is dan en slechts dan symmetrisch als AB=BA $(AB = A^T B^T = (BA)^T)$.

----

1) De canonische vorm van een matrix die door een equivalentietransformatie in de diagonaalvorm is te brengen, is dus deze diagonaalvorm (afgezien van de volgorde der eigenwaarden in de hoofddiagonaal).

In het bijzonder volgt uit a) en b), dat iedere positieve (en, in het niet-singuliere geval, ook iedere negatieve) gehele macht van een symmetrische matrix eveneens symmetrisch is.

Stelling 7.11. De eigenwaarden van een reële symmetrische matrix A zijn reëel.

Bewijs:(vergelijk syll.N.W.II blz.CR38-39). Stel, dat k een eigenwaarde is. Dan geldt voor een daarbij behorende eigenvector X: (1) $XA=kX$ en dus ook (de toegevoegd complexe vergelijking) (2) $\overline{X}A = \overline{k}\,\overline{X}$.

Uit (1) volgt:

$$AX^T = kX^T \text{ en dus } \overline{X}\,AX^T = k\,\overline{X}X^T.$$

Uit (2) volgt:

$$\overline{X}\,AX^T = \overline{k}\,\overline{X}\,X^T.$$

Dus: $(k-\overline{k})\overline{X}X^T=0$. Daar $X\neq\overline{0}$ geldt $\overline{X}X^T\neq 0$, zodat $k=\overline{k}$, en dus k reëel.

Alvorens de theorie verder te ontwikkelen geven we eerst een aantal definities met eigenschappen betreffende de begrippen inwendig product, lengte, hoek, orthogonaliteit van vectoren in R_n (gedeeltelijk reeds vroeger ter sprake gekomen (zie bijv. blz.83)):

Laat in een R_n $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ en $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ twee reële vectoren zijn (componenten (in het vervolg meestal genoemd coördinaten) x_i en y_i gekozen ten opzichte van het coördinatenstelsel met basisvectoren $(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)$; wordt in het vervolg geen andere basis genoemd, dan wordt ondersteld, dat de coördinaten zijn gekozen t.o.v. genoemde basis).

Dan is:

1. $X\cdot Y = XY^T = x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$ $(=Y\cdot X=YX^T)$:
   het inwendig product van de vectoren X en Y.
2. Lengte van de vector X: $\|X\| =(X\cdot X)^{\frac{1}{2}}=(x_1{}^2+x_2{}^2+\ldots+x_n{}^2)^{\frac{1}{2}}$;
   eenheidsvector heeft lengte 1.
3. Hoek θ tussen twee vectoren X en Y: $\cos\theta = \dfrac{X\cdot Y}{\|X\|\;\|Y\|}$, $0\leq\theta\leq\pi$.
4. Orthogonaliteit van twee vectoren X en Y treedt op als in 3. θ gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi$ of in verband met 1. als
   $X\cdot Y = Y\cdot X = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = 0$.

5. Onderling orthogonale vectoren ($\neq \overline{0}$) zijn lineair onafhankelijk.
6. Iedere vectorruimte van dimensie $r > 0$ bezit r doch niet meer dan r onderling orthogonale vectoren $\neq \overline{0}$; in iedere vectorruimte R_n is dus een (lin.onafh.) stelsel van vectoren (basis) te kiezen, dat bestaat uit n onderling orthogonale vectoren.
7. Genormeerd orthogonaal stelsel (basis) in R_n is een stelsel vectoren in R_n, dat bestaat uit n onderling orthogonale eenheidsvectoren. (Zo'n basis kan altijd geconstrueerd worden uit een willekeurige basis bijv. d.m.v. het zgn Gram -Schmidt orthogonalisatieproces).
8. Als $E_1, E_2, \ldots, E_s$ $s(1 \leq s < r)$ onderling orthogonale eenheidsvectoren zijn in een vectorruimte V van dimensie r, dan bestaan er $r-s$ eenheidsvectoren $E_{s+1}, E_{s+2}, \ldots, E_r$ in V zó, dat de r vectoren $E_1, \ldots, E_r$ een genormeerde orthogonaalbasis (of een zgn. Cartesisch coördinatenstelsel) bepalen voor V (af te leiden uit de uitwisselingsstelling van Steinitz, stelling 2.4, blz.8).
9. Als de n rijen van een vierkante matrix P van orde n een genormeerd orthogonaal stelsel vormen in een R_n, dan geldt volgens 2., 4. en 7: $PP^T = P^TP = I$.
   De n kolomvectoren van P vormen eveneens een genormeerd orthogonaal stelsel in R_n.
   Een matrix P met $PP^T = I$ heet een orthogonale matrix ($P^T = P^{-1}$).
10. De inverse (= de getransponeerde) van een orthogonale matrix is orthogonaal. Het product van twee of meer orthogonale matrices is orthogonaal. De determinant van een orthogonale matrix is in volstrekte waarde gelijk aan 1.

Stelling 7.12. Als A een reële symmetrische matrix is, dan bestaat er een orthogonale matrix P, zodat $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix is (vergelijk blz.95 en syll.N.W.II blz. CR 39, formule 7.8 .10).
Bewijs: Laat $k_1, k_2, \ldots, k_n$ de eigenwaarden van A zijn. Daar k_1 volgens stelling 7.11 reëel is, is er een reële eenheidseigenvector S_1, die correspondeert met k_1 en waarbij dus $AS_1^T = k_1S_1^T$. Volgens voorgaande punten 8 en 9 bestaat er een orthogonale matrix S, waarvan S_1^T de eerste kolomvector is.
De eerste kolomvector van AS is $AS_1^T = k_1S_1^T$, zodat $k_1S^{-1}S_1^T$ de eerste kolomvector van $S^{-1}AS$ is. Doch $k_1S^{-1}S_1^T$ is de eerste kolom van

$k_1S^{-1}S=k_1I$, of $(k_1 0\ldots 0)^T$. Bovendien is wegens $(S^{-1}AS)^T=(S^TAS)^T=$ $=S^TAS=S^{-1}AS$, de matrix $S^{-1}AS$ symmetrisch, zodat

$S^{-1}AS=\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & A_1\end{pmatrix}$, waarbij in het rechterlid de matrix A_1 symmetrisch is van de orde n-1 met eigenwaarden $k_2,k_3,\ldots,k_n$.

Stelling 7.12 wordt nu bewezen met volledige inductie: Als Q een orthogonale matrix is van de orde n-1, die A_1 diagonaliseert, $Q^{-1}A_1Q=D$=diagonaalmatrix, dan is SR met $R=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}$ eveneens orthogonaal, terwijl $(SR)^{-1}A\ SR = R^{-1}S^{-1}A\ SR =$

$$=R^{-1}\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & A_1\end{pmatrix}R=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & Q^{-1}A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}=$$

$=\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}$. Deze laatste matrix is een diagonaalmatrix, daar D een diagonaalmatrix is. De orthogonale matrix P=SR diagonaliseert dus A. Hiermede is het bewijs geleverd.

Opmerking. Dat stelling 7.12 in het algemeen niet juist is voor niet-symmetrische en voor niet-reële matrices zien wij resp. aan de matrices $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$. $(i=\sqrt{-1})$. Beide matrices bezitten niet twee lineair onafhankelijke eigenvectoren, en zijn derhalve volgens stelling 7.6 niet equivalent met een diagonaalmatrix (vergelijk ook voorbeeld 5).

Volgens stelling 7.6 zijn de kolomvectoren van P eigenvectoren van A. Deze kolomvectoren zijn onderling orthogonaal, daar P een orthogonale matrix is, zodat (vergelijk syll.N.W.II blz.CR 38)

<u>Stelling 7.13</u> Een reële symmetrische matrix van de orde n heeft n onderling orthogonale eigenvectoren.

Omgekeerd is het duidelijk, dat als we n onderling orthogonale eenh. eigenvectoren van A kunnen vinden, de matrix P, die samengesteld is uit deze kolomvectoren en die dus orthogonaal is, A transformeert in de diagonaalvorm.

Het probleem van de diagonalisering van een reële symmetrische matrix, is hiermede teruggebracht tot dat van het vinden van n onderling orthogonale eigenvectoren van A. De volgende twee stellingen geven hiervoor het middel:

<u>Stelling 7.14</u>. Als twee eigenvectoren S_1 en S_2 van een reële symmetrische matrix A corresponderen met twee verschillende eigenwaarden van A, dan zijn S_1 en S_2 orthogonaal.

Bewijs: Laat k_1 en k_2 twee verschillende eigenwaarden van A zijn met S_1 en S_2 als corresponderende reële eigenvectoren. Daar $AS_1^T=k_1S_1^T$ geldt $S_2AS_1^T=k_1S_2S_1^T$. Ook geldt, daar $AS_2^T=k_2S_2^T$ $S_2A=k_2S_2$ en dus $S_2AS_1^T=k_2S_2S_1^T$. Dus $k_1S_2S_1^T=k_2S_2S_1^T$; en daar $k_1 \neq k_2$ geldt $S_2S_1^T=0$, zodat de eigenvectoren S_1 en S_2 orthogonaal zijn.

<u>Stelling 7.15.</u> Als k een p-voudige eigenwaarde is van een reële symmetrische matrix A, dan heeft A p en niet meer dan p onderling orthogonale eigenvectoren die corresponderen met k (vergelijk stelling van Weierstrass op blz.95).

Bewijs: Volgens stelling 7.12 is er een matrix P, zo dat $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix is, waarin k juist p maal in de hoofddiagonaal voorkomt. $P^{-1}AP-kI$ heeft dus de rang n-p. Daar $P^{-1}AP-kI=P^{-1}(A-kI)P$ 1) en P en P^{-1} niet-singulier, heeft A-kI dus ook de rang n-p. De oplossingsruimte van de vergelijkingen: $(A-kI)X^T=0$ is derhalve van de dimensie n-(n-p)=p, zodat er volgens punt 6, blz.103 p en niet meer dan p onderling orthogonale eenheidsvectoren in deze ruimte bestaan. Dit zijn dan p (uiteraard niet eenduidig bepaalde) onderling orthogonale eigenvectoren van A.

Uit stelling 7.15 volgt, dat met elke enkelvoudige wortel van de karakteristieke vergelijking van A een (op een factor $\pm$ 1 na bepaalde) eenheidseigenvector van A correspondeert en met een p-voudige wortel p onderling orthogonale eenheidseigenvectoren. Daar volgens stelling 7.14 eigenvectoren, die corresponderen met verschillende eigenwaarden van A, onderling orthogonaal zijn, bestaan er n onderling orthogonale eenheidseigenvectoren van A, die tezamen een orthogonale matrix P vormen, welke A transformeert in een diagonaalmatrix volgens $P^{-1}AP$.

Voor de numerieke aspecten van de eigenwaardetheorie wordt verwezen naar de syllabus Numerieke Wiskunde.
De theorie kan toegepast worden op diverse gebieden zoals in het volgende aan de hand van enkele onderwerpen zal worden getoond.

---

1) Uit stelling 6.15, blz.51.

5. Homogene lineaire transformaties (zie ook § 3).

Laat τ een homogeen lineaire (n,n)-transformatie zijn in een R_n met vierkante reële symmetrische matrix A (elementen a_{ik}) t.o.v. een zekere basis (coördinatenstelsel) in de R_n.
De transformatie die in R_n een vector X in de vector Y overvoert is dan voor te stellen door de matrixvergelijking $Y^T=AX^T$ of $Y=XA^T=XA$. Als A t.o.v. een zekere basis in R_n een diagonaalmatrix is met alle diagonaalelementen a_{ii} positief, dan stelt de corresponderende transformatie τ een "uitrekking" voor. Vectoren in de richting der basisvectoren worden door τ met a_{ii} vermenigvuldigd. Eventueel worden deze vectoren "samengedrukt"* (als $0 < a_{ii} \leq 1$), doch ook in dit geval spreekt men van een uitrekking.

Als we nu onder een positief definiete symmetrische matrix een reële symmetrische matrix verstaan, die slechts positieve eigenwaarden bezit, dan geldt de volgende stelling:

Stelling 7.16. Als de matrix van een homogene lineaire transformatie τ van R_n positief definiet symmetrisch is, dan stelt τ een uitrekking voor.
Bewijs: Laat in R_n A de bijbehorende matrix van τ zijn en Q een orthogonale matrix, die A diagonaliseert (volgens stelling 7.12 altijd mogelijk), dus $Q^{-1}AQ=D$ (D=diagonaalmatrix). Pas nu in R_n een coördinatentransformatie toe met matrix P (elementen p_{ik})$=Q^T$, d.w.z. dat tussen de oude basisvectoren $E_1,E_2,\ldots,E_n$ en de nieuwe $F_1,F_2,\ldots,F_n$ het verband bestaat

(7.8) $$E_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji}F_j \qquad i=1,\ldots,n \qquad \text{(vergl. opgave 83).}$$
$$(\det (p_{ik})\neq 0)$$

Als $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ en $X'=(x_1',x_2',\ldots,x_n')$ resp. de coördinatenvoorstelling van een zekere vector in R_n t.o.v. het E-resp. het F-stelsel is, geldt

(7.9) $$x_1E_1 + x_2E_2 +\ldots+x_nE_n = x_1'F_1+x_2'F_2+\ldots+x_n'F_n \;.$$

Als we in het linkerlid van (7.9) (7.8) substitueren, krijgen we in beide leden van (7.9) een lineair compositium van $F_1,F_2,\ldots,F_n$. Aangezien deze laatste vectoren een lineair onafhankelijk stelsel vormen, moeten de coëfficiënten dus overeenstemmen, zodat

* of blijven invariant

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j \quad , \quad i=1,\ldots,n \ ,$$

of in matrixnotatie:

(7.10) $\quad X'^T = PX^T \quad$ of $\quad X'=XP^T=XQ$.

We hebben nu dus $Y=XA$, $Y'=YQ$, $X'=XQ$, zodat

(7.11) $\quad Y'=YQ=XAQ=X'Q^{-1}AQ \ = X'D$ (vergl. de opmerking op blz.88).

Ten opzichte van de nieuwe F-basis heeft de met A equivalente matrix $Q^{-1}AQ$ van τ dus de diagonaalvorm. Daar de diagonaalelementen van deze matrix de eigenwaarden van A zijn, zijn deze elementen positief, zodat τ dus een uitrekking voorstelt.

Opmerking. Als A de matrix van τ is t.o.v. een genormeerd orthogonaal stelsel, is de nieuwe basis eveneens genormeerd orthogonaal, aangezien P orthogonaal is. De uitrekking vindt daarom dan plaats in onderling orthogonale richtingen.

Zonder bewijs geven we hier nog de volgende stellingen:
<u>Stelling 7.17</u>. Een reële symmetrische matrix A is dan en slechts dan positief definiet als er een niet-singuliere matrix Q bestaat, zodanig, dat $A=Q^TQ$.
<u>Stelling 7.18</u>. Iedere reële niet-singuliere matrix A kan geschreven worden als een product $A=PS$, waarin P orthogonaal is en S positief definiet symmetrisch. (P en S worden bovendien eenduidig door A bepaald) (een bewijs van deze stelling is vervat in voorbeeld 10, blz.109).
Opmerking. Ook kan bewezen worden, dat $A=S_1P_1$, waarin S_1=positief definiet symmetrisch en P_1=orthogonaal.

<u>Orthogonale transformatie</u>. Hieronder verstaan we een homogeen lineaire transformatie τ in R_n met de eigenschap dat de oorspronkelijke vector en de beeldvector bij transformatie τ dezelfde lengte hebben voor alle vectoren X in R_n, dus $\|XA^T\| = \|X\|$. (A is de bij τ behorende transformatiematrix).
Bewezen kan worden, dat een nodige en voldoende voorwaarde voor het behoud van lengte is, dat de bij τ behorende transformatiematrix A t.o.v. de basis $E_1=(1,0,\ldots,0),\ldots,E_n=(0,0,\ldots,1)$ (of ook t.o.v. ieder genormeerd orthogonaal stelsel) orthogonaal is.

De determinant van een orthogonale matrix is in volstrekte waarde gelijk aan 1. Een orthogonale transformatie in R_n met matrix A t.o.v. eengenormeerde orthogonale basis heet eigenlijk (direct) of oneigenlijk (gespiegeld) orthogonaal al naar gelang resp. $|A|=1$ of $|A|=-1$. Deze eigenschappen zijn invariant bij coördinatentransformatie van de ene genormeerde orthogonale basis naar de andere.
Een eigenlijke orthogonale transformatie heet een draaiing of rotatie.
Deze definitie komt overeen met de definitie, dat in R_n een rotatie een homogeen lineaire transformatie is, waarbij lengten (en dus ook hoeken), alsmede orientaties invariant blijven.
We zullen nu als voorbeeld eens alle orthogonale transformaties in R_2 bepalen.
Laat A een orthogonale transformatie zijn met matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
De kolommen zijn de beeldvectoren E_1' en E_2' van de basisvectoren E_1 en E_2. Deze hebben evenals E_1 en E_2 ook de lengte 1, dus $a_{11}^2+a_{21}^2=1$ en $a_{12}^2+a_{22}^2=1$. We kunnen de getallen in de eerste kolom van de transformatiematrix $\cos\varphi$ en $\sin\varphi$ stellen en die in de tweede kolom $\sin\psi$ en $\cos\psi$, dus $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\psi \\ \sin\varphi & \cos\psi \end{pmatrix}$. E_1' en E_2' zijn bovendien onderling orthogonaal, dus $\cos\varphi\ \sin\psi + \sin\varphi\ \cos\psi = \sin(\varphi+\psi)=0$, zodat $\psi=-\varphi$ of $\psi=\pi-\varphi$. De matrix wordt dus $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$. In het eerste geval is $|A|=1$, dus de transformatie eigenlijk orthogonaal. In het tweede geval is $|A|=-1$, en de transformatie dus gespiegeld orthogonaal.
In het eerste geval is de transformatie een draaiing over een hoek φ; in het tweede geval is eerst E_2 t.o.v. de E_1-as gespiegeld en daarna het geheel over een hoek φ gedraaid.

Stelling 7.18 stelt ons in staat de geometrische betekenis van een willekeurige niet-singuliere homogeen lineaire transformatie (d.i. een transformatie met een bijbehorende niet-singuliere matrix) in R_n nader te bepalen:
Onderstel, dat τ zo'n transformatie is en dat A t.o.v. een orthogonaal genormeerd stelsel de bijbehorende reële matrix is. Laat $A^T=PS$ (stelling 7.18), waarin P orthogonaal en S positief definiet symmetrisch. Laat verder Q een orthogonale matrix zijn, die S diagonaliseert (stelling 7.12). Dan geldt:

$$Q^{-1}A^TQ = Q^{-1}PSQ = Q^{-1}PQQ^{-1}SQ = Q^{-1}PQD = RD\ ,$$

waarin R de orthogonale matrix $Q^{-1}PQ$ is en D een diagonaalmatrix met alleen positieve diagonaalelementen.
Passen we nu in R_n een coördinatentransformatie toe met matrix Q^T, dan krijgen we een nieuw genormeerd orthogonaalstelsel, ten opzichte waarvan de homogeen lineaire transformatie τ (die een vector X in een vector Y overvoert) voorgesteld kan worden door Y=XRD.
Dientengevolge is τ equivalent met een orthogonale transformatie met matrix R^T (t.o.v. de nieuwe basis), gevolgd door een uitrekking met matrix D (eveneens t.o.v. de nieuwe basis). Daar iedere orthogonale transformatie een rotatie is of een rotatie gevolgd door een spiegeling, geldt het volgende resultaat:
Stelling 7.19. Iedere niet-singuliere homogeen lineaire transformatie in R_n is of equivalent met een rotatie gevolgd door een uitrekking of met een rotatie, eerst gevolgd door een spiegeling en daarna door een uitrekking.
Voorbeeld 10. Gegeven in een R_3 de matrix A: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Gevraagd wordt a) A te schrijven als product van een orthogonale matrix P en een positief definiete symmetrische matrix S; en b) de meetkundige betekenis van de met A^T corresponderende homogene lineaire transformatie.
Oplossing: a) Volgens stelling 7.17 is $B=A^TA=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ positief definiet symmetrisch. Onderling orthogonale eenheidseigenvectoren van B zijn $(\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2},0)$, $(-\frac{1}{6}\sqrt{6},\frac{1}{6}\sqrt{6},\frac{1}{3}\sqrt{6})$, $(\frac{1}{3}\sqrt{3},-\frac{1}{3}\sqrt{3},\frac{1}{3}\sqrt{3})$.
De orthogonale matrix $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ met deze vectoren als kolomvectoren transformeert B d.m.v. $Q^{-1}BQ=Q^TBQ$ in de diagonaalmatrix $D=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Laat D_1 de diagonaalmatrix zijn met positieve diagonaalelementen zodat $D_1^2=D$, dus $D_1=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Stel $S=QD_1Q^T$, dan is S symmetrisch en positief definiet, aangezien S equivalent is met D_1, die alleen positieve eigenwaarden heeft.

Ook geldt $S^2=QD_1Q^TQD_1Q^T=QDQ^T=B=A^TA$. Als nu $P=AS^{-1}$ geldt $P^TP=(AS^{-1})^TAS^{-1}=(S^{-1})^TA^TAS^{-1}=(S^{-1})^TS^2S^{-1}=(S^{-1})^TS=S^{-1}S=I$. P is dus orthogonaal, zodat $A=PS$ met P orthogonaal en S positief definiet symmetrisch (stelling 7.18 is hiermede tevens bewezen).
De gevraagde positief definiete symmetrische matrix S is dus

$$S=QD_1Q^T=\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \text{ en de orthogonale matrix } P=AS^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

zodat

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}}_{S} .$$

In dit bijzondere geval geldt $PS=SP$, zoals direct is te verifiëren.

b) Stel τ is een homogeen lineaire transformatie in R_3 met bijbehorende matrix A^T t.o.v. de basis $E_1=(1,0,0)$, $E_2=(0,1,0)$, $E_3=(0,0,1)$.
Voor de getransformeerde vector $Y=(y_1,y_2,y_3)$ van een vector $X=(x_1,x_2,x_3)$ geldt

$$(7.12) \qquad Y = XA \text{ of } \begin{cases} y_1 = x_1+x_2+x_3 \\ y_2 = -x_1+x_2+x_3 \\ y_3 = -x_1-x_2+x_3 \end{cases} .$$

De eigenlijke orthogonale transformatie met orthogonale matrix P^T (t.o.v. de basis E_1,E_2,E_3) stelt in R_3 een rotatie voor, welke alle vectoren in een zekere richting R (de richting der rotatie-as) invariant laat. (Dat er in het algemeen zo'n richting R bestaat volgt uit: $|P^T-I|=|P^T-I|\,|P|=|P^TP-P|=|I-P|=(-1)^3|P-I|=-|P^T-I|$, dus $|P^T-I|=0$, (P^T-I) is dus singulier, zodat er een vector $R(\neq\overline{0})$ is met $(P^T-I)R^T=0$ of $RP=R$).
De orthogonale P^T heeft een eigenwaarde 1 met een bijbehorende eigenvector $(1,-1,1)$. In deze richting valt dus de rotatie-as, die bij de rotatie behoort. Het vlak $x_1-x_2+x_3=0$ door O, orthogonaal met de rotatie-as, blijft invariant. Om de draaiingshoek θ te vinden, waarover bij de rotatie gedraaid wordt, beschouwen we de

vector (1,1,0) in dit invariante vlak. Deze vector gaat bij de rotatie over in de vector (1,0,-1). De cosinus van de hoek θ tussen (1,1,0) en (1,0,-1) is volgens punt 3, blz.102 gelijk aan

$$\frac{1.1+1.0+0.1}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ .\ \theta \text{ is dus } 60^\circ.$$

Om de as in de richting van (1,-1,1) wordt dus over een hoek van 60° gedraaid, in de richting van (1,1,0) naar (1,0,-1). De matrix S heeft de eigenwaarden van D_1, dus de waarden 1 en 2 (2-voudig). Hierbij behoort een "uitrekking" met een factor 1 in de richting (1,-1,1) der rotatie-as ((1,-1,1) is een eigenvector van S behorende bij de eigenwaarde 1) en een uitrekking met een factor 2 in alle richtingen gelegen in het vlak $x_1-x_2+x_3=0$, dat orthogonaal is met de rotatie-as.

De transformatie (7.12) is het (commutatieve) product van de rotatie:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3 \\ y_2 = -\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3 \\ y_3 = -\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3 \end{cases} \quad , \text{ en de uitrekking: } \begin{cases} y_1 = \frac{5}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3 \\ y_2 = \frac{1}{3}x_1+\frac{5}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3 \\ y_3 = -\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{5}{3}x_3 \end{cases}.$$

Dus samenvattend: De homogeen lineaire transformatie, die correspondeert met A^T stelt in R_3 een rotatie voor met rotatie-as in de richting (1,-1,1) met een draaiingshoek van 60° (in de richting (1,1,0)$\rightarrow$(1,0,-1)), gecombineerd met een uitrekking met factor 2 in alle richtingen orthogonaal met deze rotatie-as, dus in die richtingen welke gelegen zijn in het vlak $x_1-x_2+x_3=0$.