STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

REKENAFDELING

CURSUS WETENSCHAPPELIJK REKENAAR

Lineaire Algebra en Meetkunde

door

F.J.M. Barning

deel I
1961

CURSUS WETENSCHAPPELIJK REKENAAR

Lineaire Algebra en Meetkunde

§1. Vectoren in het platte vlak en in de (drie-dimensionale) ruimte

Zij O (de oorsprong) een vast punt in vlak of ruimte.

Definitie: Een vector is een gericht lijnstuk (een pijl) met O als beginpunt en een willekeurig punt als eindpunt.

Dit betekent, dat een vector een bepaalde lengte heeft, nl. de lengte van de pijl en een bepaalde richting, nl. de richting van de pijl.

Is A het eindpunt van een vector, dan duiden we deze vector aan met $\overrightarrow{OA}$ of kortweg $\overline{OA}$. Een vector wordt ook dikwijls aangegeven door een enkele letter (evt. geïndiceerd), voorzien van pijltje of streepje, bijv. $\bar{a}$, $\bar{v}$, $\bar{x}$, $\bar{b}_n$, $\bar{w}_2$ enz. De lijn, waarop de vector ligt, is de drager van de vector.

Onder de nulvector $\bar{0}$ verstaan we de vector, waarvan O zowel het begin- als het eindpunt is.

Op vectoren kan men verschillende bewerkingen uitvoeren;

1. Optelling

   Onder de som van twee vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$, geschreven als $\bar{a} + \bar{b}$, verstaat men de vector, die zijn eindpunt heeft in het hoekpunt C van het parallelogram OACB met $\overline{OA} = \bar{a}$ en $\overline{OB} = \bar{b}$ tot zijden.

2. Scalaire vermenigvuldiging

   Onder $\lambda\bar{a}$ (of $\lambda * \bar{a}$ of $\lambda.\bar{a}$), dat is het product van de vector $\bar{a}$ met het reële getal λ (een scalar), verstaat men de vector, die zijn eindpunt heeft in het punt, dat ontstaat door het eindpunt van $\bar{a}$ t.o.v. O met λ te vermenigvuldigen. Dit betekent, dat $\bar{a}$ en $\lambda\bar{a}$ dezelfde drager hebben, terwijl de lengte van $\lambda\bar{a}$ gelijk is aan $|\lambda|$ maal de lengte van $\bar{a}$. Is $\lambda > 0$ dan heeft $\lambda\bar{a}$ dezelfde richting als $\bar{a}$, is $\lambda < 0$ dan heeft $\lambda\bar{a}$ tegengestelde richting. Is $\lambda = 0$ dan levert scalaire vermenigvuldiging de nulvector op.

Eigenschappen van de optelling:

(1.1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (optelling is commutatief)
(1.2) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (optelling is associatief)

Er is één vector $\bar{x}$ zodat $\bar{a} + \bar{x} = \bar{a}$. $\bar{x}$ is de nulvector $\bar{0}$:

(1.3) $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.

Er is één vector $\bar{x}$, zodat $\bar{a} + \bar{x} = \bar{0}$. Deze $\bar{x}$ is gelijk aan $(-1)\bar{a}$, kortweg aangegeven door $-\bar{a}$ (tegengestelde van $\bar{a}$):

(1.4) $\bar{a} - \bar{a} = \bar{0}$.

Opm. (1.3) en (1.4) volgen direct uit het feit, dat de vectorvergelijking

$$\bar{a} + \bar{x} = \bar{b}$$

eenduidig oplosbaar is naar $\bar{x}$ voor elk tweetal gegeven vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$, namelijk $\bar{x} = \bar{b} + (-\bar{a})$. Het rechterlid noemen we $\bar{b} - \bar{a}$, het verschil van $\bar{b}$ en $\bar{a}$. Algemeen schrijven we voor $(-\lambda)\bar{a}$ kort: $-\lambda\bar{a}$. De vergelijkingen (1.1) t/m (1.4) houden in, dat de verzameling der vectoren tegenover de optelling een commutatieve (of Abelse) groep vormen.

Eigenschappen van de scalaire vermenigvuldiging:

(1.5) $(\lambda\mu)\bar{a} = \lambda(\mu\bar{a})$
(1.6) $1.\bar{a} = \bar{a}$; $0.\bar{a} = \bar{0}$; $\lambda.\bar{0} = \bar{0}$
(1.7) $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$ (1e distributieve eigenschap)
(1.8) $(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$ (2e distributieve eigenschap)

Definitie: Een vector $\bar{b}$ is een lineaire combinatie van $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$, als er twee reële getallen α_1 en α_2 bestaan, zodanig, dat

(1.9) $\bar{b} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2$.

Men zegt ook, dat $\bar{b}$ in dat geval lineair afhankelijk is van $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$.
Algemeen: $\bar{b}$ is lineair afhankelijk van de n vectoren $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, als er n getallen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bestaan, zodanig, dat

(1.10) $\bar{b} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n$.
(of: $\bar{b}$ is een lineaire combinatie van $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$)

Opm. 1) De nulvector $\bar{0}$ is dus lineair afhankelijk van elk willekeurig p-tal vectoren $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_p$.

2) Is $\bar{b}$ lineair afhankelijk van $\bar{a}$, dan is $\bar{b} = \alpha\bar{a}$.

Definitie: Het stelsel vectoren $\bar{a}_1, \bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ heet lineair afhankelijk, als minstens één vector ervan lineair afhankelijk is van de overige, d.w.z. minstens één ervan is een lineaire combinatie van de andere vectoren $(n>1)$.*)

Hieruit volgt:

Stelling 1.1 Als de n vectoren $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$ een lineair afhankelijk stelsel vormen, dan bestaat er een lineaire betrekking tussen deze vectoren:

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{0}\ , \tag{1.11}$$

waarbij de n getallen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ niet alle 0 zijn. Omgekeerd: Als er zo'n lineaire betrekking bestaat tussen n vectoren $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$, dan is het stelsel gevormd door deze vectoren lineair afhankelijk. M.a.w. de gegeven lineaire betrekking (1.11) met $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ niet alle 0, is een nodige en voldoende voorwaarde voor de afhankelijkheid van het stelsel vectoren $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$. Een aequivalente definitie voor lineaire afhankelijkheid voor een stelsel vectoren $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$ luidt dus: Er zijn coëfficiënten $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ te vinden, niet alle 0, zodanig, dat aan (1.11) voldaan is.

Stelling 1.2 Wanneer tot een stelsel vectoren de nulvector behoort, dan is het stelsel lineair afhankelijk.

Stelling 1.3 Drie vectoren in de ruimte zijn dan en slechts dan lineair afhankelijk, als zij in eenzelfde vlak zijn gelegen.

Stelling 1.4 In de ruimte resp. het platte vlak zijn 4 resp. 3 vectoren steeds lineair afhankelijk.

-----

*) Als n=1 bestaat het "stelsel" uit 1 vector, dat per definitie lineair afhankelijk is als de vector gelijk is aan de nulvector.

Definitie: Een stelsel vectoren heet lineair onafhankelijk, als het niet lineair afhankelijk is.

Hieruit volgt onmiddellijk:

Stelling 1.5 Als de n vectoren $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ een lineair onafhankelijk stelsel vormen en als $\alpha_1\bar{a}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{0}$, dan moet noodzakelijk: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Opgaven:

1) Is $\bar{a}$ lineair afhankelijk van $\bar{b}$ en $\bar{b}$ lineair afhankelijk van $\bar{c}$, dan is $\bar{a}$ lineair afhankelijk van $\bar{c}$. Bewijs dit. Is $\bar{c}$ ook altijd lineair afhankelijk van $\bar{a}$?

2) De vectoren $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$ vormen een lineair afhankelijk stelsel. Volgt hier noodzakelijk uit, dat $\bar{a}$ lineair afhankelijk is van $\bar{b}$ en $\bar{c}$?

3) Bewijs dat $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$ dan en slechts dan een lineair afhankelijk (resp. lineair onafhankelijk) stelsel vormen, als $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$ een lineair afhankelijk (resp. lineair onafhankelijk) stelsel vormen.

4) Bewijs, dat als $\bar{a}$ en $\bar{b}$ een lineair afhankelijk stelsel vormen, het stelsel gevormd door $\bar{a}$, $\bar{b}$ en een willekeurige vector $\bar{c}$ eveneens lineair afhankelijk is.

5) De vectoren $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$ vormen dan en slechts dan een lineair afhankelijk (resp. lineair onafhankelijk) stelsel als $\alpha\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$ een lineair afhankelijk (resp. lineair onafhankelijk) stelsel vormen ($\alpha \neq 0$).

6) Gegeven is:
1. $\bar{a}$ is lineair afhankelijk van $\bar{b}$ en $\bar{c}$
2. $\bar{b}$ is lineair onafhankelijk van $\bar{a}$ en $\bar{c}$
3. $\bar{a} \neq \bar{0}$.

Bewijs, dat $\bar{c}$ lineair afhankelijk is van $\bar{a}$.

7) De vector $\bar{a}$ is lineair afhankelijk van $\bar{b}$. Bovendien is $\bar{c}$ lineair afhankelijk van $\bar{a}$ en $\bar{b}$. Is altijd $\bar{b}$ lineair afhankelijk van $\bar{a}$ en $\bar{c}$?

8) Gegeven is:

1. $\bar{a} \neq \bar{0}$
2. $\bar{b}$ is lineair onafhankelijk van $\bar{a}$
3. $\bar{c}$ is lineair onafhankelijk van $\bar{a}$ en $\bar{b}$
4. $\bar{d}$ is lineair onafhankelijk van $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$.

Bewijs, dat $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ en $\bar{d}$ een lineair onafhankelijk stelsel vormen.

9) De vector $\bar{a}$ is lineair afhankelijk van $\bar{b}$ en $\bar{c}$ en bovendien lineair afhankelijk van $\bar{b}$ en $\bar{d}$. Vormen $\bar{b}$, $\bar{c}$ en $\bar{d}$ een lineair afhankelijk stelsel?

10) Gegeven is:

1. $\bar{a}$ is lineair afhankelijk van $\bar{b}$, $\bar{c}$ en $\bar{d}$
2. $\bar{b}$ is lineair afhankelijk van $\bar{c}$ en $\bar{d}$
3. $\bar{a}$ en $\bar{d}$ vormen een lineair onafhankelijk stelsel.

Bewijs, dat $\bar{c}$ lineair afhankelijk is van $\bar{a}$ en $\bar{d}$.
Indien gegeven 3) wordt weggelaten, is dan $\bar{c}$ nog noodzakelijk lineair afhankelijk van $\bar{a}$ en $\bar{d}$?

Zij O weer in de ruimte het vaste punt, dat we de oorsprong noemen, dan behoort bij ieder punt P een vector $\overline{OP}$, de <u>plaatsvector</u> van P. Omgekeerd behoort bij iedere vector $\bar{p}$ een punt P in de ruimte, zodat $\overline{OP} = \bar{p}$. Een plaatsvector en een punt, die met elkaar in bovengenoemde relatie staan, worden veelal weergegeven door dezelfde letter: de plaatsvector van A is $\bar{a}$ enz.
Wij geven nu in de ruimte de oorsprong O en drie niet in één vlak gelegen vectoren: $\overline{OE_1} = \bar{e}_1$, $\overline{OE_2} = \bar{e}_2$ en $\overline{OE_3} = \bar{e}_3$ (dus $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ en $\bar{e}_3$ lineair onafhankelijk wegens stelling 1.3).

Definitie: Het punt O met de drie plaatsvectoren $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ en $\bar{e}_3$ vormen een <u>coördinatenstelsel</u> in de ruimte. De rechten door O langs $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ en $\bar{e}_3$ heten de <u>assen</u> van het coördinatenstelsel. $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ en $\bar{e}_3$ heten de <u>basisvectoren</u> (of <u>grondvectoren</u>). O heet de <u>oorsprong</u>.

<u>Stelling 1.6</u> Iedere vector $\bar{a}$ is in de ruimte op één en slechts één wijze te schrijven als

(1.12) $$\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3 .$$

α_1, α_2, α_3 zijn dus eenduidig bepaald bij gegeven $\bar{a}$. Men zegt: in het coördinatenstelsel bestaat een eeneenduidige afbeelding tussen de punten van de ruimte en een drietal reële getallen.

Definitie: In de ruimte zijn α_1, α_2 en α_3 in (1.12) de coördinaten van het eindpunt A van $\bar{a}$ in het coördinatenstelsel, waarvan de assen langs $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ en $\bar{e}_3$ vallen. In dit coördinatenstelsel heten deze getallen α_1, α_2 en α_3 de kentallen van $\bar{a}$; de drie vectoren $\alpha_1\bar{e}_1$, $\alpha_2\bar{e}_2$ en $\alpha_3\bar{e}_3$ de componenten van A (d.z. de projecties van $\bar{a}$ op de assen; projectierichting bij projectie op een as is evenwijdig aan het vlak door de beide andere assen. α_1, α_2 en α_3 zijn de van teken voorziene lengten der projecties). Schrijfwijze: $\overline{OA} = \bar{a} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

Het punt A wordt ook wel aangegeven door A($\bar{a}$). In het betreffende coördinatenstelsel geldt blijkbaar:

$\bar{e}_1 = (1,0,0)$; $\bar{e}_2 = (0,1,0)$; $\bar{e}_3 = (0,0,1)$ en $\bar{0} = (0,0,0)$; $(p,0,0)$ is een vector langs de eerste coördinantas, $(0,q,0)$ langs de tweede en $(0,0,r)$ langs de derde as. Met de vectorkentallen kan men rekenen als met de vectoren zelf:

Stelling 1.7 Als $\bar{a} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, dan is $\lambda\bar{a} = (\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\lambda\alpha_3)$; in het bijzonder $-\bar{a} = (-\alpha_1,-\alpha_2,-\alpha_3)$.
Als $\bar{a} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ en $\bar{b} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, dan is $\bar{a} + \bar{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$,
d.w.z.
Vectoren worden opgeteld door de overeenkomstige kentallen van de vectoren op te tellen en worden met een scalar vermenigvuldigd door de kentallen van de vector met de scalar te vermenigvuldigen.

Evenzo in het platte vlak: Neem hierin twee vectoren $\bar{e}_1$ en $\bar{e}_2$ (beide $\neq \bar{0}$), aangrijpend in een vast punt O, de oorsprong en wel zó, dat ze niet langs dezelfde lijn vallen. Men kan dan zeggen, dat de lineair onafhankelijke vectoren $\bar{e}_1$ en $\bar{e}_2$ in het platte vlak de basisvectoren vormen van een coördinatenstelsel, bepaald door O, $\bar{e}_1$ en $\bar{e}_2$. Elke vector $\bar{a}$

in het platte vlak is op één en slechts één wijze te schrijven als $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2$; de beide termen zijn de componenten van $\bar{a}$ (projecties van $\bar{a}$ op de assen door $\bar{e}_1$ en $\bar{e}_2$); α_1 en α_2 zijn zowel de kentallen van $\bar{a}$ (van teken voorziene lengten der projecties), als de coördinaten van A in het betreffende coördinatenstelsel indien $\overline{OA} = \bar{a}$. Schrijfwijze: $\overline{OA} = \bar{a} = (\alpha_1,\alpha_2)$. Weer is: $\lambda\bar{a} = (\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2)$ en als $\bar{b} = (\beta_1,\beta_2)$: $\bar{a} + \bar{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$; $\bar{0} = (0,0)$; $(p,0)$ is een vector langs de as door $\bar{e}_1$; $(0,q)$ een vector langs de as door $\bar{e}_2$; $\bar{e}_1 = (1,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1)$.

Opm. 1) Omdat het in de gewone ruimte om coördinaten-drietallen gaat, noemt men deze ruimte driedimensionaal. Schrijfwijze voor deze ruimte: R_3.
Het platte vlak noemt men twee-dimensionaal: R_2.

2) Veelal maken we gebruik van een bijzonder soort coördinatenstelsel, een Cartesisch coördinatenstelsel. Hierbij zijn de assen onderling loodrecht, terwijl de basisvectoren op deze assen alle de lengte 1 hebben.

3) In R_2 spreken we bij een **gegeven** coördinatenstelsel dikwijls van: x-as en y-as door O (of van x_1-as en x_2-as) i.p.v. de assen langs $\bar{e}_1$ en $\bar{e}_2$. Een punt wordt dan voorgesteld door $P(x,y)$ (of $P(x_1,x_2)$). De eerste coördinaat x (of x_1) heet de <u>abscis</u> van P; de tweede y (of x_2) de <u>ordinaat</u>.
In R_3: x-as, y-as, z-as door O (of x_1-as, x_2-as, x_3-as); Punt $P(x,y,z)$ (of $P(x_1,x_2,x_3)$). x, y en z (of x_1, x_2 en x_3) de coördinaten van P.

We maken dikwijls gebruik van vectoren om meetkundige figuren en hun eigenschappen te beschrijven:

1) Zoals reeds gezien: een punt A kan worden aangegeven door het uiteinde van de plaatsvector $\bar{a} = \overline{OA}$. Dikwijls gebruiken we hetzelfde symbool (a_1, a_2) of (a_1, a_2, a_3), dat de vector $\bar{a}$ aanduidt in R_2 of R_3, voor het aangeven van een punt A. In R_3 bijv. kunnen de symbolen A, $A(\bar{a})$, $A(a_1, a_2, a_3)$ of (a_1, a_2, a_3) alle worden gebruikt om een punt A aan te geven met coördinaten a_1, a_2 en a_3 bij een zeker coördinatenstelsel; $(\bar{a} = \overline{OA} = (a_1, a_2, a_3))$.

2) Een rechte (d.i. rechte lijn) l door O: Zij $\bar{a} \neq \bar{0}$ een vector langs l (de drager van $\bar{a}$). De rechte l is dan de meetkundige plaats van de eindpunten der vectoren:

(1.13) $\qquad \bar{x} = \lambda \bar{a} \qquad (-\infty < \lambda < \infty)$.

3) Een rechte l niet door O kan gegeven worden door een willekeurig punt $P(\bar{p})$ op l en een vector $\bar{a} /\!/ l (\bar{a} \neq \bar{0})$.
Een punt X op l heeft de plaatsvector $\bar{x} = \overline{OX}$. Dan geldt $\bar{x} - \bar{p} = \lambda \bar{a}$ en dus

(1.14) $\qquad \bar{x} = \bar{p} + \lambda \bar{a} \qquad (-\infty < \lambda < \infty)$.

De vector $\bar{a}$ is een richtingsvector van de rechte l; de nulvector treedt niet als richtingsvector op; de kentallen van $\bar{a}$ heten richtingsgetallen van l. (1.13) is een bijzonder geval van (1.14), neem bijv. $\bar{p} = \bar{0}$. (1.14) is dus een algemene voorstelling van een rechte lijn.

Definitie: (1.14) met $-\infty < \lambda < \infty$ is een parameter-voorstelling van een rechte op punt en richting (punt: $P(\bar{p})$; richting: $\bar{a}$). λ is de parameter. Als het getal λ alle reële waarden doorloopt, dan doorloopt het eindpunt X van $\bar{x}$ alle punten van l.

Opm. (1.14) geldt zowel voor de meetkunde op een rechte lijn (R_1), als voor die in het platte vlak (R_2), als voor die in de ruimte (R_3). In het eerste geval hebben de vectoren één kental, in het tweede geval twee en in het derde geval drie kentallen.

In plaats van "parametervoorstelling" spreken we ook wel van een <u>vectorvoorstelling</u>.
Is een rechte l gegeven door twee punten $P(\bar{p})$ en $Q(\bar{q})$ (uiteraard niet samenvallend), dan kan men een parametervoorstelling voor l afleiden bijv. door in (1.14) voor $\bar{a}$ te nemen de verschilvector $\bar{q} - \bar{p}$. We vinden dan:

(1.15) a) $\bar{x} = (1 - \lambda)\bar{p} + \lambda\bar{q}$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ of ook b) $\bar{x} = \alpha\bar{p} + \beta\bar{q}$ $(-\infty < \alpha, \beta < \infty;\ \alpha + \beta = 1)$

Laat men in (1.15) λ resp. α en β met $\alpha + \beta = 1$ alle mogelijke reële waarden doorlopen, dan doorloopt het eindpunt X van de vector $\bar{x}$ de lijn l.

Definitie: (1.15) a) of b) is een <u>parametervoorstelling van een rechte uit twee (niet samenvallende) punten</u> (punten: $P(\bar{p})$ en $Q(\bar{q})$).

<u>Stelling 1.8</u> De meetkundige betekenis van de getallen α en β in (1.15) b) is, dat $\overline{PX} : \overline{QX} = -\beta : \alpha$, dus X tussen P en Q als α en β beide positief of in verband met $\alpha + \beta = 1$: α en $\beta < 1$. Voor $\alpha = 1$, $\beta = 0 \rightarrow X = P$; $\alpha = 0$, $\beta = 1 \rightarrow X = Q$. Het midden M van PQ behoort bij $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$: $\overline{OM} = \bar{m} = \frac{1}{2}(\bar{p} + \bar{q})$, d.w.z. meetkundig: de diagonalen van een parallelogram delen elkander middendoor. Zij α en $\beta \neq 0$ en tegengesteld van teken, dan ligt het bijbehorende punt X niet tussen P en Q.

Een vlak α kan in R_3 gegeven worden door een punt $P(\bar{p})$ en twee lineair onafhankelijke vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$, die evenwijdig zijn met α. Op grond van stelling 1.3 is de voorwaarde, opdat $X(\bar{x})$ in α ligt, deze, dat de vector $\bar{x} - \bar{p}$ geschreven kan worden in de vorm $\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$, dus $\bar{x} - \bar{p} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$ of

(1.16) $\bar{x} = \bar{p} + \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$ $(-\infty < \lambda, \mu < \infty)$.

Een vector $\bar{x}$ in een vlak door O is dus eenvoudig voor te stellen door

(1.16') $\bar{x} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$ $(-\infty < \lambda, \mu < \infty)$ (neem in (1.16) $\bar{p} = \bar{0}$).

Definitie: (1.16) is een <u>parametervoorstelling van een vlak op punt en vlakstelling</u> (punt: $P(\bar{p})$; vlakstelling: // $\bar{a}$ en $\bar{b}$). λ en μ zijn de parameters. Indien λ en μ alle reële waarden doorlopen, dan is het vlak de meetkundige plaats van de eindpunten der vectoren $\bar{x}$.

Is het vlak α gegeven door drie (niet op één rechte gelegen) punten $P(\bar{p})$, $Q(\bar{q})$ en $R(\bar{r})$, dan kan men een parametervoorstelling voor α afleiden bijv. door in (1.16) $\bar{a}$ te vervangen door $\bar{q} - \bar{p}$ en $\bar{b}$ door $\bar{r} - \bar{p}$, zodat

(1.17) a) $\bar{x} = (1-\lambda-\mu)\bar{p} + \lambda\bar{q} + \mu\bar{r}$ of
$(-\infty < \lambda, \mu < \infty)$

b) $\bar{x} = \alpha\bar{p} + \beta\bar{q} + \gamma\bar{r}$.
$\left(\begin{array}{c}-\infty < \alpha, \beta, \gamma < \infty; \\ \alpha+\beta+\gamma = 1\end{array}\right)$

Laat men in (1.17) λ en μ resp. α, β en γ met $\alpha+\beta+\gamma = 1$ alle mogelijke reële waarden doorlopen, dan doorloopt het eindpunt X van $\bar{x}$ het vlak α .

Definitie: (1.17) a) of b) is een <u>parametervoorstelling van een vlak uit drie (niet op één rechte liggende) punten</u> (punten: $P(\bar{p})$, $Q(\bar{q})$ en $R(\bar{r})$).

<u>De vergelijking van de rechte lijn (R_1) in R_2</u>

Volgens (1.14) kan de rechte l door een punt $P(\bar{p})$ en // $\bar{a}$ gegeven worden door de parametervoorstelling: $\bar{x} = \bar{p} + \lambda\bar{a}$.
Als $\bar{a} = (a_1, a_2)$, $\bar{p} = (p_1, p_2)$ en $\bar{x} = (x, y)$, dan geldt dus volgens stelling 1.7:

$(x,y) = (p_1,p_2) + \lambda(a_1,a_2) = (p_1,p_2) + (\lambda a_1, \lambda a_2) =$
$= (p_1 + \lambda a_1, p_2 + \lambda a_2)$, zodat (aangezien 2 vectoren dan en slechts dan aan elkander gelijk zijn als de overeenkomstige kentallen overeenstemmen) geldt:

(1.18) $\quad x = p_1 + \lambda a_1; \qquad y = p_2 + \lambda a_2$.

Hierin zijn x en y de coördinaten van een willekeurig punt van l. Elimineren we λ uit (1.18), dan blijkt, dat de coördinaten x en y van elk punt (x,y) van l voldoen aan de vergelijking:

$$(1.19) \qquad a_2(x-p_1) - a_1(y-p_2) = 0.$$

We noemen (1.19) de <u>(coördinaten-)vergelijking van de rechte in R_2</u>. Deze lijn gaat door het punt $P(p_1,p_2)$ en is evenwijdig aan de richtingsvector $\bar{a} = (a_1,a_2)$. Zijn de richtingsgetallen a_1 en a_2 van l beide $\neq 0$, dan is (1.19) ook te schrijven als:

$$(1.20) \qquad \frac{x-p_1}{a_1} = \frac{y-p_2}{a_2} .$$

Omgekeerd stelt, zoals kan worden aangetoond, elke vergelijking van de eerste graad in x en y:

$$(1.21) \qquad ax + by + c = 0,$$

waarin a en b niet beide 0 zijn, de vergelijking van een rechte lijn in R_2 voor. Een vergelijking van de 1e graad, zoals bijv. (1.21), wordt daarom ook wel een lineaire vergelijking genoemd.
De lijn voorgesteld door (1.21) is evenwijdig aan de vector $(b,-a)$; een richtingsvector is dus $(b,-a)$; $-b$ en a zijn richtingsgetallen van l; het quotiënt $-\frac{a}{b}$ noemt men ook de <u>richtingscoëfficiënt</u> van l($-\frac{a}{b}$ = tangens van de hellingshoek van l met de positieve x-as).*)
Als in (1.21) $c=0$, gaat de lijn door O. Is $c \neq 0$, dan gaat de lijn niet door O. Is $a = 0$, dan is $y = -{}^c/b$, een lijn evenwijdig aan de x-as. $y = 0$ is de vergelijking van de x-as (par. voorst. x-as: $\bar{x} = \lambda\bar{e}_1 = \lambda(1,0) = (\lambda,0)$; punt op de x-as dus voor te stellen door $(p,0)$). Als $b = 0 \rightarrow x = -{}^c/a$, lijn evenwijdig aan de y-as: $x = 0$ is de vergelijking van de y-as (par. voorst. y-as: $\bar{x} = \lambda\bar{e}_2 = \lambda(0,1) = (0,\lambda)$; punt op de y-as dus voor te stellen door $(0,q)$).
Evenwijdige lijnen in R_2: Als gegeven zijn de lijnen l_1 en l_2:

l_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $\quad$ (a_1 en b_1 niet beide 0)
l_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $\quad$ (a_2 en b_2 niet beide 0),

dan zijn de lijnen l_1 en l_2 evenwijdig als $a_1b_2 = a_2b_1$.
Is $a_1 = a_2 = 0$, dan beide lijnen // x-as.
Is $b_1 = b_2 = 0$, dan beide lijnen // y-as.

Als een $\lambda \neq 0$ is te vinden, waarvoor: $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$ en $c_1 = \lambda c_2$, dan vallen l_1 en l_2 samen.

---

*) Indien men de richtingscoëfficiënt $-\frac{a}{b}$ gelijk aan m stelt, is elke rechte, die niet evenwijdig is aan de y-as, voor te stellen door de vgl.: $y = mx + n$.

De vergelijking van het platte vlak (R_2) in R_3

Het vlak α door het eindpunt van $\bar{a}$, en // $\bar{b}$ en $\bar{c}$ kan volgens (1.16) worden gegeven door de parameter-voorstelling:
$\bar{x} = \bar{a} + \lambda\bar{b} + \mu\bar{c}$.
Als $\bar{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b} = (b_1,b_2,b_3)$, $\bar{c} = (c_1,c_2,c_3)$ en $\bar{x} = (x,y,z)$, dan volgt $(x,y,z) = (a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1,\ a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2,\ a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3)$, dus

(1.22) $$x = a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1;\quad y = a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2;\quad z = a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3.$$

Hierin zijn x, y en z de coördinaten van een willekeurig punt van α. Elimineren we λ en μ uit (1.22), dan blijkt, dat de coördinaten x, y en z van elk punt (x,y,z) van α voldoen aan een lineaire vergelijking in x, y en z, dus een vergelijking van de vorm:

(1.23) $$Ax + By + Cz + D = 0.$$

We noemen (1.23) de (<u>coördinaten-)vergelijking van een plat vlak in R_3</u>.
Omgekeerd kan worden aangetoond, dat elke lineaire betrekking in x, y en z: $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B en C niet alle 0) de vergelijking van een plat vlak in R_3 is.

$(0,q,r) = q(0,1,0) + r(0,0,1) = q\bar{e}_2 + r\bar{e}_3$ is een punt of vector in het (y,z)-vlak (vlak door de y-as en z-as, ook wel genoteerd als YOZ-vlak). De vergelijking van dit vlak is $x = 0$. Evenzo voor de andere coördinaatvlakken:

$y = 0$: de vgl. van het (x,z)-vlak (= XOZ-vlak).
$z = 0$: de vgl. van het (x,y)-vlak (= XOY-vlak).
(p,0,r) is een punt of vector in het (x,z)-vlak; (p,q,0) een punt of vector in het (x,y)-vlak. De lijn $\bar{x} = \bar{a} + \lambda(0,q,r)$ is // (y,z)-vlak; $\bar{x} = \bar{a} + \lambda(p,0,r)$ is // (x,z)-vlak en $\bar{x} = \bar{a} + \lambda(p,q,0)$ is // (x,y)-vlak.
Het vlak voorgesteld door (1.23) gaat dan en slechts dan door O als $D = 0$.

Is $A = 0$ dan vlak // x-as (de x ontbreekt in de vergelijking);
Is $B = 0$ dan vlak // y-as (de y ontbreekt in de vergelijking);
Is $C = 0$ dan vlak // z-as (de z ontbreekt in de vergelijking).

Ontbreekt bijv. de x in de vergelijking van een vlak, dan is de resulterende vergelijking in y en z (of eventueel alleen in y of alleen in z) de vergelijking van de snijlijn van het vlak met het (y,z)-vlak, gegeven als een R_1 in een R_2; analoog als y of z ontbreekt.

A en B beide $0 \rightarrow z = -D/C$, vlak // (x,y)-vlak
A en C beide $0 \rightarrow y = -D/B$, vlak // (x,z)-vlak
B en C beide $0 \rightarrow x = -D/A$, vlak // (y,z)-vlak.

Een rechte in R_3 kan <u>niet</u> door één coördinatenvergelijking worden voorgesteld, zoals in R_2 (wel door 2 vergelijkingen, namelijk als snijlijn van twee vlakken).
De parametervoorstelling heeft het voordeel, dat we door één betrekking de lijn kunnen voorstellen (zie opm. blz. A8), zowel in R_2 als in R_3.
De x-as kan in R_3 òf worden voorgesteld door de par. voorst.: $\bar{x} = \lambda\bar{e}_1 = \lambda(1,0,0) = (\lambda,0,0)$; punt op de x-as: (p,0,0); òf door 2 vergelijkingen: y=0, z=0.
Evenzo de y-as òf door $\bar{x} = \lambda\bar{e}_2 = \lambda(0,1,0) = (0,\lambda,0)$; punt op de y-as: (0,q,0); òf door x=0, z=0;
de z-as òf door $\bar{x} = \lambda\bar{e}_3 = \lambda(0,0,1) = (0,0,\lambda)$; punt op de z-as: (0,0,r); òf door x=0, y=0.
In het algemeen kunnen we zeggen, dat indien we werken in een ruimte van zekere dimensie, een hierin gelegen ruimte van 1 dimensie lager, voor te stellen is door 1 coördinatenvergelijking, van 2 dimensies lager door 2 coördinatenvergelijkingen enz.
Evenzo is er een verband met het aantal parameters in de parametervoorstelling van de deelruimte. Het aantal parameters is namelijk juist gelijk aan de dimensie van de deelruimte.*)
Samengevat kunnen we het volgende overzicht geven van de voorstellingswijze van punt, lijn en vlak in R_2 en R_3:

---

*) Men zegt wel, dat de lineaire deelruimte bestaat uit ∞^k punten, als k de dimensie van de deelruimte is.

	R_2		R_3	
punt (R_0)	$\begin{cases} x = p_1 \\ y = p_2 \end{cases}$		$\begin{cases} x = p_1 \\ y = p_2 \\ z = p_3 \end{cases}$	
	$\bar{x} = (x,y) = \bar{p} = (p_1,p_2)$		$\bar{x} = (x,y,z) = \bar{p} = (p_1,p_2,p_3)$	
rechte lijn (R_1)	$ax+by+c=0$	(a en b niet beide 0)	*) $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$	(a_i, b_i, c_i niet alle drie 0 voor i=1, resp. i=2)
	$\bar{x} = \bar{a} + \lambda\bar{b}$	$(\bar{b} \neq \bar{0})$	$\bar{x} = \bar{a} + \lambda\bar{b} \; (\bar{b} \neq 0)$	
plat vlak (R_2)			$ax+by+cz+d=0$	(a, b, c niet alle drie 0)
			$\bar{x} = \bar{a} + \lambda\bar{b} + \mu\bar{c}$	($\bar{b}$ en $\bar{c}$ een lin. onafh. stelsel)

*). In R_3 kan een rechte uiteraard ook door twee vlakken worden voorgesteld, beide in de parametervoorstelling.

De betekenis van de begrippen "lineaire combinatie" en "lineaire (on) afhankelijkheid" voor de meetkunde, blijkt o.a. uit de volgende eigenschappen, die bijv. in een R_3 gelden:

1) Twee rechten zijn dan en slechts dan evenwijdig, als hun richtingsvectoren afhankelijk zijn.
2) Een vlak door O wordt gevormd door alle vectoren, die een lineaire combinatie zijn van twee lineair onafhankelijke vectoren.
3) De rechte $\bar{x} = \bar{a} + \lambda\bar{u}$ is dan en slechts dan evenwijdig met het vlak $\bar{x} = \bar{b} + \mu\bar{v} + \nu\bar{w}$, als $\bar{u}$ een lineaire combinatie is van $\bar{v}$ en $\bar{w}$.
4) Twee vlakken $\bar{x} = \bar{a} + \lambda\bar{t} + \mu\bar{u}$ en $\bar{x} = \bar{b} + \nu\bar{v} + \rho\bar{w}$ zijn dan en slechts dan evenwijdig, als $\bar{t}$ en $\bar{u}$ lineair afhankelijk zijn van $\bar{v}$ en $\bar{w}$ (ook $\bar{v}$ en $\bar{w}$ lineair afhankelijk van $\bar{t}$ en $\bar{u}$).
5) De eindpunten der vectoren $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$ liggen dan en slechts dan op één rechte, als $\bar{b}-\bar{a}$ en $\bar{c}-\bar{a}$ een lineair afhankelijk stelsel vormen.
6) De eindpunten der vectoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ en $\bar{d}$ liggen dan en slechts dan in één vlak, als $\bar{b}-\bar{a}$, $\bar{c}-\bar{a}$ en $\bar{d}-\bar{a}$ een lineair afhankelijk stelsel vormen.

Voorbeelden:

In R_2:

Vb 1) Beschouw de rechte $\bar{x}=(1,2)+\lambda(3,1)$.

Het punt $(10,5)$ ligt er op, want $(10,5)=(1,2)+3(3,1)$ $(\lambda=3)$.
Het punt $(-2,-1)$ ligt er niet op, want voor elke λ is $(-2,-1)\neq(1,2)+\lambda(3,1)$.
Het snijpunt met de x-as vinden we uit $(p,0)=(1,2)+\lambda(3,1)= =(1+3\lambda,2+\lambda)$, dus $\lambda+2=0\rightarrow\lambda=-2$, zodat $p=-5$ en dus snijpunt met de x-as: $(-5,0)$. Op analoge wijze vindt men dat $(0,\frac{5}{3})$ het snijpunt met de y-as is.
De vergelijking van de rechte volgt na eliminatie van λ uit:

$$\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=2+\lambda \end{cases}.$$

Resultaat: $x-3y+5=0$. Richtingsvector dus inderdaad $(3,1)$. De van teken voorziene stukken, die van de assen worden afgesneden, verhouden zich dan als $3:-1$, zoals ook het geval is (-5 en $\frac{5}{3}$).

Vb 2) Een rechte is gegeven door de vergelijking: $2x+y-3=0$. Om een parametervoorstelling te vinden, stellen we $x=\lambda$, dan is $y=-2\lambda+3$, en dus $\bar{x}=(x,y)=(\lambda,-2\lambda+3)=(0,3)+(\lambda,-2\lambda)=(0,3)+\lambda(1,-2)$.
Deze vergelijking kunnen we ook als volgt vinden: Neem een punt van de rechte, bijv. als $x=0\rightarrow y=3$, dus $(0,3)$. Richtingsvector is (zie blz. A11): $(1,-2)$.

Vb 3) Dezelfde vraag bij $2x+3y-7=0$. Stel nu $x=3\lambda$, dan is $y=-2\lambda+\frac{7}{3}$, dus een parametervoorstelling: $\bar{x}=(x,y)=(3\lambda,-2\lambda+\frac{7}{3})=(0,{}^{7}/3)+ +\lambda(3,-2)$.
$(0,{}^{7}/3)$ is een punt van de rechte; $(3,-2)$ een richtingsvector.

Vb 4) Gegeven zijn de twee rechten l_1: $x+2y+3=0$ en l_2: $2x-3y-8=0$.
Bepaal het snijpunt van l_1 en l_2: $x+2y+3=0$ en $2x-3y-8=0\rightarrow x=1, y=-2$.
Snijpunt $(1,-2)$.
Als de twee lijnen door middel van een parametervoorstelling waren gegeven, bijv.
l_1: $\bar{x}=(-3,0)+\lambda_1(2,-1)$ en l_2: $\bar{x}=(4,0)+\lambda_2(3,2)$, dan moet voor het snijpunt (x,y) gelden: $(x,y)=(-3+2\lambda_1,-\lambda_1)=(4+3\lambda_2,2\lambda_2)$, dus

$$\left.\begin{array}{r} -3+2\lambda_1=4+3\lambda_2 \\ -\lambda_1=2\lambda_2 \end{array}\right\}\rightarrow\lambda_1=2;\ \lambda_2=-1, \text{ en dus } (x,y)=(1,-2).$$

In R_3:

Vb 5) Beschouw de rechte $\bar{x} = (1,1,1)+\lambda(0,1,2)$.
Het punt $(1,3,5)$ ligt op de rechte, omdat $(1,3,5)$ voldoet aan $(x,y,z)=(1,1,1)+\lambda(0,1,2)$ voor $\lambda=2$. Het snijpunt van de rechte met het (x,y)-vlak volgt uit $z=0=1+2\lambda \rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$, en is dus het punt $(1,\frac{1}{2},0)$.
Het snijpunt met het (y,z)-vlak zou moeten volgen uit $x=0=1+\lambda.0$. Er is geen x die hieraan voldoet; er is dus geen snijpunt met het (y,z)-vlak. Inderdaad klopt dit, want de richtingsvector is $(0,1,2)$ en dus is de rechte // (y,z)-vlak (blz. A12), omdat $(1,1,1)$ niet in het (y,z)-vlak ligt.
Wordt gevraagd de rechte door $(7,0,3)$ evenwijdig met de gegeven rechte, dan is: $\bar{x}=(7,0,3)+\lambda(0,1,2)$ hiervan een parametervoorstelling.

Vb 6) Beschouw het vlak $\bar{x}=(1,2,3)+\lambda(0,1,1)+\mu(1,0,-2)$.
Uitgeschreven $\bar{x}=(x,y,z)=(1+\mu,2+\lambda,3+\lambda-2\mu)$.
Voor het snijpunt met de y-as moet $x=0, z=0 \rightarrow \lambda=-5, \mu=-1$. Dit snijpunt is dus $(0,-3,0)$.
De vergelijking van het vlak wordt verkregen door λ en μ te elimineren uit $x=1+\mu$, $y=2+\lambda$, $z=3+\lambda-2\mu$.
Direct zien we in, dat geldt $2x-y+z=3$. Dit is dus de vergelijking van het vlak. Voor elk punt van de snijlijn met het (x,y)-vlak moet $z=0$ zijn, dus de vergelijking van deze snijlijn, beschouwd als rechte in het (x,y)-vlak, luidt $2x-y=3$. In de ruimte stelt deze laatste vergelijking voor het vlak door de snijlijn en evenwijdig aan de z-as.

Vb 7) Het snijpunt van de rechte uit Vb 5) met het vlak uit Vb 6) verkrijgt men door $\bar{x}=(1,1,1)+\lambda(0,1,2)$ in te vullen in de vergelijking van het vlak $2x-y+z=3$. Dan is $2.1-(1+\lambda)+(1+2\lambda)=$ $=3 \rightarrow \lambda=1$ en het gevraagde snijpunt is $(1,2,3)$.

Vb 8) Een vlak heeft de vergelijking $2x-4y+3z=12$.
Gevraagd wordt een parametervoorstelling van het vlak. Stel $y=\lambda$ en $z=2\mu$, dan is $x=2\lambda-3\mu+6 \rightarrow \bar{x}=(2\lambda-3\mu+6,\lambda,2\mu)=$ $=(6,0,0)+\lambda(2,1,0)+\mu(-3,0,2)$ een parametervoorstelling.
Het vlak door $(1,2,3)$ // gegeven vlak heeft dus als een par. voorstelling: $\bar{x}=(1,2,3)+\lambda(2,1,0)+\mu(-3,0,2)$.

Vb 9) Gegeven zijn de twee vlakken

α_1: $x+y=1$ en α_2: $2x-y+z=3$.

Gevraagd wordt een parametervoorstelling van de snijlijn van α_1 en α_2:

Stel $x=\lambda$, dan is $y=-\lambda+1$ en $z=-3\lambda+4$, dus $\bar{x}=(x,y,z)=(\lambda,-\lambda+1,-3\lambda+4)=(0,1,4)+\lambda(1,-1,-3)$ is een parametervoorstelling van de snijlijn.

Vb 10) Gegeven de vlakken α_1: $\bar{x}=(0,1,0)+\lambda(1,2,1)+\mu(-1,0,1)$

en α_2: $\bar{x}=\lambda(1,-1,0)+\mu(1,-3,-2)$.

Gevraagd de lijn door $(1,1,0)$ // aan de lijn, bepaald door α_1 en α_2 (d.w.z. // snijlijn van α_1 en α_2). Bepaling richting snijlijn van α_1 en α_2: $\lambda_1(1,2,1)+\mu_1(-1,0,1)=\lambda_2(1,-1,0)+\mu_2(1,-3,-2)\rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\mu_1=-\mu_2$. Dus richting snijlijn is // $(1,2,1)+(-1,0,1)=(0,2,2)=2(0,1,1)$. Een parametervoorstelling van de gevraagde lijn is dus: $\bar{x}=(1,1,0)+\lambda(0,1,1)$.

<u>Opgaven</u>

1) Op de zijde AB van driehoek OAB ligt een punt P tussen A en B, zo, dat $AP:PB=\lambda:\mu$. Druk de vector $\overline{OP}$, met behulp van de getallen λ en μ, uit in de vectoren $\overline{OA}$ en $\overline{OB}$.

2) Bewijs, dat het punt $A=(3,4)$ ligt op de rechte $\bar{x}=(1,5)+\lambda(2,-1)$.

3) Bepaal de vergelijking van de rechte $\bar{x}=(2,1)+\lambda(1,3)$. Bepaal de coördinaten van de snijpunten van deze rechte met de coördinaatassen.

4) Geef een parametervoorstelling van de rechte, die als vergelijking heeft $x+3y-2=0$.

5) Bepaal het snijpunt van de rechten

$\bar{x}=(2,1)+\lambda(1,3)$ en $\bar{x}=(0,-3)+\lambda(1,1)$.

6) Idem bij de rechten:

$\bar{x}=(1,2)+\lambda(-6,9)$ en $\bar{x}=(7,-5)+\lambda(4,-6)$.

7) Bewijs, dat de volgende rechten door één punt gaan:

$\bar{x}=(0,2)+\lambda(-1,1)$; $\bar{x}=(3,1)+\lambda(-5,3)$; $\bar{x}=\lambda(1,-2)$.

8) Gevraagd de rechte door $A=(-1,1,4)$ en $B=(1,2,3)$.

9) Geef een parametervoorstelling van het vlak, dat gaat door het punt $A=(1,2,1)$ en evenwijdig is aan de rechten:

$\bar{x} = (-6,2,0) + \lambda(1,1,1)$ en $\bar{x} = (5,1,3) + \lambda(6,2,1)$.

10) Gevraagd het vlak (vergelijking en/of parametervoorstelling) door de oorsprong O en de rechte $\bar{x} = (1,-1,0) + \lambda(2,1,1)$.

11) Gevraagd het vlak door $A = (1,2,1)$, $B = (-1,1,4)$ en $C = (5,-2,1)$.

12) Geef een parametervoorstelling van de rechte, die gaat door het eindpunt van $\bar{a} = (2,1,1)$ en evenwijdig is aan $\bar{b} = (1,-1,0)$. Bepaal de snijpunten van deze rechte met de drie coördinaatvlakken.

13) Bewijs, dat de volgende drie punten op één rechte liggen: $A = (6,1,-3)$, $B = (0,-2,3)$ en $C = (10,3,-7)$.

14) Het lijnstuk van $A = (4,-1,2)$ tot $B = (3,-3,5)$ wordt verdrievoudigd. Bepaal het eindpunt.

15) Bewijs, dat de volgende vier punten een parallelogram vormen: $A = (3,3,3)$, $B = (1,2,-1)$, $C = (4,1,1)$ en $D = (6,2,5)$.

16) Gevraagd wordt de vergelijking van het vlak, waarvan een parametervoorstelling luidt
$\bar{x} = (0,1,2) + \lambda(1,-1,0) + \mu(0,1,1)$.

17) Bepaal het snijpunt van de rechte l en het vlak V:
$l : \bar{x} = (1,2,-1) + \lambda(2,1,0)$ $\quad$ $V : 2x-y+3z = 6$.

18) Geef een parametervoorstelling van het vlak $x-2y+3z = 4$.

19) Bepaal in parametervorm de snijlijn van de vlakken:
$x-z=1$ en $2x-y+3z=5$.

20) Bepaal een parametervoorstelling van het vlak door de rechte l en evenwijdig met de rechte m:
$l : \bar{x} = (1,2,3) + \lambda(4,5,6)$; $\quad m : \bar{x} = (7,8,9) + \lambda(7,5,3)$.

21) Bewijs, dat de rechte $\bar{x} = (0,7,6) + \lambda(-1,1,1)$ evenwijdig is aan het vlak $\bar{x} = (6,1,2) + \lambda(1,2,3) + \mu(5,1,3)$.

22) Bewijs, dat het vlak
$$\bar{x} = (0,2,5) + \lambda(1,5,-2) + \mu(1,7,3)$$
door de oorsprong gaat.

23) Onderzoek of de volgende viertallen punten in één vlak liggen:
1) $(3,2,18)$, $(1,-2,4)$, $(5,0,2)$ en $(2,-3,-4)$.
2) $(-4,-2,3)$, $(1,3,-2)$, $(0,3,-2)$ en $(5,-2,0)$.

24) Gegeven zijn de rechten:
l : $\bar{x} = (1,-3,0)+\lambda(2,1,-3)$ en m : $\bar{x} = (1,0,-1)+\lambda(0,-2,4)$.

1) Bepaal het vlak door m, dat evenwijdig is aan l.
2) Ga na, of de rechte $\bar{x} = (8,-1,-3)+\lambda(4,-1,0)$ ligt in het onder 1) genoemde vlak.
3) Bepaal het vlak door O en m.
4) Bepaal het snijpunt van l met het onder 3) genoemde vlak.

25) Een vlak α heeft in de ruimte de vergelijking $2x-4y+3z = 12$.
Gevraagd: 1) Een parametervoorstelling van α.
2) Een parametervoorstelling van de snijlijn van α met het vlak β, gegeven door de vergelijking $x+y=1$.

26) Bepaal de vergelijking van het vlak door het punt P(1,2,-1) en de lijn l : $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x-y+2z=2 \end{cases}$.

27) Gegeven de punten A(1,2,3), B(4,5,-3) en het vlak V met de vergelijking: $2x-y+3z=4$.
Gevraagd het snijpunt C van de lijn AB met het vlak V en de verhouding van de lijnstukken AC en CB.

28) Zij gegeven in het platte vlak of in de ruimte de driehoek ABC met zwaartepunt Z.
Als $\overline{OA}=\bar{a}$, $\overline{OB}=\bar{b}$, $\overline{OC}=\bar{c}$ en $\overline{OZ}=\bar{z}$, bewijs dan, dat $\bar{z} = \frac{1}{3}(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$.

29) Gegeven in de ruimte het viervlak ABCD met zwaartepunt Z. Als $\overline{OA}=\bar{a}$, $\overline{OB}=\bar{b}$, $\overline{OC}=\bar{c}$, $\overline{OD}=\bar{d}$ en $\overline{OZ}=\bar{z}$, bewijs dan dat $z = \frac{1}{4}(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d})$.

30) Gegeven zijn de punten:
A = (0,-2,3) en B = (6,-5,1) en de rechte l:
l : $\bar{x} = (0,1,2)+\lambda(-1,1,3)$.
1) Bewijs dat A noch B op l ligt.
2) Bepaal de meetkundige plaats van het zwaartepunt van driehoek ABP, als P de rechte l doorloopt.

31) De middens der zijden van driehoek ABC zijn D, E en F (D op BC, E op CA, en F op AB). Een punt P in de ruimte (in of buiten het vlak door A, B en C) wordt met D, E en F verbonden. Men bepaalt de punten Q, R en S zo, dat $\overline{PQ}=k.\overline{PD}$, $\overline{PR}=k.\overline{PE}$, $\overline{PS}=k.\overline{PF}$.
(k is een reëel getal)
Bewijs, dat AQ, BR en CS door één punt T gaan, en dat PT door het zwaartepunt Z van driehoek ABC gaat; druk de verhouding PT:PZ in

k uit. Welke meetkundige eigenschappen kan men afleiden voor k=1 en k=-2?
Breidt deze opgave uit door de driehoek te vervangen door een viervlak (het midden van een zijde van de driehoek te vervangen door het midden van een ribbe of door het zwaartepunt van een zijvlak van het viervlak, enz.)
Welke meetkundige eigenschappen kan men voor bijzondere waarden van k nu afleiden?

Stelt men in een R_2 de linkerleden van de vergelijkingen van twee rechten: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ en $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ voor door l_1 en l_2, dan stelt de vergelijking:

$$(1.24) \qquad \lambda l_1 + \mu l_2 = 0 \qquad (-\infty < \lambda, \mu < \infty)$$

juist alle rechten voor door het snijpunt van de beide lijnen $l_1=0$ en $l_2=0$ (eventueel l_1 en l_2 evenwijdig, dan snijpunt oneigenlijk (in het oneindige)).
Deze verzameling lijnen door één punt vormt de zgn. <u>lijnenwaaier</u>, bepaald door $l_1=0$ en $l_2=0$.
Zo vormen in R_3 alle vlakken door de snijlijn van twee gegeven vlakken een zgn. <u>vlakkenwaaier</u>. Als de vergelijkingen van de beide vlakken, analoog als boven, resp. voorgesteld worden door $v_1=0$ en $v_2=0$, dan is deze vlakkenwaaier te geven door de vergelijking:

$$(1.25) \qquad \lambda v_1 + \mu v_2 = 0 \qquad (-\infty < \lambda, \mu < \infty).$$

Beschouwen we drie vlakken in R_3, die 1 punt gemeenschappelijk hebben, dan vormen alle vlakken door dit punt, een zgn. <u>vlakkenschoof</u>. Zijn de vergelijkingen der drie vlakken resp. $v_1=0$, $v_2=0$ en $v_3=0$, dan is de vergelijking van deze schoof:

$$(1.26) \qquad \lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 = 0 \qquad (-\infty < \lambda, \mu, \nu < \infty).$$

In de vergelijkingen (1.24) en (1.25) is voor de bepaling van een lijn of vlak uit de waaier alleen de <u>verhouding</u> $\lambda : \mu$ van belang. We zeggen wel, dat de waaier bestaat uit ∞^1 elementen. In de vlakkenschoof, voorgesteld door (1.26), daarentegen is een vlak bepaald door twee verhoudingen $\lambda : \mu : \nu$. De vlakkenschoof bestaat uit ∞^2 vlakken (vergelijk blz. A 13). Er is een zekere dualiteit: In R_2: punt $\leftrightarrow$ lijn; in R_3: punt $\leftrightarrow$ vlak; lijn $\leftrightarrow$ lijn.

In R_2: alle punten op een lijn (∞^1 veel) $\leftrightarrow$ alle lijnen door een punt (∞^1, lijnenwaaier).

In R_3: alle punten op een lijn (∞^1) $\leftrightarrow$ alle vlakken door een lijn (∞^1, vlakkenwaaier).

In R_3: alle punten in een vlak (∞^2) $\leftrightarrow$ alle vlakken door een punt (∞^2, vlakkenschoof).

Voorbeelden

Vb 1) Gevraagd de lijn door het punt $P(-1,2)$ en het snijpunt Q van $l_1 : x+y = 0$ en $l_2 : 3x-2y = 5$.

We kunnen hiervoor eerst het snijpunt Q bepalen van l_1 en l_2, d.i. $(1,-1)$ en dan de vergelijking opstellen van de lijn door $(-1,2)$ en $(1,-1)$.

We kunnen ook de lijnenwaaier beschouwen, bepaald door l_1 en l_2. De vergelijking hiervan is volgens (1.24):

$$\lambda(x+y) + \mu(3x-2y-5) = 0.$$

Substitutie in deze vergelijking van $(x,y) = (-1,2)$ geeft $\lambda - 12\mu = 0$, zodat de vergelijking van de gevraagde rechte is:

$$12(x+y) + (3x-2y-5)=0 \quad \text{of} \quad 3x+2y-1=0.$$

Vb 2) Gevraagd het vlak door $P(1,1,2)$ en de snijlijn van de vlakken $V_1 : x-y-z=3$ en $V_2 : x+y+2z=4$.

De vlakkenwaaier bepaald door V_1 en V_2 heeft volgens (1.25) tot vergelijking:

$$\lambda(x-y-z-3) + \mu(x+y+2z-4) = 0.$$

Substitueer hierin $(x,y,z) = (1,1,2)$,dan volgt $-5\lambda + 2\mu=0$, zodat de vergelijking van het gevraagde vlak is:

$$2(x-y-z-3)+5(x+y+2z-4)=0 \quad \text{of} \quad 7x+3y+8z-26=0.$$

Vb 3) Gegeven de drie vlakken $x=0$, $y+z=4$ en $x-y-2z=-4$. Gevraagd het vlak door de x-as en het snijpunt van deze drie vlakken.

De vlakkenschoof bepaald door de drie vlakken heeft volgens (1.26) de vergelijking:

$$\lambda x + \mu(y+z-4) + \nu(x-y-2z+4) = 0.$$

Een vlak gaat door de x-as, als in de coördinatenvergelijking de x niet voorkomt, terwijl ook de bekende term 0 is, dus: $\lambda + \nu = 0$ en $-4\mu + 4\nu = 0$, dus $\lambda : \mu : \nu = -1:1:1$. Het gevraagde vlak is dus $x-(y+z-4)-(x-y-2z+4)=0$, dus $z=0$, het coördinaatvlak XOY. Blijkbaar ligt dan het snijpunt van de drie gegeven vlakken op de y-as. Inderdaad, want het snijpunt is $(0,4,0)$.

Opm. Een rechte lijn l in R_3, gaande door het punt $P(p_1,p_2,p_3)$ en met richtingsvector $\overline{a} = (a_1,a_2,a_3)$ kan worden voorgesteld door $\overline{x} = (x,y,z) = \overline{p} + \lambda\overline{a} = (p_1+\lambda a_1, p_2+\lambda a_2, p_3+\lambda a_3)$.

De richtingsgetallen a_1, a_2 en a_3 van l zijn niet alle 0.
Blijkbaar geldt: $x = p_1 + \lambda a_1$; $y = p_2 + \lambda a_2$ en $z = p_3 + \lambda a_3$.
Zijn a_1, a_2 en a_3 alle $\neq 0$, dan geldt (vergelijk blz. A12):

(1.27) $$\frac{x-p_1}{a_1} = \frac{y-p_2}{a_2} = \frac{z-p_3}{a_3}\ .$$

Deze vergelijkingen stellen drie platte vlakken voor, n.l.:

$$V_1 : \frac{x-p_1}{a_1} = \frac{y-p_2}{a_2}\ ,$$

$$V_2 : \frac{x-p_1}{a_1} = \frac{z-p_3}{a_3}\ ,$$

$$V_3 : \frac{y-p_2}{a_2} = \frac{z-p_3}{a_3}\ .$$

Elk punt (x,y,z) van de lijn l ligt ook in de vlakken V_1, V_2 en V_3. Deze vlakken gaan dus door l.
Volgens blz. A12 is het vlak $V_1 \parallel$ z-as. V_1 is het projecterend vlak van l $\parallel$ z-as. Projecteren we l evenwijdig aan de z-as op het XOY-vlak, dan ontstaat de projectie l' van l. De vergelijkingen van l' zijn:

$$\frac{x-p_1}{a_1} = \frac{y-p_2}{a_2}\ ,\ z=0.$$

De vlakken V_2 en V_3 zijn de projecterende vlakken van l $\parallel$ y-as, resp. $\parallel$ x-as.
Is van de richtingsvector $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ van l:

$a_1=0,\ a_2\neq 0,\ a_3\neq 0 \rightarrow$ l $\parallel$ YOZ-vlak: vglen $x=p_1$, $\dfrac{y-p_2}{a_2} = \dfrac{z-p_3}{a_3}$.

$a_1=0,\ a_2=0,\ a_3\neq 0 \rightarrow$ l $\parallel$ z-as: vglen $x=p_1, y=p_2$. (z-as: $x=0, y=0$).

$a_1=0,\ a_2\neq 0,\ a_3=0 \rightarrow$ l $\parallel$ y-as: vglen $x=p_1, z=p_3$. (y-as: $x=0, z=0$).

$a_1\neq 0,\ a_2=0,\ a_3=0 \rightarrow$ l $\parallel$ x-as: vglen $y=p_2, z=p_3$. (x-as: $y=0, z=0$).

$a_1\neq 0,\ a_2\neq 0,\ a_3=0 \rightarrow$ l $\parallel$ XOY-vlak: vglen $z=p_3$, $\dfrac{x-p_1}{a_1} = \dfrac{y-p_2}{a_2}$.

$a_1\neq 0,\ a_2=0,\ a_3\neq 0 \rightarrow$ l $\parallel$ XOZ-vlak:vglen $y=p_2$, $\dfrac{x-p_1}{a_1} = \dfrac{z-p_3}{a_3}$.

Behalve door twee projecterende vlakken kunnen we een rechte lijn ook bepalen als snijlijn van twee willekeurige vlakken.
Een rechte lijn kan bijv. gegeven worden door de vergelijkingen:

$$V_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$V_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Elimineren we hieruit achtereenvolgens x,y en z, dan vinden we de vergelijkingen der projecterende vlakken van l resp. // x-as, y-as en z-as. Het projecterende vlak van de snijlijn van V_1 en V_2, dat evenwijdig is aan de z-as, heeft bijv. tot vergelijking

$$(a_1c_2-a_2c_1)x + (b_1c_2-b_2c_1)y + (d_1c_2-d_2c_1) = 0.$$

Is $a_1c_2-a_2c_1=b_1c_2-b_2c_1=0$ en $d_1c_2-d_2c_1\neq 0$, dan is bovenstaande vergelijking strijdig (geen oplossing voor x en y). De vlakken V_1 en V_2 hebben dan geen punt gemeen en zijn dus evenwijdig (voorwaarden zijn ook nodig voor evenwijdigheid). V_1 en V_2 dus evenwijdig als er een getal $\lambda\neq 0$ bestaat, zó dat:

$$a_1 = \lambda a_2,\ b_1 = \lambda b_2,\ c_1 = \lambda c_2, \text{ doch } d_1 \neq \lambda d_2.$$

V_1 en V_2 vallen samen, als ook nog $d_1 = \lambda d_2$ (vgl. blz. A11).

§ 2. Enkele metrische eigenschappen in R_2 en R_3

Definitie: Het inwendig product $(\bar{a},\bar{b})$ van twee vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$ is een reëel getal, dat als volgt wordt gedefinieerd:

In R_2 : $(\bar{a},\bar{b}) = a_1b_1+a_2b_2$, als $\bar{a} = (a_1,a_2)$ en $\bar{b} = (b_1,b_2)$.

In R_3 : $(\bar{a},\bar{b}) = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, als $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ en $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$.

Eigenschappen van het inwendig product:

1) $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a})$
2) $(\bar{a},\bar{b}+\bar{c}) = (\bar{a},\bar{b})+(\bar{a},\bar{c})$
3) $\lambda(\bar{a},\bar{b}) = (\lambda\bar{a},\bar{b})$
4) $(\bar{a},\bar{a}) > 0$ als $\bar{a}\neq 0$
5) $(\bar{0},\bar{0}) = 0$
6) $(\bar{a},\bar{b})^2 \leq (\bar{a},\bar{a})(\bar{b},\bar{b})$.

De eerste 5 eigenschappen volgen direct uit de definitie. Eigenschap 6 berust op de ongelijkheid van Schwarz (zie opg.13 Analyse). In een R_2 en een R_3 kan met behulp van de stelling van Pythagoras en de cosinusregel worden afgeleid, dat bij een Cartesisch coördinatenstelsel voor de lengte $|\bar{a}|$ van een vector $\bar{a}$ en de hoek φ tussen twee vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$ de volgende betrekkingen gelden:

(2.1) $$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})} = \sqrt{a_1^2+a_2^2} \text{ in } R_2 \text{ of } = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \text{ in } R_3\ ;$$

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{\sqrt{(\bar{a},\bar{a})(\bar{b},\bar{b})}} = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}\ .$$

Meetkundige betekenis: het inwendig product $(\bar{a},\bar{b})$ is gelijk aan de lengte van $\bar{a}$ vermenigvuldigd met de lengte van de projectie

van $\bar{b}$ op $\bar{a}$. Deze laatste lengte wordt positief gerekend, als de projectie van $\bar{b}$ op $\bar{a}$ valt in de richting van $\bar{a}$; valt de projectie in de richting van $-\bar{a}$ dan moet de lengte van de projectie negatief worden genomen.
De vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$ staan <u>loodrecht</u> op elkaar (of zijn <u>orthogonaal</u>), als $(\bar{a},\bar{b})=0$ (want $\cos 90^\circ=0$).

Opm. Wegens de ongelijkheid van Schwarz is

$$\left|\frac{(\bar{a},\bar{b})}{\sqrt{(\bar{a},\bar{a})}\ \sqrt{(\bar{b},\bar{b})}}\right| \leqslant 1,$$ zodat de vorm tussen de modulusstrepen als een cosinus zou kunnen worden gedefinieerd als we de meetkundige voorstelling willen vermijden (bijv. in een ruimte van hogere dimensie dan 3).

Vb 1) De afstand van het punt $A=(1,2,3)$ tot het punt $B=(3,-1,-4)$ is de lengte van de vector $(1,2,3)-(3,-1,-4) = (-2,3,7)$, dus $\sqrt{(-2)^2+3^2+7^2} = \sqrt{62}$.

Vb 2) De rechten

$$\bar{x} = (1,2,-1) + \lambda(3,-1,2) \text{ en } \bar{x} = (0,1,4) + \lambda(1,5,1)$$

zijn loodrecht, omdat het inwendig product van hun richtingsvectoren $(3,-1,2)$ en $(1,5,1)$ gelijk is aan 0.

Vb 3) Willen we de hoek φ berekenen, die de vector $(2,2,1)$ maakt met de y-as, dan geldt:

$$\cos\varphi = \frac{((2,2,1),(0,1,0))}{\sqrt{9.1}} = \frac{2}{3}\ .$$

Vb 4) Gegeven zijn het punt $P = (-1,2,3)$ en de rechte l:

$$l : \bar{x} = (-1,14,-3) + \lambda(-1,2,-2).$$

Gevraagd wordt de afstand van P tot l.

De verbindingsrechte van P met een willekeurig punt op l heeft als richtingsvector:

$$(-1,14,-3)+\lambda(-1,2,-2)-(-1,2,3) = (-\lambda, 12+2\lambda, -6-2\lambda).$$

Deze verbindingsrechte en l zijn loodrecht, als het inwendig product van hun richtingsvectoren nul is, dus als

$$-1.-\lambda+ 2(12+2\lambda)-2(-6-2\lambda) = 0 \rightarrow 9\lambda = -36, \text{ dus } \lambda=-4.$$

De projectie Q van P op l is dus $(-1,14,-3)-4(-1,2,-2)=(3,6,5)$.
De afstand van $Q=(3,6,5)$ en $P=(-1,2,3)$, de gevraagde afstand, is dus
$$\sqrt{4^2+4^2+2^2} = 6.$$

Verder is van de loodlijn PQ op l een parametervoorstelling
$\overline{x} = (-1,2,3)+ \lambda(4,4,2)$ of $\overline{x} = (-1,2,3)+ \lambda(2,2,1)$.

Vb 5) Bepaal de afstand van de rechten

$$l : \overline{x} = (0,1,0) + \lambda(2,1,1) \text{ en } m : \overline{x} = (0,-1,3) + \lambda(1,2,1).$$

Neem op l een willekeurig punt $L(2\lambda,1+\lambda,\lambda)$ en op m een willekeurig punt $M = (\mu,-1+2\mu,3+\mu)$. De verbindingsrechte LM, waarvan de richtingsvector is $(2\lambda-\mu,2+\lambda-2\mu,-3+\lambda-\mu)$, is loodrecht op l en m, indien voldaan is aan

$$2(2\lambda-\mu)+(2+\lambda-2\mu)+(-3+\lambda-\mu) = 0 \text{ en}$$
$$(2\lambda-\mu)+2(2+\lambda-2\mu)+(-3+\lambda-\mu)= 0.$$

Hieraan is voldaan voor $\lambda=\mu=1$. Het punt $(2,2,1)$ op l en het punt $(1,1,4)$ op m hebben dus de eigenschap, dat hun verbindingslijn (met richting $(1,1,-3)$) loodrecht op l en m is.
De (kortste) afstand van l en m is dus $\sqrt{1+1+3^2}= \sqrt{11}$.

Vb 6) Gevraagd alle vectoren, die gelijke hoeken maken met $\overline{a} = (2,2,1)$ en $\overline{b} = (4,0,3)$.

De vector $\overline{x} = (x,y,z)$ voldoet, indien

$$\frac{(\overline{a},\overline{x})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{x}|} = \frac{(\overline{b},\overline{x})}{|\overline{b}|\cdot|\overline{x}|}, \text{ dus als}$$

$$\frac{2x+2y+z}{3|\overline{x}|} = \frac{4x+3z}{5|\overline{x}|}, \text{ dus als } x-5y+2z=0.$$

Dit vlak is de meetkundige plaats van de eindpunten van de gevraagde vectoren: de vergelijking van het bissectricevlak van $\overline{a}$ en $\overline{b}$. Beschouwen we de dragers l_1 en l_2 van $\overline{a}$ en $\overline{b}$ dan bestaat naast dit bissectricevlak nog een tweede bissectricevlak, loodrecht op het eerste, en waarvan de vergelijking gevonden kan worden uit:

$$\frac{2x+2y+z}{3} = -\frac{4x+3z}{5} \rightarrow 11x+5y+7z = 0.$$

Vb 7) Gevraagd alle vectoren in R_2, die loodrecht staan op de vector (1,2).

De vector $\overline{x} = (x,y)$ voldoet, indien $x + 2y = 0$. Dit is de vergelijking van de meetkundige plaats van de eindpunten der gevraagde vectoren, dus de vergelijking van de loodlijn door 0 op (1,2).

Vb 8) Gevraagd alle vectoren in R_3, die loodrecht staan op de vector (1,2,3).

$\overline{x} = (x,y,z)$ voldoet, indien $x + 2y + 3z = 0$. Dit is de vergelijking van het loodvlak door 0 op de vector (1,2,3).

Evenals in het voorgaande, zullen we in deze paragraaf verder onderstellen, dat we onze beschouwingen uitsluitend zullen betrekken op Cartesische (ook wel genaamd orthogonale) coördinatenstelsels:

Normalen: Beschouw in R_2, de rechte l gegeven door de vergelijking $ax + by + c = 0$.
De lijn l' door 0 evenwijdig aan l heeft dus de vergelijking $ax + by = 0$. De betekenis van deze vergelijking is ook, dat het inwendig product van de vectoren (a,b) en (x,y) gelijk is aan 0 (vergelijk Vb 7), dus beide vectoren loodrecht op elkander.
Blijkbaar geldt de volgende stelling:

Stelling 2.1 De rechte $ax + by + c = 0$ staat loodrecht op de vector (a,b), de vector dus met kentallen gelijk aan de coëfficiënten van x en y in de vergelijking van de rechte. Omgekeerd heeft een rechte l loodrecht op een gegeven vector $\overline{v} = (v_1,v_2)$ een lineaire vergelijking in x en y, met coëfficiënten van x en y gelijk aan de kentallen v_1 en v_2 van $\overline{v}$.

Het bewijs van de laatste bewering volgt hieruit, dat, indien $A\ (a_1,a_2)$ een vast punt is op l, en $X\ (x,y)$ een willekeurig punt op l, het inwendig product van de vectoren $\overline{x} - \overline{a}$ en $\overline{v}$ gelijk is aan 0, dus $0 = (\overline{x}-\overline{a},\overline{v}) = (\overline{x},\overline{v}) - (\overline{a},\overline{v})$, dus

$v_1x + v_2y + c = 0$, waarin c een constante is gelijk aan $-(\bar{a},\bar{v})$.

merking: De rechte door het punt P $(x_1,y_1) \perp$ vector $(a,b) \neq 0$, heeft dus tot vergelijking: $a(x-x_1) + b(y-y_1) = 0$.

Analoog geldt in R_3 (vergelijk Vb 8):

telling 2.2 Het vlak $ax + by + cz + d = 0$ staat loodrecht op de vector (a,b,c), de vector dus met kentallen gelijk aan de coëfficiënten van x, y en z in de vergelijking van het vlak. Omgekeerd heeft het vlak loodrecht op een vector $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ een lineaire vergelijking in x, y en z met coëfficiënten van x, y en z juist gelijk aan de kentallen v_1, v_2 en v_3 van $\bar{v}$.

merking: Het platte vaak door het punt P $(x_1, y_1, z_1) \perp$ vector $(a,b,c) \neq \bar{0}$ heeft dus tot vergelijking: $a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$.

We nemen eens aan, dat $\bar{a} \neq \bar{0}$ een vaste vector is in R_2 of R_3, en dat d een constant reëel getal is. We beschouwen alle vectoren $\bar{x}$, die voldoen aan de vergelijking:

(2.2) $(\bar{a},\bar{x}) = d.$

Volgens blz A 23 en 24 moet dus de lengte van $\bar{a}$ (een vast getal!), vermenigvuldigd met de lengte van de projectie van $\bar{x}$ op $\bar{a}$ (voorzien van het goede teken!) gelijk zijn aan de constante d.
De lengten van de projecties van alle vectoren $\bar{x}$ op $\bar{a}$ zijn dus constant, n.l. gelijk aan $\frac{d}{|\bar{a}|}$.
In R_2 liggen de eindpunten van alle vectoren $\bar{x}$, die voldoen aan (2.2) blijkbaar op een rechte lijn $l \perp \bar{a}$ en in R_3 in een plat vlak $V \perp \bar{a}$. Is d positief, dan snijdt l of V de vector $\bar{a}$ in een punt, dat ligt van O uit gezien in de richting van de vector $\bar{a}$. Is d negatief, dan snijpunt in de richting van $-\bar{a}$. is $d = 0$, dan l of V door O. Ook omgekeerd geldt als het eindpunt van $\bar{x}$ op l of in V ligt, dan voldoet $\bar{x}$ aan een vergelijking van de vorm (2.2).

Vergelijking (2.2) is dus in R_2 de vergelijking van een rechte en in R_3 de vergelijking van een plat vlak. De vector $\bar{a}$ heet een <u>normaalvector</u> van de lijn l of het vlak V.
Onder deze normaalvectoren zijn er twee met lengte 1:
Is in R_2: $\bar{a} = (a,b)$ en $\bar{x} = (x,y)$, dan is (2.2) te schrijven als

$ax + by = d$.

De vectoren $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ en $\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ zijn de beide normaalvectoren, genormeerd op lengte 1.

Evenzo in R_3: vergelijking (2.2): $ax + by + cz = d$, als $\bar{a} = (a,b,c)$ en $\bar{x} = (x,y,z)$, is de vergelijking van een plat vlak in R_3.

De vectoren $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$ en

$\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$ zijn weer de beide normaalvectoren met lengte 1.

Vroeger hadden we reeds op andere wijze aangetoond, dat t.o.v. een willekeurig coördinatenstelsel, de vergelijking van een rechte in R_2 of van een plat vlak in R_3 van de eerste graad is in de veranderlijken. Het blijkt nu, dat t.o.v. een Cartesisch coördinatenstelsel de coëfficiënten van de veranderlijken een bijzondere betekenis hebben, namelijk dat ze de kentallen zijn van een normaalvector van de rechte in R_2 of het platte vlak in R_3.

Als in R_2 een vector $\bar{a} = (a,b) \neq \bar{0}$ met de positieve x-as en positieve y-as (d.w.z. t.o.v. de richting van de eenheidsvectoren $\bar{e}_1$ en $\bar{e}_2$ langs deze assen) de hoeken maakt α_x en α_y, dan geldt volgens formule (2.1):

$$\cos\alpha_x = \frac{(\bar{a},\bar{e}_1)}{|\bar{a}|.|\bar{e}_1|} = \frac{a}{|\bar{a}|} \quad ; \quad \cos\alpha_y = \frac{(\bar{a},\bar{e}_2)}{|\bar{a}|.|\bar{e}_2|} = \frac{b}{|\bar{a}|} .$$

$(\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y = 1)$.

Analoog in R_3: Als $\bar{a} = (a,b,c) \neq \bar{0}$ met de positieve coördinaatassen x, y, en z, de hoeken maakt α_x, α_y, α_z, dan is

$$\cos\alpha_x = \frac{a}{|\bar{a}|} \quad ; \quad \cos\alpha_y = \frac{b}{|\bar{a}|} \quad ; \quad \cos\alpha_z = \frac{c}{|\bar{a}|} .$$

$(\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1)$.

Deze cosinussen heten de richtingscosinussen van $|\bar{a}|$.

Als in R_2 of in R_3 een vector $\neq \bar{0}$ gegeven is, dan kunnen uit de kentallen van de vector de richtingscosinussen worden afgeleid. De richtingscosinussen zijn evenredig met de kentallen.

Beschouw nu de vergelijking:

(2.3) $(\bar{n},\bar{x}) = d$, met $\bar{n}$ een gegeven vector, lengte 1: $|\bar{n}| = 1$ en d een constant reëel getal.
De rechte lijn of het platte vlak door (2.3) voorgesteld, staat loodrecht op $\bar{n}$ en snijdt de drager van $\bar{n}$ in het punt P, waarbij d de lengte is van $\overline{OP}$, voorzien van het juiste teken. Is d positief, dan richting van $\overline{OP}$ = richting van $\bar{n}$; is d negatief, dan richting van $\overline{OP}$ tegengesteld aan die van $\bar{n}$; is d = 0, dan O = P: lijn of vlak door de oorsprong van het coördinatenstelsel.
Zij in R_2 α de hoek, die $\bar{n}$ maakt met de positieve x-as, gemeten in positieve richting (d.i. tegen de wijzers van de klok in), dan is dus $n = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. De vergelijking (2.3) heeft dan de gedaante:

(2.4) $$x \cos\alpha + y \sin\alpha - d = 0.$$

Als in (2.4) $d \geqslant 0$ wordt genomen (door vermenigvuldiging met ± 1 altijd te verkrijgen), dan noemen we (2.4) de <u>normaalvergelijking van een lijn</u> in R_2.
α is de hoek, die de normaalvector uit O op l, in de richting naar l (als l door O, dus d = 0, dan normaalvector in een van de beide richtingen $\perp$ l) maakt met de positieve x-as, gemeten in positieve richting, d is de afstand($\geqslant 0$) van O tot l. Is de vergelijking van een rechte in R_2 gegeven door de vergelijking $ax + by + c = 0$, dan kan deze vergelijking eenvoudig tot de normaalvergelijking worden herleid.

Deze normaalvergelijking luidt namelijk $\dfrac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$

Het + teken in de noeme als $c < 0$; het - teken als $c > 0$. Als c=0 + of - teken.

Analoog in R_3: Is $d \geqslant 0$, dan gaat (2.3) over in:

2.5) $$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - d = 0.$$

Deze vergelijking noemen we de <u>normaalvergelijking van een vlak</u> V in R_3.

Hierin zijn α, β en γ de hoeken, die de normaal uit 0 op V in de richting naar V (als V door 0 weer één van de beide normaalrichtingen) met de positieve coördinaatassen maakt, en d de (niet negatieve) afstand van 0 tot A. Evenzo kunnen we als de vergelijking van een vlak V in R_3 gegeven is door de vergelijking $ax + by + cz + d = 0$ deze tot de normaalvergelijking herleiden:

$$\frac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$ Het + teken in de noemer, als $d < 0$; het - teken als $d > 0$. Als $d=0$ + of - teken.

Als de normaalvergelijking van een rechte l in R_2 gegeven is door de vergelijking (2.3) met $d \geq 0$ en P (x_1,y_1) een willekeurig punt in R_2 is met $\overline{OP} = \bar{x}_1(x_1,y_1)$, dan is $(\bar{n},\bar{x}_1)$ = de lengte van de projectie van $\bar{x}_1$ of $\bar{n}$, voorzien van het goede teken. Moet deze lengte positief worden gerekend in verband met de richting van $\bar{n}$, dan is de (positieve) afstand van P tot l gelijk aan $|(\bar{n},\bar{x}_1) - d|$. Is $(\bar{n}, \bar{x}_1)$ niet positief, dan is deze afstand van P tot l gelijk aan $-(\bar{n}, \bar{x}_1) + d$. In beide gevallen geldt dus

telling 2.3 De afstand van een punt P (x_1,y_1) tot een lijn l met normaalvergelijking

$$(\bar{n},\bar{x}) - d = 0, \quad d \geq 0, \quad \bar{x} = (x,y)$$

is gelijk aan:

$$|(\bar{n},\bar{x}_1) - d|, \text{ als } \bar{x}_1 = (x_1,y_1).$$

Maakt $\bar{n}$ met de positieve x-as een hoek α, gemeten in positieve richting, dan is $\bar{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. De normaalvergelijking van l gaat dan over in $x \cos\alpha + y \sin\alpha - d = 0$, en de afstand van P (x_1,y_1) tot l wordt: $|x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - d|$.

Op geheel overeenkomstige wijze kan men in R_3 aantonen:

elling 2.4 De afstand van een punt $P(x_1,y_1,z_1)$ tot een vlak V met normaalvergelijking

$(\bar{n},\bar{x}) - d = 0, \quad d \geq 0, \quad \bar{x} = (x,y,z)$ is gelijk aan

(2.6): $|(\bar{n},\bar{x}_1) - d|$, als $\bar{x}_1 = (x_1,y_1,z_1)$.

Zijn de hoeken, die $\overline{n}$ in R_3 met de positieve coordinaatassen maakt, resp. gelijk aan α, β en γ, dan is $\overline{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ (vergelijk blz. A 28). De normaalvergelijking van V gaat dan over in $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d = 0$, en de afstand van $P(x_1, y_1, z_1)$ tot V wordt: $|x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - d|$.

De afstand van een punt P tot een rechte in R_2 of tot een plat vlak in R_3 verkrijgt men dus door de coördinaten van P in te vullen in het betreffende lid van de normaalvergelijking van de lijn of van het vlak, en van het resultaat de absolute waarde te nemen. De bekende term d in de normaalvergelijking (2.4) of (2.5) is juist gelijk aan de afstand van O tot de lijn of het vlak.

Opm.1) Het bewijs van stelling 2.3 en 2.4 had ook op de volgende wijze kunnen worden geleverd:
Stel de normaalvergelijking van de rechte l in R_2 of het vlak V in R_3 is (vgl.(2.3)):

$$(\overline{n}, \overline{x}) - d = 0 \text{ met } |\overline{n}| = 1.$$

De loodlijn uit een punt $P(\overline{p})$ op l of V heeft een parametervoorstelling $\overline{x} = \overline{p} + \lambda\overline{n}$.
We bepalen nu eerst het snijpunt Q van deze loodlijn met l of V.
Hiervoor moet gelden:

$$(\overline{n}, \overline{p} + \lambda\overline{n}) - d = 0 \rightarrow (\overline{n}, \overline{p}) + \lambda|\overline{n}|^2 - d = 0 \rightarrow \lambda = d - (\overline{n}, \overline{p}), \text{ want } |\overline{n}| = 1.$$

Dus Q is het eindpunt van de vector $\overline{p} + \{d - (\overline{n}, \overline{p})\}\overline{n}$.
De afstand PQ is de lengte van de vector $\{d - (\overline{n}, \overline{p})\}\overline{n}$.
Aangezien $|\overline{n}| = 1$, is deze lengte dus $|d - (\overline{n}, \overline{p})|$, hetgeen te bewijzen was.

2) Is de vergelijking van een rechte l in R_2: $ax + by + c = 0$, dan is de afstand van een punt $P(x_1, y_1)$ tot l dus gelijk aan
$\left|\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$. Is de vergelijking van een plat vlak V in R_3:
$ax + by + cz + d = 0$, dan is de afstand van een punt $P(x_1, y_1, z_1)$ tot V gelijk aan $\left|\dfrac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$.

3) Aangezien volgens het voorgaande in R_2 de afstand van $P(x_1, y_1)$ tot een rechte l gelijk is $(\overline{n}, \overline{x}_1) - d$ of $d - (\overline{n}, \overline{x}_1)$, al naargelang P ligt aan de andere kant of dezelfde kant van l als O, geldt dus, dat de lijn met normaalvergelijking $(\overline{n}, \overline{x}) - d = 0$ of $x\cos\alpha + y\sin\alpha - d = 0$ het platte vlak R_2 in twee delen verdeelt. Voor punten $P(x, y)$, die aan de andere

kant van O liggen als O, geldt $x \cos\alpha + y \sin\alpha - d > 0$, terwijl voor de punten, die aan dezelfde kant van l liggen als O, geldt $x \cos\alpha + y \sin\alpha - d < 0$.

Op analoge wijze kan men in R_3 aantonen, dat een vlak V met normaalvergelijking $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - d = 0$ de ruimte R_3 in twee delen verdeelt. Voor de punten $P(x,y,z)$, die liggen aan dezelfde kant van V als O geeft substitutie van x,y en z in het linker lid van de normaalvergelijking een negatief antwoord; voor de punten aan de andere kant wordt dit lid positief bij substitutie van de coördinaten.

Ondersteld is hierbij, dat het coördinatenstelsel zodanig is gekozen, dat de oorsprong hiervan niet ligt op de scheidende lijn of in het scheidende vlak.

Voldoen de coördinaten van een punt aan de normaalvergelijking van lijn of vlak in R_2 resp. R_3, dan ligt dat punt blijkbaar op de lijn of in het vlak. De afstand van het punt tot de lijn of het vlak is dan 0, zoals ook volgt uit de stellingen 2.3 en 2.4.

Hoek tussen twee lijnen in R_2 en tussen twee vlakken in R_3:

Zijn $(\bar{a},\bar{x})=c$ en $(\bar{b},\bar{x})=d$

de vergelijkingen van twee lijnen in R_2 of van twee vlakken in R_3, dan zijn de vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$ normaalvectoren. De hoek φ tussen de lijnen resp. tussen de vlakken[1] is dus dezelfde als de hoek tussen de vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$. Volgens formule (2.1) is

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|.|\bar{b}|}. \tag{2.7}$$

Is in R_2 : $\bar{a}=(a_1,a_2)$, $\bar{b}=(b_1,b_2)$ en $\bar{x}=(x,y)$, dan gaan de gegeven vergelijkingen over in

$$a_1x + a_2y = c \qquad \text{en} \qquad b_1x+b_2y=d,$$

terwijl (2.7) wordt:

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2}}. \tag{2.8}$$

Hieruit volgt in het bijzonder $l_1 \perp l_2$ dan en slechts dan als $a_1b_1+a_2b_2=0$.

Zo zijn de twee lijnen $a_1x+a_2y=c$ en $a_2x-a_1y=d$ dus orthogonaal in R_2.

Zoals reeds opgemerkt op blz. A11 heet $m_1=\text{tg}\,\varphi_1=-\frac{a_1}{a_2}$ de richtings-

---

1) Met φ is bedoeld een van de beide hoeken, dus een hoek of z'n supplement.

coëfficiënt van l_1 en evenzo $m_2=\text{tg}\ \varphi_2=-\frac{b_1}{b_2}$ de richtingscoëfficiënt van l_2. Uit (2.8) volgt:

$$\cos^2\varphi=\frac{(m_1m_2+1)^2}{(m_1^2+1)(m_2^2+1)},\ \text{en dus}\ \text{tg}^2\varphi=\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{(m_1-m_2)^2}{(1+m_1m_2)^2}.$$

Verstaan we onder φ de scherpe hoek tussen l_1 en l_2, dan is dus:

$$\text{(2.9)}\qquad \text{tg}\ \varphi=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|.$$

(eenvoudig ook af te leiden met behulp van de tangensregel voor de tangens van het verschil van twee hoeken).
Uit (2.9) volgt weer in het bijzonder $l_1\perp l_2$ als $m_1m_2=-1$, dus als de beide richtingscoëfficiënten elkaars tegengestelde inverse zijn.

Is in R_3 : $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$ en $\bar{x}=(x,y,z)$, dan stellen de vergelijkingen $(\bar{a},\bar{x})=c$ en $(\bar{b},\bar{x})=d$ de vergelijkingen voor van de vlakken:

$$V_1 : a_1x+a_2y+a_3z=c$$
$$V_2 : b_1x+b_2y+b_3z=d,$$

terwijl voor de hoek φ tussen V_1 en V_2 geldt (voor φ: zie noot blz. 32)

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

Hieruit volgt weer in het bijzonder: $V_1\perp V_2$ dan en slechts dan als $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

Voorbeelden

Vb 1) De rechte door het punt $P(1,2,3)$ loodrecht op het vlak $3x-4y+5z=3$ is

$$\bar{x}=(1,2,3)+\lambda(3,-4,5).$$

Vb 2) De rechte in R_2 door het punt $(1,2)$ en loodrecht op de vector (2.1) heeft tot vergelijking $2(x-1)+1.(y-2)=0$ of $2x+y-4=0$ (zie opm.blz. A27).

Vb 3) Het vlak door $P(2,4,1)$ en loodrecht op de rechte $\bar{x}=(0,-1,4)+\lambda(3,2,5)$ heeft tot vergelijking: $3(x-2)+2(y-4)+5(z-1)=0$ of $3x+2y+5z-19=0$.

Vb 4) Gevraagd het vlak door de snijlijn van V_1 en V_2:

$$V_1 : x+y+2z=4 \quad\text{en}\quad V_2 : 2x-3y+z=1 \quad\text{en}$$

loodrecht op het vlak α : $3x-4y-7z=9$.
De normaalvectoren van de vlakken, behorende tot de vlakkenwaaier, bepaald door V_1 en V_2, kunnen worden voorgesteld door:

$(\lambda+2\mu, \lambda-3\mu, 2\lambda+\mu)$. Voor het vlak uit de waaier, dat loodrecht staat op α, moet gelden $3(\lambda+2\mu)-4(\lambda-3\mu)-7(2\lambda+\mu)=0$

of $15\lambda=11\mu$.
De vergelijking van het gevraagde vlak wordt dus:

$11(x+y+2z-4)+15(2x-3y+z-1)=0$ of $41x-34y+37z-59=0$.

Vb 5) Gevraagd de scherpe hoek tussen de rechte l en het vlak V, gegeven door:

$$l : \bar{x} = (1,2,3) + \lambda(1,1,\sqrt{6}), \quad V : x-y+z = 12.$$

De gevraagde hoek φ is het complement van de hoek tussen de vectoren $(1,1,\sqrt{6})$ en $(1,-1,1)$, dus

$$\sin \varphi = \frac{1-1+\sqrt{6}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi = 30^\circ.$$

Vb 6) Gegeven zijn de vlakken:

$$V : 2x+y+2z=1, \quad W : 6x-4y-z=5 \quad \text{en} \quad U : x+3y+z+2=0.$$

Gevraagd wordt:

1) De vergelijking van het vlak door de snijlijn s van V en W en door O.
2) De vergelijking van het vlak door s, loodrecht op U.
3) De coördinaten van het snijpunt S van s en U.
4) De vergelijking van het vlak door S loodrecht op de vector $(1,2,-3)$.
5) De vergelijkingen van de projecterende vlakken van s.

Oplossing:

1): De vergelijking van de vlakkenwaaier, bepaald door V en W is: $\lambda(2x+y+2z-1)+\mu(6x-4y-z-5)=0$. Opdat een vlak hiervan door O gaat, moet gelden $-\lambda-5\mu=0$, zodat de vergelijking van het bedoelde vlak is:
$-5(2x+y+2z-1)+(6x-4y-z-5)=0$ of $4x+9y+11z=0$.

2): Als een vlak van de vlakkenwaaier uit 1) loodrecht staat op U, moet gelden: $1.(2\lambda+6\mu)+3(\lambda-4\mu)+1.(2\lambda-\mu)=0$ of $7\lambda-7\mu=0 \rightarrow \lambda=\mu$. De vergelijking van het bedoelde vlak is dus $(2x+y+2z-1)+(6x-4y-z-5)=0 \rightarrow 8x-3y+z-6=0$.

3): Aan de drie vergelijkingen van V,W en U voldoet $x=\frac{2}{7}$, $y=-1$, $z=\frac{5}{7}$. $\frac{2}{7}$, -1 en $\frac{5}{7}$ zijn dus de coördinaten van het snijpunt S.

4): De vergelijking van het vlak door S loodrecht op de vector $(1,2,-3)$ heeft tot vergelijking $(x-\frac{2}{7})+2(y+1)-3(z-\frac{5}{7})=0$ of $7x+14y-21z+27=0$. Deze vergelijking had ook afgeleid kunnen worden door de vlakkenschoof te beschouwen, bepaald door V,W en U:

$$\lambda(2x+y+2z-1)+\mu(6x-4y-z-5)+\nu(x+3y+z+2)=0.$$

Een vlak uit deze schoof is loodrecht op de vector $(1,2,-3)$ als

$$(2\lambda+6\mu+\nu):(\lambda-4\mu+3\nu):(2\lambda-\mu+\nu)=1:2:-3.$$

Hieruit volgt $\lambda:\mu:\nu=81:-20:-77$ en de vergelijking van het bedoelde vlak:

$81(2x+y+2z-1)-20(6x-4y-z-5)-77(x+3y+z+2)=0$ of $7x+14y-21z+27=0$.

5): s is de snijlijn van V en W. Beschouw de beide vergelijkingen van V en W. Eliminatie van x uit deze vergelijkingen geeft $7y+7z+2=0$. Dit is het projecterend vlak // x-as. De beide andere projecterende vlakken // y-as en // z-as worden verkregen door eliminatie van y en z uit de beide vergelijkingen. Dit leidt tot de vlakken:

$$14x+7z-9=0 \text{ resp. } 14x-7y-11=0.$$

Vb 7) Bepaal de oppervlakte van $\triangle$ ABC, als $A=(4,1)$, $B=(0,4)$ en $C=(-1,-3)$.

Van de zijde AB is de lengte $c=\sqrt{(4-0)^2+(1-4)^2}=5$.

Een parametervoorstelling van de lijn l door AB is

$\bar{x}=(x,y)=(0,4)+\lambda(4,-3)\longrightarrow x=4\lambda,\ y=4-3\lambda$.

De vergelijking van l is dus $3x+4y-16=0$ en de afstand h_c van C tot l:

$$h_c=\left|\frac{3(-1)+4(-3)-16}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\frac{31}{5}.$$

Dus oppervlakte $\triangle$ ABC : $\frac{1}{2}c.h_c=\frac{1}{2}.5.\frac{31}{5}=15\frac{1}{2}$.

Vb 8) Gegeven het vlak V : $2x-y+2z=6$ en het punt $P(4,9,5)$.

Gevraagd de projectie van P op V.

De vector $\bar{a}=(2,-1,2)$ staat loodrecht op V en is dus evenwijdig aan de loodlijn uit P op V neergelaten. Een vectorvoorstelling van deze loodlijn is dus

$\bar{x}=(x,y,z)=(4,9,5)+\lambda(2,-1,2)$, dus $x=4+2\lambda, y=9-\lambda, z=5+2\lambda$.

Substitueren we deze waarden in de vergelijking van V, dan is

$2(4+2\lambda)-(9-\lambda)+2(5+2\lambda)=6$ of $9\lambda=-3$, $\lambda=-\frac{1}{3}$ en de projectie is $(3\frac{1}{3},9\frac{1}{3},4\frac{1}{3})$.

Vb 9) Bepaal de afstand van het punt P(2,-3,4) tot de lijn l:

$l : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{4}$.

Vectorvoorstelling van l : $\bar{x}=(-1,1,-3)+\lambda(3,2,4)$.
Een willekeurig punt Q van l is voor te stellen door $(-1+3\lambda, 1+2\lambda, -3+4\lambda)$. Q is de projectie van P op l, als de vector $(-3+3\lambda, 4+2\lambda, -7+4\lambda)$, die gelijk en evenwijdig is aan het lijnstuk PQ, loodrecht staat op l, dus op de vector (3,2,4). Het inwendig product van deze vectoren is dus nul, zodat $3(-3+3\lambda)+2(4+2\lambda)+4(-7+4\lambda)=0$. Dit geeft $\lambda=1$ en dus Q(2,3,1). De afstand van P tot l is dus

$$PQ = \sqrt{(2-2)^2+(3+3)^2+(1-4)^2} = 3\sqrt{5}.$$

Vb 10) Gegeven het vlak V : $x+3y-4z+5=0$ en de punten A(2,2,3) en B(4,2,1). Gevraagd de vergelijking van het vlak W door AB en loodrecht op V.

Stel $\bar{a}=(2,2,3)$ en $\bar{b}=(4,2,1)$, dan is $\bar{b}-\bar{a}=(2,0,-2)$. De vector $\bar{c}=(1,3,-4)$ staat loodrecht op V.
Een vectorvoorstelling van het vlak W is dus

$$\bar{x}=(x,y,z) = (2,2,3) + \lambda(2,0,-2) + \mu(1,3,-4).$$

Hieruit volgt $x=2+2\lambda+\mu$; $y=2+3\mu$; $z=3-2\lambda-4\mu$. Elimineren we hieruit λ en μ , dan vinden we voor de vergelijking van het vlak W : $x+y+z=7$.

Bissectrices en bissectricevlakken:

Van twee (snijdende) lijnen l_1 en l_2 in R_2 zijn de normaalvergelijkingen gegeven door:

$$l_1 : x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-d_1 = 0$$
$$l_2 : x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-d_2 = 0.$$

De afstanden van een willekeurig punt P(x,y) tot l_1 en l_2 zijn respectievelijk:

$$p_1 = |x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-d_1| \quad \text{en} \quad p_2 = |x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-d_2| .$$

De meetkundige plaats van de punten $P(x,y)$, die gelijke afstanden tot l_1 en l_2 hebben, is de figuur gevormd door de beide bissectrices van de hoeken, die l_1 en l_2 met elkaar maken.
De vergelijking van de bissectrices luidt derhalve:

$$|x \cos \alpha_1+y \sin \alpha_1-d_1| = |x \cos \alpha_2+y \sin \alpha_2-d_2| .$$

De ene bissectrice heeft dus de vergelijking

$$x \cos \alpha_1+y \sin \alpha_1-d_1 = x \cos \alpha_2+y \sin \alpha_2-d_2,$$ en de andere

$$x \cos \alpha_1+y \sin \alpha_1-d_1 = -(x \cos \alpha_2+y \sin \alpha_2-d_2).$$

Opm.1) In verband met de opmerking 3) op blz. A 31 kan men nagaan, welke vergelijking bij de ene bissectrice en welke bij de andere behoort (door beschouwing van een punt op een van de bissectrices en na te gaan of de linkerleden van l_1 en l_2 positief of negatief moeten worden gerekend in verband met de ligging van dat punt t.o.v. de oorsprong O van het coördinatenstelsel en l_1 en l_2 (beide niet gaande door O)).

2) De beide bissectrices staan loodrecht op elkander, want
$(\cos \alpha_1-\cos \alpha_2)(\cos \alpha_1+\cos \alpha_2)+(\sin \alpha_1-\sin \alpha_2)(\sin \alpha_1+\sin \alpha_2)=$
$=(\cos^2\alpha_1+\sin^2\alpha_1)-(\cos^2\alpha_2+\sin^2\alpha_2)=1-1=0.$

3) Zijn l_1 en l_2 niet door normaalvergelijkingen gegeven, maar is $l_1 : a_1x+a_2y+a_3=0$ en $l_2 : b_1x+b_2y+b_3=0$, dan is de vergelijking van de beide bissectrices:

$$\frac{|a_1x+a_2y+a_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} = \frac{|b_1x+b_2y+b_3|}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} .$$

4) Zijn l_1 en l_2 evenwijdig, dan is er slechts één "bissectrice", de lijn l // l_1 en l_2 en gelegen midden tussen deze.
Op overeenkomstige wijze kan men in R_3 aantonen:
Als de snijdende vlakken V_1 en V_2 tot vergelijking hebben:
$V_1 : a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0$ en $V_2 : b_1x+b_2y+b_3z+b_4=0$, dan is de vergelijking van de beide bissectricevlakken, die in R_3 de tweevlakshoek, gevormd door V_1 en V_2 middendoor delen:

$$\frac{|a_1x+a_2y+a_3z+a_4|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = \frac{|b_1x+b_2y+b_3z+b_4|}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} .$$

(gelijkstelling van de absolute waarden der linkerleden van de beide vergelijkingen in de normaalvorm)

Deze beide vlakken staan loodrecht op elkander, want als

$\bar{a} = (a_1,a_2,a_3)$ en $\bar{b} = (b_1,b_2,b_3)$ geldt:

$$\left(\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}+\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}, \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}-\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}\right)=\frac{(\bar{a},\bar{a})}{|\bar{a}|^2}-\frac{(\bar{b},\bar{b})}{|\bar{b}|^2}=1-1=0 \quad \text{(volgens (2.1))}.$$

Zie verder opm.1) en 4) boven, die ook hier m.m. van toepassing zijn.

Zijn in R_3 twee lineair onafhankelijke vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$ gegeven, dan is de vergelijking van de beide bissectricevlakken van de dragers van $\bar{a}$ en $\bar{b}$ (d.z. de vlakken door O, die de beide hoeken gevormd door deze dragers loodrecht middendoor delen) dezelfde als boven indien $a_4=b_4=0$:

$$\frac{|(\bar{a},\bar{x})|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{x}|}=\frac{|(\bar{b},\bar{x})|}{|\bar{b}|\cdot|\bar{x}|} \rightarrow \frac{|(\bar{a},\bar{x})|}{|\bar{a}|}=\frac{|(\bar{b},\bar{x})|}{|\bar{b}|}. \qquad (\bar{x}=(x,y,z))$$

Ook deze vlakken zijn dus weer orthogonaal (vergelijk vb 6) blz.A 25).

Opgaven

1) Bewijs met behulp van vectorrekening, dat de drie hoogtelijnen van een driehoek door één punt gaan.

2) Bepaal de vergelijking van de rechte in R_2, die gaat door het snijpunt van de rechten $11x - 11y + 36 = 0$ en $3x + 4y - 22 = 0$ en loodrecht staat op de rechte door de punten A(-2,3) en B(6,-1).

3) Bepaal in R_2 de vergelijkingen van de rechten, die gaan door het snijpunt van de rechten $x + y = 2$ en $x + 8y + 2 = 0$, en die tot het punt (3,-4) de afstand 3 hebben.

4) Gegeven is het punt A(0,2). Op de x-as ligt een punt B en op AB het punt C zo, dat het product van de lengten der lijnstukken AB en AC gelijk is aan 16.
Bepaal de vergelijking van de meetkundige plaats van C, als B de x-as doorloopt.

5) Gegeven zijn de punten A(6,0,-2) en B(1,-4,0) en de rechte l gegeven door $x + y = 0$, $5x + y + z = 7$.
Bepaal de vergelijkingen en bereken de lengte van de kortste verbindingslijn van de lijn door AB en l.

6) Bepaal de vectorvergelijking van de lijn l door het punt P (2,1,-3) loodrecht op het vlak V met vergelijking $2x - y + z = 2$.

7) Bepaal de hoek tussen de lijnen l en m:
l: $\bar{x} = (1,1,2) + \lambda(5,4,3)$
m: $\bar{x} = (2,-1,0) + \lambda(5,-3,4)$.

8) Bepaal het snijpunt van het vlak U: $x + 3z = 2$ en de lijn l door het punt $(6,7,1)$ loodrecht op het vlak V: $-x + 2y = 7$.

9) Ontbind de vector $\bar{p} = (5,2,-3)$ in een vector, die loodrecht staat op het vlak V: $x + 2y - z = 0$ en één die in het vlak V ligt.

10) De lijn l heeft tot parametervoorstelling:
$\bar{x} = (0,1,-1) + \lambda(1,1,2)$ en de lijn m: $\bar{x} = (3,1,2) + \lambda(2,-1,1)$.

1°. Toon aan, dat l en m elkaar snijden.
2°. Bereken de hoek tussen l en m.
3°. Bepaal een parametervoorstelling en de vergelijking van het vlak V door l en m.
4°. Bereken de coördinaten van de projectie van het punt $P(-1,6,0)$ op V.

1) Bepaal de vergelijking van het platte vlak, dat evenwijdig is aan de snijlijn van de vlakken $x + 2y + 4 = 0$ en $x - y - z - 2 = 0$, loodrecht staat op het vlak $x + y + 2z - 3 = 0$, en gaat door het punt $(1,2,2)$

2) Bepaal de vergelijking van de meetkundige plaats van de rechten, die de drie rechten l, m en n, gegeven door l: $x = 1$, $y = 0$; m: $y = 1$, $z = 0$; n: $x = 0$, $z = 1$ snijden.

3) Bepaal de hoek tussen de vlakken U: $2x + 2y - z = 5$ en V, dat gaat door de twee punten $(1,3,-3)$ en $(4,0,0)$ en evenwijdig is aan de y-as.

4) In R_3 is gegeven het vlak V: $x + 2y + 2z = 9$.

a) Geef een parametervoorstelling van het vlak V.
b) Bepaal de coördinaten van het voetpunt van de loodlijn l uit O op V neergelaten.
c) Bepaal de rechten door O, die liggen in het vlak $x = 0$ en die met de onder b) genoemde loodlijn l een hoek insluiten, waarvan de sinus gelijk is aan $\frac{1}{3}\sqrt{5}$.

5) In R_3 zijn de volgende twee rechten gegeven:
l: $x + 2y - z = 0$, $2x - y + z = 1$
m: $x - 3y + 5z = 0$, $4x - 12y + 5z = p$.

a) Onderzoek voor welke waarde(n) van p de rechten 1 en m elkaar snijden.

b) Bepaal voor de onder a) bedoelde waarde(n) van p één der hoeken, die door 1 en m worden ingesloten.

16) Bepaal de afstand van het punt P(1,10,1) tot de lijn 1: $x = 4$, $z = 5$.

17) Gegeven de lijnen 1: $x = 0$, $y + z = 1$
en m: $x = 1$, $z = 0$.
Gevraagd de lijn, die 1 en m loodrecht snijdt en de kortste afstand tussen 1 en m.

18) Gevraagd de vergelijking van de meetkundige plaats van de punten, die gelijke afstanden hebben tot het punt $F(\frac{1}{2}p,0)$ en de rechte door $A(-\frac{1}{2}p,0)$ evenwijdig aan de y-as.

19) Bepaal de hoek tussen de lijn 1 en het vlak V:
1: $x = (1,2,3) + (1,0,7)$
V: $x + y + 2z = 5$.

20) Gegeven de vlakken
$V_1 : 2x + 2y - z = 1$ en $V_2 : 4x + 3z = 5$.
Gevraagd de vergelijking van het bissectricevlak, dat de positievey- as (d.i het gedeelte van de y-as vanuit O gezien in de richting van de eenheidsvector op de y-as) snijdt.

§ 3. Vectorruimten

Inleiding: In §§ 1 en 2 hebben we gezien, dat men door een systematisch gebruik van de correspondentie tussen meetkundige en algebraïsche begrippen, een meetkundig vraagstuk in een algebraïsch om kan zetten (de methode toegepast in de zgn. Analytische Meetkunde). Immers een "meetkundige" vector kan in een twee-resp. driedimensionale ruimte worden geïdentificeerd met een rijtje van twee resp. drie getallen, en met deze coördinaten twee- en drietallen kan worden gerekend als met de vectoren zelf.

De algebraïsche theorie der vectoren is evenwel ook om haar zelfswil van belang, en kan in vele gevallen voordeliger worden bestudeerd onafhankelijk van de meetkunde, omdat men zich dan geen noodzakelijke beperkingen behoeft op te leggen in verband met de aanschouwelijke meetkundige interpretatie. Zo kan men bv. evengoed complexe getallen beschouwen i.p.v. reële getallen, en ook coördinatenviertallen, vijftallen, enz. invoeren i.p.v. alleen twee- en drietallen.

We zullen nu de beginselen van de algebraïsche theorie dezer gegeneraliseerde vectoren geven, hierbij geleid door de analogie met meetkundige beschouwingen uit het voorafgaande.

Een geordende verzameling (rij) van n getallen $a_1, \dots, a_n$ noemen we een (algebraïsche)n-vector of veelal kortweg, in gevallen waarbij de "dimensie" n vaststaat of er niet toe doet, een vector. Een vector duiden we aan d.m.v. een letter met een pijltje of streepje er boven en schrijven dan bv. $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, waarin het rechterlid de rij voorstelt van de n getallen $a_1, \dots, a_n$ in de gegeven volgorde.

Deze n getallen heten de kentallen (of ook wel coördinaten of elementen) van de vector. De vector met alle kentallen gelijk aan 0 heet de nulvector en wordt voorgesteld door $\bar{0}$. Twee vectoren zijn dan en slechts dan gelijk, als ieder kental van de eerste vector gelijk is aan het overeenkomstige kental van de tweede.

De optelling wordt gedefinieerd door:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

De scalaire vermenigvuldiging met een getal λ door:

$$\lambda(a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n).$$

Het is gemakkelijk na te gaan, dat voor deze optelling en vermenigvuldiging de rekenregels (1.1) t/m (1.8) van § 1 van kracht zijn.

Zij n een zeker vast natuurlijk getal, dan vormt de verzameling van alle algebraïsche n-vectoren per definitie de <u>n-dimensionale vectorruimte R_n</u> (of ook wel genoemd de Cartesische ruimte R_n).

Als we ons beperken tot reële getallen voor de kentallen van vectoren, dan is R_1 te interpreteren als de getallenrechte, R_2 als het gewone vlak, R_3 als de gewone ruimte (zie § 1). Naar analogie met deze Cartesische ruimten van dimensie 1, 2 en 3 kunnen we ook in R_n, $n > 3$, een meetkundige terminologie invoeren. We doen dit bv. voor $n = 4$: (0,0,0,0) heet de oorsprong O; de vectoren $(a_1,0,0,0)$ vormen de x-as (of x_1-as); alle $(0, a_2, 0,0)$ de y-as (of x_2-as); alle $(0,0,a_3,0)$ de z-as (of x_3-as); alle $(0,0,0,a_4)$ de t-as (of x_4-as).
Alle $(a_1, a_2, 0,0)$ vormen het (x,y)-vlak; alle $(a_1,0,a_3,0)$ het (x,z)-vlak enz.; van het (x,y)-vlak zijn de vergelijkingen $z = t = 0$; van het (x,z)-vlak de vergelijkingen: $y = t = 0$.
Alle $(a_1, a_2, a_3, 0)$ vormen de (x, y, z)-ruimte ("grondruimte").
Alle $(a_1, a_2, 0, a_4)$ vormen de (x, y ,t)-ruimte waarvoor dus $z = 0$; enz.
De verzameling vectoren $\bar{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4) + \lambda(v_1,v_2,v_3,v_4)$ met λ variabel vormt een rechte. De verzameling $\bar{x} = \bar{a} + \lambda\bar{v} + \mu\bar{w} + \nu\bar{u}$ met λ, μ en ν variabel, vormt een ruimte. Als we bv. uit deze laatste parametervoorstelling de λ, μ en ν elimineren (door beschouwing van de vier coördinatenvergelijkingen) dan krijgen we de coördinatenvergelijking van deze ruimte:
$ax + by + cz + dt = e$. Dit is weer een lineaire vergelijking.
(In het algemeen kan men zeggen, dat een R_{n-1} (ook wel genaamd <u>hypervlak</u>) in R_n voorgesteld kan worden door één lineaire vergelijking in de n coördinaten).

Opg. Bewijs, dat het snijpunt van de rechte door de eindpunten van $\bar{a} = (1, 2, 3, 4)$ en $\bar{b} = (0, -1, 2, 2)$ met de (x,y ,z)-ruimte (grondruimte) gelijk is aan (-1, -4, 1, 0).
<u>Opm.</u> De genoemde rechte snijdt noch het (x, y)-vlak, noch het (x, z)-vlak, noch het (y ,z)-vlak. In R_4 zijn een rechte en een vlak in het algemeen dus kruisend.

Voor de definitie van de begrippen "lineaire combinatie" en "lineaire (on)afhankelijkheid" kan worden verwezen naar § 1, blz. 2 en 3; deze definities kunnen met behulp van de op blz. 41 gegeven rekenregels voor optelling en scalaire vermenigvuldiging van vectoren eenvoudig algebraïsch worden geïnterpreteerd.

Opm. Volgens stelling 1.1 is de existentie van de betrekking

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \ldots + \alpha_n \bar{a}_n = \bar{0}$$

met $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq \bar{0}$ een nodige en voldoende voorwaarde voor de lineaire afhankelijkheid van het stelsel vectoren $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$; deze eigenschap kan dus ook worden gebruikt als definitie voor lineaire afhankelijkheid van een stelsel vectoren; per definitie is een stelsel lineair onafhankelijk, als het niet lineair afhankelijk is.

Opg.1 Bewijs:

a) (2, 1) is een lin.comb. van (1,0) en(0,1).

b) (4,5) is een lin. comb. van (1,2) en (2,1).

c) (0,1) is een lin.comb. van (1,1) en (3,2).

d) (2,2) is een lin.comb. van (0,0) en 1,1).

e) (1,2) is een lin. comb. van (3,6).

f) (3, -4, -1, -6) is een lin. comb. van (1,2,3,4) en (2,-1,1,-1).

g) (1, 2, 3, 4) is een lin. comb. van (1, 0,0,0), (0,0,1,0) en (0,1,0,2).

h) (0,1,2) is een lin. comb. van (1,2,3) en (1,1,1).

Opm. Inplaats van "lineaire combinatie van" zeggen we ook "lineair afhankelijk van".

Opg.2 Bewijs:

a) (1,2), (3,6) zijn lin. afhankelijk.

b) (2,1,0), (1,2,3) zijn lin. onafhankelijk.

c) (1,0,0), (6,7,0), (1,2,3) zijn lin. onafhankelijk.

d) (4,6,2,2), (1,0,0,0), (2,3,1,1) zijn lin. afhankelijk.

e) (1,2,3), (1,3,2), (2,5,6), (1,1,1) zijn lin. afhankelijk.

f) (1,0,2,0), (2,1,0,0), (2,1,1,0), (0,1,2,3,) zijn lin.onafh.

Opg.3 a) Druk $\bar{v} = (-4,5,10)$ lineair uit in $\bar{a} = (2,3,4)$ en $\bar{b} = (5,2,1)$.

b) Druk $\bar{v} = (6,5,8,6)$ lineair uit in $\bar{a} = (5,4,-2,1)$, $\bar{b} = (1,2,3,0)$ en $\bar{c} = (7,9,-3,-4)$.

c) Druk $\bar{v} = (5,-2,3)$ lineair uit in $\bar{a} = (1,2,3)$, $\bar{b} = (2,1,1)$ en $\bar{c} = (1,0,1)$.

Opg.4 Bepaal x zo, dat de vectoren:
$\bar{a}=(1,2,4)$, $\bar{b}=(2,x,5)$ en $\bar{c}=(3,x,x)$ lineair afhankelijk zijn

Opg.5 Twee vectoren ($\neq \bar{0}$) met dezelfde drager vormen een lineair afhankelijk stelsel en omgekeerd: als twee vectoren ($\neq \bar{0}$) een lineair afhankelijk stelsel vormen, dan hebben ze dezelfde drager. Bewijs dit.
($\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$ ($\neq \bar{0}$) hebben dezelfde drager als $\bar{a}_1 = \lambda \bar{a}_2$.)

Aan zekere vectoren uit R_n wordt een speciale naam gegeven: We noemen $(1,0,\ldots,0)=\bar{e}_1$, $(0,1,0,\ldots,0)=\bar{e}_2,\ldots,(0,\ldots,0,1)= \bar{e}_n$. Deze vectoren $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$, genaamd de ($1^e, 2^e, \ldots, n^e$) <u>grondvectoren</u>(eenheidsvectoren) van R_n, zijn lineair onafhankelijk (waarom?) en elke vector $\bar{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ is lineair afhankelijk van deze vectoren: $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + \ldots + a_n\bar{e}_n$.

De volgende eigenschappen kunnen eenvoudig worden bewezen:

1. Wanneer een aantal van de p vectoren $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p$ lineair afhankelijk zijn, dan zijn $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p$ lineair afhankelijk.

2. Een stelsel vectoren, dat de nulvector bevat, is altijd lineair afhankelijk.

3. Zijn de vectoren $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_p$ lineair onafhankelijk, de vectoren $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p,\bar{b}$ lineair afhankelijk, dan is $\bar{b}$ lineair afhankelijk van $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p$.

4. Gegeven : $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p$ zijn lineair onafhankelijk; $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ alle $\neq 0$, dan zijn ook $\lambda_1\bar{v}_1,\ldots,\lambda_p\bar{v}_p$ lineair onafhankelijk.
5. Gegeven: $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p$; $\bar{v}_1 \neq \bar{0}$; $\bar{v}_2$ niet lineair afhankelijk van $\bar{v}_1$; $\bar{v}_3$ niet van $\bar{v}_1$ en $\bar{v}_2$; ...; $\bar{v}_p$ niet lineair afhankelijk van $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_{p-1}$. Dan zijn $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_p$ lineair onafhankelijk.

Opg.1 Repeteer de opgaven 1 t/m 10 van § 1.
Opg.2 Bewijs, dat de volgende redenering onjuist is:
Uit 1) $\bar{v}_1$ lineair afhankelijk van $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, en $\bar{v}_4$ en 2) $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ lineair onafhankelijk, volgt:
$\bar{v}_1$ lineair afhankelijk van $\bar{v}_4$. Laat dit door een tegenvoorbeeld zien.

Om te onderzoeken of een stelsel vectoren lineair afhankelijk is of niet, maakt men dikwijls gebruik van de volgende eigenschappen:
(zie ook opg. 3 en 5 § 1, blz. 4)

1. $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n$ zijn lin. onafhankelijk dan en slechts dan als $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_k + \bar{a}_l,\dots,\bar{a}_l,\dots,\bar{a}_n$ lin.onafhankelijk zijn.
2. $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n$ zijn lineair onafhankelijk dan en slechts dan, als $\bar{a}_1,\dots,\alpha\,\bar{a}_k,\dots,\bar{a}_n$ lineair onafhankelijk zijn. ($\alpha \neq 0$).

Door herhaalde toepassing van de beide stellingen kan het onderzoek naar lineaire(on)afhankelijkheid van een stelsel vectoren herleid worden tot het onderzoek van een ander eenvoudiger stelsel. Het systematisch uitvoeren van dit procédé heet "schoonvegen".
Het is een eliminatieproces, waar we later op terugkomen, en dat we hier aan een enkel voorbeeld toelichten:

Vb. Zijn $\bar{a}= (-1,1,1)$, $\bar{b}= (1,2,3)$, $\bar{c}=(5,1,3)$ lineair afhankelijk?
Passen we het schoonveegprocédé toe op deze 3 vectoren, dan schrijven we de vectoren onder elkaar en vegen de tweede kolom gevormd door het tweede kental van elke vector, schoon:

$$\left.\begin{aligned}\bar{a} &= (-1,1,1)\\ \bar{b} &= (1,2,3)\\ \bar{c} &= (5,1,3)\end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned}\bar{a} &=(-1,1,1)\\ b-2\bar{a} &=(3,0,1)\\ \bar{c}-\bar{a} &=(6,0,2)\end{aligned}\right.$$

Nu blijkt $\bar{c} - \bar{a} = 2(\bar{b} - 2\bar{a})$, dus $3\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c}= \bar{0}$: De vectoren zijn lineair afhankelijk.

Opg.1 Bewijs door middel van "schoonvegen", dat de drie vectoren $\bar{a}=(1,2,3)$, $\bar{b}=(2,7,0)$ $\bar{c}=(1,2,-1)$ lineair onafhankelijk zijn.

Opg.2 Bewijs, dat de vectoren $\bar{a}=(7,8,0,0)$, $\bar{b}=(1,2,4,3)$, $\bar{c}=(1,-2,-4,-3)$, $\bar{d}=(0,0,4,3)$ lineair afhankelijk zijn.(Deze vier vectoren van R_4 liggen in een driedimensionale deelruimte(zie blz.50 ev.))

Tot nu toe hebben we optelling en scalaire vermenigvuldiging (met de rekenregels (1.1) t/m (1.8) van § 1) beschouwd bij

1. Vectoren in R_2.
2. Vectoren in R_3.
3. Rijtjes $(a_1,\dots,a_n)$ d.z. vectoren in R_n.

Er zijn nog andere systemen, waarin dezelfde rekenregels gelden, bv.

4. Alle veeltermen $f(x)= a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_n x^n$ van graad ≤n, bv. als $n = 4$ alle veeltermen van de vorm $a_o+ a_1 x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$.
5. Alle reële , alle continue of alle differentieerbare functies $f(x)$, $g(x)$, ... gedefinieerd op een zeker interval,

b.v. $[0,1]$.

6. Alle lineaire vormen in een zeker aantal variabelen n, bv. als n = 5: alle vormen van de gedaante $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5$. (zie ook blz.53 e.v.)
7. Alle rijtjes $(a_1,\ldots,a_n)$ met n een vast natuurlijk getal, die voldoen aan $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$. Optelling en scalaire vermenigvuldiging der rijtjes op de gewone wijze gedefinieerd.

Dit geeft aanleiding tot de volgende definities:

Lineaire ruimte: een verzameling van elementen(objecten, overdrachtelijk vectoren genaamd) heet een lineaire ruimte, als optelling en scalaire vermenigvuldiging er gedefinieerd zijn, en voldoen aan de regels (1.1) t/m 1.8) van §1.

Opm. Dit betekent: Van elk tweetal elementen behoort de som tot de verzameling, terwijl dit eveneens het geval is met ieder element, dat gevormd wordt door vermenigvuldiging van een willekeurig element van de verzameling met een getal λ. Bovengenoemde voorbeelden onder 1. t/m 7. zijn lineaire ruimten (bewijs dit).

Vectorruimte: Een lineaire ruimte (niet uitsluitend bestaande uit de nulvector) heet een eindig-dimensionale vectorruimte (hier kortweg vectorruimte genoemd) als er een eindig aantal vectoren is aan te geven, waarvan alle andere vectoren lineair afhankelijk zijn. Zo'n eindig stelsel vectoren heet een basis voor de vectorruimte.

Opm. We beperken ons tot vectorruimten met eindige dimensie. Er zijn leerboeken, waarin men het begrip basis definieert, uitgaande van een stelsel lineair onafhankelijke vectoren, waardoor dus elke basis per definitie lineair onafhankelijk is. Volgens onze definitie hoeft een basis niet noodzakelijk lineair onafhankelijk te zijn (zie opg. 2 onder).

Opg.1 Bewijs, dat R_n een vectorruimte is.(de grondvectoren $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$ vormen een basis.)

Opg.2 In R_3 vormen $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ en $\bar{e}_3$ een basis, doch bv. $\bar{e}_1, \bar{0}, \bar{e}_3, \bar{e}_2+\bar{e}_3$ ook. Bewijs dit.

Opg.3 Is $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_k$ een basis, en is elk van deze k vectoren lineair afhankelijk van de l vectoren $\bar{w}_1,\ldots,\bar{w}_l$, dan is $\bar{w}_1,\ldots,\bar{w}_l$ ook een basis. Bewijs dit.

Opg.4 Bepaal in R_5 een basis voor het hypervlak (zie blz. 42):
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0$.

STELLING 3.1 (Uitwisselingsstelling van Steinitz)

Is in een vectorruimte $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_p$ een basis en zijn $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_q$ lineair onafhankelijk, dan is $q \leqslant p$ terwijl er een basis is te vinden, bestaande uit $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_q$ en $p - q$ der basisvectoren $\bar{b}_1$ t/m $\bar{b}_p$.

Bewijs: $p \geqslant 1$ en vast. Volledige inductie naar q. $q \geqslant 1$ (anders niets te bewijzen).
$\bar{v}_1 = \lambda_1 \bar{b}_1 + \ldots + \lambda_p \bar{b}_p$ (want $\bar{b}_1,\ldots\bar{b}_p$ een basis);
$\bar{v}_1 \neq \bar{0}$ (volgens eigenschap 2 blz. 44); er is dus minstens één λ (bv. $\lambda_1) \neq 0$, dan $\bar{b}_1 = \frac{1}{\lambda_1}\bar{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\bar{b}_2 - \ldots - \frac{\lambda_p}{\lambda_1}\bar{b}_p$, zodat $\bar{v}_1, \bar{b}_2,\ldots,\bar{b}_p$ een basis is (vgl.opg.3,blz.46;uitwisseling van $\bar{b}_1$ tegen $\bar{v}_1$).
Stel het bewijs is geleverd voor $q = q - 1$, dus $q - 1 \leqslant p$ en $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_{q-1},\bar{b}_q,\ldots,\bar{b}_p$ is een basis ($\bar{b}$'s eventueel opnieuw genummerd). $\bar{v}_q$ is dus in deze vectoren uit te drukken, doch niet in $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_{q-1}$ wegens de lineaire onafhankelijkheid der $\bar{v}$'s. In de zojuist genoemde basis komt dus minstens één vector $\bar{b}$ voor, dus $q \leqslant p$.
$\bar{v}_q = \mu_1\bar{v}_1 + \ldots + \mu_{q-1}\bar{v}_{q-1} + \lambda_q\bar{b}_q + \ldots + \lambda_p\bar{b}_p$; niet alle λ's zijn 0, bv. $\lambda_q \neq 0$. Nu is $\bar{b}_q$ in $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_q, \bar{b}_{q+1},\ldots,\bar{b}_p$ uit te drukken. Deze vormen dus een basis. Hiermede is het bewijs geleverd.

Een lineair onafhankelijke basis is een basis $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_p$, waarbij $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_p$ lineair onafhankelijk zijn.

STELLING 3.2

Als in een vectorruimte een basis $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_p$ niet lineair onafhankelijk is, kunnen we er een lineair onafhankelijke basis van maken, door een aantal $\bar{b}$'s weg te laten.
Bewijs: Schrap een $\bar{b}$ als hij lineair afhankelijk is van de overigen; hetgeen overblijft is nog een basis (vgl. opg. 3 blz. 46). Ga door tot er niets meer te schrappen valt. (schrap steeds één $\bar{b}$ tegelijk!)
Gevolg: In elke vectorruimte bestaat minstens één lineair onafhankelijke basis.

STELLING 3.3

Is $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_p$ een lineair onafhankelijke basis van een vectorruimte, dan is elke vector van deze ruimte op één en slechts één manier te schrijven als een lineaire combinatie van deze $\bar{b}$'s.
Bewijs: Is $\bar{a} = \lambda_1\bar{b}_1 + \ldots + \lambda_p\bar{b}_p = \mu_1\bar{b}_1 + \ldots + \mu_p\bar{b}_p$, dan is dus ook $(\lambda_1 - \mu_1)\bar{b}_1 + \ldots + (\lambda_p - \mu_p)\bar{b}_p = \bar{0}$ en omdat de $\bar{b}$'s lineair onafhankelijk zijn dus: $\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_p = \mu_p$.

STELLING 3.4

Vormen zowel $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$ als $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_k$ een lineair onafhankelijke basis, dan is $n = k$.
Bewijs: Volgens de stelling van Steinitz is $n \leqslant k$, doch ook $k \leqslant n$ en dus $n = k$.

Het aantal vectoren van een lineair onafhankelijke basis van een vectorruimte hangt dus niet af van de keuze van de basis. Dit aantal heet de dimensie van de vectorruimte. Deze dimensie geeft dus aan het maximale aantal vectoren van de vectorruimte dat lineair onafhankelijk is.
Een n-dimensionale vectorruimte duiden we aan met R_n. Kies in een R_n een lineair onafhankelijke basis, bestaande uit de n basisvectoren $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$. Elke vector $\bar{a}$ is een lineaire combinatie van $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$: $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + \ldots + a_n\bar{e}_n$.
De getallen $a_1,\ldots a_n$ zijn (t.o.v. de beschouwde basis) de kentallen(of coördinaten)van $\bar{a}$; de vectoren $a_1\bar{e}_1,\ldots,a_n\bar{e}_n$ heten de componenten van $\bar{a}$. We kunnen dus met betrekking tot deze basis schrijven: $\bar{a} = (a_1,\ldots,a_n)$; $\bar{e}_1 = (1,0,\ldots,0),\ldots,$ $\bar{e}_n = (0,\ldots,0,1)$.
Conclusie: de beschouwde n-dimensionale vectorruimte is dus in wezen volkomen identiek met de eertijds (op blz. 42) gedefinieerde ruimte R_n. (we hebben dan ook geen onderscheid in de naamsaanduiding gemaakt).

STELLING 3.5

Zijn in R_n de vectoren $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n$ lineair onafhankelijk, dan vormen ze een (l.o.)basis.
Bewijs: Ga uit van een (l.o.)basis $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$ en wissel uit.

STELLING 3.6

Elk $(n + 1)$-tal vectoren $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{n+1}$ in R_n is lineair afhankelijk. (Volgens eig.1 blz. 44) geldt deze stelling dan voor elk aantal vectoren $p > n$; zie ook stelling 1.4 blz. 3).

Bewijs: volgens de stelling van Steinitz zou lineaire afhankelijkheid voeren tot $n + 1 \leq n$.

Beschouwen we in R_n de k vectoren $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$, dan kunnen zich dus de volgende gevallen voordoen:

1. $k > n$: stelsel lin.afh. volgens stelling 3.6. Het kan een basis zijn, doch dit hoeft niet.
2. $k = n$ en de $\bar{v}$'s lin.onafh.: stelsel een lin.onafh.basis volgens stelling 3.5.
3. $k = n$ en de $\bar{v}$'s lin.afh.: stelsel geen basis
d. $k < n$: stelsel geen basis

$\left.\right\}$ op grond van stelling 3.2 en 3.4 .

STELLING 3.7

Een (niet uitsluitend uit $\bar{0}$ bestaande) lineaire ruimte is dan en slechts dan een vectorruimte, als er een getal m bestaat, zó dat elk m-tal vectoren lineair afhankelijk is.

Bewijs:

1. "dan" (voldoende voorwaarde): Laat elk m-tal vectoren lineair afhankelijk zijn. Stel, dat er geen basis bestaat, dan is er bij <u>elk</u> aantal vectoren een nieuwe vector te vinden, die van de vorigen niet lineair afhankelijk is. Op deze wijze echter kunnen we (volgens eig. 5 blz. 44) m lineair onafhankelijke vectoren vinden.
2. "slechts dan" (noodzakelijke voorwaarde): Laat de ruimte een vectorruimte zijn van dimensie n; kies nu $m = n + 1$ en pas stelling 3.6 toe.

Opg.1 Bewijs, dat de verzamelingen in voorbeelden 4., 6. en 7. van blz.45 en 46 resp. kunnen worden opgevat als een R_{n+1} , R_n en een R_{n-1}. Geef van elk dezer ruimten een basis aan.

Opg.2 Bewijs, dat de ruimten uit voorbeeld 5. wel lineaire ruimten zijn, doch geen vectorruimten (aanwijzing: $1, x, x^2, \ldots, \ldots$ lineair onafhankelijk).

Opg.3 Gegeven in R_3 de 4 vectoren $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ en $\bar{v}_4$; $\bar{v}_1$ en $\bar{v}_2$ lineair onafhankelijk, evenzo $\bar{v}_3$ en $\bar{v}_4$. Bewijs, dat er een vector $\bar{w} \neq \bar{0}$ moet bestaan, die lineair afhangt van $\bar{v}_1$ en $\bar{v}_2$, en evenzo tegelijk van $\bar{v}_3$ en $\bar{v}_4$.

Opg.4 In R_n zijn n + k vectoren gegeven. Dan zijn er hieronder k te vinden, waarvan elke lineair afhangt van de n overige. Bewijs dit (zie bewijs van stelling 3.2).

Deelruimten. (Een (niet uitsluitend uit de nulvector bestaande) deelverzameling van R_n met de eigenschap, dat tegelijk met $\bar{v}$ en $\bar{w}$ ook steeds $\bar{v} + \bar{w}$ en $\lambda\bar{v}$ (voor iedere λ) tot de deelverzameling behoort, heet een <u>lineaire deelruimte</u> van R_n(dikwijls eenvoudig "deelruimte" genoemd).

Opg. Bewijs, dat deze deelruimte weer een vectorruimte is. (we kunnen dus spreken van "dimensie" van de deelruimte).

Vb. 1. Een rechte of plat vlak door 0 in een R_3 is een (1, resp. 2-dimensionale) deelruimte van R_3, (een R_1, resp. R_2).
Een rechte of plat vlak in R_3, niet door 0 gaande, vormt volgens bovenstaande definitie geen deelruimte van R_3.

2. Voorbeeld 7. blz. 46 is een deelruimte R_{n-1} van R_n. (elke lineaire deelruimte R_{n-1} van R_n vormt een door 0 gaand hypervlak in R_n (zie blz. 42)).

STELLING 3.8

Is R_k een k-dimensionale deelruimte van R_n, dan is $k \leq n$; als k = n, vult R_k de gehele R_n op.

Bewijs: Een basis voor R_n is ook een basis voor R_k, dus uitgesloten is $k > n$, zodat $k \leq n$. Alleen als k = n, liggen in R_k n lineair onafhankelijke vectoren, die dan ook een basis voor R_n vormen. Alle vectoren van R_n liggen dus ook in R_k en omgekeerd, zodat R_k en R_n dan identiek zijn. (we hebben dan niet met een eigenlijke deelruimte te maken).

STELLING 3.9

Is R_k een deelruimte van R_n, dan heeft R_n een basis $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_k$, $\bar{v}_{k+1},\ldots,\bar{v}_n$, zó, dat $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_k$ een basis voor R_k vormt.

Bewijs: Kies een basis $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_k$ voor R_k. Deze basis is lineair onafhankelijk. Neem nu een basis $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n$ voor R_n en pas de stelling van Steinitz toe voor uitwisseling.

Zijn $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p$ p(desnoods lineair afhankelijke)vectoren in R_n, dan vormt de verzameling van al hun lineaire combinaties een deelruimte. We spreken dan van <u>de door $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p$ bepaalde deelruimte</u> of van <u>de door $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p$ opgespannen deelruimte</u>.

STELLING 3.10

De in R_n door de vectoren $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p$ opgespannen deelruimte heeft een lineair onafhankelijke basis, bestaande uit een aantal van deze $\bar{v}$'s. De dimensie van deze deelruimte (die ook vectorruimte is) is gelijk aan het maximale aantal vectoren van $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p$, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt.
(Als $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p$ lineair onafhankelijk zijn, dan is de dimensie van de opgespannen deelruimte juist gelijk aan p).
Bewijs: $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p$ vormen een basis voor de deelruimte. Pas dan Stelling 3.2 toe. Het overige deel van de stelling volgt hieruit, dat er niet meer onafhankelijke $\bar{v}$'s kunnen bestaan dan de dimensie bedraagt.

Vb. In R_3 is de verzameling vectoren $\bar{x}=\lambda\bar{u}$ een deelruimte van dimensie1; de verzameling $\bar{x} = \lambda\bar{v} + \mu\bar{w}$ een deelruimte van dimensie 2 (§ 1; $\bar{u}$,$\bar{v}$ en $\bar{w}$ vaste vectoren,λ en μ variabele getallen (parameters)).

Opg.Bewijs, dat de vectoren $\bar{a} = (3,2,3,5)$, $\bar{b}=(2,-1,4,7)$, $\bar{c}=(5,8,1,1)$ en $\bar{d} =(6,11,0,-1)$ in een deelruimte van R_4 liggen van dimensie 2.

Twee stelsels vectoren heten <u>equivalent</u>, als zij dezelfde deelruimte opspannen. De volgende twee stellingen laten zich eenvoudig bewijzen (vgl. de beide eigenschappen 1. en 2. blz. 45).

STELLING 3.11

Als in R_n $\bar{v}_k$ een willekeurige vector uit gegeven vectoren $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p$ is, dan is voor $\lambda \neq 0$ de deelruimte bepaald door $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_k,\ldots,\bar{v}_p$, identiek met de deelruimte bepaald door $\bar{v}_1,\ldots,\lambda\bar{v}_k,\ldots,\bar{v}_p$(de twee stelsels vectoren zijn equivalent).

STELLING 3.12

Als in R_n de vectoren $\bar{v}_k$ en $\bar{v}_l$ twee willekeurige vectoren zijn uit de gegeven vectoren $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p$,dan is de deelruimte bepaald door $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_k,\ldots,\bar{v}_l,\ldots,\bar{v}_p$ identiek met de deelruimte bepaald door $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_k + \bar{v}_l,\ldots,\bar{v}_l,\ldots,\bar{v}_p$, en dus wegens de vorige stelling ook identiek met de deelruimte bepaald door $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_k + \lambda\bar{v}_l,\ldots,\bar{v}_l,\ldots,\bar{v}_p$. (de genoemde stelsels vectoren zijn equivalent).

Men maakt van deze beide stellingen dikwijls een systematisch gebruik bij de bepaling van de dimensie van en een lineair onafhankelijke basis voor een lineaire deelruimte, als deze deelruimte is vastgelegd door middel van een stelsel vectoren, dat men wenst te transformeren in een eenvoudiger equivalent stelsel vectoren (een "schoonveeg" proces, zie Vb. blz. 45, 53 en blz. 55).

Opg.1 Bewijs, dat het stelsel $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}\}$ met $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ en $\bar{d}$ de vectoren uit de opgave op blz. equivalent is met het stelsel $\{\bar{a}-3\bar{c}, \bar{b}-4\bar{c}, \bar{c}, \bar{d}\}$ en ook equivalent met het stelsel $\{\bar{c}, \bar{d}\}$.
We schrijven de equivalentie wel als volgt:
$\{\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}\} \sim \{\bar{a}-3\bar{c}, \bar{b}-4\bar{c}, \bar{c},\bar{d}\} \sim \{\bar{c},\bar{d}\}$.

Opg.2 U is de deelruimte, die opgespannen wordt door de vectoren $\bar{a}=(1,2,3)$, $\bar{b}=(1,-1,2)$ en $\bar{c}=(2,7,7)$.
1. Bepaal de dimensie van U.
2. Stel een lineair onafhankelijke basis voor U op.
3. Druk elk der vectoren $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$ uit in deze basis.

Opg.3 Gegeven zijn de vectoren:
$\bar{a}=(2,0,1,1)$, $\bar{b}=(3,-1,0,2)$, $\bar{c}=(-1,1,1,3)$ en $\bar{d}=(1,3,5,15)$.
1. Bewijs, dat $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$ lineair onafhankelijk zijn.
2. Druk $\bar{d}$ uit in $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$.
3. Schrijf alle vectoren op van de deelruimte, opgespannen door $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$.
4. Geef een voorbeeld van een vector in R_4, die niet in de onder 3. genoemde deelruimte ligt.

Opg.4 Gegeven zijn de vectoren:
$\bar{a}=(1,0,2,0)$, $\bar{b}=(2,1,0,0)$, $\bar{c}=(2,1,1,0)$, $\bar{d}=(0,1,2,3)$.
1. Bewijs, dat $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ en $\bar{d}$ een lineair onafhankelijke basis voor R_4 vormen.
2. Druk $\bar{v}=(6,3,2,0)$ uit in deze basis.

3. Vorm een lineair onafhankelijke basis voor R_4, bestaande uit $\bar{v}$ en drie der vectoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ en $\bar{d}$.

Lineaire vormen

Beschouwen we bv. alle lineaire vormen in n variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$, dan vormen deze een vectorruimte, want als $L \equiv a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ en $M \equiv b_1x_1 + \dots + b_nx_n$ er toe behoren, dan zijn $L + M \equiv (a_1 + b_1)x_1 + \dots + (a_n + b_n)x_n$ en $\lambda L \equiv \lambda a_1x_1 + \dots + \lambda a_nx_n$ weer lineaire vormen in de n variabelen en behoren dus eveneens tot de verzameling (vgl. ook Vb.6 , blz. 46). Een lineair onafhankelijke basis wordt gevormd door de vormen $x_1, x_2, \dots, x_n$. De gebruikelijke rekenregels gelden voor deze lineaire vormen. De theorie der vectorruimten, bv. datgene wat in verband staat met lineaire afhankelijkheid, kan hier zonder meer worden toegepast. Zo is bv. direct te zien, dat de lineaire vormen

$$\begin{cases} L_1 \equiv 3x + 4y - z \\ L_2 \equiv x + 5y + 2z \\ L_3 \equiv 2x - y - 3z \end{cases}$$

afhankelijk zijn, aangezien $L_1 - L_2 - L_3 \equiv 0$.

De geldigheid van de volgende stelling stelt ons in staat tot"schoonvegen".

STELLING 3.13

L_1, L_2, L_3 lineair onafh. $\longleftrightarrow$ $L_1 + L_2, L_2, L_3$ **lin.onafh.**

als $\alpha \neq 0$:

L_1, L_2, L_3 lineair onafh. $\longleftrightarrow$ $\alpha L_1, L_2, L_3$ lineair onafh.

Vb. De volgende twee stelsels lineaire vormen zijn volgens deze stelling òf beide afhankelijk, òf beide onafhankelijk. We zien gemakkelijk in, dat het tweede stelsel lineair afhankelijk is, dus het eerste stelsel is dat ook:

$$\begin{cases} L_1 \equiv -x + y + z \\ L_2 \equiv x + 2y + 3z \\ L_3 \equiv 5x + y + 3z \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} L_1 \equiv -x + y + z \\ L_2 - 2L_1 \equiv 3x \quad + z \\ L_3 - L_1 \equiv 6x \quad + 2z \end{cases}.$$

We zoeken een eenvoudiger stelsel lineaire vormen, dat met L_1, L_2, L_3 equivalent is. Daartoe behoeven we slechts de coëfficiënten der lineaire vormen in een schema te plaatsen en schoon te vegen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Het resultaat is dus het stelsel lineaire vormen $\begin{cases} -4x + y \\ 3x \quad + z \end{cases}$.

Het onderzoek komt eigenlijk neer op het zoeken van een eenvoudige lineair onafhankelijke basis voor de deelruimte, opgespannen door L_1, L_2 en L_3.

Opg. Geef een eenvoudig stelsel lineaire vormen equivalent met:

a) $L_1 \equiv x + 2y + 3z$, $L_2 \equiv 2x + 7y$, $L_3 \equiv x + 2y - z$.

b) $L_1 \equiv 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4$, $L_2 \equiv x_1 + 2x_2 - x_3$, $L_3 \equiv 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4$.

Speciale deelruimten, de begrippen doorsnede en vereniging.

Laat U en V twee lineaire deelruimten van R_n zijn.
We kunnen nu twee nieuwe ruimten aangeven:

1. De doorsnede D van U en V (notatie $D = U \cap V$), bestaande uit alle vectoren, die zowel tot U als tot V behoren (D is weer een lineaire deelvectorruimte van R_n).
2. De vereniging S van U en V (ook wel genoemd de door U en V opgespannen ruimte S, notatie $S = U \cup V$), bestaande uit alle vectoren, die te schrijven zijn als $\bar{u} + \bar{v}$, waarin $\bar{u}$ tot U en $\bar{v}$ tot V behoort. (S is de kleinste lineaire deelvectorruimte van R_n, die zowel U als V bevat).

De volgende belangrijke betrekking bestaat tussen de dimensies:

STELLING 3.14

Zijn U en V twee lineaire deelruimten van R_n en D resp. S de doorsnede resp. de vereniging van U en V, dan geldt
$\dim U + \dim V = \dim D + \dim S$.

Bewijs: Kies een lineair onafhankelijke basis $\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_k$ voor D. Vul die enerzijds aan (stelling 3.9) tot een lineair onafhankelijke basis voor U:
$\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_k, \bar{u}_{k+1}, \ldots, \bar{u}_l$; anderzijds tot een lineair onafhankelijke basis voor V:
$\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_k, \bar{v}_{k+1}, \ldots, \bar{v}_m$.
Daar elke vector uit S van de vorm $\bar{u} + \bar{v}$ is, is $\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_k$, $\bar{u}_{k+1}, \ldots, \bar{u}_l, \bar{v}_{k+1}, \ldots, \bar{v}_m$ een basis voor S. Deze basis is lineair onafhankelijk.

Onderstel nl. het volgende verband tussen de vectoren $\bar{d}$, $\bar{u}$ en $\bar{v}$:
$\gamma_1 \bar{d}_1 + \ldots + \gamma_k \bar{d}_k + \lambda_{k+1} \bar{u}_{k+1} + \ldots + \lambda_l \bar{u}_l =$
$\mu_{k+1} \bar{v}_{k+1} + \ldots + \mu_m \bar{v}_m$.
De vector gevormd door het rechterlid
is een vector van V, doch is ook wegens het linkerlid afhankelijk van de basis van U, en behoort dus tot U en V, en dus tot D. Dit betekent, dat deze vector afhankelijk is van de $\bar{d}$'s alleen, zodat $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_l = 0$, (Stelling 3.3).
Maar dan geldt: $\gamma_1 \bar{d}_1 + \ldots + \gamma_k \bar{d}_k = \mu_{k+1} \bar{v}_{k+1} + \ldots + \mu_m \bar{v}_m$,
hetgeen voert tot alle γ's en ook alle μ's 0, omdat de vectoren $\bar{d}$ met de vectoren $\bar{v}$ tezamen een lineair onafhankelijk stelsel vormen.
In het gegeven verband tussen de vectoren $\bar{d}$, $\bar{u}$ en $\bar{v}$ zijn alle coëfficiënten γ, λ en μ dus noodzakelijk 0, zodat deze vectoren een lineair onafhankelijk stelsel vormen. De genoemde basis voor S is dus lineair onafhankelijk, zodat dim S = $k + (l - k) + (m - k) = m + l - k$.
Verder was dim U = l, dim V = m, dim D = k, waaruit de betrekking tussen de dimensies direct volgt.
Opm. Het kan zijn, dat D slechts uit de nulvector bestaat. De stelling blijft dan doorgaan als we dan aan D de dimensie 0 toekennen.

Vb. Gegeven zijn in R_4 de vectoren:
$\bar{a} = (2,1,-3,-1)$, $\bar{b} = (3,2,-1,2)$, $\bar{c} = (1,2,3,1)$ en $\bar{d} = (2,2,-2,p)$,
alsmede de twee deelvectorruimten U en V, opgespannen door de vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$, resp. $\bar{c}$ en $\bar{d}$, resp. dus voor te stellen door:

$$U : \bar{x} = \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} \;; \quad V : \bar{x} = \mu_1 \bar{c} + \mu_2 \bar{d}.$$

Gevraagd wordt voor verschillende waarden van p de doorsnede $U \cap V$ en de vereniging $U \cup V$ te bepalen, alsmede van beide ruimten de dimensie en een lineair onafhankelijke basis.

Oplossing: Een basis (mogelijk lin. afhankelijk) voor $U \cup V$ wordt gevormd door de vectoren: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ en $\bar{d}$. De dimensie en een lineaire onafhankelijke basis voor $U \cup V$ kan uit het kentallenschema der vectoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ en $\bar{d}$ door herleiding (schoonvegen) eenvoudig als volgt worden afgeleid:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 9 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & p+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 7 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & p-6 \end{pmatrix}.$$

Voor $p \neq -3$ vormt dus $U \cup V$ de gehele R_4, de dimensie is dan dus 4. Een lineair onafhankelijke basis wordt bv. gevormd door de vectoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ en $\bar{d}$ met $p \neq -3$; voor $p = -3$ is de dimensie van $U \cup V$ gelijk aan 3. In dit laatste geval wordt een lineair onafhankelijke basis bv. gevormd door de vectoren: (0,1,7,7), (-1,0,5,4,) en (0,0,-6,-9) (of (0,0,2,3)).
Om $U \cap V$ te bepalen zoeken we naar alle vectoren $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ waarvan de kentallen voldoen aan:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\lambda_1 + 3\lambda_2 &&= \mu_1 + 2\mu_2 \\
x_2 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 &&= 2\mu_1 + 2\mu_2 \\
x_3 &= -3\lambda_1 - \lambda_2 &&= 3\mu_1 - 2\mu_2 \\
x_4 &= -\lambda_1 + 2\lambda_2 &&= \mu_1 + p\mu_2 \quad .
\end{aligned}$$

Eliminatie van λ_1 en λ_2 geeft 2 vergelijkingen waaraan μ_1 en μ_2 moeten voldoen, namelijk (na enig gereken):

$$\begin{aligned}
21\mu_1 + (18-p)\mu_2 &= 0 \\
21\mu_1 + (12-3p)\mu_2 &= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Is $p \neq -3$, dan voldoet alleen $\mu_1=\mu_2=0$; de doorsnede $U \cap V$ bestaat dan alleen uit de nulvector (volgt ook uit stelling 3.14, (zie ook opm. blz. 55), aangezien voor $p \neq -3$: $U \cup V$ een R_4 vormt). Voor $p = -3$ is $\mu_1 + \mu_2 = 0$. De doorsnede $U \cap V$ bestaat dan dus uit de vectoren $\bar{x} = \mu(-1,0,5,4)$: dim. 1, basis (-1,0,5,4). Zoals boven gezien is voor $p = -3$ de vereniging van U en V 3-dimensionaal. Ook in dit geval dus overeenstemming met stelling 3.14 (2 + 2 = 1 + 3).

Opg.1 De deelruimte U wordt opgespannen door:
$\bar{a} = (0,2,3,-1)$, $\bar{b} = (0,2,7,-2)$ en $\bar{c} = (0,-2,1,0)$.
De deelruimte V wordt opgespannen door:
$\bar{p} = (1,2,0,1)$ en $\bar{q} = (2,2,1,2)$.
Bepaal de dimensie van en een lineair onafhankelijke basis voor de doorsnede $U \cap V$.

Opg.2 Wat vormen de volgende vectoren:
1. $\bar{x} = \lambda(1,2,3,4) + \mu(2,-1,0,2) + \nu(4,-3,-1,-1)$
2. $\bar{x} = \lambda(1,2,3,4) + \mu(2,-1,0,2) + \nu(-1,8,9,8)$
3. $\bar{x} = (1,7,0,2) + \lambda(2,5,1,13) + \mu(4,7,5,17) + \nu(-1,2,-5,7)$

met λ, μ en ν veranderlijk in R_4? (zie blz. 42).

Opg.3 In R_4 wordt de deelruimte U opgespannen door de vectoren $\bar{a} = (0,1,2,3)$ en $\bar{b} = (2,-1,0,-3)$;
de deelruimte V door $\bar{p} = (1,-1,-1,5)$, $\bar{q} = (0,1,2,-5)$ en $\bar{r} = (4,-1,2,5)$.

1. Stel een lineair onafhankelijke basis op voor U en V.
2. Doe dit tevens voor de vereniging $U \cup V$ en de doorsnede $U \cap V$.

---

§ 4. Lineaire vector-transformaties (I)

Def.: Een stelsel betrekkingen van de vorm

$$(4.1)\quad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

heet een homogene lineaire (m,n)-transformatie. (I.p.v. "transformatie" spreekt men vaak van "afbeelding"; het woord "homogene" wordt dikwijls weggelaten; men spreekt dan van lineaire (vector)transformaties).

Verkorte schrijfwijze van (4.1):

$$(4.2)\quad y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \qquad (i = 1, \dots, m).$$

(4.1) voegt aan iedere n-vector $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ een m-vector $(y_1, \dots, y_m)$ als beeldvector toe. Deze transformatie is volledig bepaald door de m n getallen $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ of, indien we deze getallen rangschikken in een schema van m rijen en n kolommen door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

./.

Deze matrix met m rijen en n kolommen heet een (m, n)-matrix; de getallen a_{11}, ..., a_{mn} zijn elementen van de matrix.

Opm.: Aan (4.1) kan ook een andere interpretatie worden gegeven: Laat in een R_m de n vectoren

$\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})$

$\bar{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})$

.

.

.

$\bar{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$

benevens de vector

$\bar{y} = (y_1, \ldots, y_m)$

gegeven zijn, en laat $\bar{y}$ een lineaire combinatie van $\bar{a}_1$, ..., $\bar{a}_n$ zijn, dan zijn er n getallen x_1, ..., x_n te vinden, zodanig, dat

$$\bar{y} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_n\bar{a}_n \ . \tag{4.3}$$

Deze vergelijking, uitgeschreven in de kentallen, is identiek met het stelsel lineaire vergelijkingen (4.1). Zijn omgekeerd de vectoren $\bar{a}_1$, ..., $\bar{a}_n$ gegeven, dan kan men zich afvragen of de vector $\bar{y}$ een lineaire combinatie van deze vectoren is. Men vraagt dan dus of er getallen x_1, ..., x_n bestaan, zodanig, dat aan (4.1) voldaan is, m.a.w. of die m vergelijkingen met n onbekenden x_1, ..., x_n, die in (4.1) staan opgesomd, één of meer oplossingen toelaten. Een oplossing kan men opvatten als een oplossingsvector $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ in een R_n. De theorie der lineaire vergelijkingen volgt later.

Zoals gezien, is de homogene lineaire (m,n),-transformatie (4.1) volkomen bepaald door de matrix A. Ook omgekeerd geldt:

./.

Stelling 4.1: Hebben twee homogene lineaire (m,n)-transformaties de eigenschap, dat iedere vector $\bar{x}$ bij beide dezelfde beeldvector $\bar{y}$ oplevert, dan hebben zij dezelfde matrix (m.a.w. de matrix is door de transformatie bepaald).

Voor het bewijs van deze stelling is het voldoende om de beeldvectoren van de n grondvectoren in R_n te beschouwen. Deze laatste geven getransformeerd n vectoren van ieder m kentallen. Deze m$\times$n getallen, geplaatst in een schema van m rijen en n kolommen vormen juist de matrix, die bij de transformatie behoort. Omdat de beeldvectoren bepaald zijn, is dit met de matrix eveneens het geval.
De transformatie (4.1)kunnen we naast (4.2) ook met behulp van matrix-vectornotatie verkort als volgt weergeven (zie ook § 5):

(4.4) $\bar{y} = A\bar{x}$.

Wegens stelling 4.1 spreken we naast de matrix A ook van de lineaire transformatie (of afbeelding) A.

Opmerking: In (4.4) is $\bar{x}$ een n-vector en $\bar{y}$ een m-vector. Deze dimensies worden zonder meer bepaald door de afmetingen van A. Overal daar waar geen misverstand kan optreden omtrent de dimensie van vectoren uit verschillende ruimten, zoals bijv. in (4.4), zullen we van een onderscheid in notatie van deze vectoren, in het algemeen afzien.

Gemakkelijk is in te zien, dat de volgende eigenschappen gelden:

(I) $A(\bar{p} + \bar{q}) = A\bar{p} + A\bar{q}$

(II) $A(c\bar{x}) = cA(\bar{x})$. c = scalar.

Deze eigenschappen (I) en (II) karakteriseren een homogene lineaire transformatie volkomens blijkens:

Stelling 4.2: Een transformatie T, die iedere n-vector in een m-vector overvoert en de eigenschappen (I) en (II)

./.

heeft (dus steeds $T(\bar{p} + \bar{q}) = T\bar{p} + T\bar{q}$ en $T(c\bar{x}) = cT(\bar{x})$), is een homogene lineaire transformatie.

Bewijs: Stel de basisvectoren $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ worden overgevoerd in resp. $\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})$, $\bar{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})$, $\ldots$, $\bar{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$. Een vector $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n$ wordt dan overgevoerd in:

$$\begin{aligned}\bar{y} = T\bar{x} = T(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n) &= \\ x_1T\bar{e}_1 + x_2T\bar{e}_2 + \ldots + x_nT\bar{e}_n &= \\ x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_n\bar{a}_n,&\end{aligned}$$

dus de vergelijking (4.3), die identiek is met het stelsel (4.1), dat per definitie een homogene lineaire transformatie voorstelt.

We kunnen dus ook een lineaire transformatie (afbeelding) kenschetsen als een transformatie (afbeelding) met de eigenschappen (I) en (II).

Een ander eenvoudig te bewijzen gevolg van de eigenschappen (I) en (II) is:

Stelling 4.3: Een homogene lineaire transformatie laat alle betrekkingen van lineaire afhankelijkheid tussen vectoren bestaan.

Opmerking: Deze stelling is niet algemeen geldig als men in deze stelling "afhankelijk" door "onafhankelijk" vervangt, bijv. als $\bar{y} = A\bar{x}$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Toepassing van A op de lin. onafh. basisvectoren (1,0) en 0,1) geeft de afhankelijke beeldvectoren: (1,2) en 2,4). Later zullen we zien, dat bij bijzonder soort matrices, nl. de niet-singuliere matrices, lineair onafhankelijke vectoren in lineair onafhankelijke beelvectoren worden overgevoerd (zie stelling 5.3).

./.

Is naast de homogene lineaire (m, n)-transformatie A een transformatie B van hetzelfde type gegeven, dan geldt als

$\bar{y}_1 = A\bar{x}$ en $\bar{y}_2 = B\bar{x}$: $\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = A\bar{x} + B\bar{x}$.

Stellen we $\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = C\bar{x}$, dan geldt in verband met stelling 4.1 dus

$$(4.5) \quad c_{hk} = a_{hk} + b_{hk} \qquad (h = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n),$$

waarbij c_{hk} het element uit de h^e rij en k^e kolom is van de matrix C, behorende bij de transformatie C, die $\bar{x}$ in $\bar{y}_1+\bar{y}_2$ overvoert.

Def.: De transformatie C heet de somtransformatie van A en B.

Elk element c_{hk} van de matrix C wordt volgens (4.5) berekend door de som te nemen van de overeenkomstige elementen a_{hk} en b_{hk} van de matrices A en B. We schrijven $C = A + B$.

Naast het begrip "somtransformatie" definiëren we ook het begrip "producttransformatie". Beschouw hiertoe de transformatie (4.1) en daarnaast nog een (p, m)-transformatie, die de m-vector $\bar{y}$ in de p-vector $\bar{z}$ overvoert.
We stellen de (m, n)-transformatie, die $\bar{x}$ in $\bar{y}$ overvoert, voor door (4.2), resp. (4.4):

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad (i = 1, \ldots, m),\ \bar{y} = A\bar{x}.$$

De (p, m)-transformatie, die $\bar{y}$ in $\bar{z}$ overvoert, wordt voorgesteld door:

$$z_h = \sum_{i=1}^{m} b_{hi}y_i \quad (h = 1, \ldots, p),\ \bar{z} = B\bar{y}.$$

Dan kunnen we $\bar{z}$ in $\bar{x}$ uitdrukken door substitutie:

$$z_h = \sum_{i=1}^{m} b_{hi}y_i = \sum_{i=1}^{m} b_{hi}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{hi}a_{ik}x_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{hi}a_{ik}\right) x_k \quad (h=1, \ldots, p).$$

./.

Stellen we $z_h = \sum_{k=1}^{n} c_{hk} x_k$, $\bar{z} = C\bar{x}$, dan geldt in verband met stelling 4.1:

$$(4.6) \quad c_{hk} = \sum_{i=1}^{m} b_{hi} a_{ik} \qquad (h = 1, \ldots, p;\ k = 1, \ldots, n).$$

Def.: De transformatie C heet de producttransformatie van B en A (let op de volgorde: eerst A en dan B toepassen op het object).

Elk element c_{hk} van de matrix C wordt volgens (4.6) berekend door ieder element uit de h^e rij van de matrix B te vermenigvuldigen met het overeenkomstige element uit de k^e kolom van de matrix A en de zo verkregen producten op te tellen. (Men drukt dit kort uit door te zeggen, dat c_{hk} het inwendig product (of scalair product) is van de h-de rij van B en de k-de kolom van A (zie blz. 23, 70)).
We schrijven C = BA.

Def.: Zij A een homogene lineaire transformatie van R in R'.
Het beeld (of beeldruimte) van de transformatie (of: het beeld van R bij A) is de verzameling van alle vectoren, die op tenminste één manier als $A(\bar{v})$ kunnen worden geschreven, waarbij $\bar{v}$ tot R behoort. (Een dergelijke verzameling kan men voorstellen door $\{ A(\bar{v}) \mid \bar{v} \in R \}$, $\in$ betekent hier "behoort tot").
De kern (of nulruimte) van de transformatie is de verzameling van alle $\bar{v} \in R$ met $A(\bar{v}) = \bar{0}$ (dus de verzameling $\{ \bar{v} \mid \bar{v} \in R \text{ en } A(\bar{v}) = \bar{0} \}$).

Zonder bewijs zij hier nog de volgende stelling gegeven:

Stelling 4.4: Bij een lineaire transformatie (afbeelding) van R in R' zijn beeld en kern lineaire deelruimten van R', resp. R, en de som van hun dimensies is de dimensie van R.

./.

Opgaven.

1) Gegeven is in R_2 de homogene lineaire transformatie $\bar{x}' = A\bar{x}$, waarbij $A(1,0) = (2,1)$ en $A(0,1) = (-1,3)$.
Gevraagd: $A(2,0)$, $A(1,1)$ en $A(1,-2)$.

2) Van een homogene lineaire transformatie A in R_3 is gegeven, dat de basisvectoren $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ en $\bar{e}_3$ overgevoerd worden in resp.:
$A\bar{e}_1 = (2,1,3)$, $A\,\bar{e}_2 = (-1,2,1)$ en $A\,\bar{e}_3 = (-1,0,2)$.
   1) Bepaal de matrix A.
   2) Bepaal de beeldvector van $(1,1,1)$.
   3) Welke vector heeft als beeld $(0,3,6)$?
   4) Bepaal het beeld van de lijn gegeven in de parametervorm:
   $\bar{x} = (1,0,0) + \lambda(0,0,1)$.

3) Naast de transformatie A uit opgave 2) beschouwen we de homogene lineaire transformatie B, waarvan gegeven is:
$B(2,1,3) = (6,4,3)$, $B(-1,2,1) = (2,3,1)$, $B(-1,0,2) = (1,2,2)$.
   1) Bepaal de matrices B, BA en AB.
   2) Had BA ook zonder transformatievermenigvuldiging (vgl. (4.6)) direct opgeschreven kunnen worden?

4) In R_3 met $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ en $\bar{e}_3$ basisvectoren, voert een homogene lineaire transformatie deze vectoren over in resp. $(1,2,-2)$, $(2,1,2)$ en $(2,-2,-1)$.
Toon aan, dat elke vector in R_3 na transformatie 3 maal zo lang wordt. ($\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, zijn cartesische basisvectoren.)

5) Van een homogene lineaire transformatie in R_3 is gegeven, dat
$(1,1,0) \rightarrow (1,0,2)$
$(2,0,1) \rightarrow (3,1,2)$
$(1,-1,1) \rightarrow (2,1,0)$.
Waarom is de transformatie door deze gegevens niet bepaald?

6) Gegeven is in R_3 een homogene lineaire transformatie, waarbij de basisvectoren $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ en $\bar{e}_3$ resp. overgaan in $(1,2,4)$, $(-1,3,-5)$ en $(5,0,22)$.

./.

Bepaal:

1) Een lineair onafhankelijke basis voor de beeldruimte.
2) De dimensie van de beeldruimte.
3) Een lineair onafhankelijke basis voor de nulruimte.
4) De dimensie van de nulruimte.
5) De betrekking, die bestaat tussen de dimensies van de nulruimte en de beeldruimte.

7) Door de homogene lineaire transformatie met matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

wordt R_3 afgebeeld op een deelruimte van R_3.

Geef van deze beeldruimte:

1) Een lineair onafhankelijke basis.
2) De dimensie.
3) De vergelijking, waaraan de kentallen van de vectoren moeten voldoen.

§5. Matrices.

Zoals gezien in §4 verstaan wij onder een matrix A een rechthoekig blok van mn getallen $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Een dergelijke matrix heeft m rijvectoren of rijen en n kolomvectoren of kolommen, en wordt een (m,n)-matrix genoemd. De rijen worden van boven naar beneden, de kolommen van links naar rechts geteld als men de i^e rij ($i=1,\ldots,m$) of k^e kolom ($k=1,\ldots,n$) beschouwt. De afmeting m heet de kolomlengte, n de rijlengte van A. Als $m = n$ heet de matrix vierkant van de orde n; we spreken dan van een n-matrix. Een (m,n)-matrix heet van de orde m bij n.
De getallen a_{ij} ($i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$) noemt men de elementen van A. Men schrijft kortweg $A = (a_{ij})$.

Een (n,1)- resp. (1,n)-matrix (dus een matrix bestaande uit 1 kolom, resp. 1 rij) is te identificeren met een n-vector, en wordt genoemd een kolomvector (of kolom), resp. rijvector (of rij).

Een nulmatrix is een matrix, waarvan de elementen alle gelijk zijn aan nul. Deze matrix kan zowel vierkant als rechthoekig zijn. Is het een (m,n)-matrix, dan stellen we deze nulmatrix wel voor door $O_{m,n}$ (veelal worden de indices m en n ook weggelaten; de O wordt dan zowel gebruikt voor het getal O als voor de nulmatrix O; dit geeft i.h.a. geen aanleiding tot misverstand).

Twee matrices $A = (a_{ij})$ en $B = (b_{ij})$ heten gelijk als ze dezelfde kolom- en rijlengten hebben, en corresponderende elementen gelijk zijn, dus $A = B \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ voor alle in aanmerking komende waarden voor i en j.

De theorie der lineaire transformaties gegeven in § 4, geeft aanleiding tot de volgende definities van basisoperaties op vectoren en matrices: (zie ook de voorbeelden op blz. 67 en 68)

1) <u>Som:</u> Als $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,n$, dan is de (m,n)-matrix $C = (c_{ij})$ met $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,n$ per definitie de som van A en B: $C = A + B$ (vgl. (4.5)).

2) <u>Product:</u> Als $A = (a_{ij})$, $i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,n$ en $B = (b_{ij})$, $i = 1,\ldots,n$; $j = 1,\ldots,p$, dan is de (m,p)-matrix $C = (c_{ij})$ met

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \,, \quad i = 1,\ldots,m; \; j = 1,\ldots,p$$

per definitie het product van A en B : $C = AB$ (vgl. (4.6))
Als AB en BA beide gedefinieerd zijn (als $p = m$) en $AB = BA$, dan heet het product <u>commutatief</u>.[1]
<u>Opm.:</u> Uit de definitie van het matrix product AB volgt, dat dit product alleen dan gedefinieerd is, als het aantal kolommen van A gelijk is aan het aantal rijen van B (dus rijlengte van A = kolomlengte van B).

3) <u>Product van een matrix met een getal:</u>
Als $A = (a_{ij})$ en g een getal (scalar), dan wordt $gA = Ag = C = (c_{ij})$ gedefinieerd door $c_{ij} = ga_{ij}$ (vgl. (II) blz. 59).

<u>Opm.:</u> Hebben A en B dezelfde afmetingen, dan wordt $A - gB$ gedefinieerd door $A - gB = A + (-g)B$. Het rechterlid is dan gedefinieerd door achtereenvolgens de definities onder 3) en 1) toe te passen.

4) <u>Product van een matrix en een vector:</u>
a) Als $A = (a_{ij})$, $i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,n$ en $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, dan wordt $y = Ax$ gedefinieerd door

---

[1]) A en B moeten dan noodzakelijk beide vierkant zijn en van dezelfde orde.

./.

$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$, $i = 1,\ldots,m$ (vgl. (4.4) en (4.2)).
Vatten we x en y op als matrices van 1 kolom (orde n bij 1 resp. m bij 1), dan komt deze definitie overeen met de productdefinitie onder 2). Het product van een matrix met een kolom is een kolom: $(m,n)\times(n,1) = (m,1)$.

b) Als $A = (a_{ij})$, $i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,n$ en $y = (y_1,y_2,\ldots,y_m)$, dan wordt $z = yA$ gedefinieerd door

$$z_i = \sum_{k=1}^{m} y_k a_{ki}, \quad i = 1,\ldots,n .$$

Vatten we y en z op als matrices van 1 rij (orde 1 bij m resp. 1 bij n), dan komt deze definitie weer overeen met de productdefinitie onder 2). Het product van een rij met een matrix is een rij: $(1,m)\times(m,n) = (1,n)$.

5) Vectoroperaties: Als x, u en v n-vectoren voorstellen en g een scalar, dan wordt $x = u+v$ gedefinieerd door $x_i = u_i + v_i$, $i = 1,\ldots,n$ en $x = gu$ door $x_i = gu_i$, $i = 1,\ldots,n$ (bijzondere gevallen van 1) en 3) als x, u en v worden opgevat als matrices, bestaande uit 1 rij of 1 kolom).

Vb. ad 1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

ad 2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & -8 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 6 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$.

vb. niet commutativiteit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 26 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}.$$

./.

wel commutativiteit:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & bp \\ cp & cp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

ad 3) $-4\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 4 \\ -8 & 16 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -35 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -31 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

ad 4) a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$

b) $(4 \quad -2 \quad 1)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = (7 \quad -14).$

ad 5) zie §§ 1 - 3.

Uit voorgaande definities volgen de volgende rekenregels (5.1) t/m (5.12) voor matrix-operaties: (hierbij wordt verondersteld, dat de afmetingenvan de op elkaar opererende matrices zodanig zijn, dat de betreffende operaties een gedefinieerde betekenis hebben.)

(5.1) $A + B = B + A$ (optelling is commutatief)

(5.2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (optelling is associatief)

(5.3) $A + 0 = A$, 0 = nulmatrix.

A heeft een tegengestelde matrix $(-1)\cdot A$ of $-A$, met elementen tegengesteld aan de overeenkomstige van A, waarvoor (5.4).

(5.4) $A + (-1)A = 0$

(5.5) $(a\,b)A = a(bA)$ a en b scalairen

(5.6) $1.A = A$; $0.A = 0$ (links is 0 het getal 0, rechts een nulmatrix); $a.0 = 0$

./.

$$\left.\begin{array}{ll}(5.7) & a(A + B) = aA + aB \\ (5.8) & (a+b)A = aA + bA\end{array}\right\}\text{ distributieve eigenschappen.}$$

<u>Opm.:</u> Dat deze relaties (5.1) t/m (5.8) generalisaties zijn van (1.1) t/m (1.8) ziet men in door matrices met 1 rij of 1 kolom te beschouwen, die te identificeren zijn met vectoren.
Uit (5.1) t/m (5.8) volgt ook, dat de verzameling van alle (m,n)-matrices bij vaste m en n een lineaire ruimte vormen. Ze vormen zelfs een vectorruimte (Bewijs dit).

Het is duidelijk, dat voor iedere matrix A geldt OA = AO = O. Het product van twee matrices kan evenwel ook O zijn, zonder dat een van beide factoren O is. Dus behalve t.a.v. de commutativiteit (zie vb. ad 2) blz. 68) is er ook in dit opzicht afwijking met de gewone getallen-vermenigvuldiging.

<u>Vb.:</u> $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Geldt de commutativiteit dus in het algemeen niet, de associatieve wet voor matrix-vermenigvuldiging is wel steeds van kracht. Dit ziet men het gemakkelijkst met behulp van de homogene lineaire transformaties:

Laat A een (m,n)-matrix, B een (p,m)-matrix en C een (q,p)-matrix zijn, en verder $\bar{x}$ een willekeurige n-vector.
Zij $\bar{y} = A\bar{x}$, $\bar{z} = B\bar{y}$, $\bar{u} = C\bar{z}$.
Is CB = D, dan is $\bar{u} = CB\bar{y} = D\bar{y}$, dus $\bar{u} = DA\bar{x}$.
Is verder BA = F, dan is $\bar{z} = B\bar{y} = BA\bar{x} = F\bar{x}$, dus $\bar{u} = C\bar{z} = CF\bar{x}$, zodat $DA\bar{x} = CF\bar{x}$ voor iedere n-vector $\bar{x}$. Volgens stelling 4.1 geldt dan DA = CF of (CB)A = C(BA). Dit is de associatieve wet voor de vermenigvuldiging:

(5.9) (CB)A = C(BA) .

Zonder gevaar voor dubbelzinnigheid kunnen we voor beide leden van deze vergelijking dus schrijven CBA. Ook is nu

./.

het product van meer factoren ondubbelzinnig bepaald, bijv. $ABCDEF = A(BC)(DE)F = (AB)(CD)(EF)$ enz. Haakjes mogen dus op willekeurige plaatsen in een product worden ingezet.

Verder gelden nog de volgende eigenschappen:

(5.10) $(aA)B = A(aB) = a(AB)$

$$\left.\begin{array}{ll} (5.11) & A(B+C) = AB + AC \\ (5.12) & (B+C)A = BA + CA \end{array}\right\} \text{ distributieve eigenschappen.}$$

Nog enkele algemene begrippen.

a) Zoals gezien zijn vectoren te identificeren met matrices van 1 kolom of van 1 rij (kolomvector resp. rijvector, zie blz. 65).

Voorbeelden van productvorming van rijen en kolommen:

1) $(5 \quad 2 \quad -3)\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = (-4)$. Het getal -4 als enige element van de matrix in het rechterlid is het inwendig product der twee vectoren $(5, 2, -3)$ en $(2, -1, 4)$.
In het algemeen verstaat men onder inwendig product (of scalair product) van 2 vectoren $(a_1, \ldots, a_n)$ en $(b_1, \ldots, b_n)$ het getal $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$ (zie § 2, blz. 23).

2) $\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}(5 \quad 2 \quad -3) = \begin{pmatrix}10 & 4 & -6\\-5 & -2 & 3\\20 & 8 & -12\end{pmatrix}$.

Algemeen geldt:

matrix × kolom = kolom (zie blz. 68 ad 4)a))
rij × matrix = rij (zie blz. 68 ad 4)b))
rij × kolom = matrix bestaande uit 1 element (zie boven 1))
kolom × rij = matrix met evenredige rijen en kolommen (zie boven 2)).

b) Getransponeerde matrix: De getransponeerde matrix A^T van een matrix A wordt gedefinieerd als de matrix, waarvan de rijen identiek zijn met de kolommen van A; dus als $A = (a_{ij})$ en $A^T = (a^T_{ij})$, dan geldt: $a_{ij} = a^T_{ji}$. In het bijzonder is de getransponeerde van een rij(vector) een kolom(vector) en omgekeerd.

Vb.: Als $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, dan $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Is A vierkant, dan wordt A^T dus verkregen door wenteling van A om de hoofddiagonaal.

Gemakkelijk is aan te tonen, dat geldt:

Stelling 5.1: $(AB)^T = B^T A^T$ (natuurlijk alleen dan als de afmetingen van A en B zodanig zijn, dat het product AB zin heeft.)
en $(A+B)^T = A^T + B^T$.

c) Een vierkante matrix, waarvan alle elementen buiten de hoofddiagonaal gelijk zijn aan nul, heet een diagonaalmatrix (de hoofddiagonaal van een vierkante n-matrix wordt gevormd door de elementen $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$).

Vb.: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

d) Een driehoeksmatrix is een vierkante matrix, waarvan boven of onder de hoofddiagonaal alle elementen nul zijn. In het eerste geval heet de matrix een onderdriehoeksmatrix; in het andere geval een bovendriehoeksmatrix.[1])

Vb.: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) Een eenheidsmatrix I is een diagonaalmatrix met alle elementen op de hoofddiagonaal gelijk aan 1. Is het een n-matrix, dan drukken we dit wel zó uit, dat $I = I_n = (\delta_{ij})$, $i,j = 1,\dots,n$, waarin het Kronecker-symbool δ_{ij}

[1]) Zijn alle elementen zowel boven als onder de hoofddiagonaal gelijk aan 0, dan is deze "driehoeksmatrix" een diagonaal-matrix (zie onder c)).

./.

gelijk is aan 1 als $i = j$ en anders 0. De naam eenheidsmatrix wordt gerechtvaardigd door de eigenschap

(5.13) $IA = AI = A.$

f) Een vierkante matrix A van de orde n heet symmetrisch als $a_{ij} = a_{ji}$ (zodat $A = A^T$), scheef-(of anti-) symmetrisch of alternerend als $a_{ij} = -a_{ji}$ $(i,j = 1,\dots,n)$.
Bij een alternerende matrix zijn dus alle elementen op de hoofddiagonaal gelijk aan 0, $(a_{ii} = -a_{ii})$.

Vb.: Symmetrische matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

Alternerende matrix: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(Een vierkante matrix wordt wel scheef genoemd, als $a_{ij} = -a_{ji}$ voor $i \neq j$, terwijl de elementen op de hoofddiagonaal niet alle 0 zijn, vb.: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 8 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$).

g) Inverse matrix: Indien A een vierkante matrix is dan heet B inverse van A als $AB = BA = I$. B is dan ook vierkant, terwijl A ook inverse is van B (A en B zijn elkanders inverse). Een matrix heeft hoogstens één inverse, blijkens

Stelling 5.2: Is zowel B als C een inverse van A, dan is $B = C$.

Bewijs: $BAC = (BA)C = IC = C$, maar ook
$BAC = B(AC) = BI = B$, dus $B = C$.

De inverse matrix van A, zo deze inverse bestaat, wordt voorgesteld door A^{-1}. Heeft A dus een inverse A^{-1}, dan is deze bepaald, en geldt:

(5.14) $AA^{-1} = A^{-1}A = I.$

./.

Opm.: Later zullen we zien, dat uit $AA^{-1} = I$ altijd $A^{-1}A = I$ volgt. Bij de definitie van de inverse matrix B van A kunnen we dus met één van de vergelijkingen $AB = I$ of $BA = I$ volstaan.

Een vierkante matrix A, die geen inverse heeft, wordt singulier genoemd. Is er wel een inverse, dan heet A niet-singulier.

Vb.: Singuliere matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

er is geen matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ met $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Niet-singuliere matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

inverse: $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, want $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

h) Orthogonale matrix: Een vierkante matrix A heet orthogonaal als $A^T A = I$ of $A^T = A^{-1}$, dus als de getransponeerde matrix gelijk is aan de inverse (die dus moet bestaan).

Vb.: Orthogonale matrix: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$; inverse: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Uit $A^T A = I$ ($=AA^T$, zie opm. boven) volgt, dat de kolommen (rijen) van een orthogonale matrix de eigenschap hebben, dat het inwendig product van twee verschillende kolommen (rijen) gelijk is aan 0, terwijl het inwendig product van een kolom (rij) met zich zelf gelijk is aan 1 (zie blz. 62).
We kunnen deze eigenschappen ook een meetkundige interpretatie geven. Hiertoe leggen we eerst op de gebruikelijke wijze in R_n een metriek vast, zoals we dat gedaan hebben in § 2 voor een R_2 en een R_3, dus door uit te gaan

./.

van een lineair onafhankelijke basis voor R_n, bestaande uit de n basisvectoren $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ en loodrechte stand en lengte zo te definiëren, dat deze $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ onderling loodrecht zijn en de lengte 1 hebben.
De op blz. 70 gegeven definitie van inwendig product $(\bar{a}, \bar{b})$ van 2 vectoren $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ en $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$: $(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$ voert tot de definitie van de <u>lengte</u> $|\bar{a}|$ van een vector $\bar{a}$ in R_n: $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}$.
$\bar{a}$ heet <u>loodrecht op</u> $\bar{b}$ ($\bar{a}$ en $\bar{b}$ <u>orthogonaal</u>)als $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$.
φ heet de hoek tussen $\bar{a}$ en $\bar{b}$ als $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{a}, \bar{b})}{\sqrt{(\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b})}}$;
loodrechte stand van 2 $\underbrace{\text{vectoren}}_{\neq \bar{0}}$ komt dus overeen met een tussengelegen hoek φ van 90°, (zie § 2, blz. 23-24; de eigenschappen 1) t/m 6) van inwendig product, gegeven in §2, blz. 23 gelden ook algemeen in deze R_n).

We kunnen dus ook zeggen, dat de kolommen (rijen) van een orthogonale n-matrix n onderling loodrechte eenheidsvectoren voorstellen in de gemetriseerde vectorruimte R_n.

<u>Opm.:</u> Geldt alleen $A^T A = AA^T$, dan heet A <u>normaal</u>. Een matrix, die wel normaal is, doch niet orthogonaal, is bijv. elke niet-orthogonale symmetrische matrix.

<u>Stelling 5.3</u> Is de matrix A niet-singulier,dan voert de transformatie A lineair onafhankelijke vectoren over in lineair onafhankelijke vectoren (zie ook opm. blz. 60).

<u>Bewijs:</u> Als de getransformeerden van onafhankelijke vectoren namelijk afhankelijk zouden zijn, dan zouden deze door de inverse transformatie A^{-1} (zie opm. 1) blz. 75) volgens stelling 4.3 weer in afhankelijke vectoren worden overgevoerd, doch deze zijn dan weer de vectoren, waar we van zijn uitgegaan (immers $\bar{x} = A^{-1} A \bar{x}$), die echter lineair onafhankelijk ondersteld waren.

./.

<u>Stelling 5.4</u> $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (A en B beide niet-singuliere matrices van dezelfde orde.)

<u>Bewijs:</u> Dit volgt direct uit: $(B^{-1}A^{-1})\,AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$ en stelling 5.2.

<u>Opmerkingen 1):</u> Wegens de correspondentie: homogene lineaire transformatie $\leftrightarrow$ matrix (zie § 4) kunnen we ook verschillende typen van homogene lineaire transformaties onderscheiden. Zo zijn twee homogene lineaire transformaties elkanders inverse als de bijbehorende matrices elkanders inverse zijn; een homogene lineaire transformatie is orthogonaal, als de bijbehorende matrix orthogonaal is; enz.

2): In het algemeen heeft het pas veel zin de begrippen "symmetrisch", "antisymmetrisch" en "orthogonaal" op de aangegeven wijze te definiëren als we uitgaan van <u>reële</u> matrices, d.w.z. matrices, waarvan alle elementen uitsluitend reële getallen voorstellen.

Bij <u>complexe matrices</u> (d.w.z. matrices waarvan de elementen complexe getallen voorstellen) is het zeer nuttig om naast deze begrippen ook nog andere te definiëren:

Uitgaande van een complexe matrix $A = (a_{ij})$ definiëren we dan eerst de matrix $A^* = (a^*_{ij})$ als de matrix, waarvoor $a^*_{ij} = \bar{a}_{ji}$ ($\bar{a}_{ji}$ is de <u>toegevoegd complexe</u> (of <u>geconjugeerde</u>) van a_{ji}). A^* heet de <u>geconjugeerd getran</u> ... van A. (alleen als A reëel is, geldt $A^* = A^T$).

Als $A^* = A$ heet A <u>hermitisch</u>; als $A^* = -A$ heet A <u>scheef-</u> (of anti-) <u>hermitisch</u>; A heet <u>unitair</u> als $A^*A = I$ of $A^* = A^{-1}$.

Voor het bijzondere geval, dat de matrices reëel zijn, komen de termen hermitisch en unitair dus resp. overeen met de op blz. 72 en 73 gedefini-

./.

eerde begrippen symmetrisch en orthogonaal: een reëel hermitische matrix is dus symmetrisch, een reëel unitaire dus orthogonaal.
Wij zullen ons in het algemeen beperken tot matrices, die reëel zijn, hoewel een groot gedeelte van de theorie ook gewoon van kracht is als we complex werken.

Opgaven.

1) Zij gegeven een homogene lineaire (n,n)-transformatie A in R_n:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i=1,\dots,n),$$

waarin a_{ik} het element voorstelt uit de i^e rij en de k^e kolom van de bij de transformatie behorende matrix A.
A voert de n grondvectoren $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ over in resp.
$\bar{a}_1 = A\bar{e}_1$, $\bar{a}_2 = A\bar{e}_2, \dots, \bar{a}_n = A\bar{e}_n$.
Bewijs dat

$$\bar{a}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^T \bar{e}_k \qquad (i=1,\dots,n),$$

waarin a_{ik}^T het element is uit de i^e rij en de k^e kolom van de getransponeerde matrix A^T van A.

2) Als de vectoren $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ een lineair onafhankelijke basis vormen in R_n, bewijs dan dat de vectoren $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$ dan en slechts dan eveneens een lineair onafhankelijke basis in R_n vormen, als

$$\bar{f}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{e}_j \qquad (i=1,\dots,n)$$

met a_{ij} elementen van een niet-singuliere n-matrix $(i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n)$.

./.

3) Bewijs, dat als een matrix A een inverse heeft geldt:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Is de inverse van een symmetrische matrix weer symmetrisch?

4) Bewijs, dat een vierkante matrix, die twee gelijke kolommen of rijen heeft, singulier is.

5) Verifieer door vermenigvuldiging, dat (AB)C = A(BC), als

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

6) Bewijs, dat als een niet-singuliere onder (boven) driehoeksmatrix een inverse bezit, deze inverse ook weer een onder (boven) driehoeksmatrix is.
Bewijs verder, dat het product van twee onder (boven) driehoeksmatrices weer een onder (boven) driehoeksmatrix is.

7) Gegeven is in R_2 de lineaire transformatie $\bar{x}' = A\bar{x}$, bepaald door

$$x' = x - 3y$$
$$y' = 2x + y.$$

1° Bepaal de matrix A.
2° Druk de kentallen x, resp. y in de kentallen x' en y' uit.
3° Wat is de inverse matrix A^{-1}?
4° Verifieer, dat $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

8) Gegeven is de homogene lineaire transformatie, waarbij

$$(1,1) \rightarrow (\tfrac{1}{5}, \tfrac{7}{5})\ ;\ (1,2) \rightarrow (-\tfrac{2}{5}, \tfrac{11}{5}).$$

Toon aan, dat de transformatie orthogonaal is.

./.

9) Stellen de kolommen van een matrix onderling loodrecht eenheidsvectoren voor, dan geldt hetzelfde voor de rijen, en omgekeerd.

10) Een homogene lineaire transformatie A in R_3 heeft tot transformatiematrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & b \\ -2 & a & c \end{pmatrix}.$$

1^o Als nog gegeven is, dat de kolomvectoren van de matrix A onderling loodrecht zijn, bepaal dan a, b en c.

2^o Bepaal de vectoren, die door A getransformeerd worden in een reëel veelvoud van zich zelf.

11) Gegeven:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal A^2, AB, BA, en B^2.

12) Schrijf alle vierkante matrices X van de orde 2 op, die voldoen aan X^2 (=XX) = $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$.

13) Gegeven: $x_1 = 2y_1 - y_2 + 3y_3$, $x_2 = y_1 + 2y_2 - y_3$ en

$y_1 = z_1 + z_2$, $y_2 = z_1 - z_2$, $y_3 = 2z_1 + z_2$.

Druk x_1 en x_2 uit in z_1 en z_2 door gebruik te maken van matrix-vermenigvuldiging.

14) Bepaal XY^T en X^TY als X = (2,-1,4,6) en Y = (1,0,-2,3).

./.

15) Leid uit stelling 5.1 af, dat als $A = B_1B_2 \ldots B_r$, dat geldt

$$A^T = B_r^T \ldots B_2^T B_1^T \; .$$

16) Bewijs,

1^o Als P een willekeurige matrix is, is PP^T symmetrisch.

2^o Als A en B symmetrisch zijn, is AB dan en slechts dan symmetrisch als AB = BA.

17) Als $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, en $X = (x_1, x_2, x_3)$ en $Y = (y_1, y_2, y_3)$, bepaal dan in uitgeschreven vorm de kwadratische vorm XAX^T en de bilineaire vorm XAY^T.

18) Gegeven in R_4 de vectoren $\bar{u} = (2,2,4,-5)$ en $\bar{v} = (5,3,-1,1)$. Aangenomen wordt, dat de basisvectoren onderling loodrecht zijn en alle de lengte 1 hebben.

Bereken:

1^o De lengte van $\bar{u}$ en de lengte van $\bar{v}$.

2^o De cosinus van de hoek tussen $\bar{u}$ en $\bar{v}$.

3^o De parameters λ en μ zodanig, dat de vector $\bar{\omega} = (5,-5,0,0) + \lambda \bar{u} + \mu \bar{v}$ zowel loodrecht is op $\bar{u}$ als op $\bar{v}$.

19) Bepaal de inverse van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

20) Los de matrixvergelijkingen AX = 0 en YA = 0 op (0 = vierkante nulmatrix van de orde 3), als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} .$$

Is A singulier?

./.

21) De som van de elementen van de hoofddiagonaal van een vierkante matrix, heet het spoor van de matrix, dus

$$\text{spoor } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Toon aan, dat

$$\text{spoor } (AB) = \text{spoor } (BA), \text{ als } A \text{ een } (m,n)\text{-matrix}$$

en B een(n,m)-matrix is.

22) Laat I_n de eenheidsmatrix zijn van de n^e orde, c een getal, en v een rijvector met n kentallen (v^T is dus een kolomvector). Beschouw de matrix

$$P = I_n - c\, v^T v \, .$$

1° Bewijs, dat P symmetrisch is.

2° Indien de vector v genormeerd is op lengte 1 (d.w.z. $vv^T=1$), bepaal dan de waarde(n) van c waarvoor de matrix P tevens orthogonaal is.

23) Gegeven de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} .$$

1° Bepaal de inverse matrix A^{-1} (de matrix A is een zgn. Hilbert-matrix; de inverse er van bestaat uit uitsluitend gehele getallen).

2° Is A^{-1} symmetrisch?

24) Een links-circulerende matrix A, hier kortweg genoemd een L-matrix, is een vierkante matrix A van de orde n met de volgende eigenschappen:

./.

$a_{i+1,k+1} = a_{ik}, \quad a_{i+1,1} = a_{in} \quad (i,k = 1,\dots,n-1).$

(bijv. voor n=3: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$).

1° Bewijs, dat het product van twee L-matrices weer een L-matrix is.

2° Bewijs, dat de vermenigvuldiging van L-matrices commutatief is.

25) In R_n is een lineaire transformatie A gegeven. Het beeld van de vector $\bar{v}$ wordt aangeduid met $\bar{v}'$. A is zodanig, dat er bij elke $\bar{v}$ een getal λ bestaat, zodanig, dat $\bar{v}' = \lambda \bar{v}$.
Bewijs, dat λ onafhankelijk is van de keuze van $\bar{v}$.

26) Iedere vierkante matrix A kan worden geschreven als de som van een symmetrische matrix en een alternerende matrix.
Bewijs dit.

27) Bewijs, dat de reële matrix S dan en slechts dan alternerend is, als de matrix $A = (I+S)(I-S)^{-1}$ orthogonaal is.
Kies vervolgens $S = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ en bepaal A.
Bewijs, dat de bijbehorende lineaire vectortransformatie A in R_2 een draaiing voorstelt om de oorsprong van R_2 in zich zelf. Wat is daarbij de meetkundige betekenis van de grootheid t?

28) In R_2 zijn gegeven de lineaire transformaties D en P. D is een draaiing van 0 over een hoek $\varphi = \frac{\pi}{2}$ in positieve zin;
P is een projectie op de x-as.

1° Geef de matrices voor D en P.

2° Laat door matrixvermenigvuldiging zien, dat het inwendig product $(DP\bar{v}, PD\bar{v}) = 0$ voor elke vector $\bar{v} = (x,y)$.

3° Geef hiervan een meetkundige interpretatie.

./.

29) In R_n is van de vectoren $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4, \bar{v}_5$ gegeven:
1^o Geen van deze vectoren is de nulvector.
2^o $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ en $\bar{v}_3$ staan twee aan twee loodrecht op elkaar.
3^o $\bar{v}_4$ staat loodrecht op $\bar{v}_5$.
4^o $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ en $\bar{v}_4$ zijn lineair afhankelijk.
5^o $\bar{v}_2$ en $\bar{v}_4$ zijn lineair onafhankelijk.

Bewijs, dat $\bar{v}_3$ en $\bar{v}_5$ lineair afhankelijk zijn.

30) Voor welke waarden van λ is de transformatie met matrix

$$\lambda . \begin{pmatrix} 2 & 14 & v_1 \\ 10 & -5 & v_2 \\ 11 & 2 & v_3 \end{pmatrix} \quad \text{orthogonaal?}$$

31) Bewijs dat het product van twee orthogonale matrices (van dezelfde orde) weer orthogonaal is en dat dit laatste eveneens het geval is met de inverse van een orthogonale matrix. (orthogonalematrices van dezelfde orde vormen dus een multiplicatieve groep (ook een additieve (zie blz.2)).

Geldt iets dergelijks ook voor niet-singuliere symmetrische matrices?

32) Bewijs, dat het stelsel betrekkingen I volgt uit het stelsel II en omgekeerd:

$$\text{I} \begin{cases} a_1a_2 + b_1b_2 = 1 \\ c_1c_2 + d_1d_2 = 1 \\ a_2c_1 + b_2d_1 = 0 \\ a_1c_2 + b_1d_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} a_1a_2 + c_1c_2 = 1 \\ b_1b_2 + d_1d_2 = 1 \\ a_2b_1 + c_2d_1 = 0 \\ a_1b_2 + c_1d_2 = 0 \end{cases}$$

33) Bewijs de associatieve eigenschap (5.9) door middel van matrixvermenigvuldiging.

34) Bepaal van de matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 1 \\ 30 & 20 & 45 & 12 \\ 20 & 15 & 36 & 10 \\ 35 & 28 & 70 & 20 \end{pmatrix}$$ de inverse.

35) Bewijs, dat een vierkante n-matrix dan en slechts dan niet-singulier is, als de rijen (of de kolommen) n lineair onafhankelijke vectoren in een R_n vormen.

----

§ 6. Stelsels van lineaire vergelijkingen

Ter inleiding beschouwen we, evenals in § 4, in een m-dimensionale vectorruimte R_m n vectoren $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, alsmede een vector $\bar{b}$, voorgesteld door:

$$(6.1)\quad \begin{cases} \bar{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) \\ \bar{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) \\ \vdots \\ \bar{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) \\ \bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)\ . \end{cases}$$

We stellen ons de vraag of de vector $\bar{b}$ lineair afhankelijk is van de n vectoren $\bar{a}_1$ t/m $\bar{a}_n$, d.w.z. of voldaan kan worden aan de vectorvergelijking:

$$(6.2)\quad x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_n\bar{a}_n = \bar{b}$$

voor zekere keuze van de getallen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Schrijven we (6.2) uit in de m kentallen van linker en rechterlid dan ontstaan, ermede equivalent, de volgende m lineaire vergelijkingen:

$$(6.3)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m\ , \end{cases}$$

of in sigma-notatie:

$$(6.4)\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\ , \ (i=1,\ldots,m).$$

Als resultaat hebben we gekregen een <u>stelsel</u> vergelijkingen (6.3) of (6.4), bestaande uit m <u>lineaire vergelijkingen</u> met n <u>onbekenden</u> $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Slechts in het geval, dat deze $x_1, \ldots, x_n$ zodanig gekozen kunnen worden, dat alle vergelijkingen van het stelsel, na substitutie van de keuze in de linkerleden, overgaan in gelijkheden, kan de vraag over de afhankelijkheid, die wij in het voorafgaande gesteld hebben, bevestigend worden beantwoord.

De rechterleden, de getallen b_1 t/m b_m van het stelsel, noemt men veelal de bekende termen; de vector $\bar{b}$ wel de vector der bekende termen.
De (in het algemeen eveneens bekende) getallen a_{ij} ($i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$) heten de coëfficiënten. De (m,n)-matrix A van deze coëfficiënten:

$$(6.5)\qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heet de coefficienten-matrix of kleine matrix behorende bij het stelsel (6.3). De in de inleiding genoemde vectoren $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$ vormen de n kolomvectoren van A. Met behulp van A en de kolomvectoren $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ en $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ wordt (6.3) of (6.4) in matrixnotatie:

(6.6) $AX = B$ (of als transformatie opgevat: $A\bar{x} = \bar{b}$, vgl. blz. 59).

Een rijtje $(c_1,\ldots,c_n)$ van n getallen (vector van een R_n) heet van het stelsel (6.3) een oplossing of oplossingsvector als de substitutie $x_1=c_1,\ldots,x_n=c_n$ alle vergelijkingen in gelijkheden overvoert; $x_1=c_1$, $x_2=c_2,\ldots,x_n=c_n$ is dan een oplossing of $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_n)=(c_1,\ldots,c_n)$ een oplossingsvector.
Het stelsel heet oplosbaar , éénduidig oplosbaar, strijdig (of onoplosbaar), als het respectievelijk minstens één, precies één, geen enkele oplossing heeft.
Het stelsel (6.3) heet homogeen, als de rechterleden $b_1,\ldots,b_m$ alle gelijk zijn aan 0. Zijn de rechterleden niet alle 0 (dus $\bar{b} \neq \bar{0}$), dan heet het lineaire stelsel niet-homogeen (of inhomogeen).

We zullen nu onder toepassing van matrix- en vectortheorie de algemene voorwaarden onderzoeken, waaronder het stelsel (6.3) oplosbaar is. Tevens zullen we methoden aangeven voor het bepalen van de onbekenden in geval van oplosbaarheid.

Uit het voorafgaande volgt direct de volgende stelling:

<u>Stelling 6.1.</u> Het lineair afhankelijk zijn van $\bar{b}$ van de kolomvectoren $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ (zie (6.1)) is een nodige en voldoende voorwaarde voor de oplosbaarheid van het stelsel (6.3).

<u>Vb.1.</u> Gegeven het stelsel vergelijkingen: $\begin{cases} 4x_1+x_2-2x_3 = 2 \\ 2x_1+5x_2+3x_3 = 4 \end{cases}$.

Met behulp van de kolomvectoren $\bar{a}_1=\binom{4}{2}, \bar{a}_2=\binom{1}{5}, \bar{a}_3=\binom{-2}{3}$ en $\bar{b}=\binom{2}{4}$ in het stelsel te schrijven in de vorm:

$$x_1\bar{a}_1+x_2\bar{a}_2+x_3\bar{a}_3=\bar{b} .$$

De vectoren $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ en $\bar{b}$ zijn vectoren in R_2. Geven we aan de onbekende x_1 een willekeurige waarde, dan kunnen wij, daar $\bar{a}_2$ en $\bar{a}_3$ een lineaire onafhankelijke basis in R_2 vormen, de vector $\bar{b}-x_1\bar{a}_1$ op één slechts één manier schrijven als een lineaire combinatie van $\bar{a}_2$ en $\bar{a}_3$. Bij elke waarde van x_1 vinden wij dus één stel waarden van x_2 en x_3, zó dat $\bar{b}-x_1\bar{a}_1=x_2\bar{a}_2+x_3\bar{a}_3$ m.a.w. het gegeven stelsel is oplosbaar en heeft oneindig veel oplossingen. Waren de vectoren $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ en $\bar{a}_3$ en $\bar{b}$ onderling twee aan twee lineair afhankelijk geweest, dan zouden wij in dat geval in het algemeen twee der onbekenden willekeurig hebben kunnen kiezen.

<u>Vb.2.</u> Gegeven het stelsel vergelijkingen: $\begin{cases} 2x_1 = b_1 \\ x_1+3x_2 = b_2 \\ 3x_1+2x_2 = b_3 \end{cases}$.

Met behulp van de kolomvectoren $\bar{a}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\bar{a}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$ en $\bar{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ is het stelsel te schrijven in de vorm $x_1\bar{a}_1+x_2\bar{a}_2=\bar{b}$.

De vectoren $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$ vormen een lineair onafhankelijk stelsel in R_3. Zij spannen dus een lineaire deelruimte D_2 van R_3 op. Ligt $\bar{b}$ niet in D_2, dan is $\bar{b}$ niet lineair afhankelijk van $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$. Het stelsel heeft dan geen oplossing en is dus strijdig. Ligt $\bar{b}$ wel in D_2, dan is $\bar{b}$ op één en slechts één manier te schrijven als een lineaire combinatie van $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$, die een l.o. basis voor D_2 vormen. Het stelsel heeft dan 1 oplossing en is dus eenduidig oplosbaar. Waren de drie vectoren $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ en $\bar{b}$ onderling twee aan twee lineair afhankelijk geweest, dan zouden wij in dat geval in het algemeen één der onbekenden x_1 en x_2 willekeurig hebben kunnen kiezen, zodat dan het stelsel oneindig veel oplossingen gehad zou hebben.

In het homogene geval is het stelsel altijd oplosbaar: $(0,\ldots,0)$ is immers dan altijd een oplossing, de zgn. nuloplossing van het homogene stelsel.
Voor een homogeen stelsel geldt:

1. Is $(x_1,\ldots,x_n)$ een oplossing, dan ook $(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$.
2. Zijn $(x_1,\ldots,x_n)$ en $(x'_1,\ldots,x'_n)$ oplossingen, dan ook $(x_1+x'_1,\ldots,x_n+x'_n)$.

Dus de som van twee oplossingen van een homogeen stelsel is weer een oplossing; λ maal een oplossing eveneens. Gevolg:

Stelling 6.2 De verzameling van de oplossingsvectoren (de oplossingsruimte) van een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen met n onbekenden is een lineaire deelruimte van een n-dimensionale vectorruimte.

Zij (6.3):

(I) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k=b_i \quad (i=1,\ldots,m)$ een niet-homogeen stelsel, dan heet

(II) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k=0 \quad (i=1,\ldots,m)$ het bij (I) behorende homogene of gereduceerde stelsel.

Stelling 6.3 Is $\bar{x}'=(x'_1,\ldots,x'_n)$ een oplossing van (I) en $\bar{x}''=(x''_1,\ldots,x''_n)$ een oplossing van (II), dan is $\bar{x}=\bar{x}'+\bar{x}''$ weer een oplossing van (I).
Omgekeerd is het verschil van twee oplossingen van (I) een oplossing van (II), dus elke oplossing van (I) is te verkrijgen door bij een vaste oplossing van (I) een zekere oplossing van (II) op te tellen.

Bewijs: 1) Is $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x'_k=b_i$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x''_k=0$, dan $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x'_k+x''_k)=b_i$, dus $\bar{x} = \bar{x}' + \bar{x}''$ is een oplossing van (I).

2) Is $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k' = b_i$, dan $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_k - x_k') = 0$,

dus $\bar{x}'' = \bar{x} - \bar{x}'$ is een oplossing van (II).

Vb.
$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} .$$

Geef alle oplossingen van (I). Dit kan als volgt:
Een oplossing is bijv. (1,0,1). Beschouw nu het gereduceerde stelsel:

$$(II) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} .$$

(II) heeft als oplossingen: $x_1 = x_2 = \lambda$, $x_3 = -2\lambda$. Inderdaad voldoet $(\lambda, \lambda, -2\lambda)$ voor alle λ. Een dergelijke uitdrukking, die in parametervorm alle oplossingen van een stelsel oplevert, noemt men wel de "algemene" oplossing van het stelsel. Van (II) is de algemene oplossing $(\lambda, \lambda, -2\lambda)$; die van (I) is in verband met stelling 6.3 dus $(1,0,1)+(\lambda, \lambda, -2\lambda)=(1,0,1)+\lambda(1,1,-2)=(1+\lambda, \lambda, 1-2\lambda)$.

<u>Meetkundig beeld</u>: De oplossingsruimte van een homogeen stelsel met n onbekenden is een lineaire deelruimte, dus een lijn, vlak etc. door de oorsprong 0 van R_n. Uit elke basis voor die deelruimte kunnen we onmiddellijk de algemene oplossing construeren door lineair compositie.
Voor het inhomogene stelsel geldt dit niet. We krijgen de oplossingsvectoren van het inhomogene stelsel door bij de oplossingsvectoren van het homogene stelsel een vaste vector op te tellen (stelling 6.3).

Beschouwen we weer het algemene stelsel vergelijkingen (6.2):

(6.7) $$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_n\bar{a}_n = \bar{b} ,$$

en onderstellen wij, dat het maximale aantal lineair onafhankelijke vectoren onder de n vectoren

(I) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ gelijk is aan k, dan spannen deze vectoren, die vectoren zijn van R_m volgens stelling 3.10 een lineaire deelruimte D_k van dimensie k in R_m op.
Er zijn nu twee mogelijkheden:

1). $\bar{b}$ ligt in D_k, dus $\bar{b}$ is lineair afhankelijk van de vectoren (I). In dat geval is het stelsel (6.3) oplosbaar. De deelruimte, opgespannen door de n+1 vectoren

(II) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, \bar{b}$
is dan equivalent (zie blz.51) met de deelruimte D_k opgespannen door de n vectoren (I). Het maximale aantal vectoren van (II), dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt, is dan eveneens gelijk aan k.

2). $\bar{b}$ ligt niet in D_k, dus $\bar{b}$ is lineair onafhankelijk van de vectoren (I). Het stelsel (6.3) is dan onoplosbaar. Het maximale aantal vectoren van (II), dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt, is nu gelijk aan k+1.

Naast stelling 6.1 hebben wij volgens het bovenstaande nu ook het volgende criterium voor oplosbaarheid van een stelsel:

Stelling 6.4 Het stelsel (6.3) of in vectornotatie (6.2) is dan en slechts dan oplosbaar als het maximale aantal vectoren, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt van (I) en (II) hetzelfde is.

Met behulp van de volgende begrippen kunnen wij deze voorwaarde eenvoudiger uitdrukken.

Rang van een matrix. Hieronder verstaat men het maximale aantal kolomvectoren van de matrix, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt. De rang van een matrix is dus volgens stelling 3.10 gelijk aan de dimensie van de deelruimte, opgespannen door de kolomvectoren.

<u>Aangevulde</u> (of <u>grote</u>) <u>matrix</u> behorende bij het stelsel (6.3). Dit is de (m,n+1)-matrix B uit A van (6.5) verkregen door rechts te randen met de kolomvector $\bar{b}$, dus

$$(6.8)\ B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

In verband met stelling 6.4 geldt dan:

<u>Stelling 6.5</u> Het stelsel (6.3) is dan en slechts dan oplosbaar als de rang van de grote matrix B gelijk is aan die van de kleine matrix A. Hieruit volgt, dat het stelsel onoplosbaar is als de rang van B één hoger is dan de rang van A.

Opm.: Uit deze stelling volgt ook direct dat een homogeen stelsel steeds oplosbaar is. (zeker de nuloplossing, zie blz.87)

Als nu de rang van A gelijk is aan k, dan is volgens het bovenstaande k per definitie gelijk aan het maximale aantal <u>kolomvectoren</u> van A, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt. Stel nu, dat r het maximale aantal <u>rijvectoren</u> van A is, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt, dus r de dimensie van de vectorruimte opgespannen door de rijvectoren van A, dan kunnen we bewijzen, dat <u>k=r</u>. Stel namelijk $k > r$. Kies nu in A, zijnde een (m,n)-matrix, r rijen, waarin de anderen lineair zijn uit te drukken (stelling 3.10). Kies verder k lineair onafhankelijke kolommen. Beschouw nu de (r,k)-matrix A' als "doorsnede" van de beschouwde r rijen en k kolommen. De k kolommen van deze deelmatrix A' van A zijn lineair afhankelijk (immers ze vormen k vectoren in R_r met $k > r$, stelling 3.6). Dan kan eenvoudig worden aangetoond, dat deze zelfde kolommen maar dan uitgebreid tot kolommen van de gehele matrix A eveneens lineair afhankelijk moeten zijn (gevolg van de lineaire afhankelijkheid (m-r) overige rijen van A van de beschouwde r rijen). Doch deze k kolommen waren lineair onafhankelijk ondersteld, hetgeen dus een tegenspraak impliceert. Door nu ook de getransponeerde matrix van A te beschouwen en daarmede analoog te werk te gaan, bewijzen we evenzo, dat $r > k$ onmogelijk is, dus $k=r$:

Stelling 6.6 Het maximale aantal kolomvectoren van een matrix, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt, is gelijk aan het maximale aantal rijvectoren, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt. (m.a.w. de dimensie van de ruimte opgespannen door de rijvectoren is gelijk aan de dimensie van de ruimte opgespannen door de kolomvectoren = de rang van de matrix).

Opm. In de definitie van het begrip rang op blz. 89 kan overal "kolom" dus ook door "rij" worden vervangen.

We zullen nu een tweede bewijs geven voor stelling 6.6, dat ons tevens een middel aan de hand doet om langs systematische weg de rang van een matrix te bepalen: Hiertoe merken we eerst op, dat op een matrix zekere bewerkingen mogen worden toegepast zonder dat k of r veranderen. We beperken ons in de aanvang tot r en zullen voor de eenvoudigheid de m rijvectoren van A even voorstellen door $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m$. Bij welke bewerkingen r onveranderd blijft, vertelt ons de volgende stelling:

Stelling 6.7 De volgende bewerkingen mogen op een matrix worden toegepast zonder dat het getal r verandert:

1°. Het vermenigvuldigen van een rij met een getal $\lambda \neq 0$ dwz. een der rijvectoren $\bar{v}_i$ wordt vervangen door $\lambda \bar{v}_i$.

2°. Het optellen van een met een getal vermenigvuldigde rij bij een andere rij, dwz. $\bar{v}_i$ wordt vervangen door $\bar{v}_i + \lambda \bar{v}_j$ $(i \neq j)$.

3°. Het weglaten van een rij, die geheel uit nulelementen bestaat, dus als $\bar{v}_i = \bar{0}$, dan kan $\bar{v}_i$ weggelaten worden.

4°. Het verwisselen van twee rijen.

Bewijs: 1° en 2° volgen direct uit stelling 3.11 resp. 3.12.
3° volgt uit het feit, dat de door de vectoren $\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_m$ opgespannen deelruimte niet verandert als een der vectoren hiervan, voorstellende een nulvector, wordt weggelaten.
4° is triviaal.

Deze stelling laat zich gemakkelijk toepassen bij het bepalen van de rang van een matrix, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt:

Vb. Bepaal r van de matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

Oplossing: De bewerking, die 2 maal de eerste rij aftrekt van (d.i. -2 maal de eerste rij optelt bij) de derde rij en vervolgens 3 maal de tweede rij optelt bij de derde rij geeft de matrix: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, waarvan de rang r dus volgens de vorige stelling moet overeenstemmen met de gevraagde r van A. Van de gevonden matrix is één rij een nulrij, terwijl de beide andere lineair onafhankelijk zijn, zodat r=2. (Vgl. Vb.blz.45.)

We kunnen bovendien aantonen, dat de bewerkingen vermeld in stelling 6.7 ook k invariant laten:

Stelling 6.8. Het getal k verandert niet als we op de rijen van een matrix de bewerkingen toepassen vermeld in stelling 6.7.

Bewijs: 1°. Zonder de algemeenheid te schaden, onderstellen we, dat we de elementen van de eerste rij van de matrix met $\lambda \neq 0$ vermenigvuldigen. De n kolomvectoren $\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_n$, gegeven op blz. 84 gaan dan over in de n vectoren $\overline{b}_1,\dots,\overline{b}_n$, waarvan van elk het 2e t/m m^e kental overeenstemt met dat van de overeenkomstige oorspronkelijke vector. De eerste kentallen zijn echter met λ vermenigvuldigd. Het is nu eenvoudig in te zien, dat elke betrekking $\lambda_1\overline{a}_1+\dots+\lambda_n\overline{a}_n=\overline{0}$ tot gevolg heeft, dat ook $\lambda_1\overline{b}_1+\dots+\lambda_n\overline{b}_n=\overline{0}$, en omgekeerd (i.v.m. $\lambda\neq 0$).
Elke lineaire afhankelijkheid, die tussen de vectoren $\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_n$

zou bestaan, weerspiegelt zich dus bij de vectoren $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n$, en omgekeerd. Het maximale aantal lineair onafhankelijke vectoren in $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$ is dus gelijk aan het maximale aantal in $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n$.

2°. Ook als we een rij van de matrix na vermenigvuldiging met een getal λ optellen bij een andere rij, zien we eenvoudig, dat elke betrekking $\lambda_1\bar{a}_1+\ldots+\lambda_n\bar{a}_n=\bar{o}$ tussen de oorspronkelijke kolomvectoren tot gevolg heeft eenzelfde betrekking tussen de nieuwe kolomvectoren en omgekeerd.

3° en 4°. Gemakkelijk is in te zien, dat k niet verandert, als we een rij weglaten, die uitsluitend uit nullen bestaat en evenmin als we twee rijen verwisselen.

Overeenkomstig de stellingen 6.7 en 6.8 geldt nu dus natuurlijk ook:

Stelling 6.9. Het getal k verandert niet als we op de kolommen van een matrix soortgelijke bewerkingen toepassen als op de rijen worden toegepast in stelling 6.7.

Stelling 6.10. Het getal r verandert niet als we op de kolommen de bewerkingen uit stelling 6.9 toepassen.

Samenvattend komen we dus tot de volgende stelling:

Stelling 6.11. De volgende bewerkingen mogen op een matrix worden toegepast, zonder dat de getallen r en k (gedefinieerd volgens blz.90) veranderen:

1°. Het vermenigvuldigen van een rij of een kolom met een getal $\lambda\neq 0$.

2°. Het optellen van een rij of een kolom vermenigvuldigd met een getal λ, bij een andere rij of kolom.

3°. Het weglaten van een rij of een kolom, die geheel uit nullen bestaat.

4°. Het verwisselen van twee rijen of van twee kolommen.

Nu het bewijs van k=r: Door de in stelling 6.11 genoemde operaties (bij herhaling) toe te passen kunnen we een matrix door een eenvoudiger vervangen (met dezelfde k en r). Dit gebeurt weer volgens een "schoonveegproces" (zie § 3). Uit stelling 6.11 volgt, dat de matrix A als volgt kan worden vereenvoudigd, zonder dat de getallen k of r veranderen:

1°. Elke kolom en elke rij, die uitsluitend uit nulelementen bestaat, wordt weggelaten.

2°. Zo nodig worden de rijen zodanig verwisseld, dat a_{11} (d.i. de aanduiding voor het element in de linkerbovenhoek, eventueel na verwisseling der rijen op deze plaats terecht gekomen) ongelijk is aan 0.

3°. De elementen van de eerste rij worden vervolgens door a_{11} gedeeld.

4°. De elementen van de tweede rij worden verminderd met a_{21} maal de overeenkomstige elementen van de eerste rij; de nieuwe a_{21} wordt dan 0.
Op soortgelijke wijze worden de nieuwe $a_{31}, a_{41}, \ldots, a_{m1}$ gelijk aan 0 gemaakt door in plaats van de tweede rij, de derde en volgende rijen te beschouwen.

Het gevolg is, dat de nieuwe eerste kolom, afgezien van het eerste element, dat gelijk is aan 1, uitsluitend verder bestaat uit nullen. Het proces, boven weergegeven onder 1° t/m 4°, noemt men het schoonvegen van de eerste kolom van een matrix met behulp van de eerste rij.

5°. Indien er nu een rij is ontstaan, die uitsluitend uit nulelementen bestaat, dan wordt deze weggelaten (nieuwe kolommen met allemaal nulelementen kunnen niet optreden).

Nadat de eerste kolom is schoongeveegd, gaan we de tweede kolom schoonvegen, en wel als volgt:

6°. Zo nodig verwisselen we de tweede rij met een volgende rij, zodat het element a_{22} (d.i. de aanduiding voor het element in de 2e rij en de 2e kolom, eventueel na verwisseling der rijen op deze plaats terecht gekomen) ongelijk is aan 0. (Zijn de tweede en volgende kentallen van de tweede kolomvector alle 0, dan laten we deze kolom eenvoudig weg, omdat dan bekend is, dat deze een veelvoud is van de eerste kolom (pas stelling 6.11 2° en 3° toe). We gaan dan verder met de derde, vierde kolomvector enz. tot zover voortzetting mogelijk is.)
Daarna delen we de elementen van de tweede rij door a_{22}, waarna de nieuwe a_{22} dus gelijk aan 1 wordt. Vervolgens

verminderen we de elementen van de eerste, derde, t/m laatste rij resp. met $a_{12}, a_{32}, \ldots, a_{m2}$ maal de overeenkomstige elementen van de tweede rij. Door deze bewerkingen bestaat de nieuwe tweede kolom nu uitsluitend uit nulelementen, uitgezonderd het tweede element, dat 1 is.

7^o.Eventuele nieuwe nulrijen worden weggelaten.

Schoonvegen van de derde, vierde... kolom geeft tenslotte een matrix M van de volgende gedaante:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 & b_{1,q+1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1p} \\ 0 & . & . & . & b_{2,q+1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & & & & & \\ 0 & . & . & 0 \;\; 1 & b_{q,q+1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{qp} \end{pmatrix},$$

(of een van getransponeerde gedaante, indien de rijen waren schoongeveegd met kolommen, wat natuurlijk ook had gekund, zie Vb. onder).

In ieder geval ontstaat een eenheidsmatrix, bijv. van de q^e orde links of boven als linker resp. bovengedeelte van de resulterende matrix.

Het maximale aantal rijvectoren, en ook het maximale aantal kolomvectoren van M, dat een lineair onafhankelijk stelsel vormt, is gelijk aan q (de p-q rechterkolommen van M kunnen tot nulkolommen gemaakt worden door herhaalde toepassing van stelling 6.11 2^o).

De bewerkingen die tot M hebben geleid, hebben de getallen k en r van de oorspronkelijke matrix A onveranderd gelaten, zodat q=k en q=r, en dus k=r, waarmede stelling 6.6 opnieuw bewezen is.

De voorafgaande beschouwingen hebben ons tevens een middel aan de hand gedaan om op systematische wijze de rang van een matrix te bepalen door middel van een schoonveeg-proces. In plaats van kolommen schoon te vegen kan men uiteraard ook de rang van een matrix bepalen door rijen schoon te vegen (met behulp van kolommen), zoals in het volgende voorbeeld:

Vb. Bepaal de rang van de matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Opl.: 1) Schoonvegen van de eerste rij m.b.v. de tweede kolom, gevolgd door schoonvegen van de tweede rij m.b.v. de eerste kolom, geeft de matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -4 & 4 \\ -3 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

2) Delen van de derde en vierde kolom door 4, gevolgd door schoonvegen van de derde rij m.b.v. de derde kolom geeft, bij weglating van de laatste kolom bestaande uit nullen, de matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Direct zien we, dat deze matrix de rang 3 heeft, zo dus ook de gegeven matrix A.

Opm.! In vele gevallen zal het bij de bepaling van de rang van een matrix voordelig zijn de geoorloofde bewerkingen, die de rang invariant laten deels op de rijen en deels op de kolommen toe te passen, afhankelijk van de gedaante der matrices, die tijdens het proces worden gevormd:

Vb.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 10 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

rang 2.

Volgens stelling 6.2 vormen de oplossingsvectoren van een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen een lineaire deelruimte van een vectorruimte. Tussen de dimensie van deze deelruimte (die ook een vectorruimte is) en de rang van de coëfficiëntenmatrix van het stelsel bestaat een belangrijk verband, dat nu zal worden afgeleid:

Zij $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k=0$, $(i=1,\dots,m)$ het homogene stelsel, en de rang van de coëfficiëntenmatrix $A=(a_{ik})$ gelijk aan r.
Geef de kolommen van A weer aan met $\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_n$ en laat (hetgeen geen schade doet aan de algemeenheid) een lineair onafhankelijke basis van de door deze vectoren opgespannen deelruimte bestaan uit de vectoren $\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_r$.
Zij nu $x_{r+1},\dots,x_n$ n-r gegeven getallen, dan zijn $x_1,\dots,x_r$ zo te bepalen (en wel op eenduidige wijze), dat $(x_1,\dots,x_n)$ een oplossing van het stelsel is. Immers de vector $\overline{w} = x_{r+1}\overline{a}_{r+1}+\dots+x_n\overline{a}_n$ is lineair uit te drukken in de basis

$\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_r$: $\overline{w}=\lambda_1\overline{a}_1+\dots+\lambda_r\overline{a}_r$ met eenduidig bepaalde $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ wegens stelling 3.3. Neem nu $x_1=-\lambda_1,\dots,x_r=-\lambda_r$ en we hebben de oplossing $\overline{x}=(-\lambda_1,\dots,-\lambda_r,x_{r+1},\dots,x_n)$.
Beschouw nu eens de speciale oplossing $\overline{x}_j$ bepaald door $x_j=1$, $x_{r+1}=\dots=x_{j-1}=x_{j+1}=\dots=x_n=0$ voor $r+1 \leq j \leq n$. Elke oplossing $\overline{x}$ is nu dus te schrijven als een lineaire combinatie van $\overline{x}_{r+1},\dots,\overline{x}_n$. Deze laatste vectoren zijn echter lineair onafhankelijk, zodat n-r de dimensie is van de oplossingsruimte en de algemene oplossing dus n-r vrij te kiezen parameters bevat. Men drukt dit wel uit door te zeggen dat er ∞^{n-r} oplossingen zijn; als r=n dan 1 oplossing: de nuloplossing. (Vgl. blz.13). De algemene oplossing kan met n-r parameters en niet met minder worden geschreven.
Opm. Uit het bovenstaande volgt ook direct, dat een willekeurige oplossingsvector van het stelsel verkregen kan worden uit een lineaire combinatie van een willekeurig (n-r)-tal lineaire onafhankelijke oplossingsvectoren van het stelsel. Dus:

Stelling 6.12. Is van een stelsel homogeen lineaire vergelijkingen met n onbekenden de rang van de bijbehorende coëfficiëntenmatrix gelijk aan r, dan vormen de oplossingsvectoren van het stelsel een (n-r)-dimensionale deelvectorruimte van R_n. Uit iedere set van n-r lineair onafhankelijke oplossingsvectoren kan een willekeurige oplossingsvector door lineaire combinatie worden verkregen (als r=n treedt alleen de nuloplossing als oplossing op.)

We noemen een set van n-r lineair onafhankelijke oplossingsvectoren $\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_{n-r}$ een volledige oplossing. Een willekeurige oplossingsvector $\overline{v}$ van het homogene stelsel is dus te schrijven in de vorm: $\overline{v}=\lambda_1\overline{v}_1+\lambda_2\overline{v}_2+\ldots+\lambda_{n-r}v_{n-r}$.

Uit stelling 6.12 volgt:

1°. Als van een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen het aantal onbekenden n groter is dan het aantal vergelijkingen m, dan is dus $n > m$ en dus ook $n > r$, waarbij r de rang is van de bijbehorende coëfficiëntenmatrix.
In dit geval zijn er dus altijd oplossingen verschillend van de nuloplossing.

2°. Een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen heeft dan en slechts dan alleen de nuloplossing, als het aantal onbekenden gelijk is aan de rang van de bijbehorende coëfficiëntenmatrix.

Uit stelling 6.3 en 6.12 volgt:

Stelling 6.13. Indien van een niet-homogeen stelsel lineaire vergelijkingen met n onbekenden de rang van de coëfficiëntenmatrix gelijk is aan r en $\overline{v}_o$ een oplossingsvector is (een particuliere oplossing), dan is elke oplossingsvector $\overline{v}$ van het stelsel te schrijven in de vorm:

$$\overline{v} = \overline{v}_o + \lambda_1\overline{v}_1 + \lambda_2\overline{v}_2 + \ldots + \lambda_{n-r}\overline{v}_{n-r},$$

waarbij $\overline{v}_1,\ldots,\overline{v}_{n-r}$ n-r lineair onafhankelijke oplossingsvectoren zijn van het bijbehorende homogene stelsel.

Opm. Heeft een stelsel lineaire vergelijkingen dus 1 oplossing, dan zijn er direct ook ∞^{n-r} oplossingen (zie blz.97 ; als $n=r$ dan juist 1 oplossing: in geval van boven dus alleen $\overline{v}_o$).

Voor het geval, dat van een lineair stelsel het aantal vergelijkingen m gelijk is aan het aantal onbekenden n, dus als $m=n$, geldt de volgende belangrijke stelling:

Stelling 6.14 (alternatief stelling)
Laat een niet-homogeen stelsel lineaire vergelijkingen met het bijbehorende gereduceerde stelsel resp. voorgesteld worden door:

$$\text{(I)} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \qquad (i=1,\ldots,n)$$

$$\text{(II)} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0 \qquad (i=1,\ldots,n),$$

en r en r' resp. de rang van de kleine en van de grote matrix van stelsel (I) zijn, dan geldt:

1°. Heeft (II) slechts de nuloplossing (d.i. als $r=n$), dan is (I) éénduidig oplosbaar.

2°. Heeft (II) ook andere dan de nuloplossing, dan is òf (I) onoplosbaar (d.i. als $r'=r+1$), of (I) heeft meer dan één oplossing (d.i. als $r'=r \leqslant n-1$), en dan zelfs oneindig veel. Gelijkwaardig hiermee is:

3°. Is (I) eenduidig oplosbaar, dan heeft (II) slechts de nuloplossing.

Bewijs: 1°. (II) slechts de nuloplossing, dan volgens stelling 6.12 $r=n$. De rang van de aangevulde matrix is $\geqslant$ die van de coëfficiëntenmatrix (zie blz.89), kan echter niet groter zijn dan m (het aantal rijen van de aangevulde matrix). Wegens $m=n$ zijn de rangen van beide matrices dus aan elkaar gelijk.
Uit stelling 6.4 en de opmerking bij stelling 6.13 volgt dan het gestelde. 2° en 3° volgen direct uit stelling 6.3.

Gelijkwaardigheid van stelsels lineaire vergelijkingen

Twee stelsels van lineaire vergelijkingen met dezelfde onbekenden $x_1,\ldots,x_n$ heten gelijkwaardig (of aequivalent), als elke vergelijking van het eerste stelsel een lineaire combinatie is van de vergelijkingen van het tweede stelsel, en omgekeerd elke vergelijking van het tweede stelsel een lineaire combinatie is van de vergelijkingen van het eerste (het aantal vergelijkingen van beide stelsels mogen verschillen).

Gemakkelijk is in te zien, dat een stelsel overgaat in een aequivalent stelsel, indien men op de vergelijkingen van het stelsel bewerkingen toepast overeenkomstig die, welke in stelling 6.7 worden toegepast op de rijen van een matrix. Aequivalentie treedt dus op bij toepassing van de volgende bewerkingen op de vergelijkingen van een stelsel:

1°. Het vervangen van een der vergelijkingen door een vergelijking, die ontstaat door alle termen ervan met een getal $\lambda \neq 0$ te vermenigvuldigen.

2°. Het vervangen van een vergelijking door een vergelijking, die ontstaat door bij elke term van de vergelijking λ maal de overeenkomstige term van een andere vergelijking op te tellen.

3°. Het weglaten van een vergelijking, waarvan alle coëfficiënten en de bekende term gelijk zijn aan nul.

4°. Het verwisselen van twee vergelijkingen.

Het is gemakkelijk na te gaan, dat <u>gelijkwaardige stelsels dezelfde oplossingen</u> moeten hebben.

Als we dus van een stelsel lineaire vergelijkingen de kolommen van de grote matrix schoonvegen door toepassing van bewerkingen genoemd in stelling 6.7, dan herleiden we deze matrix tot een andere, die behoort bij een stelsel lineaire vergelijkingen aequivalent met het oorspronkelijke stelsel. Zodoende kunnen we nadat de matrices geschikt vereenvoudigd zijn op eenvoudiger wijze:

1°. Met behulp van stelling 6.5 constateren of het stelsel strijdig is of niet:
Als r' = rang grote matrix en r=rang kleine matrix, dan geldt:
$r'=r$: het stelsel is oplosbaar.
$r'=r+1$: het stelsel is strijdig: geen oplossingen.

2°. Met behulp van het verkregen aequivalente stelsel vergelijkingen de oplossingen bepalen, zo deze er zijn.

Het volgende voorbeeld moge dit toelichten.

<u>Vb.</u> Gevraagd voor verschillende waarden van a het volgende stelsel vergelijkingen op te lossen:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + (1-a)x_2 + 2x_3 = a+2 \\ -x_1 - x_2 + 2ax_3 = 4a+1 \, . \end{cases}$$

<u>Oplossing</u>: Beschouw de grote matrix (waarin begrepen de kleine matrix links van de verticale streep):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1-a & 2 & a+2 \\ -1 & -1 & 2a & 4a+1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-a & 0 & a \\ 0 & 0 & 2a+1 & 4a+2 \end{array}\right)$$

(Schoonvegen van de eerste kolom met de eerste rij.)

Stel $a \neq -\frac{1}{2}$. Deling van de laatste rij door $2a+1$ geeft

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-a & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Een met het oorspronkelijke stelsel aequivalent stelsel vergelijkingen is voor $a \neq -\frac{1}{2}$ dan:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -1+a)x_2 \qquad = a \\ \qquad\qquad x_3 = 2\ . \end{cases}$$

Dus $x_3=2$. Als a tevens $\neq -1$, dan $x_2 = -\frac{a}{1+a}$ en $x_1 = 1-x_2-x_3 = \frac{-1}{1+a}$.
Dus als $a \neq -\frac{1}{2}$ en $\neq -1$, dan één oplossing: $x_1 = -\frac{1}{1+a}$, $x_2 = -\frac{a}{1+a}$, $x_3=2$.
De gevallen $a=-\frac{1}{2}$ en $a=-1$ dienen apart te worden beschouwd:

1^o. $a=-\frac{1}{2}$ dan $x_2=1$ en $x_1=-x_3$. In dit geval is $r'=r=2$. Er zijn oneindig veel oplossingen (∞^1). Elke oplossingsvector $\overline{x}$ kan worden voorgesteld door $\overline{x} = (0,1,0) + \lambda(1,0,-1) = (\lambda,1,-\lambda)$; vgl. stelling 6.13.
$(0,1,0)$ is een particuliere oplossing van het stelsel, terwijl $\overline{x}=\lambda(1,0,-1)$ de algemene oplossing is van het bijbehorende homogene stelsel (als $a=-\frac{1}{2}$). De eindpunten van de oplossingsvectoren $\overline{x}$ van het gegeven stelsel liggen op de rechte lijn door het punt $(0,1,0)$ met richting $(1,0,-1)$; parametervoorstelling: $\overline{x}=(0,1,0)+\lambda(1,0,-1)$.

2^o. $a=-1$. Het stelsel is strijdig. Immers in dat geval is $r'=3$ en $r=2$. Dus geen oplossingen.

Samenvattend:
1^o. $a \neq -\frac{1}{2}$ en tevens $\neq -1$: stelsel eenduidig oplosbaar: één oplossing: $\overline{x}=(-\frac{1}{1+a}, -\frac{a}{1+a}, 2)$. Meetkundige betekenis: de drie platte vlakken in R_3, voorgesteld door de drie vergelijkingen van het stelsel, gaan door 1 punt.
2^o. $a=-\frac{1}{2}$: stelsel oplosbaar: ∞^1 oplossingen: $\overline{x}=(0,1,0)+\lambda(1,0,-1)$.
Meetkundige betekenis: de drie platte vlakken hebben een rechte lijn gemeen, waarvan deze oplossingsvergelijking de parameter-

voorstelling is.

3^o. a=-1: stelsel strijdig: geen oplossing. Meetkundige betekenis: onder de vlakken zijn twee evenwijdige vlakken, die dus geen punt gemeen hebben.

We hebben gezien, dat gelijkwaardige stelsels dezelfde oplossingen hebben. Het omgekeerde is voor niet-homogene stelsels niet algemeen waar: bijv. in geval de beide stelsels onoplosbaar zijn en niet gelijkwaardig. We kunnen echter wel bewijzen, dat geldt

Stelling 6.15. Hebben twee stelsels van lineaire homogene vergelijkingen dezelfde oplossingen, dan zijn ze gelijkwaardig.

Bewijs: Zijn de stelsels (I) en (II), dan vormen we uit (I) een nieuw stelsel (III) door er een willekeurige vergelijking van (II) onder te schrijven. De rang van de coëfficiënten-matrix kan hierdoor niet veranderen omdat de oplossingsruimte niet verandert. De onderste rij moet dan een lineaire combinatie zijn van de overige rijen. Dus elke vergelijking van (II) is een lineaire combinatie van de vergelijkingen van (I), hetgeen uiteraard ook omgekeerd geldt.

Voorbeelden

1. Voorbeeld ter toelichting van stelling 6.13:

Bepaal alle oplossingen van het stelsel:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 13 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 = -9 \\ 4x_2 - 3x_3 = -1 , \end{cases}$$

als reeds bekend is, dat $\overline{v}_o = (1,2,3)$ een oplossing is.

Opl.: We schrijven eerst alle oplossingen van het bijbehorende gereduceerde stelsel op. We zien eenvoudig in, dat voor zo'n oplossing geldt: $4x_2=3x_3$, $3x_1=-5x_2$, zodat de algemene oplossing van het gereduceerde stelsel geschreven kan worden als $\overline{v}_1= \lambda(5,-3,-4)$. De algemene oplossing van het gegeven stelsel is dus

$\overline{x}=\overline{v}=\overline{v}_o+\overline{v}_1=(1,2,3)+ \lambda(5,-3,-4)$ of $=(1+5\lambda,2-3\lambda,3-4\lambda)$.

Meetkundige interpretatie: De oplossingsvectoren $\overline{x}$ in R_3 bepalen een lijn l, die gaat door het punt (1,2,3) en die evenwijdig is aan de vector $(5,-3,-4)$ in R_3; de parametervoorstelling van deze lijn wordt gegeven door de oplossing van het stelsel: $\overline{x}=(1,2,3)+\lambda(5,-3,-4)$. De drie vergelijkingen van het gegeven stelsel zijn in R_3 de voorstellingen van drie platte vlakken, die gaan door de rechte l. De vlakken zijn dus vlakken van een vlakkenwaaier (zie blz.20): inderdaad is $2(3x_1+5x_2-13)+3(-2x_1-2x_2-x_3+9)=4x_2-3x_3+1$.

Opm. In plaats van de vector $\overline{v}_0=(1,2,3)$ hadden we in de oplossing een willekeurige andere oplossingsvector van het gegeven stelsel kunnen nemen.

2. Voorbeeld ter toelichting van stelling 6.12:

$$\begin{cases} 2a^2x_1 + 4x_2 + (a+1)x_3 = 0 \\ ax_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0\ . \end{cases}$$

Bepaal voor verschillende waarden van a de dimensie van en een lineair onafhankelijke basis voor de deelruimte der oplossingsvectoren in R_3.

Opl.: We herleiden de coëfficiëntenmatrix van het stelsel als volgt tot aequivalente matrices (d.z. matrices van dezelfde rang):

$$\begin{pmatrix} 2a^2 & 4 & a+1 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a^2-2a & 0 & a-1 \\ a-1 & 0 & -a+1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[a\neq 1]{\text{als}} \begin{pmatrix} 2a & 0 & 1 \\ 2a^2-a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 & 1 \\ (a-1)(2a+1) & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

We onderscheiden nu de volgende 3 gevallen (in verband met de aanname $a\neq 1$ in de herleiding, en het element $(a-1)(2a+1)$ in de laatste matrix):

1^o. $a\neq 1$, $\neq -\frac{1}{2}$. Dit geeft $r=3$. In dit geval heeft het stelsel dus alleen de nuloplossing $(n-r=3-3=0)$.

2^o. $a=-\frac{1}{2}$. Dit geeft $r=2$. De oplossingsruimte is 1-dimensionaal $(n-r=3-2=1$, ∞^1 oplossingen), en wordt gevormd door de vectoren $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3)$, waarvoor $-x_1+x_3=0$ en $x_1+2x_2-\frac{1}{2}x_3=0$, zodat $\overline{x}=\lambda(4,-1,4)$. Een basisvector van de oplossingsruimte is dus $(4,-1,4)$. De onbekenden x_1,x_2,x_3 hebben in dit geval de vaste verhouding $4:-1:4$.

3. $a=1$. Dit geeft $r=1$. De oplossingsruimte is 2-dimensionaal ($n-r=3-1=2$, ∞^2 oplossingen), en wordt gevormd door de vectoren $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3)$, waarvoor $x_1+2x_2+x_3=0$, zodat $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,-x_1-2x_2)=x_1(1,0,-1)+x_2(0,1,-2)=$ $=\lambda_1(1,0,-1)+\lambda_2(0,1,-2)$. Een lineair onafhankelijke basis voor de oplossingsruimte wordt dus bijv. gevormd door de beide vectoren $(1,0,-1)$ en $(0,1,-2)$.

Meetkundige interpretatie:
In 1°: de drie vlakken, voorgesteld door de drie vergelijkingen van het stelsel, gaan door 1 punt (de oorsprong). In 2° hebben de drie vlakken een lijn gemeen door de oorsprong in de richting $(4,-1,4)$; ze behoren tot een vlakkenwaaier met deze lijn als drager. In 3° vallen de drie vlakken samen.

3. Los op het stelsel:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

<u>Opl.</u>: Direct is duidelijk, dat $x_3=2$. In verband met $x_1+2x_2=3$ is de algemene oplossing dus $\overline{x} = (x_1,x_2,x_3) = (3-2x_2,x_2,2) =$ $= (3,0,2) + x_2(-2,1,0) = (3,0,2) +\lambda(-2,1,0)$. De vector $(3,0,2)$ is een particuliere oplossing van het stelsel, terwijl $\lambda(-2,1,0)$ de algemene oplossing van het gereduceerde stelsel is. (Stelling 6.13). Óf x_1 óf x_2 is willekeurig te kiezen (∞^1 oplossingen); x_3 is echter vast ($=2$). Dit houdt verband met het feit, dat van de paren kolomvectoren van de coëfficiëntenmatrix van het stelsel $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ het paar gevormd door de eerste twee lineair afhankelijk is en de beide andere paren lineair onafhankelijk.

<u>Opmerkingen</u>
1°. Uit het begrip "rang" van een matrix volgt direct, dat m vectoren ieder met n kentallen, dus liggende in een R_n, dan en slechts dan een lineair afhankelijk stelsel vormen,

als de rang van hun matrix (d.i. de (m,n)-matrix bestaande uit m rijen met iedere rij de n kentallen van elke vector) kleiner is dan m. Gevolg: n+1 (of meer) vectoren in een R_n vormen steeds een lineair afhankelijk stelsel, in overeenstemming met stelling 3.6.

2°. Elk lineair onafhankelijk stelsel vectoren waarvan elke vector een lineaire combinatie is van een gegeven m-tal vectoren, kan hoogstens m vectoren bevatten (gevolg van stelling 3.10). Dus hebben we meer dan m lineaire combinaties van m vectoren, dan vormen deze combinaties altijd een lineair afhankelijk stelsel.

3°. We spreken ook van lineaire (on)afhankelijkheid van vergelijkingen; m vergelijkingen van een homogeen lineair stelsel heten afhankelijk resp. onafhankelijk als de m vectoren gevormd door de coëfficiënten van elk der vergelijkingen een lineair afhankelijk resp. een lineair onafhankelijk stelsel vormen.
Stellen we de vergelijkingen van het stelsel kortweg voor door: $L_1=0,\ L_2=0,\ldots,L_m=0$, dan zijn deze vergelijkingen dus afhankelijk, als er een identieke betrekking van de vorm:

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_m L_m \equiv 0$$

bestaat, waarin niet alle λ's gelijk zijn aan 0. Bestaat deze betrekking alleen voor $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$, dan heten de vergelijkingen onafhankelijk. Ook spreekt men van lineaire (on)afhankelijkheid der linkerleden, de lineaire vormen $L_1,\ldots,L_m$ (zie blz.53 e.v.) volgens dezelfde definitie.
De begrippen afhankelijk en onafhankelijk kunnen we ook definiëren voor niet-homogene lineaire vergelijkingen. We beschouwen dan van een stelsel niet-homogene vergelijkingen de op nul herleide (door de rechterleden naar het linkerlid te brengen) vergelijkingen van dat stelsel en passen op deze bovenstaande definities toe voor afhankelijkheid en onafhankelijkheid, geldig voor een homogeen lineair stelsel.

4°. Door herleiding van een gegeven stelsel lineaire vergelijkingen tot een van eenvoudiger gedaante (schoonveegreductieproces) waren we in staat op eenvoudige wijze de

oplosbaarheid van het stelsel vast te stellen en in geval van oplosbaarheid de oplossingen te bepalen.
Uit theoretisch standpunt is het van belang op te merken, dat met behulp van determinanten eveneens eenvoudige oplosbaarheidsvoorwaarden en oplossingsmethoden kunnen worden gegeven. De theorie der determinanten, die hieraan ten grondslag ligt, zal in de volgende paragraaf worden behandeld.

Opgaven

1) a) Vormen de elementen uit iedere rij van een matrix een rekenkundige reeks, dan is de rang van die matrix hoogstens 2. Bewijs dit.

b) Bepaal a,b en c zo, dat het stelsel:

$$\begin{cases} x+y+z+u=0 \\ x+2y+3z+4u=2 \\ 2x+3y+4z+5u=a \\ 5x+7y+9z+11u=b \\ 7x+10y+13z+16u=c \end{cases}$$

oplosbaar is. Bepaal de algemene oplossing.

2) Heeft een (m,n)-matrix A de rang r, dan bestaat er een matrix X van de rang $n-r$, zó dat $AX=0$, doch niet een matrix X van hogere rang, die aan deze vergelijking voldoet. Bewijs dit.

3) Bepaal voor alle waarden van a en b de oplossing(en) van het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ 2x+ay+8z=0 \\ bx+y+2z=0 \end{cases} \quad \text{(examen 1959)}.$$

4) Gegeven is, dat het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+2x_4=0 \\ x_2+bx_3+x_4=0 \\ x_1+4x_2+3x_3+ax_4=-b \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=1 \end{cases}$$

tenminste 2 oplossingen heeft. Bepaal a,b en de oplossingen in vectorvorm.

5) Gegeven is, dat het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 = 0 \\ 2x_1 + (a+1)x_2 + (a-1)x_3 = 0 \\ (a-1)x_2 = 0 \end{cases}$$

oplossingen ongelijk de nuloplossing bezit. Bepaal a en een lineair onafhankelijke basis voor de oplossingsruimte.

6) Gevraagd te onderzoeken voor welke waarde(n) van a de volgende stelsels strijdig zijn, oplosbaar en eenduidig oplosbaar. In de laatste twee gevallen worden de oplossingen gevraagd:

a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = 1 \\ 11x_1 + ax_2 + 4x_3 = 2a \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3a+1 \\ 4x_1 + ax_2 - 6x_3 = 2a+10 \end{cases}$.

7) Bepaal de waarde(n) van a, waarvoor het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2x + 9ay + z = 100 \\ ax + 2z = 12a \\ 2x + 3y + 3az = 1-3a \end{cases}$$

meer dan één oplossing heeft. Geef bij de gevonden a de oplossingen.

8) Los op het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ bx_1 + x_2 + cx_3 = 1 \\ x_1 + dx_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

en beschouw alle gevallen, die zich kunnen voordoen.

9) Los op:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1 \\ -2x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 5x_4 = -3 \end{cases} .$$

10) Gegeven het stelsel:

$$\begin{cases} a^2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ ax_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Bepaal voor verschillende waarden van a de dimensie van en een lineair onafhankelijke basis voor de oplossingsruimte.

11) Van het volgende stelsel is bekend, dat het twee verschillende oplossingen heeft.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - ax_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 2ax_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 . \end{cases}$$

Bepaal a en de oplossingen.
Hetzelfde vraagstuk maar dan voor het stelsel

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + 4x_3 = a-1 \\ x_1 - x_2 + ax_3 = 1 . \end{cases}$$

12) Gegeven $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ a & 1 & -1 & -1 \\ 0 & b & 2 & 5 \end{pmatrix}$ heeft de rang 2. Bepaal a en b.
Evenzo voor de matrix $\begin{pmatrix} 2 & a & 3 & b \\ 1 & 0 & a & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13) Heeft een stelsel lineaire vergelijkingen de oplossingen $\overline{x}'$ en $\overline{x}''$ en is $\overline{x}' + \overline{x}''$ ook een oplossing, dan is het stelsel homogeen. Bewijs dit.

14) Bewijs dat stelling 6.15 ook voor inhomogene stelsels geldt, als aan het gegeven wordt toegevoegd, dat ze minstens één oplossing hebben.

15) Bewijs, dat als een stelsel vergelijkingen strijdig is
a) de rang van de kleine matrix kleiner is dan het aantal vergelijkingen;
b) de vergelijking 0=1 een lineaire combinatie is van de vergelijkingen van het stelsel.

16) Zij gegeven de matrix-vergelijking $AX=0$ met $A=(m,n)$-matrix en X een kolom bestaande uit n elementen, als onbekende.
   1) Toon aan, dat de oplossingsruimte identiek is met de kern van de bij de matrix A behorende transformatie A (zie blz.62).
   2) Leid uit stelling 6.12 een bewijs af van stelling 4.4.

----

§ 7 Determinanten

Inleiding: Zij gegeven 2 vergelijkingen met 2 onbekenden:

$$(7.1) \qquad \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_3 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 = b_3 \end{cases} ,$$

en wordt gevraagd deze vergelijkingen op te lossen, dan vindt men, als $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ ondersteld wordt, als oplossing:

$$(7.2) \quad x_1=\frac{a_3b_2-a_2b_3}{a_1b_2-a_2b_1} \quad , \qquad x_2=\frac{a_1b_3-a_3b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \quad .$$

De uitdrukking $a_1b_2-a_2b_1$ in de noemers van 7.2 speelt bij het oplossen van het stelsel (7.1) een bijzondere rol. Voor deze uitdrukking voeren we een andere schrijfwijze in:

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ is het symboolvoor de uitdrukking $a_1b_2-a_2b_1$.

Men noemt dit getal de determinant van de (2,2)-matrix $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.

Ook de tellers van de rechterleden van (7.2) zijn nu in determinant-vorm te schrijven en wel geldt:

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = a_3b_2-a_2b_3 \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_3-a_3b_1 ,$$

zodat als weer $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ondersteld wordt, de oplossing (7.2) van het stelsel (7.1) ook te schrijven als quotiënt van determinanten:

$$(7.2)' \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \quad , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \quad .$$

Met behulp van determinanten kan de oplossing dus zeer eenvoudig worden genoteerd.

Wenst men het stelsel van 3 vergelijkingen met 3 onbekenden:

$$(7.3) \qquad \begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=a_4 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=b_4 \\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=c_4 \end{cases}$$

op te lossen, dan kan dit gebeuren door eliminatie van eerst een en daarna nog een tweede onbekende. Het is echter ook mogelijk twee onbekenden tegelijk te elimineren. Doen we dit met de onbekenden x_2 en x_3, dan proberen we twee getallen p en q te vinden, die voldoen aan:

$$(7.4) \qquad \begin{cases} a_2p+b_2q=c_2 \\ a_3p+b_3q=c_3 \end{cases} \quad .$$

(7.4) is nu van dezelfde vorm als (7.1), zodat als $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$, volgens (7.2)', geldt:

$$p = \frac{\begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \quad , \quad q = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \quad .$$

Aangezien $(a_1p+b_1q-c_1)x_1=a_4p+b_4q-c_4$ geldt:

$$\left(a_1\begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right)x_1=a_4\begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} +b_4\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} -c_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} .$$

Daar $\begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ en $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ geldt eveneens:

$$(7.5)\left(a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} +c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\right)x_1 =a_4\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} -b_4\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} +c_4\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} .$$

We definiëren nu op dezelfde wijze als bij een (2,2)-matrix de determinant van de (3,3)-matrix $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, als de coëfficiënt van x_1 in het linkerlid van (7.5):

$$(7.6)\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1,\ \text{zodat}$$

$$(7.7)\quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_3 \\ b_4 & b_2 & b_3 \\ c_4 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

, en analoge uitdrukkingen voor x_2 en x_3, mits het getal in de noemer $\neq 0$ wordt verondersteld (vergelijk (7.2)').

Opm. Sarrus gaf een regel aan om direct de determinant van een (3,3)-matrix $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ op te schrijven. Hij stelde namelijk het volgende schema op

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}$$

en vormde er de 6 door de lijnen aangegeven producten uit. De drie producten in de richting $a_1\ b_2\ c_3$ krijgen elk het teken +, de andere drie het teken -, in overeenstemming met het laatste lid van vgl. 7.6.

We gaan nu over tot de algemene definitie van een determinant van een vierkante n-matrix (zgn. determinant van de n^e orde). Daarna zullen we in deze paragraaf enige determinanten-theorie ontwikkelen en vervolgens deze theorie toepassen o.a. bij het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen.

Om tot een eenvoudige uitdrukking te komen voor een determinant van de n^e orde, voeren we eerst het begrip permutatie in.

Beschouw hiertoe een eindig aantal bijv. n elementen. Deze elementen kunnen we op verschillende wijze in een rij rangschikken. Onder een permutatie van de n elementen verstaan we nu een zekere rangschikking van deze elementen. Zo bezitten bijv. 3 elementen a_1, a_2 en a_3 de 6 permutaties $a_1a_2a_3$, $a_3a_1a_2$, $a_2a_3a_1$, $a_2a_1a_3$, $a_1a_3a_2$ en $a_3a_2a_1$. Zijn de elementen zoals hier genummerd, dan kunnen we ons tot getallen-permutaties beperken, dus bij 3 elementen tot de zgn. 3-permutaties: 1 2 3, 3 1 2, 2 3 1, 2 1 3, 1 3 2 en 3 2 1 (bij n elementen spreken we van n-permutaties). Twee willekeurige getallen in een getallenpermutatie vormen een inversie, wanneer het grootste getal in deze permutatie vóór het kleinste staat.

Zo heeft bijv. de 5-permutatie 2 3 5 1 4 de 4 inversies 2 1, 3 1, 5 1 en 5 4. Analoog voor een permutatie van n elementen $a_1, \dots, a_n$: een tweetal elementen in een permutatie $a_{\alpha_1}\ a_{\alpha_2} \dots a_{\alpha_n}$ van $a_1, \dots, a_n$ vormt een inversie, als het element met hogere index voorafgaat aan die met lagere index. Ook hier kunnen we ons weer beperken tot de getallen-permutatie $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n$ der indices gevormd uit de getallen $1, 2, \dots, n$.

Men noemt een permutatie even als het aantal inversies in de permutatie even is, anders oneven (nul is per definitie even, zodat de permutatie $a_1\ a_2 \dots a_n$ waarbij dus de indices in de natuurlijke volgorde, even is; men spreekt in dit geval wel van de grondpermutatie). Zo is bijv. de permutatie $a_2a_3a_5a_1a_4$ even, daarentegen $a_3a_5a_4a_1a_2$ oneven.

Twee even of twee oneven permutaties heten van dezelfde soort (of pariteit); een even en een oneven permutatie van verschillende soort (of pariteit).

Eenvoudig is in te zien, dat permutaties de volgende eigenschappen bezitten:

a) Verwisselt men in een permutatie twee opeenvolgende elementen (ook wel geheten het uitvoeren van een transpositie) dan gaat zij in een permutatie over van de andere soort.

b) Verwisselt men in een permutatie twee willekeurige elementen, dan gaat zij eveneens in een permutatie van de andere soort.

over.

c) Er zijn evenveel even als oneven permutaties.

Met behulp van het begrip permutatie geven we nu de definitie volgens Leibniz van de determinant (van de n^e orde) van een n-matrix A:

Eerste determinantenregel: Onder de determinant van een n-matrix A (algemeen element a_{ik}) verstaan we het eindresultaat (i.h.a. een getal) verkregen volgens het volgende voorschrift:

> Vorm alle n! producten van n factoren, die een element uit iedere rij en een element uit iedere kolom van A als factor bevatten. Rangschik de factoren van ieder product naar de rijen in de natuurlijke volgorde. Voorzie het product van het teken + of het teken -, al naar de kolom-indices een even of een oneven permutatie vormen. Tel daarna de resultaten op.

Notatie voor de determinant van A: det A, det(A), d(A) of $|A|$.
In formule:

$$(7.8)\qquad \det A (=\det(A)=d(A)=|A|)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$=\sum(-1)^j a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}.$$

De som wordt uitgestrekt over alle permutaties $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ der getallen 1,2,...,n. Een bepaald product in deze som krijgt het teken $(-)^j$, waarin j het aantal inversies is in de getallenpermutatie gevormd door de kolomindices van de a's in dit product. Zo kunnen we voor det A dus ook schrijven
$\det A = \sum \operatorname{sgn}\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}$, waarin de som zich uitstrekt over alle permutaties $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ van de getallen 1,...,n. De tekenfunctie sgn σ is 1 of -1 al naar de permutatie $\sigma(i)$ even of oneven is.

Opm.1) De bovengegeven definities van de determinant van de 2^e en 3^e orde zijn bijzondere gevallen van (7.8). (een 1-matrix bevat slechts 1 element en de waarde van de determinant van deze matrix is juist dat element.

Opg. Schrijf alle 4 ! =24 producten op van de determinant van een 4-matrix voorzien van het goede teken en controleer hierbij de bovengegeven permutatie-eigenschappen a-c.

2) Het is duidelijk, dat men met behulp van de eerste determinantenregel alle producten, die nodig zijn om een determinant van de n^e orde te berekenen, in het algemeen verkrijgt door de kolomindices alle n-permutaties te laten doorlopen met de rij-indices in een bepaalde vaste volgorde, bijv. de natuurlijke volgorde.
Dan ontstaan inderdaad n ! producten, waarvan de helft het teken + en de helft het teken - krijgt.

3) De definitie van de determinant van een matrix geldt alleen voor vierkante matrices. Aan niet-vierkante matrices wordt geen determinant toegevoegd.

4) De elementen van een matrix behoeven niet juist getallen voor te stellen. Voldoende is het, dat de elementen van dien aard zijn, dat de bewerkingen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen kunnen worden uitgevoerd en de gewone rekenregels gelden (bijv. functies van een of meer veranderlijken). Tenzij andere vermeld zullen wij in het volgende evenwel aannemen, dat de elementen getallen voorstellen.

5) Hoewel de determinant van een matrix bestaande uit getal-elementen, niets anders is dan een getal, spreken we toch van een rij of van een kolom van de determinant, daarmee bedoelende die bepaalde rij of kolom van de matrix, waarbij de determinant behoort. Evenzo spreken we van rij- en kolomvectoren van een determinant, (het aantal rijen (= aantal kolommen) van een determinant, d.i. de orde van de determinant, noemt men ook wel de graad van de determinant.).

Verwisselen we in een product van de determinantvorm twee factoren, dan gaat volgens eigenschap b) der permuties op blz.112, zowel de permutatie van de rijindices, als die van de kolomindices in een van een andere soort over. Zijn de rijindices in de natuurlijke volgorde (even permutatie), dan krijgt dit product volgens de eerste determinantenregel het teken + dan wel het teken -, al naar de permutatie der kolomindices even of oneven is, zodat we komen tot de volgende regel:

<u>Tweede determinantenregel</u>: Onder de determinant van een n-matrix A (algemeen element a_{ik}) verstaan we het getal, dat berekend wordt volgens het volgende voorschrift:

> Vorm alle n! producten van n factoren, zodanig dat in elk product een element uit iedere rij en een element uit iedere kolom van A als factor optreedt. Voorzie het product van het teken +, als de rij- en kolomindices permutaties van dezelfde soort vormen, anders van het teken -. Tel de resultaten op.

In formule:

$$(7.9)\qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{i+j} a_{\alpha_1 \beta_1} a_{\alpha_2 \beta_2} \cdots a_{\alpha_n \beta_n}.$$

De som wordt uitgestrekt over alle permutaties $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n$ der getallen $1,\ldots,n$. Omdat n! producten gevormd moeten worden, houden wij bij alle producten de permutatie $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ vast (echter wel willekeurig). De term $a_{\alpha_1 \beta_1} a_{\alpha_2 \beta_2} \cdots a_{\alpha_n \beta_n}$ krijgt het teken $(-)^{i+j}$, als i resp. j het aantal inversies voorstelt in de getallen-permutatie $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ (vast) resp. $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n$ (lopend).
Willen we in de som in het rechterlid van (7.9) niet alleen de β's doch ook de α's alle permutaties der getallen $1,\ldots,n$ laten doorlopen, dan moet de dan verkregen som nog gedeeld worden door n!.

<u>Opm.</u> Een <u>term</u> van een determinant is een der producten met behulp waarvan de determinant volgens de eerste of de tweede determinantenregel berekend wordt, zonder teken.

Uit de tweede determinantenregel volgt direct, dat bij de berekening van een determinant de rijen hierin volkomen dezelfde rol spelen als de kolommen, zodat

Stelling 7.1 De determinant van een matrix verandert niet als men de matrix wentelt om zijn hoofddiagonaal (dus bij verwisseling van overeenkomstige rijen en kolommen). In formule:

(7.10) $$\det A^T = \det A.$$

Vanwege de symmetrie in de tweede determinantenregel geldt bovendien, dat iedere stelling die voor de rijen van een determinant bewezen is, noodzakelijk ook voor de kolommen geldt, en omgekeerd. De stellingen, die we in het volgende zullen formuleren voor rijen en ook voor kolommen, zullen we daarom in het algemeen slechts behoeven te bewijzen voor de rijen of voor de kolommen alleen.

We merken op, dat de determinant van een n-matrix A een homogene lineaire functie is van zijn rij- en kolomvectoren. Stellen we een zekere rij (kolom) van A voor door $\bar{x}$ en laten we de andere rijen (kolommen) constant, dan is de determinant van A een homogene lineaire functie van de kentallen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ van $\bar{x}$, d.w.z. voor te stellen door

$$\det A = f(x_1, \ldots, x_n) = f(\bar{x}), \text{ waarbij geldt:}$$

(7.11) $$\begin{cases} f(\lambda \bar{x}) = \lambda f(\bar{x}) \\ f(\bar{x}+\bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y}). \end{cases}$$

Hieruit volgen de volgende stellingen:

Stelling 7.2 Vermenigvuldigt men alle elementen van een rij (kolom) van A met λ, dan wordt det A met λ vermenigvuldigd.

Opm.1) Een gevolg is, dat een determinant met een rij (of kolom) nullen, gelijk is aan nul.

2) Vermenigvuldigt men alle elementen van een n-matrix A met λ, dan wordt elke rij met λ vermenigvuldigd, zodat

(7.12) $$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

Uit deze vergelijking volgt dat voor een alternerende matrix A van oneven orde n geldt:
$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$, zodat $\det A = 0$ en dus: de determinant van een alternerende matrix van

oneven orde is nul.

Stelling 7.3 Is een rij (kolom) van A de som van twee vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$, dan is det A de som van de determinanten der matrices, die uit A ontstaan, door die rijen (kolommen) achtereenvolgens door $\bar{a}$ en $\bar{b}$ te vervangen.

Stelling 7.4 Verwisselt men in een matrix twee willekeurige rijen (kolommen), dan gaat de determinant van de matrix in zijn tegengestelde over.

Bewijs: Verwisselen we twee rijen van de matrix A met elkander, zodat een nieuwe matrix A' ontstaat, dan merken we op, dat elke term van det A ook voorkomt als term van det A' en omgekeerd. Voorts geldt volgens de determinantenregels, dat iedere term in det A het tegengestelde teken krijgt als diezelfde term in det A'.

Dit op grond van de eigenschap b) der permutaties op blz.112.

Beschouwen we het bijzondere geval, dat de matrix twee gelijke rijen (kolommen) heeft , dan volgt uit stelling 7.3 bij verwisseling van de twee gelijke rijen (kolommen):
det A = -det A' = -det A, zodat det A = 0 en dus:

Stelling 7.5 De determinant van een matrix met twee gelijke rijen (kolommen) is nul.

Uit de stellingen 7.2, 7.3, en 7.5 volgt nu:

Stelling 7.6 Telt men bij een rij (kolom) van een matrix een andere rij (kolom) vermenigvuldigd met een getal λ op, dan behoudt de determinant van de matrix dezelfde waarde .

Stelling 7.7 Vormen de rij (kolom)-vectoren van een matrix een lineair afhankelijk stelsel, dan in de determinant van die matrix nul.

Vb. $\begin{vmatrix} 0 & 6a & 3b \\ -a & 0 & c \\ -b & -2c & 0 \end{vmatrix} = 0$, want $c(0,6a,3b)-3b(-a,0,c)+3a(-b,-2c,0)=\bar{0}$;
(als a=b=c=0 volgt direct: det is 0).

Uit stelling 7.7 volgt:

Stelling 7.8 Is de waarde van een determinant ongelijk aan nul, dan vormen de rij (kolom)-vectoren een lineair onafhankelijk stelsel.

Deze stelling is ook omkeerbaar:

Stelling 7.9 Als van een determinant de rij (kolom)-vectoren een lineair onafhankelijk stelsel vormen, dan is de waarde van de determinant ongelijk aan nul.

Bewijs: We bewijzen de stelling uitgaande van lineair onafhankelijke rijen. Stel de rijen van det A (van de n^e orde) voor door $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$. Deze vormen volgens het gegeven een lineair onafhankelijk stelsel en dus een lineair onafhankelijke basis voor een R_n. We gaan nu de basisvectoren $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ in deze basis uitdrukken. Stel dat voor $\bar{e}_1$ geldt:
$\bar{e}_1 = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \ldots + \lambda_r \bar{a}_r + \ldots + \lambda_n \bar{a}_n$. Minstens één der λ's moet $\neq 0$ zijn, stel $\lambda_r \neq 0$. Vervangen we nu in A de r^e rijvector door $\bar{e}_1$, dan blijkt op grond van de stellingen 7.2 en 7.6, dat de nieuwe matrix een determinant heeft, waarvan de waarde gelijk is aan λ_r x det A.
Deze nieuwe determinant heeft weer n lineair onafhankelijke rijvectoren. Een der rijvectoren ($\neq \bar{e}_1$) vervangen we nu in deze determinant door $\bar{e}_2$. $\bar{e}_2$ is een lineaire combinatie van $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{r-1}, \bar{e}_1, \bar{a}_{r+1}, \ldots, \bar{a}_n$. De determinant, die nu ontstaan is, bevat dan twee rijen $\bar{e}_1$ en $\bar{e}_2$. Op deze wijze voortgaande, kunnen we alle rijvectoren uit det A vervangen door de basisvectoren uit R_n. Door eventuele verwisseling van rijen blijkt tenslotte:

$$\det A = \text{constante} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{constante.}$$

De constante[1] is $\neq 0$, dus det A $\neq 0$ q.e.d.

Gevolg:

Stelling 7.10 Als de waarde van een determinant gelijk is aan nul, dan vormen de rij (kolom)-vectoren van die determinant een lineair afhankelijk stelsel.

----

1) zijnde een product van factoren $\neq 0$.

De stellingen 7.7 t/m 7.10 geven samengevat:

Stelling 7.11 De rijen (kolommen) van een determinant vormen dan en slechts dan een lineair onafhankelijk stelsel, als de waarde van die determinant ongelijk is aan nul.

Deze stelling kunnen we nog een andere vorm geven. Aangetoond kan namelijk worden dat geldt:

Stelling 7.12 Een vierkante matrix is dan en slechts dan singulier als de bijbehorende determinant gelijk is aan nul.

Bewijs: 1) Zij A een n-matrix, dan bewijzen, dat uit det A=0 volgt, dat A geen inverse heeft, Om dit te bewijzen merken we op, dat de kolomvectoren van A, die we voorstellen door $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$, volgens stelling 7.11 een lineair afhankelijk stelsel vormen. Minstens een dier vectoren is dan in de andere uit te drukken:

Stel $\bar{v}_r = \lambda_1 \bar{v}_1 + \ldots + \lambda_{r-1}\bar{v}_{r-1} + \lambda_{r+1}\bar{v}_{r+1} + \ldots + \lambda_n \bar{v}_n$.

Interpreteren we A als een homogene lineaire (n,n)-transformatie dan geldt voor de transformatie van de basis-vectoren:

$\bar{v}_1 = A\bar{e}_1, \bar{v}_2 = A\bar{e}_2, \ldots\ldots\ldots, \bar{v}_r = A\bar{e}_r, \ldots, \bar{v}_n = A\bar{e}_n$, zodat

$$A\bar{e}_r = \bar{v}_r = A(\lambda_1\bar{e}_1 + \ldots + \lambda_{r-1}\bar{e}_{r-1} + \lambda_{r+1}\bar{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n\bar{e}_n) .$$

Stel A heeft een inverse A^{-1}, dan geldt dus

$$\bar{e}_r = A^{-1}A\bar{e}_r = \lambda_1\bar{e}_1 + \ldots + \lambda_{r-1}\bar{e}_{r-1} + \lambda_{r+1}\bar{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n\bar{e}_n,$$

zodat de basisvectoren dan afhankelijk zouden zijn, m.a.w. A heeft geen inverse.

2) Aangetoond moet worden, dat uit het gegeven, dat de n-matrix A geen inverse heeft, volgt det A=0. Om dit te bewijzen stellen we de rang van A gelijk aan n. Volgens stelling 6.4 of 6.14 is dan de matrixvergelijking A X = I (of XA=I) (eenduidig) oplosbaar, zodat A dan wel een inverse zou bezitten. De rang van A is dus kleiner dan n; de kolomvectoren van A' vormen dus een lineair afhankelijk stelsel en dus volgens

stelling 7.11: det A = 0, q.e.d.

Opm. Met behulp van de product.- stelling voor determinanten, die later zal worden afgeleid, zal het eerste gedeelte van bovenstaand bewijs langs zeer eenvoudige weg kunnen worden gegeven.

Uit stelling 7.11 en 7.12 volgt nu dus:

Stelling 7.13 De rijen (kolommen) van een vierkante matrix vormen dan en slechts dan een lineair afhankelijk stelsel, als de matrix singulier is.

Uit stelling 7.12 en 7.13 volgt nu ook:

Stelling 7.14 De rang van een vierkante n-matrix A is dan en slechts dan gelijk aan n als

a) A niet-singulier of (hiermede aequivalent)
b) det A $\neq$ 0.

Een andere belangrijke stelling, die uit de ontwikkelde theorie kan worden afgeleid, is de volgende:

Stelling 7.15 Is A een niet-singuliere matrix en B een willekeurige matrix, zó dat productvorming AB mogelijk is, dan geldt:

rang van AB = rang van B.

Evenzo: Als B een matrix is, zodat productvorming BA mogelijk is:

rang van BA = rang van B.

Bewijs: Stel AB=C. De stelsels vergelijkingen:

$$(\mathrm{I})\ B\,\overline{x} = \overline{0} \quad \text{en } (\mathrm{II})\ C\,\overline{x} = \overline{0}$$

(matrix opgevat als een homogene lineaire transformatie) hebben dezelfde oplossingen, want uit

$B\overline{x} = \overline{0}$ volgt $AB\overline{x} = C\overline{x} = \overline{0}$ en uit

$C\overline{x} = \overline{0}$ volgt $A^{-1}C\overline{x} = B\overline{x} = \overline{0}$.

Is nu r de rang van B, dan heeft (I) volgens stelling 6.12 (n-r) lineair onafhankelijke oplossingsvectoren (n=aantal kolommen van B of van C); (II) heeft dan ook juist dit aantal lineair onafhankelijke oplossingsvectoren, zodat de rang van

C dan ook gelijk is aan r.
Voor het bewijs van het tweede gedeelte van stelling 7.15 stellen we eerst BA = D. Stel verder, dat (n - r) lineair onafhankelijke oplossingen van (I) gevormd worden door de vectoren $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{n-r}$, en dat $A^{-1}\overline{v}_i = \overline{w}_i$, $(i = 1, \ldots, n-r)$. De vectoren $\overline{w}_i$ zijn nu volgens stelling 5.3 ook lineair onafhankelijk. Laat de vector $\overline{p}$ een oplossing zijn van
(III) $D\,\overline{x} = \overline{0}$.
Dan is $D\overline{p} = BA\overline{p} = \overline{0}$, zodat $A\overline{p}$ aan (I) voldoet. $A\overline{p}$ is dan een lineaire combinatie van $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{n-r}$: $A\overline{p} = \lambda_1\overline{v}_1 + \ldots + \lambda_{n-r}\overline{v}_{n-r}$,
en dus $\overline{p} = \lambda_1 A^{-1}\overline{v}_1 + \ldots + \lambda_{n-r} A^{-1}\overline{v}_{n-r} = \lambda_1\overline{w}_1 + \ldots + \lambda_{n-r}\overline{w}_{n-r}$.
Iedere oplossing van (III) is dus een lineaire combinatie van de lineair onafhankelijke vectoren $\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_{n-r}$, terwijl ook iedere lineaire combinatie van deze laatste vectoren een oplossing is van (III), zodat dan D = BA volgens stelling 6.12 de zelfde rang r moet hebben als B. q.e.d.

Uit stelling 7.14 en 7.15 volgt direct:

<u>Stelling 7.16</u> Het product van twee vierkante matrices van dezelfde orde is dan en slechts dan niet-singulier als beide matrices niet-singulier zijn.

Opmerking. In bovenstaande stelling werd gegeven, dat de betreffende matrices van dezelfde orde waren. Dit werd uitsluitend gedaan om product-vorming van de matrices mogelijk te maken. In het vervolg evenwel, zullen we in gevallen, waarbij sprake is van matrix-producten en omtrent de afmetingen der factoren niets expliciet is vermeld, dikwijls stilzwijgend aannemen, dat product-vorming mogelijk is, zodat dan extra vermeldingen over de afmetingen, zoals bijv. in de vorige stelling, achterwege kunnen blijven. Ook zullen we vaak als we over de determinant van een matrix A spreken, stilzwijgend onderstellen dat A dan vierkant is, want alleen een vierkante matrix heeft een determinant.

<u>Stelling 7.17</u> De rang van het product van twee matrices A en B is hoogstens gelijk aan de rang van elk der factoren.

<u>Bewijs</u>: Uit de definitie van matrix-product volgt, dat de rijvectoren van AB lineaire combinaties zijn van de rijvectoren van B. Bijv. als $A = (a_{ij})$ en de rijvectoren van B: $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \ldots, \bar{b}_n$, dan is de i^e rijvector van AB: $a_{i1}\,\bar{b}_1 + a_{i2}\,\bar{b}_2 + \ldots + a_{in}\,\bar{b}_n$.
Volgens opmerking 2 blz. 105 kan men uit m lineair onafhankelijke vectoren hoogstens m lineair onafhankelijke combinaties vormen, zodat rang AB $\leqslant$ rang B, de tweede factor van het product AB. Beschouw vervolgens $(AB)^T = B^T A^T$. Volgens het voorgaande geldt: rang $(AB)^T \leqslant$ rang A^T en dus ook rang AB $\leqslant$ rang A, want bij transponeren van een matrix verandert de rang niet. Hiermede is het bewijs geleverd.

<u>Opmerking</u> 1) Heeft een matrix A de inverse A^{-1}, dan geldt volgens st. 7.17 enerzijds: rang AB $\leqslant$ rang B, doch ook anderzijds in verband met $B = A^{-1}(AB)$: rang AB $\geqslant$ rang B, zodat rang AB = rang B. Evenzo is rang CA = rang C. We vinden dan als bijzonder geval stelling 7.15 terug.

2) Bestaat bij een matrix A een matrix B met de eigenschap, dat AB en BA eenheids matrices zijn, dan kan worden aangetoond, dat dit impliceert, dat beide eenheids matrices van dezelfde orden zijn, en dus, dat de matrices A en B vierkant zijn. Onderstel namelijk, dat A van het type (m,n) is en dat $m \leqslant n$. De producten AB en BA hebben betekenis, zodat dan B van het type (n,m) moet zijn. BA is dus een eenheids matrix van de n^e orde. $BA = I_n$. Als A de rang r heeft, dan geldt volgens stelling 7.17 : $n \leqslant r$ en dus i.v.m. $m \leqslant n$: $r \leqslant m \leqslant n \leqslant r$, zodat $m = n$. Eenzelfde resultaat wordt verkregen als we onderstellen $n \leqslant m$ (maak dan gebruik van de vergelijking $AB = I_n$). De matrix B met bovengenoemde eigenschappen hebben we in § 5 blz. 72 de inverse A^{-1} van A genoemd. Er werd daar uitgegaan van vierkante matrices. Volgens het bovenstaande was dit een overbodig gegeven, omdat de definiërende vergelijkingen dit reeds impliceerden. Gaan we in de definitie van A^{-1} wel uit van een vierkante matrix A, dan kan worden volstaan met één der verge-

lijkingen $AA^{-1} = I$ of $A^{-1}A = I$ omdat de ene vergelijking uit de andere volgt (zie opmerking blz. 73). Immers uit bijv. $A^{-1}A = I$ volgt dat de rijen van I (bestaande uit basisvectoren) lineaire combinaties zijn van de rijen van A, zodat volgens opmerking 2 blz. 105 de matrix A dan noodzakelijk een rang moet hebben gelijk aan de orde. Volgens stelling 6.14 moet er dus een matrix B bestaan met de eigenschap $AB = I$. Doch dan geldt: $B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1}$, zodat uit $AB = I$ dus volgt: $AA^{-1} = I$. Een analoog bewijs voor $A^{-1}A = I$ als gevolg van $AA^{-1} = I$.

In § 5 definieerden we een singuliere matrix A als een vierkante matrix, die geen inverse heeft, d.w.z. er is geen matrix B met de eigenschap, dat AB zowel als BA eenheids matrices zijn. Met deze definitie hebben ook niet-vierkante matrices geen inverse. Indien we nu afspreken, dat een singuliere matrix een matrix is (vierkant of niet-vierkant) die geen inverse bezit, dan bestaat de verzameling der singuliere matrices dus uit de verzameling der niet-vierkante matrices, aangevuld met de verzameling der vierkante matrices, die geen inverse bezitten. Deze zelfde verzameling verkrijgen we als er de matrices beschouwen, waarvan het stelsel der rijvectoren en dat der kolomvectoren beide lineair onafhankelijk zijn. Ook op deze wijze hadden de singuliere matrices dus gedefinieerd kunnen worden.
Een niet-singuliere matrix A kan dan gedefinieerd worden als een matrix, waarvan zowel het stelsel der rijvectoren als dat der kolomvectoren lineair onafhankelijk zijn. Een niet-singuliere matrix is dan noodzakelijk vierkant en heeft een rang gelijk aan de orde. Deze matrix heeft een inverse A^{-1} met de eigenschap dat $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, en dit is de definitie die gegeven is in § 5.
We merken nog op, dat de stellingen 7.12 t/m 7.16 van deze paragraaf ook geldig blijven als we de nieuwe definitie van singuliere matrices gebruiken. We merken echter wel op, dat het product van twee singuliere matrices dan niet meer singulier behoeft te zijn, (bijv. bij vermenigvuldiging van een rij en een kolomvector met inwendig product $\neq 0$). Het product van 2 vierkante singuliere matrices is volgens stelling 7.16 wel altijd singulier.

Een nulmatrix 0 defineerden we als een matrix, waarvan alle elementen nul zijn. Voor iedere matrix A geldt, dat $A0 = 0$ en $0A = 0$. Opgemerkt dient te worden, dat terwijl een eenheids matrix altijd vierkant is, dit voor een nulmatrix niet het geval behoeft te zijn.

<u>Definitie</u> Een matrix A ($\neq 0$) is <u>nuldeler</u>, indien er een matrix $B \neq 0$ bestaat, zodanig, dat $AB = 0$ en/of een matrix $C \neq 0$, zodanig, dat $CA = 0$.

Nu geldt:

<u>Stelling 7.18</u> Een matrix ($\neq 0$) is dan en slechts dan nuldeler als deze singulier is.

<u>Bewijs</u>: 1) Laat $A = (a_{ij})$ een singuliere (m,n)-matrix zijn ($\neq 0$) en onderstel eerst $m \leqslant n$. Volgens 2^o op blz. 98 en stelling 7.14 geldt, dat het homogene stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \text{-----------------------} \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

altijd andere dan de nul-oplossing bezit. Laat B een matrix zijn van het type (n,r), waarvan alle kolomvectoren oplossingsvectoren ($\neq$ nulvector) zijn van bovenvermeld stelsel.
Dan is $B \neq 0$ en $AB = 0$, zodat A dan nuldeler is.
Als $n < m$ beschouwen we de matrix A^T, waarvan het aantal rijen kleiner is dan het aantal kolommen. Er bestaat dan dus volgens het voorgaande een matrix $C^T \neq 0$, zodat $A^T C^T = 0$, dus $(CA)^T = 0$ en $CA = 0$, zodat A dan ook nuldeler is.

(Als $m = n$, dan is er zeker een matrix B en een matrix C, beide $\neq 0$, zodat $AB = 0$ en $CA = 0$. Dit is ook het geval bij $m \neq n$ als r kleiner is dan het minimum van m en n).

2) Het omgekeerde volgt uit het feit, dat de matrix-vergelijking $AB = 0$ impliceert, dat iedere kolomvector van B oplossing is van bovengenoemd stelsel. Als A niet-singulier is heeft dit stelsel alleen de

nuloplossing en dan zou gelden B = 0. Geldt CA = 0 en A niet-singulier, dan eveneens C = 0. A kan dus slechts singulier zijn. Overigens volgt dit resultaat ook reeds uit de vergelijking AB = 0 of CA = 0 indien we de leden van deze vergelijkingen vóór resp. achter met A^{-1} vermenigvuldigen, zo deze zou bestaan. Dan ontstaat B = 0 resp. C = 0, zodat A dan geen nuldeler kan zijn.

<u>Voorbeeld</u> De matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ is singulier, omdat $2(2,-5,3) + 3(1,4,-1) - (7,2,3) = (0,0,0)$. Aan de vergelijkingen AB = 0 en CA = 0 kan dan worden voldaan door de niet-nulmatrices $B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, of door $B = C = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -7 \\ -10 & -15 & 5 \\ -26 & -39 & 13 \end{pmatrix}$, zodat A dus zeker nuldeler is, in overeenstemming met voorgaande stelling.

<u>Opgaven</u>

1) Bewijs, dat

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ & \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{Vmatrix} \cdot \frac{1}{a_{22}}, \text{ als } a_{22} \neq 0.$$

(Snelle methode om determinant van de 3^e orde te berekenen).

2) Bewijs, dat de determinant

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta + \alpha) & \cos(\theta + \beta) & \cos(\theta + \gamma) \\ \sin(\theta + \alpha) & \sin(\theta + \beta) & \sin(\theta + \gamma) \\ \sin(\beta - \gamma) & \sin(\gamma - \alpha) & \sin(\alpha - \beta) \end{vmatrix}$$ onafhankelijk is van θ.

3) Bewijs, dat als u en v functies zijn van x en $v = \frac{1}{u}$, geldt $v''' = D/u^4$, waarin D de determinant is:

$$D = \begin{vmatrix} u''' & 3u'' & 3u' \\ u'' & 2u' & u \\ u' & u & 0 \end{vmatrix}.$$

De functies u en v worden minstens drie maal differentieerbaar naar x ondersteld. Het aantal aantal accenten bij u en v geeft de orde van differentiatie naar x aan.

4) Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i$

$(i = 1, \dots, n)$ met det $(a_{ik}) \neq 0$. Het determinantenquotiënt:

$$-\frac{\begin{vmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_n \\ b_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

is een homogeen lineaire functie van $u_1, u_2, \dots, u_n$ en dus te schrijven als $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n$.

Bewijs, dat de oplossing van het stelsel is: $x_i = c_i$ $(i=1,\dots,n)$.

5) Bewijs, dat de determinant van Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

Breid deze opgave uit tot een willekeurig aantal rijen en kolommen.

6) Bewijs dat:

a) $$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = (x + y + z)(x - y - z)(y - z - x)(z - x - y).$$

b) $$\begin{vmatrix} x & p & q & r & 1 \\ a & x & s & t & 1 \\ a & b & x & u & 1 \\ a & b & c & x & 1 \\ a & b & c & d & 1 \end{vmatrix} = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d).$$

c) $$\begin{vmatrix} \sin a & \sin b & \sin c \\ \sin 2a & \sin 2b & \sin 2c \\ \sin 3a & \sin 3b & \sin 3c \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \sin a \sin b \sin c(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b).$$

7) De lengten der zijden van een driehoek zijn a,b en c. Bewijs, dat de oppervlakte van de driehoek gelijk is aan $\frac{1}{4}$ van de wortel uit

$$-\begin{vmatrix} & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

8) Als A een vierkante matrix is met alle elementen boven (of onder) de hoofddiagonaal gelijk aan 0, is $|A|$ gelijk aan het product van de elementen in de hoofddiagonaal van A. Bewijs dit.

9) Bewijs, dat voor matrices A en B van de 2^e orde geldt: $|AB| = |A|.|B|$.(Deze eigenschap zal later algemeen worden bewezen.)

10) Bewijs, dat als A een vierkante n-matrix is met rang $r < n$, er een matrix $B \neq 0$ moet bestaan met de eigenschap, dat zowel $AB = 0$ als $BA = 0$. Bewijs, dat als $r = n-1$ deze matrix B op een factor na eenduidig bepaald is. Wat is de rang van B in dat geval?

- - -

We keren thans terug tot de algemene determinanten-theorie en voeren eerst enige nieuwe begrippen in:

<u>Def</u>. Een <u>submatrix</u> of <u>deelmatrix</u> van een matrix A, is een matrix, die uit A ontstaat door in A enige rijen en/of kolommen weg te laten. Bijzonder belangrijk zijn de vierkante deelmatrices; de determinanten van deze matrices heten <u>subdeterminanten</u> of <u>onderdeterminanten</u> van A.

Onder de deelmatrix A_{ij} verstaan we de matrix, die uit A ontstaat door weglating van de i^e rij en de j^e kolom. Is de matrix A vierkant, dan is A_{ij} eveneens vierkant.

$\det A_{ij} = |A_{ij}|$ heet de onderdeterminant van A bij het element a_{ij}.

We hebben reeds opgemerkt, dat de determinant $|A|$ een homogene lineaire functie is van zijn rij-of kolommenvectoren (blz. 116). Beschouwen we een bepaalde rij van A, bijv. de i^e rij, dan kunnen we als A vierkant is voor $|A|$ schrijven:

(7.13) $|A| = m_{i1}a_{i1} + \dots + m_{ij}a_{ij} + \dots + m_{in}a_{in}$.

<u>m_{ij} heet de coefficient van a_{ij} of de i,j-cofactor van A of de minor van A bij het element a_{ij}.</u>

Wat is het verband tussen m_{ij} en $|A_{ij}|$?
Om dit verband te vinden gaan we in $|A|$ de i^e rij achtereenvolgens met alle er boven staande rijen verwisselen tot hij bovenaan staat, en daarna de j^e kolom met alle links er voor staande kolommen, tot deze voor aan staat. De matrix, die nu ontstaat, noemen we B. Deze matrix heeft het element a_{ij} links bovenaan. Volgens stelling 7.4 geldt dan (wegens i-1 rijverwisselingen en j-1 kolomverwisselingen):

(7.14) $|B| = (-1)^{i+j-2}\,|A| = (-1)^{i+j}|A|$.

Nu is duidelijk, dat in $|B|$ de som der producten, die a_{ij} bevatten, juist gelijk is aan $a_{ij}|A_{ij}|$. Volgens (7.14) is dan in $|A|$ de som der producten, die a_{ij} bevatten gelijk aan $(-1)^{i+j}\,a_{ij}\,|A_{ij}|$, dus volgens (7.13):

(7.15) $m_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A_{ij}|$,

waarmede het verband gevonden is.
Als A een vierkante matrix is van de n^e orde volgt uit (7.13) en (7.15):

(7.16) $|A| = (-1)^{i+1}\,a_{i1}\,|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}| + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}|$,

en evenzo bij verwisseling van de rol der rijen met die der kolommen:

(7.16)' $|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}\,|A_{1j}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|A_{2j}| + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}|$.

We hebben hier de determinant van A <u>ontwikkeld naar de i^e rij</u> (vgl. 7.16), resp. <u>naar de j^e kolom</u> (vgl.7.16)').

Bewezen is dus:

<u>Stelling 7.19</u> De determinant van een (vierkante) matrix is gelijk aan de som der producten, die men verkrijgt door ieder element van zekere rij of kolom met zijn eigen minor te vermenigvuldigen, waarbij de minor van A bij het element a_{ij} gedefinieerd kan worden als het rechterlid van 7.15.

Vormen we de matrix $M = (m_{ij})$ der minoren van A en daarvan de getransponeerde $C = M^T$ (dus $c_{ji} = m_{ij}$) dan voldoet deze matrix C volgens stelling 7.19 aan de volgende belangrijke relaties:

(7.17) $AC = CA = |A|\,I_n$.

De matrix C heet de geadjungeerde matrix van A. Is A singulier, dus $|A| = 0$, dan is $AC = CA = 0$ (Heeft A de rang n-1, dan is C juist de op een factor na bepaalde matrix B van vraagstuk 10, blz.127).

Een belangrijke aanvulling van stelling 7.19 wordt gegeven door:

Stelling 7.20 Vermenigvuldigt men de elementen uit zekere rij (kolom) van een matrix met de minoren der overeenkomstige elementen van een andere rij (kolom), dan is de som dezer producten gelijk aan 0.

Bewijs: Stel, dat wij van de matrix A de som van de producten bepalen van de elementen van de i^e rij met de minoren van de overeenkomstige elementen uit de k^e rij ($i \neq k$), dan is de uitkomst volgens stelling 7.19 gelijk aan de determinant van de matrix A', die uit A ontstaat door daarin de k^e rij te vervangen door de i^e rij (en de i^e rij zo te laten). A' heeft dan dus twee gelijke rijen, zodat volgens stelling 7.5 geldt: $|A'| = 0$, waarmede het bewijs geleverd is. Een analoog bewijs voor de kolommen i.p.v. de rijen.

In formule als $i \neq k$:

$$(7.18) \quad (-1)^{k+1} a_{i1} |A_{k1}| + (-1)^{k+2} a_{i2} |A_{k2}| + \ldots + (-1)^{k+n} a_{in} |A_{kn}| = 0$$

en analoog als $j \neq k$:

$$(7.18)' \quad (-1)^{1+k} a_{1j} |A_{1k}| + (-1)^{2+k} a_{2j} |A_{2k}| + \ldots + (-1)^{n+k} a_{nj} |A_{nk}| = 0.$$

Stelling 7.19 en 7.20 kunnen we d.m.v. het Kronecker delta-symbool δ_{ij} (gedefineerd als 1 voor $i=j$ en 0 voor $i \neq j$) volgens (7.15),(7.16), (7.16)', (7.18), (7.18)' in formule als volgt weergeven:

$$(7.19) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, m_{jk} = |A|\, \delta_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, m_{ik} = |A|\, \delta_{jk} \end{cases}.$$

Inverse A-1 van een matrix A

Als A een inverse matrix A^{-1} heeft, dan moeten wegens $AA^{-1} = I$ de volgende eigenschappen gelden:

1) Het inwendig product van de i^e rij van A met de i^e kolom van A^{-1} moet 1 zijn, dus $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{ki}^{-1} = 1$.

2) Het inwendig product van de i^e rij van A met j^e kolom van A^{-1} ($i \neq j$) moet 0 zijn, dus $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{kj}^{-1} = 0$.

Uit (7.19) volgt, dat hieraan voldaan is, als men kiest:

(7.20) $a_{ij}^{-1} = \frac{m_{ji}}{|A|}$,

dus als men voor de j^e kolom van A^{-1} kiest de minoren van de elementen der j^e rij van A, alle elementen dan nog gedeeld door $|A|$.

$|A|$ is ongelijk aan 0 volgens stelling 7.12.

Eenzelfde redenering geldt als men de rol der rijen en die der kolommen verwisselt. Daar A volgens stelling 5.2 hoogstens één inverse kan hebben, volgt hieruit:

Stelling 7.21 De j^e kolom (rij) van de inverse van een niet-singuliere matrix A bestaat uit de minoren van de elementen der j^e rij (kolom) van A, alle gedeeld door de determinant van A.

Of uitgedrukt met behulp van de matrix M der minoren van A, resp. de geadjungeerde matrix C van A:(zie blz. 129)

(7.21) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} M^T = \frac{1}{|A|} C$.

Opmerking Als gevraagd wordt van het stelsel van n vergelijkingen met n onbekenden: $Ax = b$ de oplossingen te bepalen voor een vaste set a_{ij}, maar voor variabele vectoren b, is het goed de inverse A^{-1} te berekenen en dan gebruik te maken van de vergelijking $x=A^{-1}b$ ter bepaling van de individuele oplossingen (inderdaad geldt: $Ax = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Ib = b$).

Om de inverse van A te bepalen is het rechterlid van (7.21) voor enigszins grote matrices in de practijk volkomen onbruikbaar, zo ook de daarmee samenhangende determinant oplossing (regel v. Cramer, zie later), als oplossingsmethode voor niet kleine stelsels vergelijkingen.

De eliminatie (schoonveeg)-methode is dan de aangewezen weg, zowel voor het oplossen van een stelsel, als voor het bepalen van de inverse van een matrix. Op deze zaken komen we later terug. We zullen dan bovendien andere methoden leren kennen voor het bepalen van de inverse (bijv. gebaseerd op het theorema van Cayley-Hamilton, of langs iteratieve weg.)