

15. Reeksen

Stelling. Is $f(a)$ analytisch in een gebied G , dan is ook $f'(a)$ analytisch in G en

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \quad (15.1)$$

waarbij K een gesloten kromme is die met het binnengebied geheel in G gelegen is.

Bewijs

Volgens (13.15) is

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{z-a} dz$$

$f(a)$ is een continue functie, dus er is een getal M zodat $|f(a)| < M$ voor a op en binnen K . Zij $a+h$ een punt binnen K .

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{1}{h} \left(\frac{f(z)}{z-(a+h)} - \frac{f(z)}{z-a} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z-a-h)(z-a)} dz. \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \right| &= \\ \left| \frac{h}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z-a)^2(z-a-h)} dz \right| &\leq \frac{h}{2\pi} \frac{M}{\rho(\rho-|h|)} \ell \end{aligned}$$

waarbij ℓ de lengte van K is en $\rho = \min_{z \in K} |z-a|$.

Dus

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz.$$

Op dezelfde wijze tonen we aan

$$f''(a) = \frac{2}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz$$

zodat $f'(a)$ analytisch is in G .
(Opm. hiermee is 13.5 bewezen.)

Gevolg

Een in G analytische functie $f(a)$ bezit afgeleiden van elke orde, deze afgeleiden zijn zelf analytisch in G en

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (n \geq 0) \quad (15.2)$$

(Bewijs dit laatste inductief)

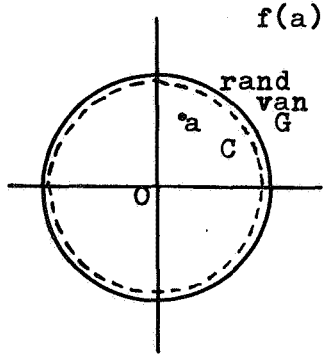
Stelling. Is $f(z)$ analytisch in een cirkelvormig gebied G met middelpunt $z = 0$, dan kan voor elk inwendig punt a van G de functie $f(a)$ geschreven worden als een convergente machtreeks:

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} a^n \quad (15.3)$$

(Taylor-ontwikkeling rondom $z = 0$).

Bewijs

Zij C een binnen G gelegen cirkel om $z = 0$ met straal R , terwijl a binnen C ligt.



$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z} \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{a}{z}\right)^n + \frac{\left(\frac{a}{z}\right)^N}{1 - \frac{a}{z}} \right) dz \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a^n}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{a}{z}\right)^N \frac{f(z)}{z-a} dz \\ &\stackrel{(15.2)}{=} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} a^n + R_N, \end{aligned}$$

waarbij

$$R_N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{a}{z}\right)^N \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Op en binnen C is $f(z)$ continu, dus is er een getal $M > 0$ zodat $|f(z)| \leq M$ voor $z \in C$. Verder is $\rho = \left| \frac{a}{z} \right| < 1$.

$$|R_N| \leq \frac{1}{2\pi} \rho^N \frac{M}{R-|a|} 2\pi R = \text{constante} \cdot \rho^N,$$

dus $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$ want $\rho < 1$, dus

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} a^n \quad \text{voor } |a| < R.$$

We kunnen voor a elk punt van G nemen, dus voor R de straal van G . R is de convergentiestraal indien op de rand van G een singulier punt van $f(z)$ ligt; dit is dan het dichtst bij $z = 0$ gelegen singuliere punt.

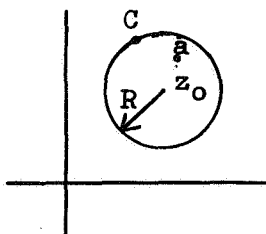
Gevolg

Is $f(z)$ analytisch in z_0 , $z = c$ het dichtst bij z_0 gelegen singuliere punt van $f(z)$, $R = |c - z_0|$, dan geldt voor elke a

met $|a - z_0| < R$:

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (a - z_0)^n \quad (15.4)$$

(Taylor-ontwikkeling om z_0 ; convergentiestraal R)



Onder een gehele functie verstaan we een functie die een machtreeks-ontwikkeling bezit met oneindig-grote convergentiestraal. Breekt de machtreeks af, dan is de functie een gehele rationale functie of polynoom en in het andere geval een gehele transcendente functie.

Stelling van Liouville

(15.5)

Is $f(z)$ analytisch voor elke z , en is er een getal $M > 0$ zodat $|f(z)| \leq M$ voor elke z , dan is $f(z)$ constant.

Bewijs

$f(z)$ is in een machtreeks te ontwikkelen met oneindig-grote convergentiestraal ($f(z)$ is geheel), want $f(z)$ heeft geen eindige singuliere punten:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (\text{zie } 15.4)$$

$$\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z) dz}{z^{n+1}} \right| < \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} 2\pi R = \frac{M}{R^n}.$$

Het linkerlid is onafhankelijk van R ; het rechterlid nadert tot nul als $R \rightarrow \infty$ en $n \geq 1$.

Dus

$$f^{(n)}(0) = 0 \text{ voor } n \geq 1,$$

zodat

$$f(z) = f(0) \text{ voor elke } z.$$

Hoofdstelling der algebra

(15.6)

Een polynoom van de graad $m \geq 1$ heeft minstens één nulpunt.

Bewijs

Stel $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$ ($a_m \neq 0$; $m \geq 1$).

Uit $f(z) \neq 0$ voor elke z volgt dat $\frac{1}{f(z)}$ een gehele functie is. Nu is $\frac{1}{f(z)}$ begrensd in een omgeving van $z = \infty$ (want $|\frac{1}{f(z)}| \rightarrow 0$ voor $|z| \rightarrow \infty$), dus overal begrensd.

Met (15.5) volgt dan $\frac{1}{f(z)} = \text{constant}$, dus $f(z) = \text{constant}$, in tegenspraak met de veronderstelling dat $f(z)$ een echt polynoom is.

Gevolg

Een polynoom van de graad m is te schrijven als het produkt van m lineaire functies.

Bewijs

Is $f(z)$ een polynoom van de graad m , en is z_1 een nulpunt, dan is $f(z)$ deelbaar door $z - z_1$:

$$f(z) = (z - z_1) g(z)$$

waarbij de graad van $g(z)$ gelijk is aan $m-1$. En zo voort.

Gevolg

Elk polynoom van de graad ≥ 1 neemt elke waarde minstens éénmaal aan. Want is $f(z)$ het polynoom en c een willekeurig getal, dan heeft de functie $g(z) = f(z) - c$ minstens één nulpunt.

Opmerking: Een gehele transcendente functie hoeft geen nulpunten te bezitten, bij voorbeeld e^z .

Analytische voortzetting

Stelling. Zijn de functies $f(z)$ en $g(z)$

(15.7)

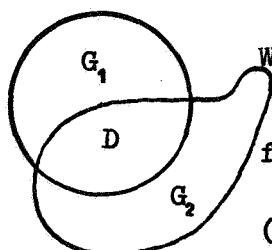
in een gebied G analytisch en is $f(z) = g(z)$

in een omgeving van $z_0 \in G$, dan geldt $f(z) = g(z)$ in G .

Geen bewijs.

Laat gegeven zijn

- een functie $f_1(z)$ gedefinieerd in een gebied G_1
- een functie $f_2(z)$ gedefinieerd in een gebied G_2
- $D = G_1 \cap G_2$ is een gebied
- in D is $f_1(z) = f_2(z)$.



We definiëren in $G = G_1 \cup G_2$:

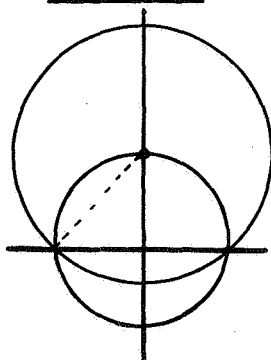
$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{in } G_1 \\ f_2(z) & \text{in } G_2 \end{cases}$$

(Dit mag want in D stemmen f_1 en f_2 overeen.)

Het is duidelijk dat $f(z)$ analytisch is in G .

$f_1(z)$ heet de analytische voortzetting in G_1 van $f_2(z)$, $f_2(z)$ de analytische voortzetting in G_2 van $f_1(z)$ en ook: $f_1(z)$ en $f_2(z)$ zijn elkaars analytische voortzettingen.

Voorbeeld



$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \text{ in } G_1: |z| < 1$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1+i)^{n+1}} (z-i)^n$$

in $G_2: |z-i| < \sqrt{2}$

$$f(z) = \frac{1}{1+z} \text{ in } G_1 \cup G_2.$$

Voorbeeld

$f(z) = \frac{1}{1-z}$ ontwikkelen we om $z = 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ voor } |z| < 1.$$

Om $z = -1$:

$$f(z) = \frac{1}{2-(z+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2}\right)^n \text{ voor } |z+1| < 2.$$

Hier is de convergentiestraal gelijk aan de afstand van het dichtstbijzijnde singuliere punt tot het middelpunt.

Reeksen van Fourier

Stel $f(z)$ is voor $|z| < R$ te ontwikkelen in een machtreeks om $z = 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n.$$

Met $\alpha_n = a'_n + ib'_n$ en $z = r e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} f(r e^{i\theta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a'_n + ib'_n) r^n e^{in\theta} & |r| < R \\ &= u(r, \theta) + iv(r, \theta) \end{aligned}$$

als

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a'_n \cos n\theta - b'_n \sin n\theta) r^n \\ v(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (b'_n \cos n\theta + a'_n \sin n\theta) r^n. \end{aligned}$$

Stel r vast, $u(r, \theta) = u(\theta)$, $v(r, \theta) = v(\theta)$, $a_n = a'_n r^n$, $b_n = b'_n r^n$.

$$\begin{cases} u(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta) \\ v(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta). \end{cases}$$

Dit zijn de geconjugeerde reeksen van Fourier.

Beschouw de trigonometrische reeks

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Veronderstel dat deze reeks convergent is met som $s(x)$. De reeks is periodiek met periode 2π , dus $s(x)$ ook.

Omgekeerd zullen we zien dat vele functies die periodiek mod 2π zijn, in een dergelijke reeks te ontwikkelen zijn.

Stel dus gegeven

$$s(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (15.8)$$

We vermenigvuldigen beide leden met $\cos kx$ (k geheel ≥ 0) en integreren de reeks term voor term. (Op het bewijs dat dit geoorloofd is, gaan we hier niet nader in. De reeks dient uniform te convergeren.)

$$\int_{-\pi}^{\pi} s(x) \cos kx \, dx = c_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx \right\}.$$

Nu is

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos(n+k)x + \cos(n-k)x \} \, dx \\ = \begin{cases} 2\pi & \text{als } n = k = 0 \\ \pi & \text{als } n = k \geq 1 \\ 0 & \text{als } n \neq k \end{cases} \quad (15.9)$$

Op dezelfde wijze bewijst men:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx = 0 \quad \text{voor } n \geq 0, k \geq 0 \quad (15.9)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{als } n = k \geq 1 \\ 0 & \text{als } n \neq k. \end{cases} \quad (15.9)$$

Dus

$$\int_{-\pi}^{\pi} s(x) \cos kx \, dx = \begin{cases} 2\pi c_0 & \text{als } k = 0 \\ \pi a_k & \text{als } k \geq 1. \end{cases}$$

Vermenigvuldiging van (15.8) met $\sin kx$ en integratie geeft:

$$\int_{-\pi}^{\pi} s(x) \sin kx \, dx = \pi b_k \quad \text{als } k \geq 1.$$

Stellen we $c_0 = \frac{1}{2} a_0$, dan geldt dus voor de coëfficiënten

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) \cos kx \, dx, \quad k \geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) \sin kx \, dx, \quad k \geq 1. \end{aligned} \right\}$$

Opmerking: Is $s(x)$ een even funktie, dan is

$$b_k = 0 \text{ en } a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} s(x) \cos kx \, dx. \quad (k \geq 0)$$

Is $s(x)$ een oneven funktie, dan is

$$a_k = 0 \text{ en } b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} s(x) \sin kx \, dx. \quad (k \geq 1)$$

Omgekeerd. Stel $f(x)$ is een funktie periodiek mod 2π en integreerbaar. Voldoende is dat $f(x)$ gedefinieerd en integreerbaar is voor $|x| < \pi$. We kunnen dan $f(x)$ periodiek voortgezet denken. De getallen

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx & (k \geq 0) \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx & (k \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

heten de Fourier-coëfficiënten van $f(x)$. (15.10: formules van Euler). De reeks

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (15.11)$$

heet de reeks van Fourier van $f(x)$. Of deze reeks convergeert, en of in geval van convergentie de som der reeks gelijk is aan $f(x)$, moeten we nog onderzoeken.

Voorbeeld

De zaagtandfunctie. $f(x) = x$ voor $|x| < \pi$, en verder periodiek met een periode 2π .

Dus $f(x) = x - 2n\pi$ voor $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$. $f(x)$ is een oneven funktie.

$$a_n = 0 \text{ voor } n \geq 0.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{+2(-1)^{n+1}}{n}. \quad (n \geq 1)$$

Dus de Fourier-reeks van $g(x) = \frac{1}{2} x$ is

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

We zullen aantonen dat inderdaad $g(x)$ de som der reeks is, dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \frac{1}{2} x \quad \text{voor } |x| < \pi.$$

Opgave a) Teken in één figuur de grafiek van de functie $\frac{1}{2}x$ en die van de functie $\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x$, voor $|x| < \pi$.

Stelling. Is $f(x)$ gedefinieerd en differentieerbaar met continue afgeleide voor $|x| < \pi$, met uitzondering van een eindig aantal punten waar $f(x)$ een eindige sprong maakt, en zijn a_n en b_n de door (15.10) gegeven Fourier-coëfficiënten van $f(x)$, dan is de Fourier-reeks van $f(x)$ convergent en

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}.$$

Opmerkingen:

- $f(c+0) = \lim_{x \downarrow c} f(x)$
- $f(c-0) = \lim_{x \uparrow c} f(x)$.
- In een punt waar $f(x)$ wel continu maar niet differentieerbaar is, maakt $f(x)$ een sprong ter grootte nul.
- De in de stelling genoemde voorwaarde is een voldoende voorwaarde.
- $f(x)$ is in $\pm \pi$ niet gedefinieerd; in één dezer punten mag $f(x)$ een willekeurige waarde aannemen. Indien men $f(x)$ in beide punten wil definiëren dan door dezelfde waarde in verband met de periodieke voortzetting.

Bewijs

Denk $f(x)$ periodiek voortgezet met periode 2π . Stel voor willekeurige c

$$s_N(c) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nc + b_n \sin nc).$$

We dienen aan te tonen dat $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(c)$ bestaat en gelijk is aan

$$\frac{1}{2} (f(c+0) + f(c-0)).$$

Door substitutie van de formules (15.10) vinden we voor $s_N(c)$ een integraal-uitdrukking

$$\begin{aligned}
 s_N(c) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos n\xi \cos nc d\xi + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin n\xi \sin nc d\xi \right\} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(c-\xi) \right\} d\xi \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})(c-\xi)}{2 \sin \frac{1}{2}(c-\xi)} d\xi \quad (15.13)
 \end{aligned}$$

want

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N \cos ny &= \operatorname{Re} \sum_{n=1}^N e^{iny} = \operatorname{Re} \left\{ e^{iy} \frac{e^{iNy} - 1}{e^{iy} - 1} \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ e^{\frac{1}{2}iy} \frac{e^{iNy} - 1}{2i \sin \frac{1}{2}y} \right\} \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}y} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i} e^{(N+\frac{1}{2})iy} - \frac{1}{i} e^{\frac{1}{2}iy} \right\} \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}y} (\sin(N+\frac{1}{2})y - \sin \frac{1}{2}y)
 \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N \cos ny &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}y} \sum_{n=1}^N (\sin(n+\frac{1}{2})y - \sin(n-\frac{1}{2})y) \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}y} (\sin(N+\frac{1}{2})y - \sin \frac{1}{2}y).
 \end{aligned}$$

Van de uitdrukking (15.13) moeten we nu de limiet nemen voor $N \rightarrow \infty$. We maken gebruik van het

lemma van Riemann-Lebesgue: (15.14)

zijn a en b constanten en is $g(x)$ continu op $[a, b]$, dan geldt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin Nx dx = 0,$$

en ook
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cos Nx dx = 0.$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
 I_N &= \int_a^b g(x) \sin Nx \, dx = \int_{a-\frac{\pi}{N}}^{b-\frac{\pi}{N}} g(y+\frac{\pi}{N}) \sin (Ny+\pi) \, dy \\
 &= - \int_{a-\frac{\pi}{N}}^{b-\frac{\pi}{N}} g(y+\frac{\pi}{N}) \sin Ny \, dy = - \int_{a-\frac{\pi}{N}}^{b-\frac{\pi}{N}} g(x+\frac{\pi}{N}) \sin Nx \, dx \\
 &= - I_N - \int_a^b (g(x+\frac{\pi}{N}) - g(x)) \sin Nx \, dx + \\
 &\quad - \int_{a-\frac{\pi}{N}}^a g(x+\frac{\pi}{N}) \sin Nx \, dx + \int_{b-\frac{\pi}{N}}^b g(x+\frac{\pi}{N}) \sin Nx \, dx
 \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned}
 |2I_N| &\leq \left| \int_a^b (g(x+\frac{\pi}{N}) - g(x)) \sin Nx \, dx \right| + \\
 &\quad + \left| \int_{a-\frac{\pi}{N}}^a g(x+\frac{\pi}{N}) \sin Nx \, dx \right| + \left| \int_{b-\frac{\pi}{N}}^b g(x+\frac{\pi}{N}) \sin Nx \, dx \right|.
 \end{aligned}$$

Zij $\epsilon > 0$ gegeven.

$g(x)$ is continu op $[a, b]$ dus begrensd: $|g(x)| < M$ en bij elke $\epsilon > 0$ is er een N_1 te vinden zodat voor elke x en $N > N_1$ geldt:

$$|g(x+\frac{\pi}{N}) - g(x)| < \epsilon.$$

Verder is $|\sin Nx| \leq 1$.

Dus

$$\begin{aligned}
 |2I_N| &\leq \int_a^b |g(x+\frac{\pi}{N}) - g(x)| |\sin Nx| \, dx + \\
 &\quad + \int_{a-\frac{\pi}{N}}^a |g(x+\frac{\pi}{N})| |\sin Nx| \, dx + \int_{b-\frac{\pi}{N}}^b |g(x+\frac{\pi}{N})| |\sin Nx| \, dx \\
 &< (b-a)\epsilon + 2M \frac{\pi}{N}.
 \end{aligned}$$

Het lemma is niet direct toe te passen op de integraal in (15.13) omdat de functie

$$f(\xi) = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}(c-\xi)}$$

niet overal continu is.

Stel $f(\xi)$ maakt sprongen in a_1, a_2, \dots, a_k en stel $a_j < c < a_{j+1}$.

We schrijven de integraal uit (15.13) als de som der integralen over $[-\pi, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_k, \pi]$. Met uitzondering van de integraal over $[a_j, a_{j+1}]$ is op elk dezer integralen het lemma toepasbaar, zodat

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(c) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\xi) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})(c-\xi)}{2 \sin \frac{1}{2}(c-\xi)} d\xi.$$

De functie $\frac{f(\xi)}{2 \sin \frac{1}{2}(c-\xi)}$ is niet continu in $\xi = c$, maar de functies $\frac{f(\xi) - f(c-0)}{2 \sin \frac{1}{2}(c-\xi)}$ en $\frac{f(\xi) - f(c+0)}{2 \sin \frac{1}{2}(c-\xi)}$ zijn resp. links- en rechtscontinu in $\xi = c$, omdat de limieten

$$\lim_{\xi \uparrow c} \frac{f(\xi) - f(c-0)}{2 \sin \frac{1}{2}(c-\xi)} \text{ en } \lim_{\xi \downarrow c} \frac{f(\xi) - f(c+0)}{2 \sin \frac{1}{2}(c-\xi)}$$

bestaan (en resp. gelijk zijn aan $-f'(c-0)$ en $-f'(c+0)$). Dus is ook de functie

$$\frac{1}{(c-\xi)} \left\{ f(\xi) \frac{c-\xi}{2 \sin \frac{1}{2}(c-\xi)} - f(c-0) \right\}$$

linkscontinu in $\xi = c$. Analoog voor rechts. Toepassing van het lemma geeft

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^c \frac{1}{(c-\xi)} \left\{ f(\xi) \frac{c-\xi}{2 \sin \frac{1}{2}(c-\xi)} - f(c-0) \right\} \cdot \sin(N+\frac{1}{2})(c-\xi) d\xi = 0.$$

Dus

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^c f(\xi) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})(c-\xi)}{2 \sin \frac{1}{2}(c-\xi)} d\xi &= \\ &= f(c-0) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^c \frac{\sin(N+\frac{1}{2})(c-\xi)}{c-\xi} d\xi \end{aligned}$$

want de limiet in het rechterlid bestaat. Namelijk

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{a_j}^c \frac{\sin(N+\frac{1}{2})(c-\xi)}{c-\xi} d\xi = (c-\xi = 2\lambda)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{c-a_j} \frac{\sin(2N+1)\lambda}{\lambda} d\lambda =$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{(N+\frac{1}{2})(c-a_j)} \frac{\sin \mu}{\mu} d\mu = \int_0^{\infty} \frac{\sin \mu}{\mu} d\mu = \frac{1}{2}\pi$$

(zie onder)

Dus

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^c f(\xi) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})(c-\xi)}{2 \sin \frac{1}{2}(c-\xi)} d\xi = \frac{1}{2}f(c-0)$$

en analoog

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_c^{a_{j+1}} f(\xi) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})(c-\xi)}{2 \sin \frac{1}{2}(c-\xi)} d\xi = \frac{1}{2}f(c+0)$$

zodat

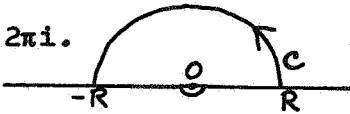
$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(c) = \frac{1}{2}(f(c-0) + f(c+0)).$$

Hiermee is (15.12) bewezen.

We berekenen op twee manieren de integraal van Dirichlet:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \mu}{\mu} d\mu = \frac{1}{2}\pi. \quad (15.15)$$

• Met complexe integratie van de funktie $\frac{e^{iz}}{z}$. Zij K de volgende contour: van $z = R$ langs halve cirkelboog om $z = 0$ in $\text{Im}(z) \geq 0$ naar $z = -R$, langs reële as naar $z = -\delta$, langs halve cirkelboog om $z = 0$ in $\text{Im}(z) \leq 0$ naar $z = \delta$, langs reële as naar $z = R$.

$$\int_K \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i \cdot \text{res} \left(\text{van } \frac{e^{iz}}{z} \text{ in } z = 0 \right) = 2\pi i.$$


Dus

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-\pi}^0 \frac{e^{i\delta e^{i\theta}}}{\delta e^{i\theta}} i\delta e^{i\theta} d\theta + \int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{i\mu}}{\mu} d\mu + \int_{\delta}^R \frac{e^{i\mu}}{\mu} d\mu = 2\pi i.$$

C hebben we in $\text{Im}(z) \geq 0$ genomen, omdat dan

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \quad (\text{Ga na})$$

Dus

$$\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{e^{i\mu}}{\mu} d\mu + \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{i\mu}}{\mu} d\mu + i \int_{-\pi}^0 e^{i\delta e^{i\theta}} d\theta = 2\pi i$$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \int_{-\pi}^0 e^{i\delta e^{i\theta}} d\theta = \pi i$$

dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu}}{\mu} d\mu = \pi i$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \mu}{\mu} d\mu = 0 \quad (\text{uiteraard; integrand is oneven})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \mu}{\mu} d\mu = \pi.$$

• Beschouw de functie van p

$$I(p) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \mu}{\mu} e^{-p\mu} d\mu.$$

(voor $p > 0$ uniforme convergentie)

$$\frac{dI(p)}{dp} = - \int_0^{\infty} \sin \mu e^{-p\mu} d\mu = - \frac{1}{p^2 + 1}$$

en $I(p) \rightarrow 0$ als $p \rightarrow \infty$.

Dus

$$I(p) = \arctan p + \frac{1}{2}\pi$$

en

$$I(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \mu}{\mu} d\mu = \frac{1}{2}\pi.$$

Opgaven

a) Bewijs:

Is $f(x)$ periodiek met periode p , onder dezelfde voorwaarden als in de stelling (15.12) op bladzijde 106, dan is

$$\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{p} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{p} \right)$$

waarbij

$$\left. \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \frac{2\pi n t}{p} dt.$$

(Aanwijzing: stel $F(x) = f\left(\frac{px}{2\pi}\right)$)

b) Bewijs:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \mu}{\mu} d\mu = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{voor } \alpha > 0 \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{voor } \alpha < 0 \end{cases}$$

c) Bereken de Fourier-reeks van de functie (periodiek met periode 2π)

$$f(x) = \sin \frac{1}{2}x \text{ voor } -\pi \leq x < \pi.$$

d) Ook van $f(x) = x \sin x$ voor $-\pi \leq x < \pi$.

e) Ook van

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{voor } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{voor } 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x & \text{voor } 2 < x < 3 \end{cases}$$

met $f(x+3) = f(x)$.

We beschouwen opnieuw (zie bladzijde 92) de integraal

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

waarbij $f(z)$ analytisch op en binnen de cirkel C om $z = 0$ met straal R , en $a = r e^{i\varphi}$. $f(a) = f(r e^{i\varphi}) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$.

$$u(R, \varphi) = g(\varphi); \quad v(R, \varphi) = h(\varphi).$$

$$\begin{aligned}
f(a) &= u(r, \varphi) + iv(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(\theta) + ih(\theta)}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\varphi-\theta)}} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{g(\theta) + ih(\theta)\} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\varphi-\theta)} \right\} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} \{g(\theta) + ih(\theta)\} e^{in(\varphi-\theta)} d\theta \quad (*)
\end{aligned}$$

(r < R; uniforme convergentie)

z = R²/ā ligt buiten C, dus

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - R^2/\bar{a}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(\theta) + ih(\theta)}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\varphi-\theta)}} d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-r}{R} \frac{g(\theta) + ih(\theta)}{\left(1 - \frac{r}{R} e^{-i(\varphi-\theta)}\right) e^{i(\varphi-\theta)}} d\theta = \\
&= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{g(\theta) + ih(\theta)\} \frac{r}{R} e^{-i(\varphi-\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{-in(\varphi-\theta)} d\theta = \\
&= \frac{-1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} \{g(\theta) + ih(\theta)\} e^{-in(\varphi-\theta)} d\theta \quad (**).
\end{aligned}$$

g(θ) en h(θ) zijn periodieke functies met periode 2π. Stel a_n en b_n zijn de Fourier-coëfficiënten van g(θ), c_n en d_n die van h(θ). Uit (*) en (**) volgt

$$\begin{aligned}
u(r, \varphi) &= \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} \{g(\theta) \cos n(\varphi-\theta) - h(\theta) \sin n(\varphi-\theta)\} d\theta \\
v(r, \varphi) &= \frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} \{g(\theta) \sin n(\varphi-\theta) + h(\theta) \cos n(\varphi-\theta)\} d\theta.
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} \{g(\theta) \cos n(\varphi-\theta) + h(\theta) \sin n(\varphi-\theta)\} d\theta = 0$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} \{-g(\theta) \sin n(\varphi-\theta) + h(\theta) \cos n(\varphi-\theta)\} d\theta = 0$$

en hieruit:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos n(\varphi - \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \quad (15.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= \frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \sin n(\varphi - \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \sin n\varphi - b_n \cos n\varphi) \quad (15.17) \end{aligned}$$

De reeksen zijn convergent en de relatie geldt als $r < R$.

Hiermee zijn de harmonische functies $u(r, \varphi)$ en $v(r, \varphi)$ voor een punt binnen de cirkel uitgedrukt in de reeksen van Fourier voor een punt op de cirkel.

Laten we het punt a langs de straal naar de rand gaan (f is analytisch, dus g en h zijn nette functies), dan krijgen we de reeksen van Fourier voor $g(\varphi)$ en $h(\varphi)$.

Bewijs zelf: $d_n = a_n$; $c_n = -b_n$ voor $n \geq 1$.

Voorbeeld

De functie $f(z) = \log(1+z)$ is in elk punt $z \neq -1$ regulier. Zij $r < 1$, $|\varphi| < \pi$.

$$\begin{aligned} f(r e^{i\varphi}) &= \log(1 + r e^{i\varphi}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} r^n e^{in\varphi} = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi), \end{aligned}$$

$$\text{dus } u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} r^n \cos n\varphi$$

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} r^n \sin n\varphi.$$

Dus (vgl. boven) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ($n \geq 1$) en $b_n = 0$. Voor $r = 1$ is $v(1, \varphi)$ de ons bekende zaagtandfunctie $h(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi$. De geconjugeerde hiervan is dus

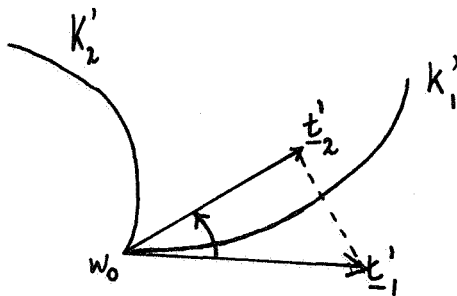
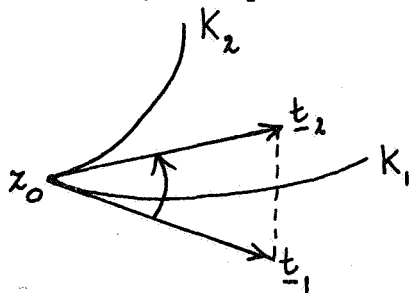
$$\begin{aligned} g(\varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cos n\varphi = \log(1 + e^{i\varphi}) - \frac{1}{2}i\varphi \\ &= \log(e^{-\frac{1}{2}i\varphi} + e^{\frac{1}{2}i\varphi}) = \log(2 \cos \frac{1}{2}\varphi). \end{aligned}$$

16. Konforme afbeeldingen

Door een analytische functie $w = w(z)$ wordt een afbeelding tot stand gebracht van (een deel van) het z -vlak in het w -vlak.

Een voorbeeld hiervan is de lineaire transformatie $w = \frac{az + b}{cz + d}$.

Laten K_1 en K_2 twee krommen zijn in het z -vlak met snijpunt z_0 ,



en w_0 , K'_1 , K'_2 de beelden.

Stel $K_1 : z = f(\sigma)$
 $K_2 : z = g(\tau)$,

dan

$K'_1 : w = F(\sigma) = w\{f(\sigma)\}$
 $K'_2 : w = G(\tau) = w\{g(\tau)\}$.

Beschouw de raaklijnvectoren \underline{t}_1 en \underline{t}_2 in z_0 resp. \underline{t}'_1 en \underline{t}'_2 in w_0 .

De richtingen van deze vectoren worden gegeven door $\frac{df}{d\sigma}$, $\frac{dg}{d\tau}$,

$$\frac{dF}{d\sigma} = \frac{dw}{dz} \frac{df}{d\sigma} \text{ en } \frac{dG}{d\tau} = \frac{dw}{dz} \frac{dg}{d\tau} .$$

$$\angle(K_1, K_2) = \arg \frac{df}{d\sigma} - \arg \frac{dg}{d\tau} = \arg \left(\frac{df/d\sigma}{dg/d\tau} \right)$$

$$\angle(K'_1, K'_2) = \arg \frac{dF}{d\sigma} - \arg \frac{dG}{d\tau} = \arg \left(\frac{dF/d\sigma}{dG/d\tau} \right).$$

Dus in de punten waar $\frac{dw}{dz} \neq 0$, is de hoek tussen twee krommen gelijk aan de hoek tussen de beeldkrommen zowel in grootte als draaizin (\underline{t}'_1 is t.o.v. \underline{t}_1 over dezelfde hoek gedraaid als \underline{t}'_2 t.o.v. \underline{t}_2 n.l. over de hoek $\arg \frac{dw}{dz}$). (*)

Verder is

$$|\underline{t}'_1| = \left| \frac{dw}{dz} \right| |\underline{t}_1|$$

$$|\underline{t}'_2| = \left| \frac{dw}{dz} \right| |\underline{t}_2|$$

dus de door de raaklijnvectoren opgespannen driehoeken zijn gelijkvormig.

Zijn z_1 en z_2 punten op K_1 resp. K_2 met beelden w_1 en w_2 dan zijn de door z_0, z_1, z_2 en w_0, w_1, w_2 gevormde driehoekjes infinitesimaal gelijkvormig. (**)

Een afbeelding met de eigenschappen (*) en (**) noemt men konform.

Samenvattend:

De door een analytische functie $w = w(z)$ gegeven afbeelding is in de omgeving van een punt z_0 konform indien $\frac{dw}{dz}$ in z_0 bestaat en ongelijk aan nul is. (16.1)

Voorbeeld. $w = \bar{z}$ geeft geen konforme afbeelding; de draaizin der hoeken is tegengesteld.
De functie $w = z$ is dus niet analytisch.

Voorbeeld. $w = \frac{az+b}{cz+d}; \frac{dw}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$.

De afbeelding is konform in $z \neq -\frac{d}{c}$ als $ad-bc \neq 0$.

Voorbeeld. De transformatie van Joukovski,

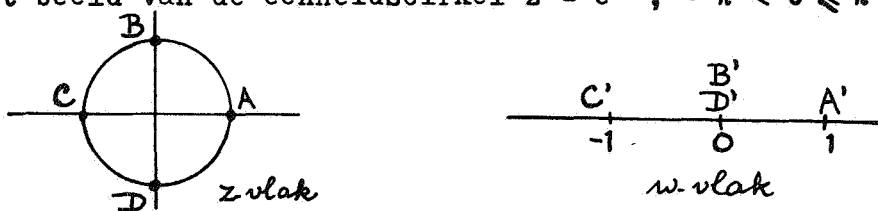
$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (16.2)$$

is analytisch in $z \neq 0$.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right),$$

$$\frac{dw}{dz} = 0 \text{ voor } z = \pm 1.$$

Het beeld van de eenheidscirkel $z = e^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$ is het



lijnsegment $w = \cos \theta$ of $-1 \leq w \leq 1$, waarbij $-1 < w < 1$ dubbel-overdekt is.

De afbeelding is konform voor $z \neq \pm 1$.

Het beeld van de concentrische cirkel $z = r e^{i\theta}$, r constant, $-\pi < \theta \leq \pi$, is

$$w = \frac{1}{2} \left(r e^{i\theta} + \frac{1}{r} e^{-i\theta} \right)$$

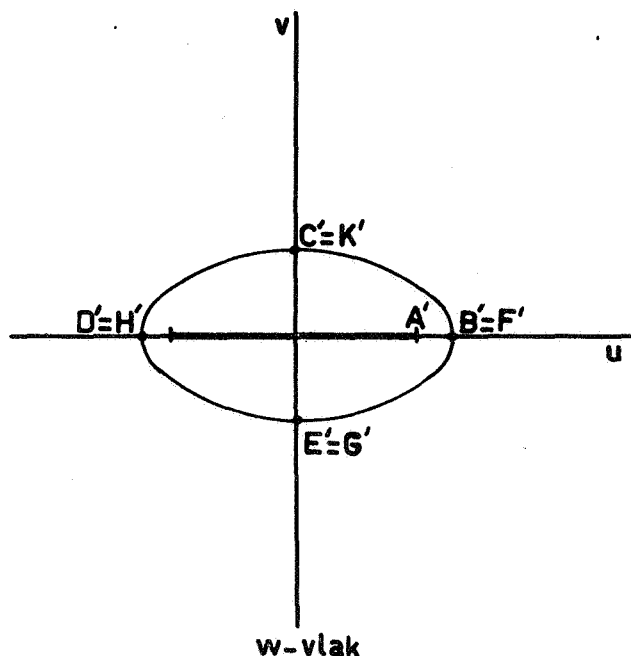
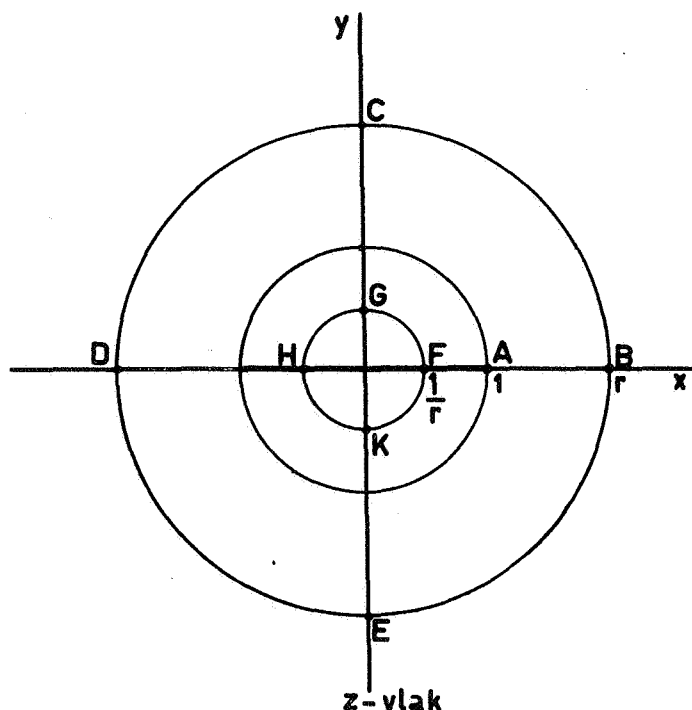
of

$$\begin{cases} u = \operatorname{Re} w = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta \\ v = \operatorname{Im} w = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta. \end{cases}$$

Dit is de ellips

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1.$$

Deze ellips is ook het beeld van de cirkel $z = \frac{1}{r} e^{i\theta}$ met dien verstande dat de beelden van $r e^{i\theta}$ en $\frac{1}{r} e^{i\theta}$ gespiegeld liggen aan de reële as.



Zowel het gebied $0 < |z| < 1$ als $1 < |z|$ worden afgebeeld op het w-vlak waaruit weggelaten $-1 \leq w \leq 1$.

Het w-vlak wordt dus op de punten $w = \pm 1$ na, dubbel overdekt.

Dit is ook te zien door bij gegeven beeldpunt w het origineel te

bepalen: $z = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$. $w = \infty$ is het beeld van $z = 0$ en van $z = \infty$.

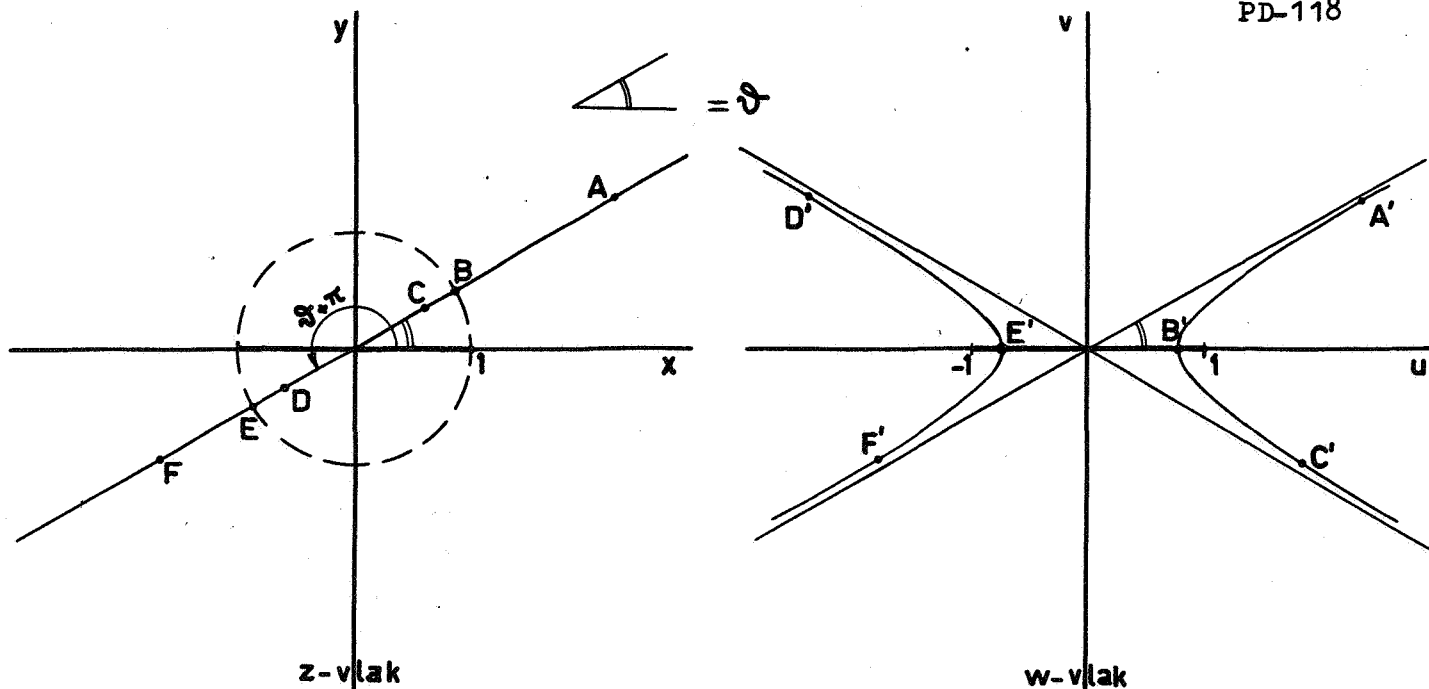
De gevonden ellipsen zijn confocaal; de brandpunten zijn

$$\pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = \pm 1.$$

Het beeld van een halfstraal $z = r e^{i\theta}$, $0 < r$, θ constant, vinden we door eliminatie van r :

$$\frac{u^2}{\cos^2 \theta} - \frac{v^2}{\sin^2 \theta} = 1,$$

dit is een tak van de hyperbool met brandpunten ± 1 , waarvan

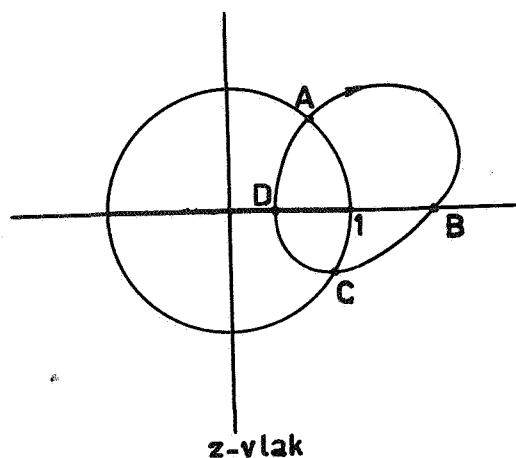


de asymptoot een hoek θ met de u -as maakt (volgt ook uit de konformiteit der afbeelding).

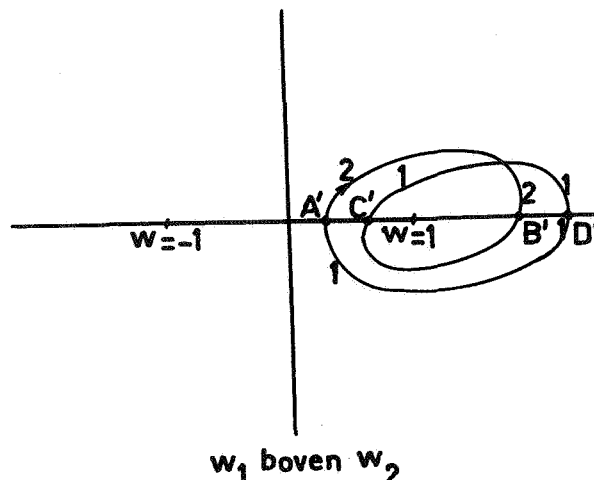
We kunnen ons dit als volgt voorstellen.

Het gebied $|z| < 1$ en het gebied $|z| > 1$ worden afgebeeld op twee afzonderlijke w -vlakken: W_1 en W_2 . In beide vlakken onderscheiden we aan het segment $-1 < w < 1$ een boven- en onderkant en de bovenkant in W_1 of W_2 wordt geïdentificeerd met de onderkant in W_2 resp. W_1 .

Het aldus ontstane oppervlak noemen we het Riemann-oppervlak behorende bij de functie $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Met elk punt w van dit oppervlak correspondeert één punt z . Dit Riemann-oppervlak bestaat uit twee bladen. Het segment $-1 < w < 1$ is de coupure



z-vlak



w_1 boven w_2

Opmerking: Een randwaarde-probleem voor een dubbelgeteld lijnsegment of voor een ellips kunnen we dus transformeren in een randwaarde-probleem voor de cirkel. Op de oplossing passen we dan de inverse transformatie toe.

We beschouwen de transformatie van Joukovski nader.

Stel

$$z = r e^{i\theta} = e^{\mu} e^{i\theta}$$

$$w = \frac{1}{2} (e^{\mu+i\theta} + e^{-(\mu+i\theta)}) = \cosh(\mu + i\theta)$$

of
$$\begin{cases} u = \cosh \mu \cos \theta \\ v = \sinh \mu \sin \theta. \end{cases}$$

Met $\zeta = \mu + i\theta$ is hierdoor een konforme afbeelding gegeven van het ζ -vlak in het w -vlak, op te vatten als het product der afbeeldingen $\zeta \rightarrow z$ met $z = e^{\zeta}$ en $z \rightarrow w$ met $w = \frac{1}{2} (z + \frac{1}{z})$.

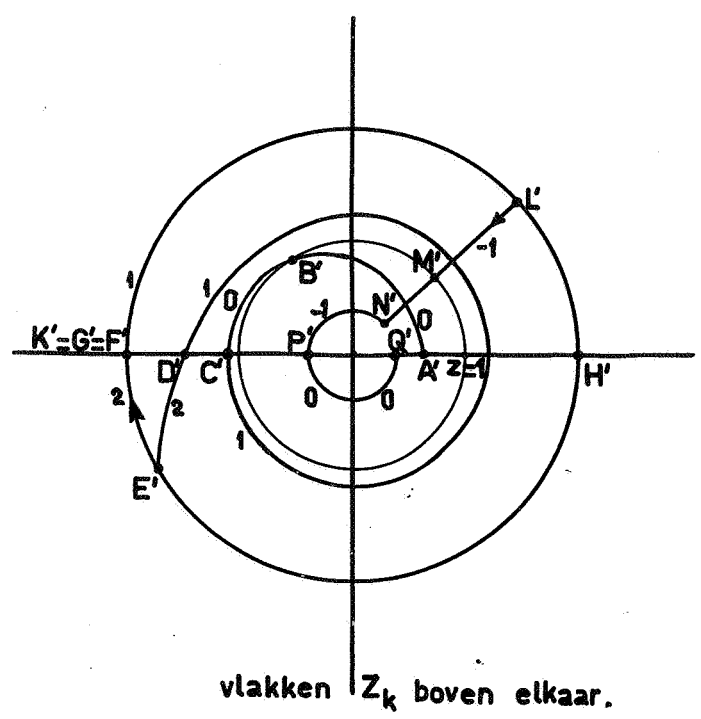
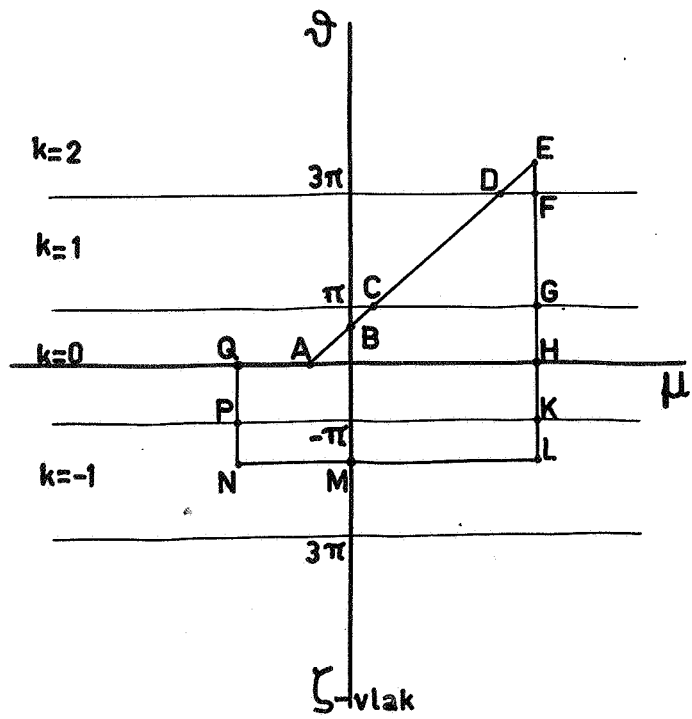
Door de afbeelding

$$z = e^{\zeta} \tag{16.3}$$

wordt het z -vlak oneindig vaak overdekt: elke strook $-\pi + 2k\pi < \theta \leq -\pi + 2(k+1)\pi$, k geheel, wordt afgebeeld op het z -vlak.

Hierbij gaat de puntverzameling $\{\mu=0, -\pi+2k < \theta \leq -\pi+2(k+1)\pi\}$ over in de eenheidscirkel in het z -vlak, de punten met $\mu > 0$ en $\mu < 0$ opvolgend in het buitengebied en binnengebied van die cirkel. De inverse afbeelding $\zeta = \log z$ is een meerwaardige functie (hier oneindig-veelwaardig).

Is $\zeta = (\log z)_1$, de éénwaardige functie met $-\pi < \arg \zeta \leq \pi$, dan corresponderen via de functie $\zeta = \log z$ met punt z de punten $\zeta = (\log z)_k + 2k\pi i$.



Om het bijbehorende Riemann-oppervlak te vinden, beelden we elke strook af op een afzonderlijk z -vlak: Z_k .

Aan de negatief-reële as in Z_k onderscheiden we een onder- en bovenkant.

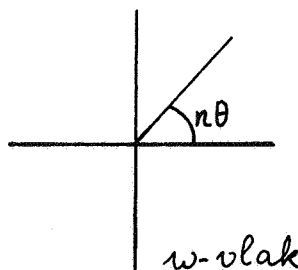
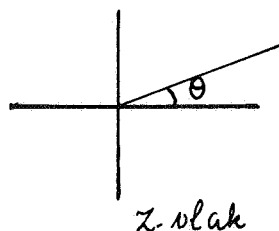
De bovenkant in Z_k wordt geïdentificeerd met de onderkant in Z_{k+1} .

Dit oppervlak heeft oneindig veel bladen.

Voorbeeld. De functie

$$w = z^n, \quad n \text{ geheel } \geq 1 \tag{16.4}$$

met de afgeleide $\frac{dw}{dz} = n z^{n-1}$ is voor $n = 1$ in elk punt konform (uiteraard) en voor $n \geq 2$ in $z \neq 0$. We zien dat $\arg w = n \arg z$ en $\arg \frac{dw}{dz} = (n-1) \arg z$.



Met elk punt z correspondeert één punt w , maar het w -vlak wordt n maal overdekt.

Elke puntverzameling $z = r e^{i\theta}$, $\frac{k}{n} 2\pi < \theta < \frac{k+1}{n} 2\pi$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) wordt afgebeeld op het w -vlak.

De inverse functie

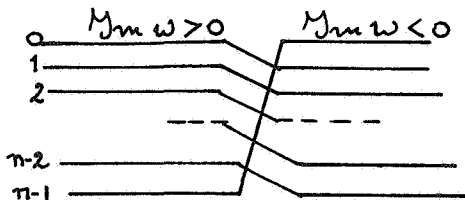
$$z = w^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log w}$$

is een n -waardige functie.

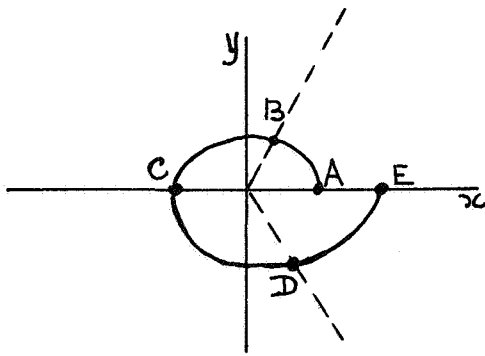
Nemen we als coupure weer de negatief-reële as, dan ontstaat het Riemann-oppervlak als volgt.

De punten met $\frac{2k-1}{n} \pi < \theta \leq \frac{2k+1}{n} \pi$ worden afgebeeld op het w -vlak W_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Aan de coupure onderscheiden we weer een boven- en onderkant en de bovenkant in W_k wordt geïdentificeerd met de onderkant in W_{k+1} voor $k = 0, 1, \dots, n-2$, de bovenkant in W_{n-1} met de onderkant in W_0 . Dit Riemann-oppervlak heeft dus n bladen.

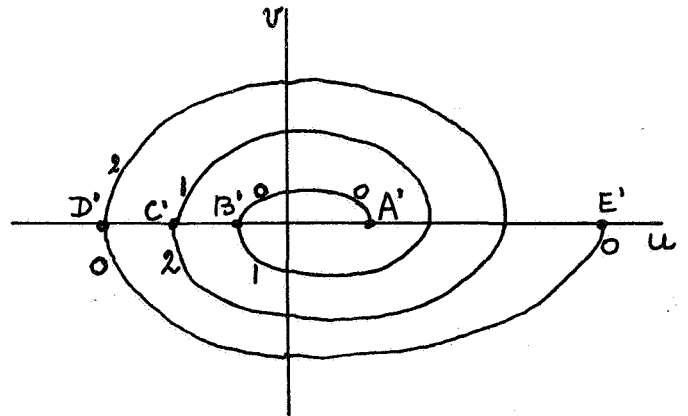
Dwarsdoorsnede.



Voorbeeld. $w = z^3$.



z-vlak



vlakken w_0, w_1, w_2

Opmerking: Voor $n \rightarrow \infty$ is

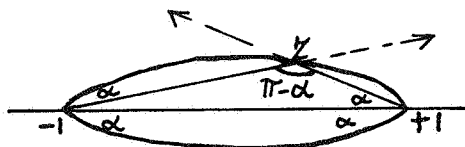
$$z = w^{\frac{1}{n}} \sim 1 + \frac{1}{n} \log w$$

dus $n(z-1) \sim \log w$.

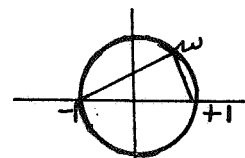
Het Riemann-oppervlak gaat voor $n \rightarrow \infty$ lijken op dat behorende bij $\zeta = \log w$.

Voorbeeld

We beschouwen de "lens" in het z -vlak gevormd door twee congruente cirkelbogen door $z = -1$ en $z = 1$ die een hoek α met de reële as maken.



z-vlak



w-vlak

Is er een functie $w(z)$ die als beeld van de lens de eenheidscirkel geeft? Voor $\alpha = 0$ zal dit de functie

$$z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$$

zijn.

Vanuit elk punt z op de lensfiguur ($z \neq \pm 1$) zien we het segment $-1 \leq z \leq 1$ onder een hoek $\pi - \alpha$, terwijl dit voor het beeldpunt $\frac{1}{2}\pi$ is.

$$\text{Anders geschreven } \arg(z-1) - \arg(z+1) = \arg \frac{z-1}{z+1} = \pi - \alpha$$

$$\text{en } \arg(w-1) - \arg(w+1) = \arg \frac{w-1}{w+1} = \frac{1}{2}\pi$$

$$\text{dus } \arg \frac{w-1}{w+1} = \frac{\pi}{2(\pi - \alpha)} \arg \frac{z-1}{z+1}$$

$$\text{dus (zie boven) } \frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\pi}{2(\pi - \alpha)}} \text{ of } \frac{z-1}{z+1} = \left(\frac{w-1}{w+1}\right)^{2 - \frac{2\alpha}{\pi}}$$

$$\text{Contrôle: } \alpha = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow w = z$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow \frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ waaruit volgt } z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w}\right).$$

We bepalen $\frac{dw}{dz}$.

$$\log \frac{w-1}{w+1} = \frac{\pi}{2(\pi - \alpha)} \log \frac{z-1}{z+1}$$

$$\left(\frac{1}{w-1} - \frac{1}{w+1}\right) \frac{dw}{dz} = \frac{\pi}{2(\pi - \alpha)} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$$

$$\text{of } \frac{dw}{dz} = \frac{\pi}{2(\pi - \alpha)} \frac{w^2 - 1}{z^2 - 1}.$$

De afbeelding is dus konform in de punten $z \neq \pm 1$. Dit is niet in tegenspraak met de boven gevonden hoeken $\pi - \alpha$ en $\frac{1}{2}\pi$. De lijnstukken vanuit $w = \pm 1$ naar punt w zijn niet de beelden van de lijnstukken van $z = \pm 1$ naar punt z .

Het gedrag in de omgeving van $z = 1$. Stel $z-1 = \zeta$, $w-1 = \omega$

$$\frac{\zeta}{2+\zeta} = \left(\frac{\omega}{2+\omega}\right)^{2 - \frac{2\alpha}{\pi}}$$

$$\text{of } \frac{1}{2}\zeta \left(1 + \frac{1}{2}\zeta\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\omega\right)^{2(1 - \frac{\alpha}{\pi})} \left(1 + \frac{1}{2}\omega\right)^{-2(1 - \frac{\alpha}{\pi})}$$

$$\text{of } \frac{1}{2}\zeta \left(1 - \frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{4}\zeta^2 + \dots\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2(1 - \frac{\alpha}{\pi})} \frac{\omega^{2(1 - \frac{\alpha}{\pi})}}{\omega}$$

$$\cdot \left\{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)\omega + \frac{1}{8}\left(2 - \frac{2\alpha}{\pi}\right)\left(3 - \frac{2\alpha}{\pi}\right)\omega^2 + \dots\right\}.$$

Dus in de omgeving van $z = 1, \zeta = 0$:

$$\zeta = 2^{\frac{2\alpha}{\pi}} \omega^{2(1-\frac{\alpha}{\pi})} + \dots,$$

$$\arg \zeta = 2(1-\frac{\alpha}{\pi}) \arg \omega + \dots$$

$$\arg \omega = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow \arg \zeta = \pi - \alpha.$$

Randwaardeproblemen voor een lensfiguur zijn met behulp van bovenstaande transformatie op te lossen.

We noemen hier een stelling, die direct volgt uit de afbeeldingsstelling van Riemann.

Iedere gesloten kromme K die een enkelvoudig-samenhangend gebied omsluit, is met dit binnengebied konform af te beelden op de eenheidscirkel met binnengebied. De afbeelding is eenduidig bepaald, indien we van een willekeurig punt binnen K en een richting door dit punt als beeld de oorsprong en de richting der positief-reële as voorschrijven.

Voor een bewijs zie men bijvoorbeeld Z.Nehari, Conformal Mapping (New York, 1952), bladzijde 175 e.v.

De stelling leert dus dat twee dergelijke krommen met hun binnengebied konform equivalent zijn.

Er bestaat een numerieke methode ter bepaling van deze afbeelding voor het geval K een bijna-cirkel is (d.w.z. K ligt in een ringgebied).

Zij K gegeven door

$$z = r_0 (1 + \epsilon f(\theta)) e^{i\theta}, \quad r_0 \text{ constant.}$$

We willen K met binnengebied G door een functie $w = w(z)$ afbeelden op

$$C: w = R e^{i\tilde{\varphi}}$$

met binnengebied D , waarbij de constanten R en de functie $\tilde{\varphi}(\theta)$ bepaald moeten worden.

Stel $w = z + \epsilon F(\theta)$ en $\tilde{\varphi} = \theta + \epsilon \phi(\theta)$.

Dan is

$$\begin{aligned} \log w &= \log (z + \epsilon F(\theta)) = \log z + \log \left(1 + \epsilon \frac{F(\theta)}{z}\right) \\ &= \log r_0 + i\theta + \log(1 + \epsilon f(\theta)) + \log \left(1 + \epsilon \frac{F(\theta)}{z}\right) \\ &= \log r_0 + i\theta + \epsilon f(\theta) + \epsilon \frac{F(\theta)}{z} + O(\epsilon^2) \\ &= \log r_0 + i\theta + \epsilon f(\theta) + \epsilon \frac{1}{r_0} \frac{1}{1 + \epsilon f(\theta)} e^{-i\theta} F(\theta) + O(\epsilon^2) \\ &= \log r_0 + i\theta + \epsilon f(\theta) + \epsilon \frac{e^{-i\theta}}{r_0} F(\theta) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Anderzijds is $\log w = \log R + i\theta + i\epsilon\phi$

dus

$$\log R + i\epsilon\phi = \log r_0 + \epsilon f(\theta) + \epsilon \frac{e^{-i\theta}}{r_0} F(\theta) + O(\epsilon^2)$$

dus $R = r_0$

en $i\phi = f(\theta) + \frac{1}{r_0} e^{-i\theta} F(\theta) = f(\theta) + \frac{1}{r_0} (G_1(\theta) + i G_2(\theta))$

of $0 = f(\theta) + \frac{1}{r_0} G_1(\theta)$

$$\phi(\theta) = \frac{1}{r_0} G_2(\theta).$$

Hieruit volgt $G_1(\theta) = -r_0 f(\theta)$.

G is een complexe functie op de eenheidscirkel, dus (zie 14.10)

$$G_2(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_1(\chi) \cot \frac{1}{2} (\theta - \chi) d\chi$$

of $\phi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\chi) \cot \frac{1}{2} (\chi - \theta) d\chi$

(voor integraal CHW nemen).

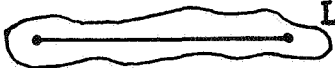

De afbeelding

$$w_1(z) = r_0 e^{i(\theta + \epsilon\phi(\theta))}$$

geeft een eerste benadering van de gevraagde afbeelding.

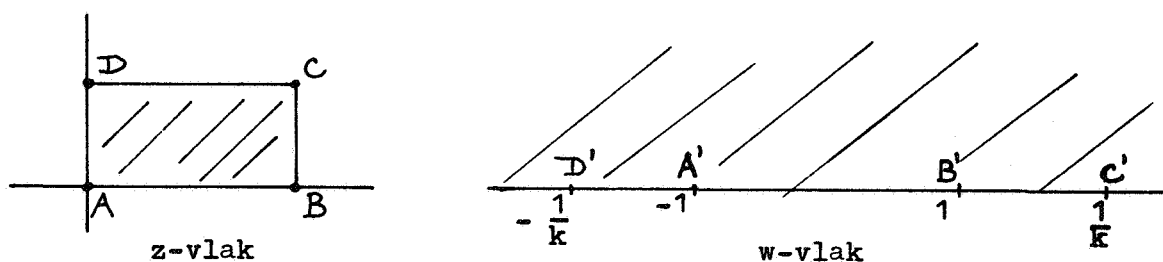
Zij K_1 het beeld van K bij de functie $w_1(z)$. Op K_1 kunnen we dezelfde methode toepassen.

Opmerkingen

- Men kan ook werken met geconjugeerde reeksen van Fourier i.p.v. met de geconjugeerde integralen.
- Een randwaardeprobleem op een langgerekte kromme L kan aangepakt worden als volgt. Neem een lijnstuk binnen L . Transformeer het lijnstuk in een cirkel (Joukovski). Hierbij gaat L over in een bijna-cirkel.
 
- Iets dergelijks bij een profiel-kromme L , die in één punt P niet glad is. Neem een lens die in P aan L raakt.
 
- Transformeer de lens in een cirkel (zie boven). Hierbij gaat L over in een bijna-cirkel.

Met de geschetste numerieke methode kan men een benadering vinden van de afbeelding van een vierkant met binnengebied op een cirkel met binnengebied. Men kan deze afbeelding ook verkrijgen met de formule van Schwarz-Christoffel door het boven halfvlak af te beelden op het vierkant met binnengebied, want dan levert de inverse afbeelding hiervan, gevolgd door een lineaire transformatie, die het afbeeldt op de cirkel met binnengebied, de gevraagde afbeelding.

We proberen hier rechtstreeks een functie f te bepalen die het halfvlak $\text{Im } w \geq 0$ in het w -vlak afbeeldt op een rechthoek ABCD met binnengebied in het z -vlak.



Stel A, B, C en D zijn de beeldpunten van $z = 0$, $z = b$, $z = b + id$, $z = id$ en stel

$$f(-1) = 0, f(1) = b, f\left(\frac{1}{k}\right) = b + id$$

$$f\left(-\frac{1}{k}\right) = id \text{ met } 0 < k < 1.$$

De hoeken ter grootte π bij A' , ... moeten overgaan in hoeken ter grootte $\frac{1}{2}\pi$ bij A, We proberen daarom (vergelijk de afbeelding $z = w$ in de omgeving van $w = 0$)

$$\frac{dz}{dw} = \frac{C}{(w+1)^{\frac{1}{2}}(w-1)^{\frac{1}{2}}\left(w-\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(w+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

en wel, in verband met de verandering van het argument van de betreffende factor en het gegeven $b > 0$, $d > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dw} = g(w) &= \frac{1}{(1+w)^{\frac{1}{2}}(1-w)^{\frac{1}{2}}(1+kw)^{\frac{1}{2}}(1-kw)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{als } -1 < w < 1 \\ &= \frac{i}{(1+w)^{\frac{1}{2}}(w-1)^{\frac{1}{2}}(1+kw)^{\frac{1}{2}}(1-kw)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{als } 1 < w < \frac{1}{k} \\ &= \frac{-1}{(1+w)^{\frac{1}{2}}(w-1)^{\frac{1}{2}}(1+kw)^{\frac{1}{2}}(kw-1)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{als } \frac{1}{k} < w \\ &= \frac{-1}{(-1-w)^{\frac{1}{2}}(1-w)^{\frac{1}{2}}(-1-kw)^{\frac{1}{2}}(1-kw)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{als } w < -\frac{1}{k} \end{aligned}$$

$$= \frac{-i}{(-1-w)^{\frac{1}{2}}(1-w)^{\frac{1}{2}}(1+kw)^{\frac{1}{2}}(1-kw)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{als } -\frac{1}{k} < w < -1.$$

We gaan na dat de funktie

$$z = f(w) = \int_{-1}^w g(\zeta) d\zeta$$

de vereiste afbeelding tot stand brengt.

$f(-1) = 0$; $f(w)$ is reëel als $-1 < w < 1$; stel $f(1) = b$ (eventueel door vermenigvuldiging met een constante); $f(w)$ is gelijk aan b vermeerderd met een zuiver-imaginair getal als $1 < w < \frac{1}{k}$; stel $f(\frac{1}{k}) = b + id$

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} g(\zeta) d\zeta = \int_0^1 g(\zeta) d\zeta \quad (\text{substitueer } \zeta = \frac{1}{ku}),$$

$$\int_{-\infty}^{-\frac{1}{k}} g(\zeta) d\zeta = \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} g(\zeta) d\zeta ; \int_{-1}^0 g(\zeta) d\zeta = \int_0^1 g(\zeta) d\zeta$$

dus $f(-\frac{1}{k}) = b + id - b = id.$

17. De transformatie van Laplace

Vooraf iets over de gammafunctie

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-v} v^{z-1} dv,$$

waarvan de convergentie aangetoond kan worden als $\text{Re } z > 0$. Voorlopig nemen we z reëel, dus

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-v} v^{x-1} dv, \quad x > 0. \quad (17.1)$$

Blijkbaar is $\Gamma(x) > 0$ als $x > 0$. Partiële integratie geeft

$$\int_0^{\infty} e^{-v} v^{x-1} dx = [-e^{-v} v^{x-1}]_0^{\infty} + (x-1) \int_0^{\infty} e^{-v} v^{x-2} dv,$$

dus
$$\Gamma(x) = (x-1) \Gamma(x-1), \quad x > 1 \quad (17.2)$$

en
$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1), \quad x > 0. \quad (17.3)$$

We berekenen enkele waarden.

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-v} dv = 1,$$

dus met (17.2) en de afspraak $0! = 1$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \text{ geheel } \geq 1. \quad (17.4)$$

(De gammafunctie, één van de functies van Euler, is een generalisatie van de faculteit-functie $n!$)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-v} v^{-\frac{1}{2}} dv = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \quad (\text{subst. } v = u^2)$$

dus

$$\begin{aligned} \left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 &= 4 \left\{\int_0^{\infty} e^{-u^2} du\right\}^2 = 4 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= (\text{poolcoördinaten}) = 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \pi. \end{aligned}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (17.5)$$

Voor $x \leq 0$ bestaat de integraal in (17.1) niet.

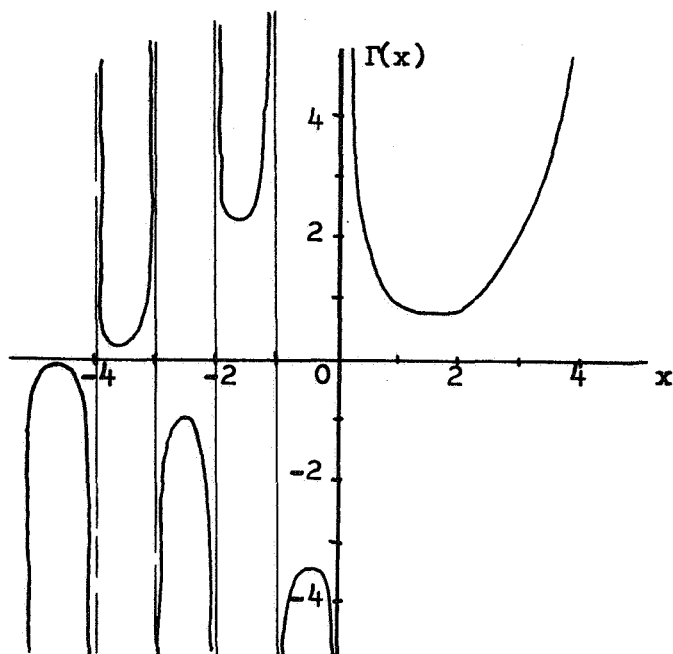
Voor $x < 0$ definiëren we $\Gamma(x)$ door de relatie (17.3) geldig te verklaren voor $x < 0$. Bijvoorbeeld

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{4}{3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} \sqrt{\pi}.$$

In $x = 0, -1, -2, \dots$ heeft $\Gamma(x)$ enkelvoudige polen, hetgeen men kan afleiden uit (17.3)

$$\Gamma(\delta) = \frac{1}{\delta} \Gamma(1 + \delta),$$

$$\Gamma(-1 + \delta) = \frac{1}{(-1 + \delta)\delta} \Gamma(1 + \delta), \text{ enz.}$$



Opmerking

In sommige boeken vindt men de functie $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$.

Opgaven.

a) Bewijs: $\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2m)!}{2^{2m} \cdot m!} \sqrt{\pi}$, m geheel ≥ 0 .

b) Bewijs: $\Gamma\left(-m + \frac{1}{2}\right) = (-1)^m \frac{2^{2m} \cdot m!}{(2m)!} \sqrt{\pi}$, m geheel ≥ 1 , ook geldig voor $m = 0$.

De transformatie van Laplace wordt gebruikt bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen. Ter inleiding beschouwen we de diff.vgl.

$$F'(t) + a F(t) = 0$$

waarvan de oplossing gemakkelijk te vinden is: $F(t) = F_0 e^{-at}$ als $F(0) = F_0$.

Vermenigvuldiging met e^{-pt} geeft

$$F'(t) e^{-pt} + a F(t) e^{-pt} = 0.$$

Stel p zo groot, dat we kunnen integreren tussen 0 en ∞

$$\int_0^{\infty} F'(t) e^{-pt} dt + a \int_0^{\infty} F(t) e^{-pt} dt = 0$$

of $[F(t) e^{-pt}]_0^{\infty} + (p+a) \int_0^{\infty} F(t) e^{-pt} dt = 0$

dus $\int_0^{\infty} F(t) e^{-pt} dt = \frac{F_0}{p+a}$.

Nu is $\int_0^{\infty} e^{-(p+a)t} dt = \frac{1}{p+a}$

dus $F(t) e^{-pt} = F_0 e^{-(p+a)t}$

of $F(t) = F_0 e^{-at}$.

Onder de Laplace-getransformeerde van $F(t)$ verstaan we de funktie van p :

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} F(t) e^{-pt} dt, \quad (17.6)$$

als deze integraal voor voldoende grote $p > 0$ bestaat. Men toont gemakkelijk aan

$$\mathcal{L}\{F_1 + F_2\} = \mathcal{L}\{F_1\} + \mathcal{L}\{F_2\}$$

en

$$\mathcal{L}\{c F_1\} = c \mathcal{L}\{F_1\} \quad (17.7)$$

$$\int_0^{\infty} F^{(n)}(t) e^{-pt} dt = [F^{(n-1)}(t) e^{-pt}]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} F^{(n-1)}(t) e^{-pt} dt$$

dus $\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = -F^{(n-1)}(0) + p \mathcal{L}\{F^{(n-1)}(t)\} \quad (n \geq 1)$

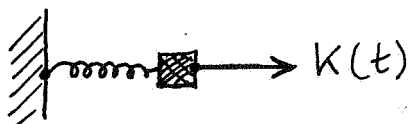
en hieruit

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = p^n \mathcal{L}\{F(t)\} - \sum_{j=0}^{n-1} p^{n-1-j} F^{(j)}(0) \quad (17.8)$$

$(n \geq 1)$

Voorbeeld.

Een massa m , bevestigd aan een veer met veerconstante C , beweegt zich lineair onder invloed van een kracht $K(t)$.



Voor de plaatscoördinaat $x(t)$ geldt dan

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = K(t) - C x(t)$$

of

$$m \ddot{x}(t) + C x(t) = K(t).$$

Stel $\mathcal{L}\{x(t)\} = \bar{x}(p)$, dan is (zie 17.7, 8)

$$m(p^2 \bar{x}(p) - p x(0) - \dot{x}(0)) + C \bar{x}(p) = \bar{k}(p)$$

of

$$\bar{x}(p) = \frac{mp x(0) + m \dot{x}(0) + \bar{k}(p)}{mp^2 + C}$$

$x(0)$ en $\dot{x}(0)$ moeten dus bekend zijn, en we dienen de functie te kennen waarvan het rechterlid de Laplace-getransformeerde is. We moeten dus een tabel maken. Stel $f(p) = \mathcal{L}\{F(t)\}$

$F(t)$	$f(p)$	
t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$	$n > -1$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	n geheel ≥ 0
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$p > a$
$\cos bt$	$\frac{p}{p^2 + b^2}$	
$\sin bt$	$\frac{b}{p^2 + b^2}$	
$\cosh bt$	$\frac{p}{p^2 - b^2}$	
$\sinh bt$	$\frac{b}{p^2 - b^2}$	
$e^{at} F(t)$	$f(p-a)$	(17.9)

Voor het terugzoeken zijn nog van belang

$F(t)$	$f(p)$	
$\frac{1}{(n-1)!} e^{at} t^{n-1}$	$\frac{1}{(p-a)^n}$	(n geheel ≥ 1)
$e^{at} \cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$	
$\frac{1}{b} e^{at} \sin bt$	$\frac{1}{(p-a)^2 + b^2}$	

Opgaven.

• Bewijs: $\mathcal{L}\{t \sin bt\} = \frac{2bp}{(p^2 + b^2)^2}$
 en $\mathcal{L}\{t \cos bt\} = \frac{p^2 - b^2}{(p^2 + b^2)^2}$.

Berekeningen.

• $\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} t^n e^{-pt} dt = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{\infty} (pt)^n e^{-pt} d(pt) = \frac{1}{p^{n+1}} \Gamma(n+1)$.

• n geheel $\geq 0 \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$.

• $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \frac{1}{p-a}$.

• Stel $s(p) = \mathcal{L}\{\sin at\}$, $c(p) = \mathcal{L}\{\cos at\}$

$$s(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin at dt = -\frac{1}{a} [e^{-pt} \cos at]_0^{\infty} - \frac{p}{a} c(p)$$

$$= -\frac{1}{a} - \frac{p}{a} c(p).$$

Ook $s(p) = -\frac{1}{p} [e^{-pt} \sin at]_0^{\infty} + \frac{a}{p} c(p) = \frac{a}{p} c(p)$.

Hieruit volgt $s(p) = \frac{a}{p^2 + a^2}$, $c(p) = \frac{p}{p^2 + a^2}$.

Ook als volgt te zien

$$\mathcal{L}\{e^{iat}\} = \frac{1}{p-ia}$$

of
$$\mathcal{L}\{\cos at + i \sin at\} = \frac{p+ia}{p^2+a^2}.$$

•
$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{at} + e^{-at}\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a} \right) = \frac{p}{p^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{p^2-a^2}.$$

•
$$\mathcal{L}\{e^{at} F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} F(t) dt.$$

•
$$\mathcal{L}\left\{ \frac{1}{(n-1)!} e^{at} t^{n-1} \right\} = f(p-a)$$

als
$$f(p) = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \right\} = \frac{1}{p^n}.$$

•
$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos bt\} = f(p-a)$$

als
$$f(p) = \mathcal{L}\{\cos bt\}.$$

Analoog voor $e^{at} \sin bt$.

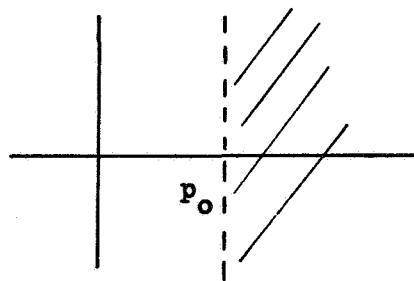
Stelling

Indien voor $\operatorname{Re} p = p_0$ de integraal $\int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt = f(p)$ bestaat, (17.10)

dan bestaat zij voor alle p met $\operatorname{Re} p > p_0$. Bovendien is in dit halfvlak $f(p)$ een analytische functie van p .

Opmerking: Dus $\frac{1}{\sin \pi p}$ kan niet als beeldfunctie optreden.

Bewijs:



$$p_0 > 0$$

$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-p_0 t} F(t) dt$ bestaat, dus bij gegeven $\epsilon > 0$ is er een b zodat
 alle $a > b$ $|\int_a^{\infty} e^{-p_0 t} F(t) dt| < \epsilon$.

$$\int_0^a e^{-pt} F(t) dt = \int_0^a e^{-(p-p_0)t} e^{-p_0 t} F(t) dt.$$

Zij $\epsilon_1 > 0$ gegeven

$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^{\infty} e^{-pt} F(t) dt \right| &= \left| - \int_a^{\infty} e^{-(p-p_0)t} d \left(\int_t^{\infty} e^{-p_0 \tau} F(\tau) d\tau \right) \right| \\
 &= \left| - \int_a^{\infty} e^{-(p-p_0)t} \left\{ \int_t^{\infty} e^{-p_0 \tau} F(\tau) d\tau \right\} dt \right. \\
 &\quad \left. - (p-p_0) \int_a^{\infty} e^{-(p-p_0)t} \left\{ \int_t^{\infty} e^{-p_0 \tau} F(\tau) d\tau \right\} dt \right| \\
 &= \left| - (p-p_0+1) \int_a^{\infty} e^{-(p-p_0)t} \left\{ \int_t^{\infty} e^{-p_0 \tau} F(\tau) d\tau \right\} dt \right| \\
 &\leq |p-p_0+1| \int_a^{\infty} |e^{-(p-p_0)t}| \left| \int_t^{\infty} e^{-p_0 \tau} F(\tau) d\tau \right| dt \\
 &\leq |p-p_0+1| \epsilon \int_a^{\infty} |e^{-(p-p_0)t}| dt < \epsilon_1
 \end{aligned}$$

als $a > b_1$ en $\text{Re } p > p_0$.

Dus $f(p)$ bestaat voor $\text{Re } p > p_0$. Analoog bewijzen we dat $\frac{df(p)}{dp}$ bestaat voor $\text{Re } p > p_0$.

Uit het voorbeeld op bladzijde 129/130 blijkt, dat we niet alleen bij een beeldfunctie de originele functie dienen te kennen, maar ook de functie waarvan de getransformeerde het product van twee beeldfuncties is.

$$\text{Stel } f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt, \quad g(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} G(t) dt.$$

Gevraagd de funktie $H(t)$ waarvoor geldt

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} H(t) dt = f(p) g(p).$$

We veronderstellen $F(t)$ en $G(t)$ absoluut integreerbaar over $[0, \infty)$.

$$\begin{aligned} f(p)g(p) &= \int_0^{\infty} e^{-p\tau} F(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-p\xi} G(\xi) d\xi \\ &= \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{\xi=0}^{\infty} e^{-p(\tau+\xi)} F(\tau) G(\xi) d\tau d\xi. \end{aligned}$$

Stel $\tau = \tau$, $t = \tau + \xi$.

Uit $0 \leq \tau$ en $0 \leq \xi$ volgt voor de integratiegrenzen $0 \leq t$ en $0 \leq \tau \leq t$. Ook meetkundig te zien.

Dus

$$\begin{aligned} f(p)g(p) &= \int_{t=0}^{\infty} \int_{\tau=0}^t e^{-pt} F(\tau) G(t-\tau) dt d\tau \\ &= \mathcal{L} \left\{ \int_{\tau=0}^t F(\tau) G(t-\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

De uitdrukking

$$\int_{\tau=0}^t F(\tau) G(t-\tau) d\tau \quad (17.11)$$

heet de convolutie-integraal (vouw-, Faltung) van $F(t)$ en $G(t)$, aan te duiden als $F(t)*G(t)$.

Dus

$$\mathcal{L}\{F(t)\} \mathcal{L}\{G(t)\} = \mathcal{L}\{F(t)*G(t)\}.$$

Bewijs zelf:

$$F(t)*G(t) = G(t)*F(t).$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2 - b^2} &= \frac{1}{p+b} \cdot \frac{1}{p-b} = \mathcal{L}\{e^{-bt}\} \mathcal{L}\{e^{bt}\} \\ &= \mathcal{L}\left\{ \int_0^t e^{-b\tau} e^{b(t-\tau)} d\tau \right\} = \mathcal{L}\left\{ e^{bt} \frac{-1}{2b} (e^{-2bt} - 1) \right\} \\ &= \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{2b} (e^{bt} - e^{-bt}) \right\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{b} \sinh bt \right\}. \end{aligned}$$

Voorbeeld

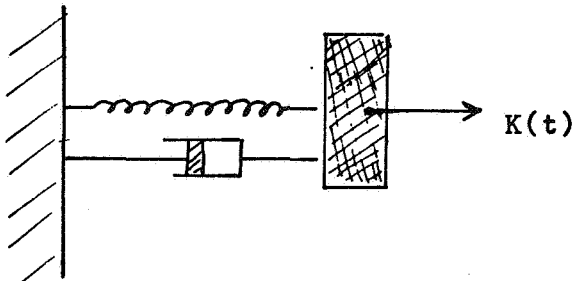
$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t F(\tau) d\tau \right\} = \mathcal{L} \{F(t)\} \cdot \mathcal{L} \{1\} = \frac{1}{p} \mathcal{L} \{F(t)\}.$$

Dit is geen nieuws: stel $F(t) = \phi'(t)$ dan is

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t F(\tau) d\tau \right\} = \mathcal{L} \{\phi(t) - \phi(0)\} = \mathcal{L}\{\phi(t)\} - \frac{1}{p} \phi(0)$$

en
$$\frac{1}{p} \mathcal{L} \{F(t)\} = \frac{1}{p} \mathcal{L} \{\phi'(t)\} = \frac{1}{p} \{p \mathcal{L}\{\phi(t)\} - \phi(0)\}.$$

Voorbeeld



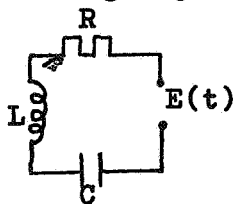
Een massa m , bevestigd aan een veer met veerconstante C , beweegt zich lineair onder invloed van een kracht $K(t)$ en een demping (bv. door een vloeistofbreker). Op het tijdstip t heeft m de uitwijking $x(t)$. Voor niet te grote uitwijkingen is de veerkracht gelijk aan $-Cx(t)$. De demping veronderstellen we gelijk aan $-Dx'(t)$.

Dus

$$m x''(t) = K(t) - C x(t) - D x'(t). \quad (17.12)$$

Opmerking

Een dergelijke vergelijking vinden we bij een electrisch circuit.



$$L q''(t) + R q'(t) + \frac{1}{C} q(t) = E(t).$$

Met $\bar{x}(p) = \mathcal{L} \{x(t)\}$ en $k(p) = \mathcal{L} \{K(t)\}$ vinden we

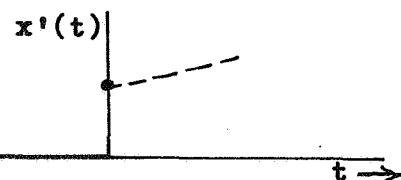
$$(m p^2 + Dp + C) \bar{x}(p) = (mp + D) x(0) + m x'(0) + k(p). \quad (17.13)$$

We beschouwen (17.13) nader.

Is het rechterlid als geheel op te vatten als het beeld van een opgedrongen kracht ?

De term $m x'(0)$

$x'(t)$ maakt in $t = 0$ een sprong ter grootte $x'(0)$ (zoiets als een oneindig grote versnelling: een stoot).

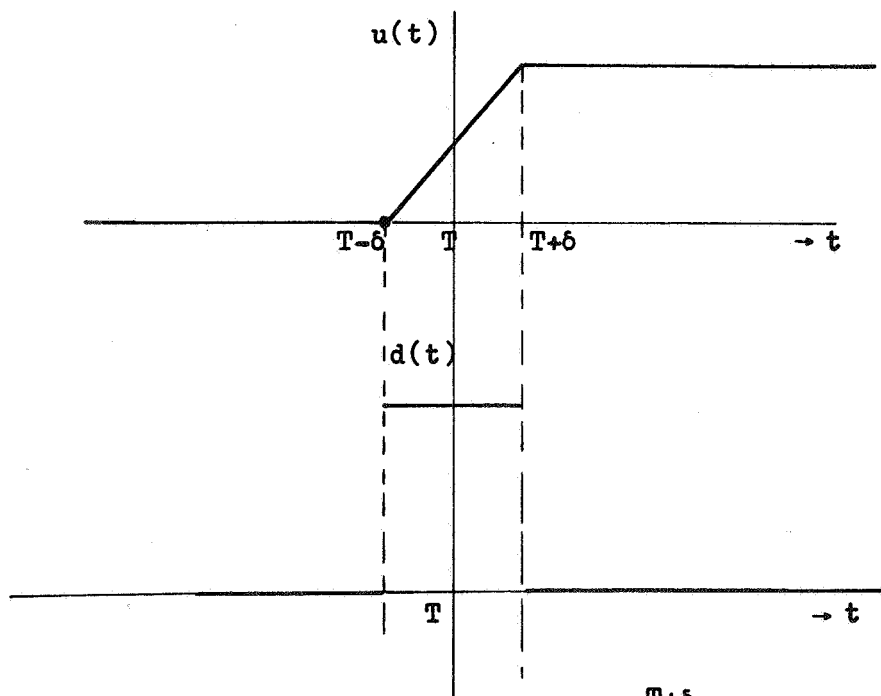


In plaats van $x'(t)$ beschouwen we de functie

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq t < T-\delta \\ \frac{1}{2\delta} (t-T+\delta) & \text{als } T-\delta \leq t \leq T+\delta \\ 1 & \text{als } T+\delta < t \end{cases}$$

en in plaats van $x''(t)$ de afgeleide van $u(t)$:

$$d(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 < t < T-\delta \\ \frac{1}{2\delta} & \text{als } T-\delta < t < T+\delta \\ 0 & \text{als } T+\delta < t \end{cases}$$



$$\bar{d}(p) = \int_0^{\infty} d(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{2\delta} \int_{T-\delta}^{T+\delta} e^{-pt} dt = e^{-pT} \frac{\sinh \delta p}{\delta p}$$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \bar{d}(p) = e^{-pT}; \quad \lim_{T \downarrow 0} \lim_{\delta \downarrow 0} \bar{d}(p) = 1.$$

$\bar{d}(p)$ is de beeldfunctie van de functie $d(t)$, die we beschouwden i.p.v. $x''(t)$.

$\lim_{\delta \downarrow 0} d(t) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(t-T)$: de δ -functie van Dirac (nul voor $t \neq T$, oneindig groot voor $t = T$).

Slordig geschreven

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \delta(t-T) dt = e^{-pT}.$$

Voor $T = 0$ is het beeld van de "versnelling" $\delta(t-T)$ gelijk aan 1. $x'(0)$ is hier een veelvoud van en $m x'(0)$ is dus het beeld van een kracht.

Opmerking.

Omdat $d(t) = \frac{d}{dt} u(t)$, verwachten we $\lim_{\delta \downarrow 0} \bar{u}(p) = \frac{1}{p} e^{-pT}$.

$$\begin{aligned} \bar{u}(p) &= \int_0^{\infty} u(t) e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{2\delta} \int_{T-\delta}^{T+\delta} (t-T+\delta) e^{-pt} dt + \int_{T-\delta}^{\infty} e^{-pt} dt \\ &= (\text{na enig rekenwerk}) = \frac{1}{\delta p^2} e^{-pT} \sinh \delta p \end{aligned}$$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \bar{u}(p) = \frac{1}{p} e^{-pT} \rightarrow \frac{1}{p} \text{ als } T \downarrow 0.$$

De term $(mp + D) x(0)$

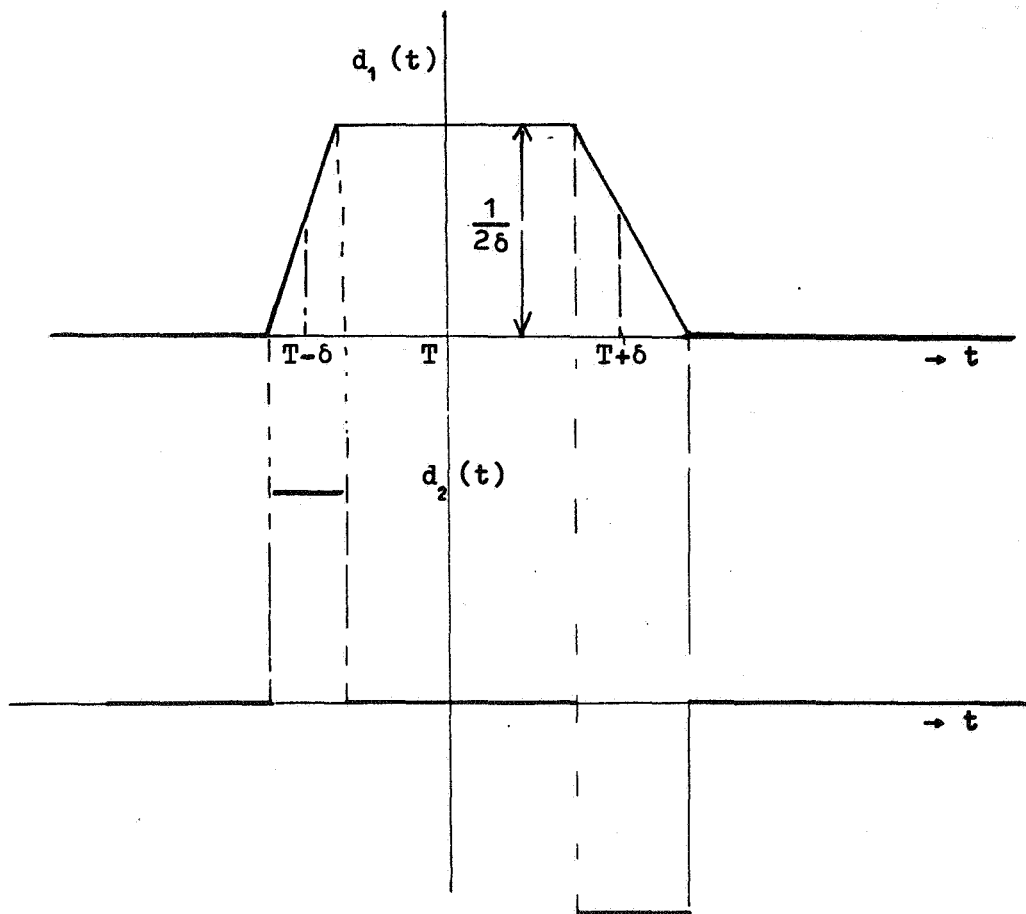
$x(t)$ maakt op $t = 0$ een sprong ter grootte $x(0)$ (zoiets als een oneindig grote snelheid op $t = 0$: een onbegrensde positieve versnelling gevolgd door een onbegrensde negatieve versnelling).

In plaats van $x'(t)$ beschouwen we nu niet de functie $d(t)$, die sprongen maakt, maar de functie ($0 < \epsilon < \delta$):

$$d_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 < t < T-\delta-\epsilon \\ \frac{1}{4\delta\epsilon} (t-T+\delta+\epsilon) & \text{als } T-\delta-\epsilon \leq t \leq T-\delta+\epsilon \\ \frac{1}{2\delta} & \text{als } T-\delta+\epsilon < t < T+\delta-\epsilon \\ -\frac{1}{4\delta\epsilon} (t-T-\delta-\epsilon) & \text{als } T+\delta-\epsilon \leq t \leq T+\delta+\epsilon \\ 0 & \text{als } T+\delta+\epsilon < t \end{cases}$$

in plaats van $x''(t)$ de afgeleide $d_2(t)$ van $d_1(t)$, opvolgend gelijk aan $0, \frac{1}{4\delta\epsilon}, 0, -\frac{1}{4\delta\epsilon}, 0$.

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} d_1(t) = d(t); \quad \lim_{\epsilon \downarrow 0} \bar{d}_1(p) = d(p).$$



$$\begin{aligned}
 \bar{d}_2(p) &= \int_0^{\infty} d_2(t) e^{-pt} dt \\
 &= \frac{1}{4\delta\epsilon} \int_{T-\delta-\epsilon}^{T-\delta+\epsilon} e^{-pt} dt - \frac{1}{4\delta\epsilon} \int_{T+\delta-\epsilon}^{T+\delta+\epsilon} e^{-pt} dt \\
 &= (\text{n.e.r.}) = \frac{1}{p\delta\epsilon} e^{-pT} \sinh p\delta \sinh p\epsilon.
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \bar{d}_2(p) = \frac{1}{\delta} e^{-pT} \sinh p\delta; \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \bar{d}_2(p) = p e^{-pT}.$$

Voor $T = 0$ is het beeld van de "versnelling" $\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\epsilon \downarrow 0} d_2(t)$ dus p ; $px(0)$ is hier een veelvoud van en $mpx(0)$ het beeld van een kracht.

$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \bar{d}_1(p) = e^{-pT}$; voor $T = 0$ is het beeld van de "snelheid" dus 1 ; $x(0)$ is hier een veelvoud van en $Dx(0)$ het beeld van een kracht.

De vergelijking (17.13) luidde:

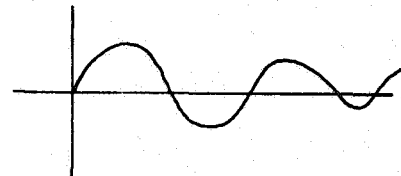
$$\bar{x}(p) = \frac{mp x(0) + D x(0) + m x'(0) + k(p)}{mp^2 + Dp + C}$$

We bepalen eerst de originele funktie van

$$f(p) = \frac{1}{mp^2 + Dp + C} = \frac{1/m}{\left(p + \frac{D}{2m}\right)^2 + \frac{C}{m} - \frac{D^2}{4m^2}}$$

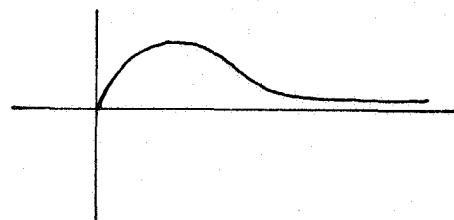
$$\frac{C}{m} > \frac{D^2}{4m^2} \quad F(t) = \frac{1}{m\omega} e^{-\frac{D}{2m}t} \sin \omega t \quad \text{met } \omega = \sqrt{\frac{C}{m} - \frac{D^2}{4m^2}}$$

Dit is een gedempte trilling



$$\frac{C}{m} = \frac{D^2}{4m^2} \quad F(t) = \frac{1}{m} t e^{-\frac{D}{2m}t}$$

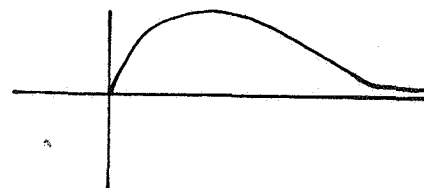
Kritisch gedempt



$$\frac{C}{m} < \frac{D^2}{4m^2} \quad f(p) = \frac{1}{2m\beta} \left(\frac{1}{p + \frac{D}{2m} - \beta} - \frac{1}{p + \frac{D}{2m} + \beta} \right) \quad \text{met } \beta = \sqrt{\frac{D^2}{4m^2} - \frac{C}{m}}$$

$$F(t) = \frac{1}{2m\beta} \left\{ e^{-\left(\frac{D}{2m} - \beta\right)t} - e^{-\left(\frac{D}{2m} + \beta\right)t} \right\} = \frac{1}{m\beta} e^{-\frac{D}{2m}t} \sinh \beta t$$

Bovenkritisch gedempt



Opmerking

Voor $D = 0$ hebben we een ongedempte trilling; voor $K(t) = 0$ vrije trillingen; voor $K(t) \neq 0$ gedwongen trillingen.

Stel gedempte trillingen, $4mC > D^2$.

$$\frac{k(p)}{mp^2 + Dp + C} = k(p) \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{m\omega} e^{-\frac{D}{2m}t} \sin \omega t \right\}$$

$$= \mathcal{L} \left\{ \int_0^t K(\tau) \underbrace{\frac{1}{m\omega} e^{-\frac{D}{2m}(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) dt}_{*} \right\}.$$

De factor (*) in de integrand is op te vatten als de uitwijking op t tengevolge van een stoot op τ .

$$\frac{D x(0) + m x'(0)}{mp^2 + Dp + C} = \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\omega} (x'(0) + \frac{D x(0)}{m}) e^{-\frac{D}{2m}t} \sin \omega t \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{mp x(0)}{mp^2 + Dp + C} &= \mathcal{L} \left\{ m x(0) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m\omega} e^{-\frac{D}{2m}t} \sin \omega t \right) \right\} \\ &= \mathcal{L} \left\{ x(0) e^{-\frac{D}{2m}t} \left(\cos \omega t - \frac{D}{2m\omega} \sin \omega t \right) \right\}. \end{aligned}$$

Samenvattend

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t K(\tau) e^{-\frac{D}{2m}(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) dt \\ &+ \frac{x'(0)}{\omega} e^{-\frac{D}{2m}t} \sin \omega t + x(0) e^{-\frac{D}{2m}t} \left(\cos \omega t + \frac{D}{2m\omega} \sin \omega t \right) \end{aligned}$$

(17.14)

Twee gevallen

- vrije gedempte trilling zonder beginsnelheid

$$x(t) = x(0) e^{-\frac{D}{2m}t} \left(\cos \omega t + \frac{D}{2m\omega} \sin \omega t \right).$$

- periodieke opgedrongen kracht $K(t) = K_0 \cos \Omega t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

$$x(t) = \frac{K_0}{m\omega} \int_0^t \cos \Omega \tau e^{-\frac{D}{2m}(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) dt.$$

Dit laatste geval behandelen we nu onafhankelijk van de Laplace-transformatie. De vergelijking luidt

$$m x''(t) + D x'(t) + C x(t) = K_0 \cos \Omega t. \quad (*)$$

Omdat $x(0) = x'(0) = 0$ bezit de homogene vergelijking alleen de nuloplossing.

We kunnen (*) oplossen door substitutie van $x = B_1 \cos \Omega t + B_2 \sin \Omega t$ of van $x = A_1 \cos (\Omega t + \varphi)$ en bepaling van B_1 en B_2 (reëel) resp. A_1 (reëel) en φ .

Door substitutie van $z = A e^{i\Omega t}$ in

$$m z''(t) + D z'(t) + C z(t) = K_0 e^{i\Omega t} \quad (**)$$

en bepaling van A (complex) vinden we ook de oplossing: $x = \operatorname{Re} (z)$.
Want nemen we naast (*) de vergelijking

$$m y''(t) + D y'(t) + C y(t) = K_0 \sin \Omega t$$

en stellen we $z = x + iy$, dan voldoet z aan (**) terwijl $x = \operatorname{Re} (z)$.

Substitutie van $z = A e^{i\Omega t}$ in (**) geeft

$$A = \frac{K_0}{C - m\Omega^2 + iD\Omega} = \frac{K_0 e^{-i\varphi}}{\sqrt{(C - m\Omega^2)^2 + D^2 \Omega^2}}$$

als $\varphi = \arg (C - m\Omega^2 + iD\Omega)$.

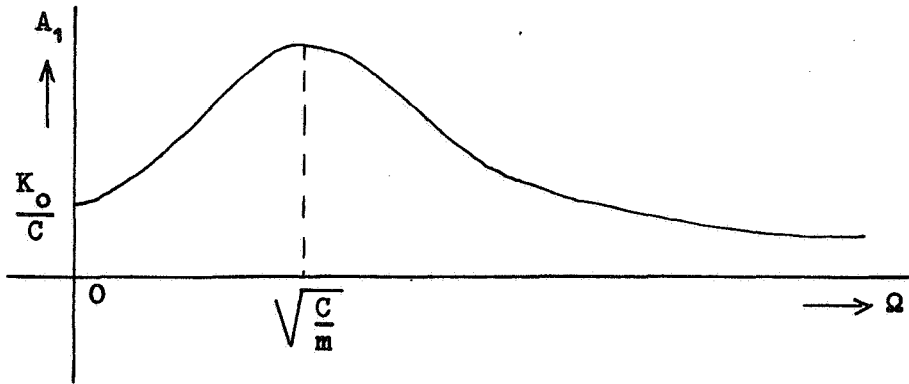
De oplossing van (*) is dus

$$x(t) = \operatorname{Re} \frac{K_0 e^{i(\Omega t - \varphi)}}{\sqrt{(C - m\Omega^2)^2 + D^2 \Omega^2}} = A_1 \cos (\Omega t - \varphi)$$

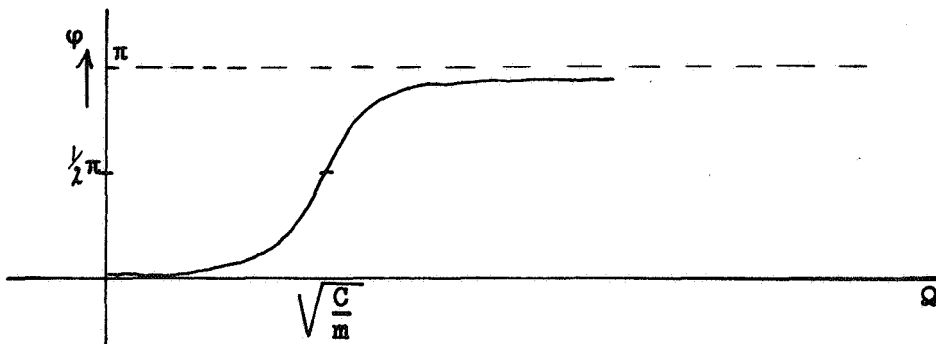
met

$$A_1 = |A| = \frac{K_0}{\sqrt{(C - m\Omega^2)^2 + D^2 \Omega^2}}$$

en $\varphi = \arg (C - m\Omega^2 + iD\Omega)$.

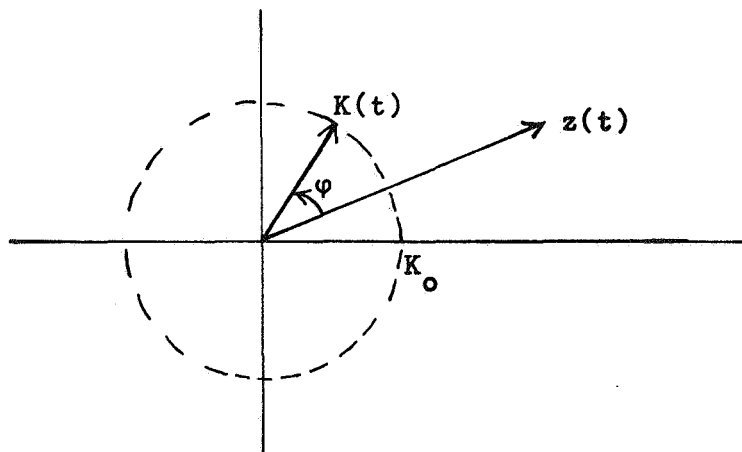


De amplitude is maximaal voor $\Omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$, voor kleine D praktisch gelijk aan de eigenfrequentie $\omega = \sqrt{\frac{C}{m} - \frac{D^2}{4m^2}}$ (resonantie).

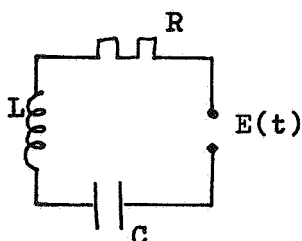


(kleine D)

De opgedrongen kracht en de trilling (complex) in één grafiek:



De vergelijking voor een electrisch circuit met spanningsbron $E(t)$, zelfinductie L , capaciteit C en weerstand R in serie luidt (als $I(t)$ de stroomsterkte, V_C het spanningsverschil over de condensator is)



$$E(t) = L \frac{d I(t)}{dt} + R I(t) + V_C \quad (*)$$

of, met $F(t) = \frac{d E(t)}{dt}$,

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = F(t). \quad (17.16)$$

Vergelijk dit met (17.12): $L \sim$ massa, $R \sim$ dempingsconstante, $\frac{1}{C} \sim$ veerconstante, $F \sim$ opgedrongen kracht. De oplossing wordt op analoge wijze gevonden.

Is de begintoestand gegeven door

$$E(0) = E_0, \quad I(0) = I_0, \quad L \left(\frac{dI}{dt} \right)_0 = E_0 - R I_0 - V_C(0)$$

dan volgt met de Laplace-transformatie

$$(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}) \bar{I}(p) = Lp I(0) + R I(0) + L I'(0) + \bar{F}(p) \quad (17.17)$$

We beschouwen speciaal weer het geval dat voor de vrije trilling geldt

$$I(0) = I'(0) = 0, \quad \text{dus } F(0) = 0,$$

en dat voor $F(t)$ geldt

$$F(t) = \text{Re} (F_0 e^{i\omega t}).$$

Met de Laplace-transformatie volgt

$$\bar{F}(p) = \text{Re} \left\{ F_0 \int_0^{\infty} e^{i\omega t - pt} dt \right\} = \frac{F_0 p}{p^2 + \omega^2}$$

dus

$$\bar{I}(p) = \frac{F_0 p}{(p^2 + \omega^2)(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C})}$$

Met de "complexe rekenwijze" stellen we $I(t) = \text{Re} (I_0 e^{i\omega t})$ en vinden na substitutie

$$I(t) = \text{Re} \frac{F_0 e^{i\omega t}}{\frac{1}{C} - \omega^2 L + iR\omega}$$

$$= \frac{F_0 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)^2 + R^2 \omega^2}} \quad (17.18)$$

waarbij $\varphi = \arg\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L + iR\omega\right)$.

Deze oplossing bestaat voor iedere t ; de "Laplace"-oplossing per definitie alleen voor $t \geq 0$. We vergelijken de oplossingen. Stel (breuksplitsing)

$$\bar{I}(p) = \frac{F_0 p}{(p^2 + \omega^2)(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C})} = \frac{Ap + B\omega}{p^2 + \omega^2} + \frac{P}{p - \alpha_1} + \frac{Q}{p - \alpha_2}$$

waarbij $\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$, zodat

$$I(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + P e^{\alpha_1 t} + Q e^{\alpha_2 t}. \quad (17.19)$$

De termen

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

vormen de oplossing (17.18).

(Eventueel te verifiëren; met de breuksplitsing volgt

$$A = \frac{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right) F_0}{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)^2 + \omega^2 R^2} = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)^2 + \omega^2 R^2}} \cos \varphi$$

en analoog voor B.)

De laatste twee termen gaan naar nul als t naar oneindig gaat omdat $\text{Re } \alpha_{1,2} < 0$ als

$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, en $\alpha_{1,2} < 0$ als $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$. Deze termen corresponderen met

inschakelverschijnselen. (Is $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ dan zijn er termen

$$P t e^{-\frac{R}{2L} t} + Q e^{-\frac{R}{2L} t}.)$$

Voor grote t zijn de oplossingen (17.18) en (17.19) dus weinig verschillend.

In het algemeen is (17.19) een stabiele oplossing als $\text{Re } \alpha_1 < 0$ en $\text{Re } \alpha_2 < 0$.

In het algemeen krijgen we een stabiele oplossing als de nulpunten van de noemer in de uitdrukking voor $\bar{I}(p)$ in het halfvlak $\text{Re } p < 0$ liggen.

Om voor de Laplace-transformatie een omkeerformule te kunnen bepalen, beschouwen we dit eerst voor de Fourier-transformatie.

Bij een functie $F(x)$ is de Fourier-getransformeerde

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} F(x) dx. \quad (17.20)$$

We veronderstellen weer $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| dx < \infty$.

Bewijs zelf

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \left(\frac{d F(x)}{dx} \right) dx = -i\alpha f(\alpha).$$

Bijzondere gevallen zijn de cosinus- en sinustransformatie

$$F(-x) = F(x) \implies f(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} \cos \alpha x F(x) dx$$

$$F(-x) = -F(x) \implies f(\alpha) = 2i \int_0^{\infty} \sin \alpha x F(x) dx.$$

Het probleem is nu: vindt bij gegeven $f(\alpha)$ de functie $F(x)$ terug. We maken hierbij gebruik van de

Stelling

(17.21)

Is $F(x)$ gedefinieerd en differentieerbaar met continue afgeleide voor elke x , eventueel met uitzondering van een eindig aantal punten in ieder eindig segment, en is

$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| dx < \infty$ dan is (integraal van Fourier)

$$\frac{1}{2}(F(x-0)+F(x+0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) e^{i\alpha(\zeta-x)} d\zeta.$$

Bewijs: Ter inleiding het volgende.

Zij r een positief reëel getal en stel

$$G(x) = \begin{cases} F(x) & \text{voor } |x| < r \\ G(x+2r) & \text{overigens.} \end{cases}$$

Dan is (zie bladzijde 112)

$$\frac{1}{2}(G(x-0)+\frac{1}{2}(G(x+0))) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{\pi n x}{r} + b_n \sin \frac{\pi n x}{r})$$

met

$$\left. \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r} \int_{-r}^r G(\xi) \frac{\cos \frac{n\pi\xi}{r}}{\sin \frac{n\pi\xi}{r}} d\xi$$

dus (uniforme convergentie)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(G(x-0)+G(x+0)) &= \frac{1}{r} \int_{-r}^r G(\xi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi(\xi-x)}{r} \right] d\xi \\ &= \frac{1}{2r} \int_{-r}^r G(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \frac{n\pi(\xi-x)}{r} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r G(\xi) d\xi \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{r} \cos \frac{n\pi}{r} (\xi-x) \right). \end{aligned}$$

(De oneindige som gedraagt zich als een δ -functie.)
Door de limiet te nemen voor $r \rightarrow \infty$ gaat $G(x)$ over in $F(x)$ maar is het zonder meer niet duidelijk dat het rechterlid overgaat in de integraal van Fourier met $\cos \alpha (\xi-x)$ in plaats van $e^{i\alpha(\xi-x)}$.

In grote trekken loopt het bewijs als volgt.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \cos \alpha (\xi-x) d\xi &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) d\xi \int_{-N}^N \cos \alpha (\xi-x) d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) d\xi \frac{\sin N(\xi-x)}{\xi-x}. \end{aligned}$$

De functie

$$\frac{\sin N(\xi-x)}{\xi-x} = \begin{cases} 0 & \text{als } \xi = x + \frac{k\pi}{N}, \quad k \text{ geheel } \neq 0 \\ N & \text{als } \xi = x \end{cases}$$

gedraagt zich voor grote N als de δ -functie.

Opgave: Teken de grafiek voor $N = 2$ en $N = 10$.

Zij $\epsilon > 0$ gegeven.

Bij ϵ is een getal $M > 0$ te vinden zodanig dat

$$|\xi-x| > 1 \text{ voor } \xi < -M \text{ en voor } \xi > M$$

en dat voor $A > M$

$$\left| \int_{-\infty}^{-A} F(\xi) \frac{\sin N(\xi-x)}{\xi-x} d\xi \right| \leq \int_{-\infty}^{-A} |F(\xi)| d\xi < \frac{1}{4} \epsilon$$

en

$$\left| \int_A^{\infty} F(\xi) \frac{\sin N(\xi-x)}{\xi-x} d\xi \right| < \frac{1}{4} \epsilon.$$

Het interval $(-A, A)$ splitsen we in intervallen die geen discontinuïteitspunt bevatten. Stel k intervallen

$$(-A, c), (c, d), \dots, (a, x-0), (x+0, b), \dots, (d, A).$$

Voor elk tweetal opeenvolgende discontinuïteitspunten c en d met $x \notin [c, d]$ vinden we op grond van het lemma van Riemann-Lebesgue (blz. 107): bij ϵ is een getal N_c te vinden, zodanig dat

$$\left| \int_c^d F(\xi) \frac{\sin N(\xi-x)}{\xi-x} d\xi \right| < \frac{1}{2k} \epsilon$$

als $N > N_c$.

$$\begin{aligned} \int_a^{x-0} F(\xi) \frac{\sin N(\xi-x)}{\xi-x} d\xi &= \int_a^{x-0} \frac{F(\xi) - F(x-0)}{\xi-x} \sin N(\xi-x) d\xi \\ &+ F(x-0) \int_a^{x-0} \frac{\sin N(\xi-x)}{\xi-x} d\xi. \end{aligned}$$

Op grond van hetzelfde lemma is er een getal N_a , zodanig dat

$$\left| \int_a^{x-0} \frac{F(\xi) - F(x-0)}{\xi-x} \sin N(\xi-x) d\xi \right| < \frac{1}{4k} \epsilon$$

als $N > N_a$.

$$\int_a^{x-0} \frac{\sin N(\xi-x)}{\xi-x} d\xi = (\lambda = N(\xi-x)) = \int_0^{N(x-a)} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda \rightarrow \frac{1}{2} \pi$$

als $N \rightarrow \infty$ (zie 15.15), dus is er een getal $N_{a''}$ zodanig dat

$$\left| \int_a^{x-0} \frac{\sin N(\xi-x)}{\xi-x} d\xi - \frac{1}{2} \pi \right| < \frac{1}{4k} \epsilon \text{ als } N > N_{a''}.$$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^{x-0} F(\xi) \frac{\sin N(\xi-x)}{\xi-x} d\xi - \frac{1}{2\pi} F(x-0) \right| = \\
& \left| \int_a^{x-0} \frac{F(\xi)-F(x-0)}{\xi-x} \sin N(\xi-x) d\xi + F(x-0) \left(\int_a^{x-0} \frac{\sin N(\xi-x)}{\xi-x} d\xi - \frac{1}{2\pi} \right) \right| < \\
& \frac{1}{4k} \epsilon + \frac{1}{4k} \epsilon = \frac{1}{2k} \epsilon \text{ als } N > N_a = \max(N_{a'}, N_{a''}).
\end{aligned}$$

Analoog is er een getal N_b zodanig dat

$$\left| \int_{x+0}^b F(\xi) \frac{\sin N(\xi-x)}{\xi-x} d\xi - \frac{1}{2\pi} F(x+0) \right| < \frac{1}{2k} \epsilon \text{ als } N > N_b.$$

Dus als $N > \max(M, N_c, N_a, \dots)$, dan is

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \frac{\sin N(\xi-x)}{\xi-x} d\xi - \frac{1}{2\pi} \{F(x-0) + F(x+0)\} \right| < \\
& \frac{1}{4} \epsilon + k \cdot \frac{1}{2k} \epsilon + \frac{1}{4} \epsilon = \epsilon.
\end{aligned}$$

De omkeerformule is nu snel gevonden.
Stel $F(x)$ continu in x .

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \cos \alpha(\xi-x) d\xi.$$

Analoog

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \sin \alpha(\xi-x) d\xi,$$

waaruit

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\alpha(\xi-x)} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi
\end{aligned}$$

dus

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(\alpha) d\alpha. \quad (17.22)$$

Vaak vindt men ook:

$$\left. \begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\xi} F(\xi) d\xi \\ F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(\alpha) d\alpha \end{aligned} \right\}$$

(omkeerformule der Fourier-transformatie).

Bijzonder geval.

$$F(-x) = F(x) \implies f(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\xi) \cos \alpha\xi d\xi$$

$$\text{dus } f(-\alpha) = f(\alpha)$$

dus

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\alpha) \cos \alpha x d\alpha.$$

De Laplace-getransformeerde van $F(x)$ is

$$f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt.$$

Stel $p = u + iv$

$$f(u + iv) = \int_0^{\infty} e^{-ivt} e^{-ut} F(t) dt.$$

Stel $\alpha = -v$; $g(\alpha) = f(u + iv)$

$$G(t) = \begin{cases} e^{-ut} F(t) & \text{als } t > 0 \\ 0 & \text{als } t < 0. \end{cases}$$

Dan

$$g(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} G(t) dt$$

en (17.22)

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} g(\alpha) d\alpha$$

of

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx} f(u + iv) dv = \begin{cases} e^{-ux} F(x) & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

of
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(u+iv)x} f(u+iv) d(iv) = \begin{cases} F(x) & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{als } x < 0. \end{cases}$$

Dus, als $f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt$

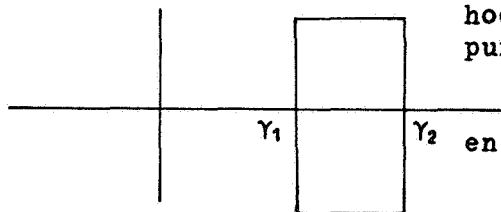
dan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{px} f(p) dp = \begin{cases} F(x) & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{als } x < 0. \end{cases}$$

Dit is de omkeerformule der Laplace-transformatie (17.23).

De integratie is langs de verticale lijn $\text{Re } p = \gamma$ in het complexe vlak, waarbij γ zodanig dat rechts van deze lijn geen singuliere punten liggen. Overigens is γ willekeurig te kiezen in het convergentie-halfvlak.

Dit laatste is in te zien door integratie van $e^{px} f(p) dp$ langs de rechtehoek in het convergentie-halfvlak met hoekpunten



$$\gamma_{1,2} \pm i\rho$$

en de limiet te nemen voor $\rho \rightarrow \infty$.

Voorbeeld $F(x) = e^{-ax} \quad (x > 0)$

$$f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-at} dt = \frac{1}{p-a} \quad (\text{Re } p > \text{Re } a).$$

Met (17.23) en $\gamma > \text{Re } a$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{px}}{p-a} dp = \begin{cases} e^{ax} & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{als } x < 0. \end{cases}$$

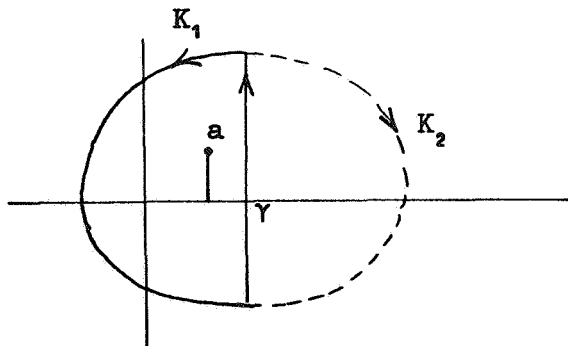
We tonen dit nog afzonderlijk aan. Zij $R > 0$, C_1 en C_2 de cirkelbogen

$$x = \gamma + R e^{i\theta} \quad \text{met } \frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi \text{ resp.}$$

$$-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi.$$

K_1 is het contour: van $\gamma - iR$ rechtlijnig naar $\gamma + iR$ en langs C_1 naar $\gamma - iR$.

K_2 : van $\gamma - iR$ naar $\gamma + iR$ en langs C_2 naar $\gamma - iR$. Neem R alvast zo groot dat a binnen K_1 ligt.

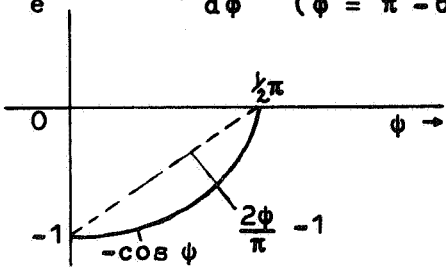


$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{e^{pt}}{p-a} dt = e^{at}$$

of

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{e^{\gamma t} e^{Rt(\cos \theta + i \sin \theta)} i R e^{i\theta}}{\gamma - a + R e^{i\theta}} d\theta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} \frac{e^{pt}}{p-a} dt = e^{at}.$$

De absolute waarde der eerste integraal is gelijk aan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} e^{\gamma t} e^{Rt \cos \theta} e^{iRt \sin \theta} \frac{1}{\frac{1}{R}(\gamma-a)e^{-i\theta} + 1} d\theta \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} e^{Rt \cos \theta} \frac{1}{\left| \frac{1}{R}(\gamma-a)e^{-i\theta} + 1 \right|} d\theta \leq \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} e^{Rt \cos \theta} d\theta = \\ & = \frac{1}{\pi} e^{\gamma t} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} e^{Rt \cos \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} e^{\gamma t} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-Rt \cos \phi} d\phi \quad (\phi = \pi - \theta) \\ & < \frac{1}{\pi} e^{\gamma t} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{Rt(\frac{2\phi}{\pi} - 1)} d\phi = \\ & = \frac{1}{2Rt} e^{\gamma t} (1 - e^{-Rt}) \end{aligned}$$


$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2Rt} e^{\gamma t} (1 - e^{-Rt}) = 0 \quad \text{als } t > 0.$$

Dus voor $t > 0$ is

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{e^{pt}}{p-a} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{pt}}{p-a} dt = e^{at}.$$

Voor $t < 0$ vinden we analoog

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} \frac{e^{pt}}{p-a} dt = 0$$

en

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} \frac{e^{pt}}{p-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{pt}}{p-a} dt.$$

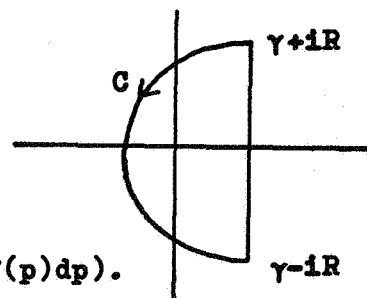
Een direkte berekening van de integraal ($t > 0$)

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} f(p) dp = \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(\gamma+is) ds$$

kan moeilijkheden opleveren, ook bij gebruik van numerieke methoden. Evenals in het laatste voorbeeld beschouwen we in het complexe p -vlak de contour K : van $\gamma-iR$ rechthoekig naar $\gamma+iR$ en langs de halve cirkelboog C terug.

$$C: p = \gamma + R e^{i\theta}, \quad \frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$$

Dan is ($t > 0$).



$$F(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_K e^{pt} f(p) dp - \int_C e^{pt} f(p) dp \right).$$

Laat nu voor $f(p)$ op C gelden:

$$f(p) \sim O(R^{-\delta}) \text{ als } R \rightarrow \infty.$$

Lemma van Jordan

(17.24)

Is op C

$$f(p) \sim O(R^{-\delta}) \text{ als } R \rightarrow \infty$$

dan geldt

$$\int_C e^{pt} f(p) dp \sim O(R^{-\delta}) \text{ als } R \rightarrow \infty$$

Bewijs: verloopt als in het laatste voorbeeld. Zie bijvoorbeeld Gustav Doetsch, Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Basel-1958, S.157 of G. Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation, Basel-1950, Band I, S.224. Tabellen vindt men bijvoorbeeld in G. Doetsch, Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation, München-1956.

Dus als $f(p) \sim O(R^{-\delta})$ voor $R \rightarrow \infty$, dan is ($t > 0$)

$$F(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_K e^{pt} f(p) dp$$

= som der residuën van $e^{pt} f(p)$ voor $\operatorname{Re} p < \gamma$.

Toepassing

Op bladzijde 144 hebben we voor het beeld van de functie $I(t)$ gevonden

$$\bar{I}(p) = \frac{F_0 p}{(p^2 + \omega^2)(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C})}$$

Met de omkeerformule volgt

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{pt} F_0 p}{(p^2 + \omega^2)(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C})} dp.$$

De singuliere punten der integrand zijn

$$p_{1,2} = \pm i\omega \text{ en } \alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Stel $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$; neem dus $\gamma > 0$. Aan de voorwaarde uit het lemma van Jordan is voldaan, dus $I(t)$ is gelijk aan de som der residuën van de integrand in p_1, p_2, α_1 en α_2 .

$$I(t) = F_0 \left\{ \frac{i\omega e^{i\omega t}}{2i\omega(-L\omega^2 + Ri\omega + \frac{1}{C})} + \frac{i\omega e^{-i\omega t}}{2i\omega(-L\omega^2 - Ri\omega + \frac{1}{C})} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 t}}{(\alpha_1^2 + \omega^2)L(\alpha_1 - \alpha_2)} + \frac{\alpha_2 e^{\alpha_2 t}}{(\alpha_2^2 + \omega^2)L(\alpha_2 - \alpha_1)} \right\}.$$

Stel $\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$, zodat $\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm i\beta$; $\alpha_1 - \alpha_2 = 2i\beta$;

$$L(\alpha_1^2 + \omega^2) = -R\alpha_1 - \frac{1}{C} + \omega^2 L = +\frac{R^2}{2L} - \frac{1}{C} + \omega^2 L - Ri\beta.$$

Merk verder op dat $\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \text{Re}(z)$ en $\frac{1}{2}(z - \bar{z}) = i \text{Im}(z)$.

$$I(t) = \frac{1}{2} F_0 \left\{ \frac{e^{i\omega t}}{(\frac{1}{C} - \omega^2 L + i\omega R)} + \frac{e^{-i\omega t}}{(\frac{1}{C} - \omega^2 L - i\omega R)} \right\} + \\ + \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{2i\beta} F_0 \left\{ \frac{(-\frac{R}{2L} + i\beta)e^{i\beta t}}{+\frac{R^2}{2L} - \frac{1}{C} + \omega^2 L - Ri\beta} - \frac{(-\frac{R}{2L} - i\beta)e^{-i\beta t}}{+\frac{R^2}{2L} - \frac{1}{C} + \omega^2 L + Ri\beta} \right\}$$

$$= F_0 \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\omega t}}{\frac{1}{C} \omega^2 L + i\omega R} \right\} + \frac{F_0}{\beta} e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{Im} \left\{ \frac{(-\frac{R}{2L} + i\beta) e^{i\beta t}}{\frac{R^2}{2L} \frac{1}{C} + \omega^2 L - iR\beta} \right\}.$$

$$\begin{aligned} I(0) &= F_0 \operatorname{Re} \frac{1}{\frac{1}{C} \omega^2 L + i\omega R} + \frac{F_0}{\beta} \operatorname{Im} \left\{ \frac{-\frac{R}{2L} + i\beta}{\frac{R^2}{2L} \frac{1}{C} + \omega^2 L - iR\beta} \right\} \\ &= \frac{F_0 (\frac{1}{C} \omega^2 L)}{(\frac{1}{C} \omega^2 L)^2 + \omega^2 R^2} + \frac{F_0}{\beta} \frac{-\frac{R^2}{2L} \beta + (\frac{R^2}{2L} \frac{1}{C} + \omega^2 L) \beta}{(\frac{R^2}{2L} \frac{1}{C} + \omega^2 L)^2 + R^2 \beta^2} \\ &= \frac{F_0 (\frac{1}{C} \omega^2 L)}{(\frac{1}{C} \omega^2 L)^2 + \omega^2 R^2} - \frac{F_0 (\frac{1}{C} \omega^2 L)}{(\frac{R^2}{2L} \frac{1}{C} + \omega^2 L)^2 + R^2 (\frac{1}{LC} \frac{R^2}{4L^2})}. \end{aligned}$$

De noemer der laatste breuk is gelijk aan

$$\frac{R^4}{4L^2} - \frac{R^2}{L} (\frac{1}{C} - \omega^2 L) + (\frac{1}{C} - \omega^2 L)^2 + \frac{R^2}{LC} - \frac{R^4}{4L^2} = (\frac{1}{C} - \omega^2 L)^2 + \omega^2 R^2$$

dus gelijk aan die der eerste breuk, dus $I(0) = 0$.

18. De golfvergelijking

We leiden deze vergelijking af voor geluidsgolven in de met een vloeibaar medium (bv. een gas) gevulde ruimte, onder nog te noemen veronderstellingen. We denken ons een rechtsdraaiend rechthoekig coördinatenstelsel ingevoerd. De massadichtheid geven we aan met $\rho(x,y,z,t)$; de druk in punt $\underline{r} = (x,y,z)$ op tijdstip t met $p(x,y,z,t)$. p is een functie van ρ ; de betrekking wordt gevonden uit de toertandsvergelijking. (Voor een ideaal gas bij isothermisch evenwicht is $p = C\rho$, bij adiabetisch evenwicht is $p = C\rho^{\frac{C_p}{C_v}}$). De lucht is in beweging; plaatselijk treden f verdunningen op. De snelheid der lucht in punt \underline{r} op tijdstip t geven we aan door de vector

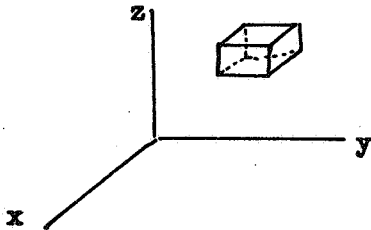
$$\underline{v} = (u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t)).$$

De stroomvector \underline{I} is dus gelijk aan $\rho \underline{v}$ (bv. $\frac{\text{gram}}{\text{cm}^2 \text{sec}}$).

f verdichtingen en

We verwaarlozen de viscositeitskrachten (geen wrijving; ideale vloeistof), dus in elk punt werkt de druk op een vlakje door dat punt langs de normaal en is in alle richtingen gelijk.

Beschouw een blokje met hoekpunten $(x, y, z), \dots, (x + \Delta x, y + \Delta y, \Delta z)$.



De kracht op linker- en rechtervlak is
 $p(x, y, z, t) \Delta x \Delta z$ resp.
 $-p(x, y + \Delta y, z, t) \Delta x \Delta z$,

dus de y-component van de kracht op het blokje is in eerste benadering

$$-(p(x, y, z, t) + \frac{\partial p}{\partial y} \Delta y) \Delta x \Delta z + p(x, y, z, t) \Delta x \Delta z = -\frac{\partial p}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

De y-component der versnelling is $\frac{dv}{dt}$, de massa van het blokje $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$, dus - indien er verder geen krachten op het blokje werken - geldt

$$-\frac{\partial p}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{dv}{dt}$$

of

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

en analoog

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

dus

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p \quad (18.1)$$

Opmerking. Zij $f(x, y, z, t)$ een functie van de plaatscoördinaten en de tijd.

$\frac{\partial f}{\partial t}$ is het locale differentiaalquotient,

$\frac{df}{dt}$ is het totaal differentiaalquotient.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } f.$$

De vergelijkingen worden dan

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad } u &= - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad } v &= - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad } w &= - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (18.2)$$

We veronderstellen dat alle snelheden, drukveranderingen en dichtheidsveranderingen klein zijn, dus kleine trillingen. We kunnen dan kwadratische grootheden verwaarlozen. De vergelijkingen worden dan

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = - \text{grad } p \quad (18.1a)$$

Dit zijn drie vergelijkingen; er zijn vijf onbekenden nl. u , v , w , p en ρ .

We veronderstellen dat $\frac{dp}{d\rho}$ in eerste benadering constant is,

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2 \quad (18.3)$$

$$\text{dus} \quad \text{grad } p = c^2 \text{ grad } \rho \quad (18.3a)$$

De massa die gedurende een tijd Δt door linker- resp. rechtervlak in het blokje wordt gebracht, is

$$\rho(x, y, z, t) \Delta x \Delta z v(x, y, z, t) \Delta t$$

$$\text{resp.} \quad -\rho(x, y + \Delta y, z, t) \Delta x \Delta z v(x, y + \Delta y, z, t) \Delta t,$$

resultierend in eerste benadering in

$$- \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Door alle zes vlakken dus

$$- \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Dit moet gelijk zijn aan

$$\begin{aligned} & \{ \rho(x, y, z, t + \Delta t) - \rho(x, y, z, t) \} \Delta x \Delta y \Delta z \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t. \end{aligned}$$

$$\text{Dus} \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\text{of} \quad \rho \text{ div } \underline{v} + \underline{v} \cdot \text{grad } \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (18.4)$$

$$\text{of (zie boven)} \quad \rho \text{ div } \underline{v} + \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

(Voor een onsamendrukbare vloeistof zonder bronnen is $\frac{d\rho}{dt} = 0$, dus $\text{div } \underline{v} = 0$.)

We verwaarlozen de kwadratische grootheid $\underline{v} \cdot \text{grad } \rho$, dus

$$\text{div } \underline{v} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (18.4a)$$

Uit (18.1a) en (18.3a) volgt

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -c^2 \text{grad } \rho$$

of
$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\frac{c^2 \text{grad } \rho}{\rho} = -c^2 \text{grad } (\log \rho)$$

of
$$\frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial t^2} = -c^2 \text{grad } \left(\frac{\partial \log \rho}{\partial t} \right).$$

Uit (18.4a) volgt $\text{div } \underline{v} + \frac{\partial \log \rho}{\partial t} = 0$.

Dus
$$\text{grad div } \underline{v} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial t^2}.$$

Stel er is een snelheidspotentiaal: $\underline{v} = \text{grad } \varphi$
dan is

$$\text{grad } \Delta \varphi = \frac{1}{c^2} \text{grad } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

of (integreren; de integratieconstante $f(t)$ stellen we nul in het oneindige dus overal nul)

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (18.5)$$

Dit is de golfvergelijking.

Opmerking. We vinden deze vergelijking ook voor de componenten der elektrische en magnetische veldsterkte van een electromagnetische veld (vacuum; geen ladingen).
Dan geldt nl.

$$\frac{\partial \underline{H}}{\partial t} = \text{rot } \underline{E}; \quad \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = -\text{rot } \underline{H}$$

$$\text{div } \underline{H} = 0; \quad \text{div } \underline{E} = 0.$$

Hieruit
$$\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial t^2} = \text{rot } \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = -\text{rot } (\text{rot } \underline{H})$$

$$= \Delta \underline{H} - \text{grad div } \underline{H} = \Delta \underline{H}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{dus } \Delta H_i - \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} &= 0 \\ \Delta E_i - \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} (i = x, y, z).$$

We veronderstellen dat

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (18.6)$$

dus $\varphi(x, y, z, t + \frac{2\pi}{\omega}) = \varphi(x, y, z, t)$: een trilling. ω is de cirkelfrequentie, $\omega = 2\pi\nu$, ν is de frequentie. Substitutie van (18.6) en (18.5) geeft de vergelijking van Helmholtz

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0. \quad (18.7)$$

$$\text{Hierbij is } k = \frac{\omega}{c}. \quad (18.8)$$

(18.7) gaat over in de ons bekende vergelijking $\Delta\varphi = 0$ als $k = 0$ d.i. als $\omega = 0$ (geen beweging) of $c = \infty$, $\frac{dp}{d\rho} = 0$ (incompressibel medium). Een oplossing $\tilde{\varphi}$ van (18.8) moet voldoen aan: $\lim_{k \rightarrow 0} \tilde{\varphi}$ is een oplossing van $\Delta\varphi = 0$.

We zoeken particuliere oplossingen van (18.7) en proberen de methode met gesepareerde variabelen, stellen dus

$$\varphi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z). \quad (18.9)$$

Substitutie geeft

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0.$$

Elk der quotiënten is constant en de som dezer constanten is $-k^2$. Elke keus van de constanten levert een oplossing van (18.7); we eisen voor een oplossing φ wel dat ze naar nul gaat als we $\underline{r} = (x, y, z)$ langs een willekeurige weg naar oneindig laten gaan. Stel vooreerst

$$\frac{X''}{X} = -\alpha^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -\beta^2, \quad \frac{Z''}{Z} = -\gamma^2$$

met α, β, γ reëel $\neq 0$ en $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2$.

Dan is (in complexe vorm)

$$\left. \begin{aligned} X &= A_1 e^{i\alpha x} + A_2 e^{-i\alpha x} \\ Y &= B_1 e^{i\beta y} + B_2 e^{-i\beta y} \\ Z &= C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z} \end{aligned} \right\} (18.10)$$

dus één der oplossingen is ($A_2 = B_2 = C_2 = 0$)

$$\phi = A_1 B_1 C_1 e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

of, als $\underline{q} = (\alpha, \beta, \gamma) = k \underline{n}$ met $|\underline{n}| = 1$

en $A = A_1 B_1 C_1,$

$$\phi = A e^{i(\underline{q} \cdot \underline{r})}$$

en

$$\phi = A e^{i(\underline{q} \cdot \underline{r} - \omega t)} = A e^{ik(\underline{n} \cdot \underline{r} - ct)}$$

Bij vaste \underline{r} stelt ϕ een trilling voor in \underline{r} . Bij vaste t krijgen we een momentopname van deze trilling in elk punt. Het getal $k(\underline{n} \cdot \underline{r} - ct)$ geeft de trillingstoestand aan, het is de fase der trilling.

Alle punten waarin de fase gelijk is aan f voldoen aan $\underline{n} \cdot \underline{r} = ct + \frac{1}{k} f$: de normaalvergelijking van een vlak. Het vlak (golffront) staat loodrecht op \underline{n} en ligt op een afstand $ct + \frac{1}{k} f$ van de oorsprong.

Neemt f met 2π toe dan hebben we dezelfde trillingstoestand in een vlak dat op een afstand $\frac{2\pi}{k}$ evenwijdig loopt aan het vorige vlak.

De golflengte is dus gelijk aan $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu}$.

We zien verder dat bij variabele t de fase zich voortplant met een snelheid c langs de normaal \underline{n} . Deze trilling is een lopende vlakke golf.

De eerste top der golf ligt in het vlak $\underline{n} \cdot \underline{r} = ct$, de eerste knoop in het vlak $\underline{n} \cdot \underline{r} = ct + \frac{\pi}{2k}$. De fase 0 correspondeert met een massaverdichting, de fase π met verdunning.

Bij de gekozen α, β, γ hebben we nu één der basisoplossingen besproken. De andere oplossingen treden ook op als we voor α en/of β en/of γ de tegengestelde waarde kiezen. Nemen we verschillende waarden voor α, β, γ dan is ook een lineaire combinatie

$$\phi = \Sigma A e^{i(\underline{q} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

oplossing van (18.7).

Opmerking. Ook de keus

$$\frac{X''}{X} = \alpha_1^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -\beta^2, \quad \frac{Z''}{Z} = -\gamma^2$$

met α_1, β, γ reëel $\neq 0$ en $-\alpha_1^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2$ leidt tot een oplossing.

$$X = A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{-\alpha_1 x}$$

Y en Z als boven.

Stel $\alpha_1 > 0$. De oplossing $e^{\alpha_1 x}$ is fysisch niet aanvaardbaar voor $x > 0$, de oplossing $e^{-\alpha_1 x}$ niet voor $x < 0$.

Neem bijvoorbeeld $x > 0$, $A_1 = B_2 = C_1 = C_2 = 0$.

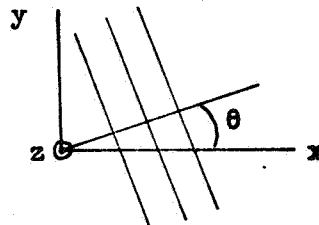
$$= A_2 B_1 e^{-\alpha_1 x + i\beta y - i\omega t}$$

Bij vaste x een golf in de y -richting. Deze golf dempt uit in de x^+ -richting. (Gaat een lichtgolf over van een medium naar een ander medium met kleinere brekingsindex, dan is er totale reflectie indien de invalshoek groter is dan de grenshoek. In feite wordt nog wel een deel doorgelaten: een vlakke uitdempende golf)

Neem in (18.10) $A_2 = B_2 = C_1 = C_2 = 0$ en laat α en β de verzameling der reële getallen doorlopen. We kunnen schrijven ($\alpha^2 + \beta^2 = k^2$), $\alpha = k \cos \theta$, $\beta = k \sin \theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Dan zal

$$\varphi = \int_0^{2\pi} e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta - ct)} d\theta \quad (18.11)$$

een oplossing der golfvergelijking zijn. De vlakken van constante fase bij een bepaalde θ zijn de vlakken $\perp (\cos \theta, \sin \theta, 0)$



Stel $x = r \cos \mu$, $y = r \sin \mu$.

$$\begin{aligned} \varphi &= e^{-i\omega t} \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos(\theta - \mu)} d\theta = e^{-i\omega t} \int_{-\mu}^{2\pi - \mu} e^{ikr \cos \theta} d\theta \\ &= e^{-i\omega t} \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \theta} d\theta. \end{aligned}$$

We normeren φ . Voor $r = 0$ is $\varphi = 2\pi e^{-i\omega t}$.

Stel $\varphi = 2\pi e^{-i\omega t} J_0(kr)$, dan is

$$J_0(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \theta} d\theta. \quad (18.12)$$

$J_0(z)$ is de Besselfunctie van de eerste soort van de orde nul.

$$\begin{aligned}
 J_0(kr) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\cos(kr \cos \theta) + i \sin(kr \cos \theta)\} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(kr \cos \theta) + i \sin(kr \cos \theta)\} d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{\cos(kr \cos \theta) + i \sin(kr \cos \theta)\} d\theta .
 \end{aligned}$$

Stel $\theta = \pi - \chi$

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \cos(kr \cos \theta) d\theta &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(kr \cos \chi) d\chi \\
 \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \sin(kr \cos \theta) d\theta &= - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(kr \cos \chi) d\chi,
 \end{aligned}$$

dus
$$J_0(kr) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(kr \cos \theta) d\theta. \quad (18.13)$$

Reeksontwikkeling voor $J_0(kr)$.

$$\begin{aligned}
 J_0(kr) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v (kr \cos \theta)^{2v}}{(2v)!} \right) d\theta = (\text{uniforme convergentie}) \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v (kr)^{2v}}{(2v)!} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2v} \theta d\theta.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_v &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2v} \theta d\theta \quad (v \geq 1) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2v-1} \theta d(\sin \theta) \\
 &= [\cos^{2v-1} \theta \sin \theta]_0^{\frac{1}{2}\pi} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2v-1)(1-\cos^2 \theta) \cos^{2v-2} \theta d\theta \\
 &= (2v-1)(I_{v-1} - I_v)
 \end{aligned}$$

dus
$$I_v = \frac{2v-1}{2v} I_{v-1} \quad (v \geq 1)$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \pi; \quad I_1 = \frac{1}{4} \pi; \quad I_2 = \frac{3}{16} \pi.$$

$$I_v = \frac{(2v-1)(2v-3) \dots 3 \cdot 1}{2v \cdot (2v-2) \dots 4 \cdot 2} I_0 = \frac{(2v)!}{(2^v \cdot v!)^2} \frac{\pi}{2}$$

dus

$$I_\nu = \int_0^{2\pi} \cos^{2\nu} \theta \, d\theta = \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu} \cdot (\nu!)^2} \frac{\pi}{2} ; \nu \geq 0. \quad (18.14)$$

Gevolg

$$J_0(kr) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left(\frac{kr}{2}\right)^{2\nu} \quad (18.15)$$

Deze reeksontwikkeling is bij grote kr voor numerieke behandeling niet erg bruikbaar. Daartoe leent zich beter de asymptotische ontwikkeling der integraalvoorstelling (zie later). De functie $J_0(kr)$ is dus een oplossing van de vergelijking $\Delta\phi + k^2\phi = 0$.
De vergelijking (18.7)

$$\Delta\phi + k^2\phi = 0$$

luit in cilindercoördinaten (r, θ, z)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k^2 \phi = 0 \quad (18.16)$$

(ga dit na).

Substitutie van

$$\phi = R(r) D(\theta) Z(z)$$

geeft

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{D''}{r^2 D} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0 \quad (18.17)$$

dus $\frac{Z''}{Z}$ is constant, stel $= \lambda^2$: $Z = B_1 e^{\lambda z} + B_2 e^{-\lambda z}$.

$$\frac{r^2(R'' + \frac{1}{r} R')}{R} + \frac{D''}{D} + r^2(\lambda^2 + k^2) = 0$$

dus $\frac{D''}{D}$ is constant, stel $= -n^2$; stel n geheel om oplossingen $\cos n\theta$ en $\sin n\theta$ te krijgen waarvan de periode een deler van 2π is.
De vergelijking voor $R(r)$ luidt nu

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\lambda^2 + k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0$$

of, als $\rho = r \sqrt{\lambda^2 + k^2}$ en $\delta(\rho) = R\left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}\right)$,

$$\delta'' + \frac{1}{\rho} \delta' + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) \delta = 0.$$

Noem p weer r en δ weer R . De vergelijking

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0 \quad (18.18)$$

is de vergelijking van Bessel voor funkties van de orde n .

We laten eerst zien dat $J_0(r)$ een oplossing is van de vergelijking als $n = 0$, en bepalen daarna voor willekeurige n de oplossing.

$$n = 0. \quad \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + r R = 0. \quad (18.19)$$

$$\mathcal{L}\{R\} \stackrel{\text{d}}{=} G(p) = \int_0^{\infty} e^{-pr} R(r) dr$$

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{dR}{dr} \right\} = p G(p) - R(0)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{ r \frac{dR}{dr} \right\} &= \int_0^{\infty} e^{-pr} r \frac{dR}{dr} dr = - \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} e^{-pr} \frac{dR}{dr} dr \\ &= - \frac{d}{dp} (p G(p) - R(0)) = - \frac{d}{dp} (p G(p)) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) \right\} = p \mathcal{L}\left\{ r \frac{dR}{dr} \right\} - \left(r \frac{dR}{dr} \right)_{r=0} = - p \frac{d}{dp} (p G(p))$$

$$\mathcal{L}\{r R\} = - \frac{d}{dp} G(p).$$

Substitutie geeft

$$(p^2+1) G'(p) + p G(p) = 0$$

$$\frac{d G(p)}{G(p)} = - \frac{p dp}{p^2+1}.$$

Dus een oplossing is

$$G(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Dit is een meerwaardige funktie. Voor de coupure nemen we het segment $[-i, i]$.

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = e^{-\frac{1}{2} \log(p^2+1)} = e^{-\frac{1}{2} w}.$$

We definiëren rechts op de snede (waar p^2+1 reëel ≥ 0 is) w als de gewone logaritmie, zetten $\arg(p^2+1)$ continu voort, zodat links op de snede w gelijk is aan

$$\log(p^2+1) + 2\pi i.$$

Dus
$$G(p) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} & \text{als } p \text{ rechts op de snede} \\ \frac{-1}{\sqrt{p^2+1}} & \text{als } p \text{ links op de snede.} \end{cases}$$

Voor $\text{Re } p = 0, \text{Im } p > 1$ is p^2+1 reëel < 0 , en heeft $\sqrt{p^2+1}$ het argument $\frac{1}{2}\pi$, dus $\sqrt{p^2+1} = i \sqrt{-(p^2+1)}$.

Voor $\text{Re } p = 0, \text{Im } p < -1$ is $\sqrt{p^2+1} = -i \sqrt{-(p^2+1)}$.

Met de omkeerformule volgt

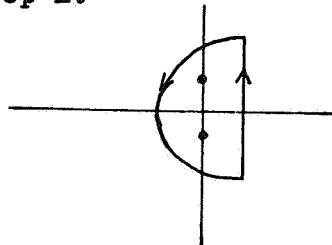
$$R(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} G(p) e^{pr} dp$$

waarbij $\gamma > 0$, want de singuliere punten van $G(p)$ zijn $+i$ en $-i$.

Beschouw weer de contour K bestaande uit lijnstuk L van $\gamma-iR$ naar $\gamma+iR$ en de halve cirkel C naar links op L .

Uit (17.24) volgt

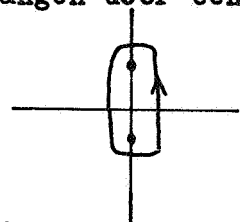
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C G(p) e^{pr} dp = 0$$



zodat

$$R(r) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_K G(p) e^{pr} dp.$$

Binnen K liggen twee singuliere punten, we mogen K vervangen door een willekeurige contour om $+i$ en $-i$ en nemen hiervoor K' : het lijnstuk van $\delta-i$ naar $\delta+i$, halve cirkel om i naar $-\delta+i$, lijnstuk naar $-\delta-i$, halve cirkel om $-i$ naar $\delta-i$.



$$\begin{aligned} R(r) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K'} e^{pr} G(p) dp = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{K'} e^{pr} G(p) dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i}^i \frac{e^{pr}}{\sqrt{p^2+1}} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_1^{-1} \frac{e^{pr}}{-\sqrt{p^2+1}} dp = \frac{1}{\pi i} \int_{-i}^i \frac{e^{pr}}{\sqrt{p^2+1}} dp \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{\pi}^0 \frac{e^{ir \cos \theta}}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} d(i \cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{ir \cos \theta} d\theta = J_0(r) \end{aligned}$$

(zie 18.12)

dus $R(r) = J_0(r)$.

Laten we γ naar nul gaan, dan vinden we dus

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{pr}}{\sqrt{p^2+1}} dp = \frac{1}{\pi i} \int_{-i}^i \frac{e^{pr}}{\sqrt{p^2+1}} dp$$

of

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{-i} \frac{e^{pr}}{\sqrt{p^2+1}} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_i^{i\infty} \frac{e^{pr}}{\sqrt{p^2+1}} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i}^i \frac{e^{pr}}{\sqrt{p^2+1}} dp. \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{-i} \frac{e^{pr}}{\sqrt{p^2+1}} dp &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{-i} \frac{e^{pr}}{-i\sqrt{-(p^2+1)}} dp = (p=-i\lambda) \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_1^{\infty} \frac{e^{-i\lambda r}}{\sqrt{\lambda^2-1}} d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_i^{i\infty} \frac{e^{pr}}{\sqrt{p^2+1}} dp &= \frac{1}{2\pi i} \int_i^{i\infty} \frac{e^{pr}}{i\sqrt{-(p^2+1)}} dp = (p=i\lambda) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_1^{\infty} \frac{e^{i\lambda r}}{\sqrt{\lambda^2-1}} d\lambda \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i}^i \frac{e^{pr}}{\sqrt{p^2+1}} dp = \frac{1}{2} J_0(r).$$

Stel

$$H_0^{(1)}(r) = \frac{2}{\pi i} \int_1^{\infty} \frac{e^{i\lambda r}}{\sqrt{\lambda^2-1}} d\lambda \quad (18.20)$$

en

$$H_0^{(2)}(r) = \frac{-2}{\pi i} \int_1^{\infty} \frac{e^{-i\lambda r}}{\sqrt{\lambda^2-1}} d\lambda \quad (18.20a)$$

$H_0^{(1)}(r)$ is de funktie van Hankel van de 1° soort van de orde nul.

$H_0^{(2)}(r)$ is de funktie van Hankel van de 2° soort van de orde nul.

(De funkties van Hankel heten ook wel Besselfunkties van de derde soort.)
We vinden dus uit (*)

$$H_0^{(1)}(r) + H_0^{(2)}(r) = 2 J_0(r) \quad (18.21)$$

$$H_0^{(1)}(r) \text{ en } H_0^{(2)}(r) \text{ complex geconjugeerd.} \quad (18.22)$$

Een andere vorm van de Hankelfuncties vinden we door de substitutie $\lambda = \cosh \mu$

$$H_0^{(1)}(r) = \frac{2}{\pi i} \int_0^\infty e^{ir \cosh \mu} d\mu \quad (18.23)$$

$$H_0^{(2)}(r) = \frac{-2}{\pi i} \int_0^\infty e^{-ir \cosh \mu} d\mu. \quad (18.23a)$$

De integralen in (18.20) zijn niet absoluut convergent. We tonen de relatieve convergentie aan.

$$\int_1^\infty \frac{e^{i\lambda r}}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda = \int_1^\infty \frac{\cos \lambda r}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda + i \int_1^\infty \frac{\sin \lambda r}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda.$$

In plaats van $\int_1^\infty \frac{\sin \lambda r}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda$ beschouwen we $\int_1^\infty \frac{\sin \lambda r}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda = \int_r^\infty \frac{\sin y}{y} dy$.

(zie ook blz. 110/111)

$$\begin{aligned} \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{\sin y}{y} dy &= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin y}{y} dy + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin y}{y} dy \\ &< \frac{1}{2k\pi} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin y dy + \frac{1}{2(k+1)\pi} \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+2)\pi} \sin y dy = \\ &= \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{(k+1)\pi} = \frac{1}{k(k+1)\pi}. \end{aligned}$$

De integraal wordt dus gemajoreerd door een convergente reeks. Analoog voor de andere integraal. De integralen in (18.20), dus ook die in (18.21), zijn dus relatief convergent.

Opmerking:

$$\int_r^N \frac{\sin y}{y} dy = - \int_r^N \frac{d \cos y}{y} = - \left(\frac{\cos N}{N} - \frac{\cos r}{r} \right) - \int_r^N \frac{\cos y}{y^2} dy.$$

Ook hieruit blijkt de convergentie.

Men kan aantonen dat de functie $H_0^{(1)}(r)$ voldoet aan de vergelijking van Bessel van de orde nul

$$R'' + \frac{1}{r} R' + R = 0.$$

Stel $r = r_1 + ir_2$, $r_2 > 0$ en stel

$$R(r) = \int_0^\infty e^{ir \cosh \mu} d\mu = \int_0^\infty e^{ir_1 \cosh \mu - r_2 \cosh \mu} d\mu.$$

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{dr} &= i \int_0^{\infty} \cosh \mu e^{ir \cosh \mu} d\mu \\
\frac{d^2 R}{dr^2} &= - \int_0^{\infty} (\cosh \mu)^2 e^{ir \cosh \mu} d\mu \\
&= - \int_0^{\infty} e^{ir \cosh \mu} d\mu - \int_0^{\infty} (\sinh \mu)^2 e^{ir \cosh \mu} d\mu \\
&= -R - \frac{1}{ir} \int_0^{\infty} \sinh \mu d(e^{ir \cosh \mu}) \\
&= -R - \frac{1}{ir} [\sinh \mu e^{ir \cosh \mu}]_0^{\infty} + \frac{1}{ir} \int_0^{\infty} \cosh \mu e^{ir \cosh \mu} d\mu \\
&= -R + 0 - \frac{1}{r} R'
\end{aligned}$$

dus R voldoet aan

$$R'' + \frac{1}{r} R' + R = 0.$$

Laat nu r_2 tot 0 naderen, dan nadert $\frac{2}{\pi i} R(r)$ tot $H_0^{(1)}(r)$, en $H_0^{(1)}(r)$ zal aan dezelfde vergelijking voldoen.

Omdat $H_0^{(2)}(r) = \overline{H_0^{(1)}(r)}$, zal ook $H_0^{(2)}(r)$ aan de differentiaalvergelijking van Bessel van de orde nul voldoen.

19. De functies van Bessel

We hebben gezien dat de functies

$$\begin{aligned}
J_0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir \cos \theta} d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(r \cos \theta) d\theta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k}
\end{aligned}$$

$$H_0^{(1)}(r) = \frac{2}{\pi i} \int_1^{\infty} \frac{e^{i\lambda r}}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda = \frac{2}{\pi i} \int_0^{\infty} e^{ir \cosh \mu} d\mu$$

$$H_0^{(2)}(r) = \frac{-2}{\pi i} \int_1^{\infty} \frac{e^{-i\lambda r}}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda = \frac{-2}{\pi i} \int_0^{\infty} e^{-ir \cosh \mu} d\mu$$

aan de vergelijking

$$R'' + \frac{1}{r} R' + R = 0$$

voldoen.

Beschouw de differentiaalvergelijking van Bessel van de orde ν (ν willekeurig > 0)

$$J''(r) + \frac{1}{r} J'(r) + \left(1 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) J(r) = 0 \quad (19.1)$$

of

$$r \frac{d}{dr} (r J') + (r^2 - \nu^2) J = 0.$$

Stel $J = r^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ ($a_0 \neq 0$)

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{k+\lambda}$$

$$J' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda) a_k r^{k+\lambda-1}$$

$$\frac{d}{dr} (r J') = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)^2 a_k r^{k+\lambda-1}.$$

Substitutie geeft

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)^2 a_k r^{k+\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{k+\lambda+2} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{k+\lambda} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{(k+\lambda)^2 - \nu^2\} a_k r^{k+\lambda} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} r^{k+\lambda} = 0$$

dus

$$(k+\lambda-\nu)(k+\lambda+\nu) a_k = \begin{cases} 0 & \text{als } k = 0 \text{ of } 1 \\ -a_{k-2} & \text{als } k \geq 2 \end{cases}$$

of

$$(\lambda-\nu)(\lambda+\nu) a_0 = 0 \quad (19.2)$$

$$(\lambda+1-\nu)(\lambda+1+\nu) a_1 = 0 \quad (19.3)$$

$$(\lambda+k-\nu)(\lambda+k+\nu) a_k = -a_{k-2}, \quad k \geq 2 \quad (19.4)$$

$a_0 \neq 0$ dus (19.2): $\lambda_1 = \nu$, $\lambda_2 = -\nu$.

$$\lambda_1 = \nu.$$

Dan $(2\nu+1) a_1 = 0$

en $k(2\nu+k) a_k = -a_{k-2}$, $k \geq 2$.

$$\nu \geq 0 \Rightarrow a_1 = 0 \text{ en } a_k = \frac{-a_{k-2}}{k(2\nu+k)} \quad (k \geq 2)$$

dus $a_{2k+1} = 0 \quad (k \geq 1)$

en $a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{4k(\nu+k)} \quad (k \geq 1)$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k k!(\nu+k)(\nu+k-1)\dots(\nu+1)} a_0 = \frac{(-1)^k \nu!}{2^{2k} k!(\nu+k)!} a_0$$

(ook geldig voor $k = 0$).

Een oplossing van (19.1) is dus

$$J(r) = r^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \nu!}{2^{2k} k!(\nu+k)!} r^{2k} = \nu! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu+k)!} \frac{r^{2k+\nu}}{2^{2k}}$$

of als $J_\nu(r) = \frac{1}{\nu! 2^\nu} J(r)$,

$$J_\nu(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (19.5)$$

$$\lambda_2 = -\nu \quad \text{Dan } (1-2\nu) a_1 = 0$$

$$k(k-2\nu) a_k = -a_{k-2}, \quad k \geq 2.$$

Stel $\nu \neq \frac{1}{2}$. Dan $a_1 = 0$, dus $a_{2k+1} = 0 \quad (k \geq 0)$.

Stel $2\nu \neq$ geheel.

$$a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{4k(k-\nu)} \quad (k \geq 1)$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k-\nu)(k-1-\nu)\dots(1-\nu)} a_0 = \frac{(-1)^k (-\nu)!}{2^{2k} k!(-\nu+k)!} a_0.$$

Dus de tweede oplossing van (19.1) is

$$J(r) = r^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-\nu)!}{2^{2k} k!(-\nu+k)!} r^{2k}$$

of, als $J_{-v}(r) = \frac{1}{2^{-v}(-v)!} J(r)$

$$J_{-v}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(-v+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{-v+2k}. \quad (19.6)$$

$J_v(r)$ is de Besselfunctie van de eerste soort, van de orde v .

$$J_v(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^v \times \text{gehele functie in } r.$$

$v!$ is geschreven voor $\Gamma(v+1)$.

De algemene oplossing van (19.1) is dus $A_1 J_v(r) + A_2 J_{-v}(r)$ als $2v \neq$ geheel; hierbij mogen A_1 en A_2 functies van v zijn.

$2v =$ geheel, $v = n = 0, 1, 2, \dots$

Ook nu is $a_{2k+1} = 0$ ($k \geq 0$). De eerste oplossing (zie 19.5) is

$$J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{n+2k}. \quad (19.7)$$

Rond $z = 0$ hebben we $J_n(r) \sim \frac{1}{n!} \left(\frac{r}{2}\right)^n$.

Bewijs zelf:

$$J_{-n}(r) = (-1)^n J_n(r), \quad n \text{ geheel}. \quad (19.8)$$

Dus $\lambda_2 = -n$ geeft geen tweede oplossing.
De recurrente betrekking wordt voor $\lambda_2 = -n$:

$$k(k-2n) a_k = -a_{k-2} \quad (k \geq 2)$$

waaruit volgt $a_0 = 0$, in tegenspraak met de veronderstelling.

$2v =$ geheel, $v = m + \frac{1}{2}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

De oplossingen zijn

$$\left. \begin{aligned} J_{m+\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(m+\frac{1}{2}+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}+2k} \\ J_{-(m+\frac{1}{2})} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(-m-\frac{1}{2}+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{-m-\frac{1}{2}+2k} \end{aligned} \right\} \quad (19.9)$$

Bewijs (gebruik opgave op blz. 128)

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(r) &= \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sin r \\ J_{-\frac{1}{2}}(r) &= \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos r \end{aligned} \quad (19.10)$$

Als ν nadert tot nul, naderen $J_{\nu}(r)$ en $J_{-\nu}(r)$ tot $J_0(r)$. De vergelijking van Bessel van de orde nul (en van de orde n , n geheel) heeft echter twee oplossingen.

Beschouw $\left(\frac{\partial J_{\nu}(r)}{\partial \nu}\right)_{\nu=0}$, de limiet van $\frac{J_{\nu} - J_{-\nu}}{2\nu}$ voor $\nu \rightarrow 0$.

$$J_{\nu}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

$$\frac{\partial J_{\nu}}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{\nu+2k} \left\{ \log \frac{r}{2} - \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} (\nu+k)!}{(\nu+k)!} \right\}.$$

Stel $\phi(\mu) = \frac{\frac{\partial}{\partial \mu} (\mu-1)!}{(\mu-1)!}$ (μ willekeurig)

$$\mu! = \mu(\mu-1)!$$

$$\log \mu! = \log \mu + \log (\mu-1)! ;$$

differentiëren geeft

$$\phi(\mu+1) = \frac{1}{\mu} + \phi(\mu).$$

Elders wordt bewezen

$$\phi(1) = -\gamma$$

waarbij γ de constante van Euler is, gedefinieerd door

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right) \quad (19.11)$$

$$\gamma = 0,577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 5\dots$$

Dus

$$\phi(m+1) = \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \mu} (\mu!)}{\mu!}\right)_{\mu=m} = -\gamma + \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} \quad (19.12)$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} \left\{ \log \frac{r}{2} - (-\gamma + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}) \right\} \\
&= (\gamma + \log \frac{r}{2}) J_0(r) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j}\right) \quad (19.13)
\end{aligned}$$

$$Y_0(r) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_0$$

is de funktie van Bessel van de tweede soort van de orde nul (ook met notatie $N_0(r)$).

$Y_0(r)$ voldoet aan de vergelijking van Bessel van de orde nul, en verder geldt

$$H_0^{(1)}(r) - H_0^{(2)}(r) = 2i Y_0(r) \quad (19.14)$$

zodat (zie 18.21)

$$\begin{aligned}
H_0^{(1)}(r) &= J_0(r) + i Y_0(r) \\
H_0^{(2)}(r) &= J_0(r) - i Y_0(r). \quad (19.15)
\end{aligned}$$

Zonder afleiding geven we de Besselfunktie van de tweede soort (Neumann-funktie) van de orde n . Hierbij is $\gamma' = e^\gamma$.

$$\begin{aligned}
Y_n(r) &= \frac{2}{\pi} J_n(r) \log \frac{\gamma' r}{2} + \\
&- \frac{1}{\pi} \left(\frac{r}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} \left(\sum_{\mu=1}^n \frac{1}{\mu} + \sum_{\mu=1}^{k+n} \frac{1}{\mu}\right) \right] + \\
&- \frac{1}{\pi} \left(\frac{r}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k}. \quad (19.16)
\end{aligned}$$

Rond $z = 0$ is $Y_n(r) \sim \frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{r}{2}\right)^{-n}$, $n \neq 0$

$$Y_0(r) \sim \log \frac{\gamma' r}{2}.$$

$Y_n(r)$ voldoet aan de vergelijking van Bessel van de orde n .

De Hankel-funkties van de orde n zijn

$$\left. \begin{aligned} H_n^{(1)}(r) &= J_n(r) + iY_n(r) \\ H_n^{(2)}(r) &= J_n(r) - iY_n(r) \end{aligned} \right\} \quad (19.17)$$

Gemodificeerde Besselfunkties van de orde nul zijn (zie 18.15 en 18.23)

$$I_0(r) = J_0(ir) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} \quad (19.18)$$

$$K_0(r) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(ir) = \int_0^{\infty} e^{-r \cosh \mu} d\mu \quad (19.19)$$

Ga na dat beide funkties voldoen aan de vergelijking

$$\frac{d^2 I}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dI}{dr} - \left(1 + \frac{n^2}{r^2}\right) I = 0 \quad \text{met } n = 0.$$

Voor een numerieke berekening van funktiewaarden zijn bij grote r van de betreffende reeks veel termen nodig.

Een (gewone) reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(r)$ is convergent voor $r \in A$, indien voor elke

$$r \in A \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N u_n(r) \text{ bestaat.}$$

Een voorbeeld hiervan is de Taylorreeks bv. om $x = 0$, die convergeert als $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(x) = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_N(x)$$

$$\text{met } R_N(x) = \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1 \quad (\text{Cauchy})$$

$$\text{of } R_N(x) = \frac{1}{N!} \int_0^x (x-t)^N f^{(N+1)}(t) dt. \quad (\text{Lagrange})$$

Afleiding van de laatste vorm

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt = f(0) - \int_0^x f'(t) d(x-t) \\ &= f(0) - [(x-t) f'(t)]_0^x + \int_0^x (x-t) f''(t) dt \\ &= f(0) + x f'(0) - \frac{1}{2} \int_0^x f''(t) d(x-t)^2 \end{aligned}$$

$$= f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{N!} x^N f^{(N)}(0) + \\ + \frac{1}{N!} \int_0^x (x-t)^N f^{(N+1)}(t) dt.$$

Voor numerieke berekeningen kunnen divergente reeksen soms ook gebruikt worden. Zo'n reeks kan bijvoorbeeld ontwikkeld worden uit de integraalvoorstelling der betreffende functie.

Voorbeeld

Beschouw de functie $F(r) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-r\lambda}}{\lambda} d\lambda$. ($r > 0$)

$$0 < F(r) < \int_1^{\infty} e^{-r\lambda} d\lambda = \frac{1}{r} e^{-r}.$$

Partiëel integreren, zodat r in de noemer komt.

Stel $F_k(r) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-r\lambda}}{\lambda^k} d\lambda$ ($k \geq 1$)

$$F_k(r) = -\frac{1}{r} \int_1^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} d(e^{-r\lambda}) = \frac{1}{r} e^{-r} - \frac{k}{r} F_{k+1}(r).$$

$$F(r) = \frac{1}{r} e^{-r} - \frac{1}{r^2} e^{-r} + \dots + \frac{(-1)^n n!}{r^{n+1}} e^{-r} + \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{r^{n+1}} F_{n+2} \\ = \frac{1}{r} e^{-r} \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{2!}{r^2} - \frac{3!}{r^3} + \dots + \frac{(-1)^n n!}{r^n} \right) + R_n$$

met $R_n = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{r^{n+1}} \int_1^{\infty} \frac{e^{-r\lambda}}{\lambda^{n+2}} d\lambda$.

De reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{r^k}$ is divergent ($|\frac{u_k}{u_{k-1}}| = \frac{k}{r}$), maar voor numerieke berekeningen zeer bruikbaar.

$$|R_n(r)| < \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \int_1^{\infty} e^{-r\lambda} d\lambda = \frac{(n+1)!}{r^{n+2}} e^{-r}.$$

Nemen we bv. $r = 1000$, dan is $|R_1(1000)| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-8}$ dus $F(1000)$ is, door twee termen te nemen, te bepalen in 8 decimalen nauwkeurig.

Voor $r = 10^{-1}$ is de fout te groot; in dit geval een andere methode volgen.

Opmerking.

$$F(r) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-r\lambda}}{\lambda} d\lambda = \int_1^{\infty} \frac{e^{-r\lambda}}{r\lambda} d(r\lambda) = \int_r^{\infty} \frac{e^{-\mu}}{\mu} d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ei}(r)$$

(de exponentiaal-integraal).

We leiden dezelfde formule nog op een andere manier af.

Stel $\lambda = 1 + \mu$.

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-r(1+\mu)}}{1+\mu} d\mu = e^{-r} \int_0^{\infty} e^{-\mu r} \left\{ \sum_{j=0}^n (-1)^j \mu^j + \frac{(-1)^{n+1} \mu^{n+1}}{1+\mu} \right\} d\mu \\ &= e^{-r} \sum_{j=0}^n (-1)^j \int_0^{\infty} \mu^j e^{-\mu r} d\mu + R_n \\ &= e^{-r} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{1}{r^{j+1}} \int_0^{\infty} (\mu r)^j e^{-\mu r} d(\mu r) + R_n = (\text{zie 17.4}) \\ &= e^{-r} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{j!}{r^{j+1}} + R_n \end{aligned}$$

waarbij $R_n = (-1)^{n+1} e^{-r} \int_0^{\infty} \frac{\mu^{n+1}}{1+\mu} e^{-\mu r} d\mu$

zodat $|R_n| < e^{-r} \int_0^{\infty} \mu^{n+1} e^{-\mu r} d\mu = \frac{(n+1)!}{r^{n+2}} e^{-r}$.

Hierboven is $\frac{1}{1+\mu}$ niet vervangen door een reeks, maar door een polynoom plus correctieterm.

Terwijl we bij een klassieke reeks $|R_n(r)|$ klein proberen te maken door bij vaste r n groot te maken, proberen we bij een asymptotische reeks $|R_n(r)|$ klein te maken door bij vaste n r groot te maken.

Behalve asymptotische convergentie voor $r \rightarrow \infty$ kennen we ook asymptotische convergentie voor $r \rightarrow r_0$, namelijk als bij vaste n $\lim_{r \rightarrow r_0} R_n(r) = 0$.

Bijvoorbeeld

convergentie als $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(r) = 0$

asymptotische convergentie voor $r \rightarrow 0$ als $\lim_{r \rightarrow 0} R_n(r) = 0$.

Voor een nette functie is de reeks van Taylor zowel convergent als asymptotisch convergent voor $x \rightarrow 0$.

Wat dit laatste betreft, stel n vast en $|f^{(n+1)}(x)| < M$. Dan is

$$|R_n(x)| = \frac{1}{n!} \left| \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \right| < \frac{M}{n!} \left| \int_0^x (x-t)^n dt \right| = \\ = \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

We leiden nu voor $K_0(r)$ een asymptotische ontwikkeling af voor grote r .

$$K_0(r) = \int_0^{\infty} e^{-r \cosh \mu} d\mu \quad (\cosh \mu = \lambda) \int_1^{\infty} \frac{e^{-\lambda r}}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda \\ = \int_0^{\infty} \frac{e^{-r(1+\mu)}}{\sqrt{\mu(\mu+2)}} d\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \int_0^{\infty} e^{-\mu r} \mu^{-\frac{1}{2}} (1+\mu)^{-\frac{1}{2}} d\mu.$$

$$(1+\frac{1}{2}\mu)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (-\frac{1}{2})_{(k)} \left(\frac{\mu}{2}\right)^k + R_n$$

met $x_{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} x(x-1)(x-2) \dots (x-k+1)$

en $R_n = \frac{1}{(n+1)!} (1 + \theta \frac{\mu}{2})^{-n-\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{n+1}$ (Cauchy).

$$K_0(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \int_0^{\infty} e^{-\mu r} \mu^{-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (-\frac{1}{2})_{(k)} \left(\frac{\mu}{2}\right)^k + R_n \right\} d\mu \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (-\frac{1}{2})_{(k)} \frac{1}{2^k} \int_0^{\infty} e^{-\mu r} \mu^{k-\frac{1}{2}} d\mu + Q_n$$

met $Q_n = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \int_0^{\infty} e^{-\mu r} \mu^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{(n+1)!} (1 + \frac{1}{2}\theta\mu)^{-n-\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{n+1} d\mu.$

$$\int_0^{\infty} e^{-\mu r} \mu^{k-\frac{1}{2}} d\mu = \frac{1}{r^{k+\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \lambda^{k-\frac{1}{2}} d\lambda = \frac{1}{r^{k+\frac{1}{2}}} \Gamma(k+\frac{1}{2}) = \\ = (\text{zie 17.2 en 17.5}) = \frac{1}{r^{k+\frac{1}{2}}} (k-\frac{1}{2})_{(k)} \Gamma(\frac{1}{2}) \\ = \frac{1}{r^{k+\frac{1}{2}}} (k-\frac{1}{2})_{(k)} \sqrt{\pi}.$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_{(k)} \left(k-\frac{1}{2}\right)_{(k)} = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{1}{2}-k+1\right) \left(k-\frac{1}{2}\right) \left(k-\frac{3}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2}\right) \\ = (-1)^k \left\{ \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 1}{2^k} \right\}^2$$

dus

$$K_0(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! 2^k r^{k+\frac{1}{2}}} (-1)^k \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (2k-1)^2}{2^{2k}} + Q_n$$

$$= e^{-r} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (2k-1)^2}{k!} \frac{1}{(8r)^k} + Q_n. \quad (19.20)$$

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \frac{1}{2^{n+1} (n+1)!} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu r} \mu^{n+\frac{1}{2}}}{(1+\frac{1}{2}\theta\mu)^{n+\frac{1}{2}}} d\mu$$

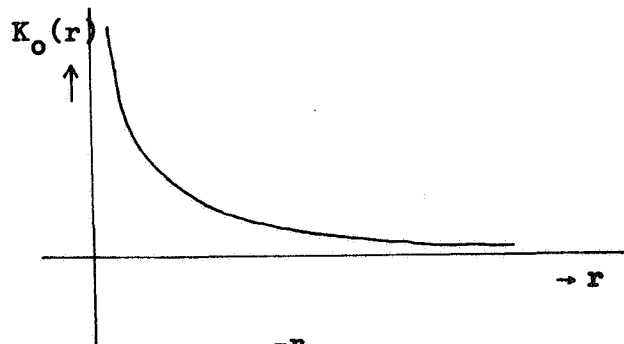
$$< \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \frac{1}{2^{n+1} (n+1)!} \int_0^\infty e^{-\mu r} \mu^{n+\frac{1}{2}} d\mu = \frac{1}{(n+1)!} \frac{e^{-r}}{(2r)^{n+\frac{1}{2}}} \Gamma(n+\frac{3}{2}).$$

(19.20a)

Bij vaste n en gegeven $\epsilon > 0$ is een r_0 te vinden zodanig dat uit $r > r_0$ volgt: $Q_n < \epsilon$. De reeks is asymptotisch convergent,

$$K_0 \sim e^{-r} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \left\{ 1 - \frac{1}{8r} + \frac{9}{128r^2} - \dots \right\} \text{ als } r \rightarrow \infty. \quad (19.20b)$$

Grafiek



$K_0(r) > 0$; $K_0(r) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}}$ ($r \rightarrow \infty$); in $r = 0$ heeft $K_0(r)$ een logarithmische singulariteit.

$$H_0^{(1)}(r) = \frac{2}{\pi i} K_0(-ir).$$

$$H_0^{(1)}(r) \sim \frac{2}{\pi i} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{ir}}{\sqrt{-ir}} \left\{ 1 + \frac{1}{8ir} - \frac{9}{128r^2} + \dots \right\} \text{ als } r \rightarrow \infty$$

of

$$H_0^{(1)}(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i(r-\frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + \frac{1}{8ir} - \frac{9}{128r^2} + \dots \right\} \text{ als } r \rightarrow \infty$$

dus (zie 18.22) (19.21)

$$H_0^{(2)}(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{-i(r-\frac{\pi}{4})} \left\{ 1 - \frac{1}{8ir} - \frac{9}{128r^2} + \dots \right\} \text{ als } r \rightarrow \infty$$

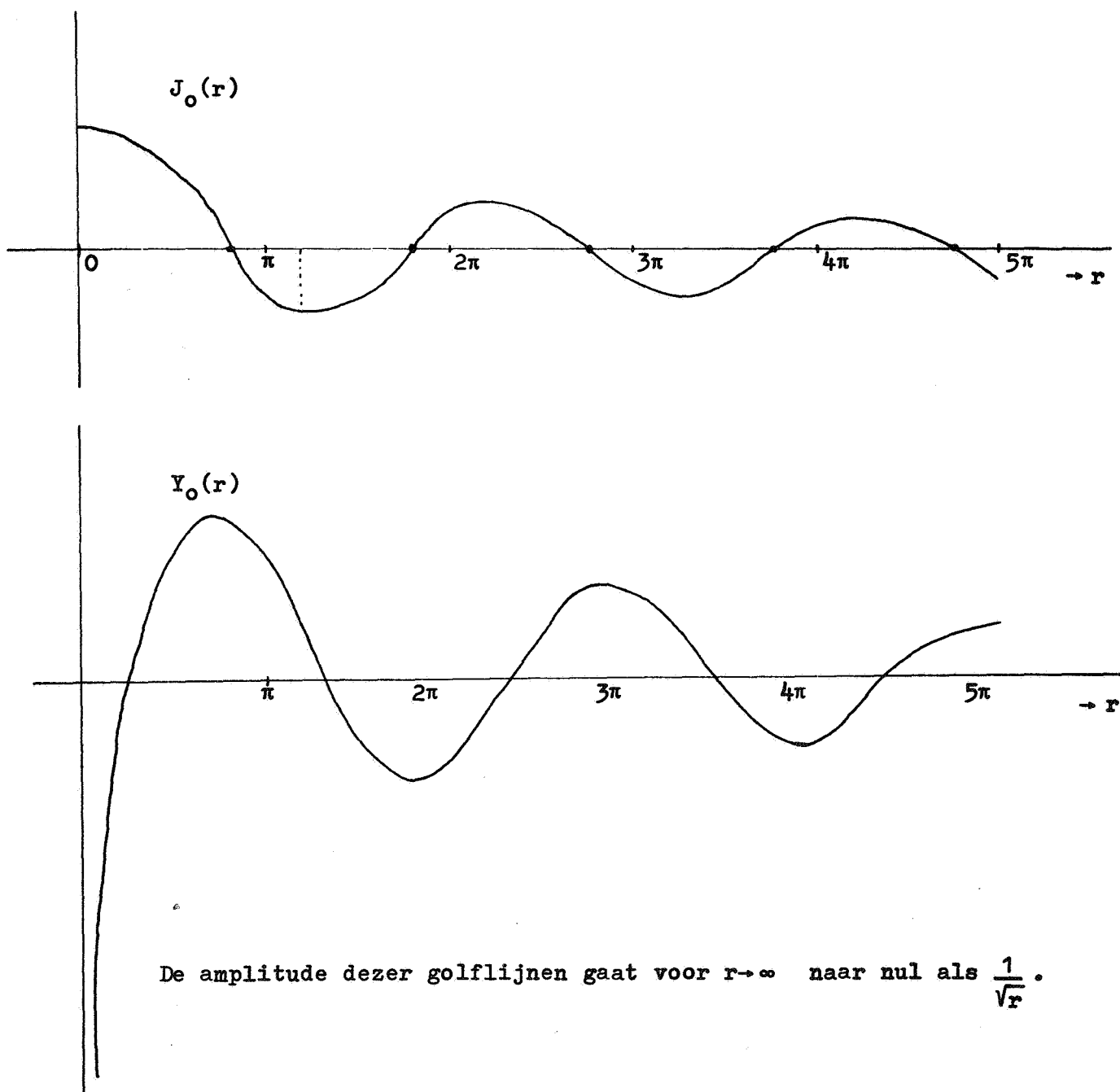
dus (zie 19.15; we nemen alleen de eerste termen)

$$\begin{aligned} J_0(r) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right) \text{ als } r \rightarrow \infty \\ Y_0(r) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sin\left(r - \frac{\pi}{4}\right) \text{ als } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (19.22)$$

Zijn ρ_n en σ_n de n -de nulpunten > 0 van $J_0(r)$ resp. $Y_0(r)$, dan is dus

$$\rho_n \sim \frac{3}{4}\pi + n\pi \quad \text{en} \quad \sigma_n \sim \frac{1}{4}\pi + n\pi.$$

Grafiek



De amplitude dezer golflijnen gaat voor $r \rightarrow \infty$ naar nul als $\frac{1}{\sqrt{r}}$.

20. De golfvergelijking (vervolg)

$J_0(r)$ en $Y_0(r)$ waren r -afhankelijke oplossingen van de vergelijking

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Oplossingen van

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

zijn

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(k\rho) e^{-i\omega t} &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i(k\rho - \frac{\pi}{4} - \omega t)} && \text{als } \rho \rightarrow \infty \\ H_0^{(2)}(k\rho) e^{-i\omega t} &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i(-k\rho + \frac{\pi}{4} - \omega t)} && \text{als } \rho \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (20.1)$$

$H_0^{(1)}$ beschrijft een divergerende golf (fase constant $\Rightarrow \rho - ct$ constant)

$H_0^{(2)}$ beschrijft een convergerende golf (fase constant $\Rightarrow \rho + ct$ constant).

De cofactor $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ is als volgt plausibel te maken. De energie in de golf

is constant; energie $\sim (\text{amplitude})^2$; de energie wordt verdeeld over steeds grotere cirkels waarvan de omtrek evenredig is met ρ ;

dus energie $\sim \frac{1}{\rho}$. Dus amplitude $\sim \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ (oneindig lange 1-dimensionale

stralingsbron).

De drie-dimensionale golfvergelijking luidt

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

of met $\phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z) e^{-i\omega t}$ en $k = \frac{\omega}{c}$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k^2 \phi = 0.$$

Stel ϕ alleen afhankelijk van $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en schrijf de vergelijking in bolcoördinaten

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}) + k^2 \phi = 0 \quad (20.2)$$

of

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + k^2 \phi = 0$$

of

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) + k^2 r\phi = 0. \quad (20.3)$$

De oplossing is

$$r \phi(r) = e^{\pm ikr}$$

of

$$\phi(r) = \frac{A}{r} e^{ikr} + \frac{B}{r} e^{-ikr} \quad (20.4)$$

en

$$\varphi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} + \frac{B}{r} e^{-i(kr + \omega t)}. \quad (20.5)$$

Amplitude² ~ energie ~ (boloppervlak)⁻¹ ~ $\frac{1}{r^2}$

dus amplitude ~ $\frac{1}{r}$. (Stralingsbron in de oorsprong)

In dit driedimensionale geval gaat ϕ naar $\frac{1}{r}$ als k naar nul gaat; in het tweedimensionale geval gaat ϕ naar $\log r$ als k naar nul gaat. Dit is in overeenstemming met de vroeger gevonden r -afhankelijke oplossingen van $\Delta\phi = 0$.

De gevonden oplossing (20.5)

$$\varphi(r, t) = \frac{A}{r} e^{ik(r-ct)} + \frac{B}{r} e^{-ik(r+ct)}$$

voldoet dus aan

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (20.6)$$

De reële divergerende oplossing is (dezelfde letters voor andere constanten)

$$\varphi_1(r, t) = \frac{A}{r} \cos k(r-ct) + \frac{B}{r} \sin k(r-ct).$$

Dit is een lopende golf. De plaats der knopen, punten waar de uitwijking nul is, is veranderlijk met de tijd.

Ook de funktie

$$\varphi_2(r,t) = \frac{A}{r} \cos kr e^{-i\omega t} + \frac{B}{r} \sin kr e^{-i\omega t},$$

die ontstaat door eerst de reële ψ -oplossing te nemen, voldoet aan (20.6), en dus ook

$$\varphi_3(r,t) = \frac{A}{r} \cos kr \cos \omega t + \frac{B}{r} \sin kr \cos \omega t.$$

Dit is een staande golf. De plaats der knopen is vast.

Opgave. Verifieer deze oplossingen direkt.

We leiden uit de divergerende oplossing van het 3-dimensionale probleem die van het 2-dimensionale probleem af.

De divergerende oplossing van (20.3) is $\psi(r) = \frac{1}{r} e^{ikr}$ met $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (bron in de oorsprong). Dezelfde funktie met $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ zal ook voldoen (bron in (a,b,c)).

We beleggen nu de z -as met bronnen met dichtheid 1.

De bij $(0,0,c)$ behorende golf funktie is

$$\frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}.$$

Dus met $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ en $c-z = \zeta$ vinden we voor de totale potentiaal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+(z-c)^2}}}{\sqrt{\rho^2+(z-c)^2}} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}} d\zeta = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}} d\zeta$$

$$(\zeta = \rho \sinh \lambda)$$

$$= 2 \int_0^{\infty} e^{ik\rho \cosh \lambda} d\lambda = \pi i H_0^{(1)}(k\rho).$$

Hankelfunkties van hogere orde

In het algemeen zullen, als $\varphi(x,y,z)$ voldoet aan $\Delta U = 0$, ook de funkties $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ en elke richtingsafgeleide $\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}}$ voldoen aan $\Delta U = 0$.

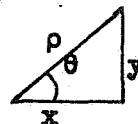
Hetzelfde geldt voor de vergelijking $\Delta U + k^2 U = 0$, ook in 2 dimensies.

Nu is $H_0^{(1)}(k\rho)$ oplossing van $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 \psi = 0$, dus ook

$$\frac{\partial}{\partial x} H_0^{(1)}(k\rho) = \frac{d}{d\rho} H_0^{(1)}(k\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d}{d\rho} H_0^{(1)}(k\rho) \frac{x}{\rho} = \frac{d}{d\rho} H_0^{(1)}(k\rho) \cos \theta$$

en

$$\frac{\partial}{\partial y} H_0^{(1)}(k\rho) = \frac{d}{d\rho} H_0^{(1)}(k\rho) \sin \theta$$



en, als D de operator $\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$ voorstelt,

$$D H_0^{(1)}(k\rho) = e^{i\theta} \frac{d}{d\rho} H_0^{(1)}(k\rho). \quad (20.7)$$

We definiëren nu

$$H_1^{(1)}(k\rho) = (-k e^{i\theta})^{-1} D H_0^{(1)}(k\rho) = -\frac{d}{d(k\rho)} H_0^{(1)}(k\rho) \quad (20.8)$$

dus

$$\begin{aligned} H_1^{(1)}(k\rho) &= -\frac{d}{d(k\rho)} \frac{2}{\pi i} \int_0^\infty e^{ik\rho \cosh \lambda} \cosh \lambda \, d\lambda \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{ik\rho \cosh \lambda} \cosh \lambda \, d\lambda \quad (\text{Im } k\rho > 0). \end{aligned}$$

Stel $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$; $\cosh \lambda = \cosh \lambda_1 \cos i\lambda_2 + \sinh \lambda_1 \sinh i\lambda_2$
 $= \cosh \lambda_1 \cos \lambda_2 + i \sinh \lambda_1 \sin \lambda_2.$

De e-macht in de integrand van $H_1^{(1)}(k\rho)$ wordt

$$e^{ik\rho \cosh \lambda_1 \cos \lambda_2 - k\rho \sinh \lambda_1 \sin \lambda_2};$$

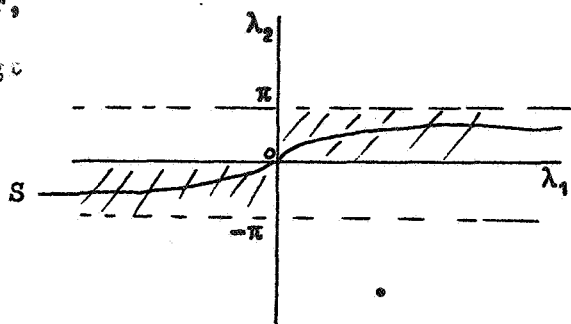
als $\lambda_1 > 0$ dient $\sin \lambda_2 > 0$ bv. $0 < \lambda_2 < \pi$ en

als $\lambda_1 < 0$ dient $\sin \lambda_2 < 0$ bv. $-\pi < \lambda_2 < 0$.

$$\begin{aligned} H_1^{(1)}(k\rho) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{ik\rho \cosh \lambda} \cosh \lambda \, d\lambda \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{ik\rho \cosh \lambda} (e^\lambda + e^{-\lambda}) \, d\lambda \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{ik\rho \cosh \lambda} e^\lambda \, d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{ik\rho \cosh \lambda} e^\lambda \, d(-\lambda) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\rho \cosh \lambda + \lambda} \, d\lambda \end{aligned}$$

(in tweede integraal substitutie $\lambda = -\lambda'$ en λ' weer λ genoemd).

S is hierbij een integratiecontour, het Sommerfeld-contour, van $-\infty + ai$ naar $\infty + bi$ dat geheel ligt in de gebieden $(\lambda_1 < 0, -\pi < \lambda_2 < 0)$ en $(\lambda_1 > 0, 0 < \lambda_2 < \pi)$.



Dus

$$H_1^{(1)}(k\rho) = -\frac{1}{\pi} \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + \lambda} d\lambda \quad (20.9)$$

en

$$H_0^{(1)}(k\rho) = \frac{1}{\pi i} \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda} d\lambda \quad (20.10)$$

We kunnen zo voortgaan; alle functies $D^n H_0^{(1)}(k\rho)$ zullen voldoen aan de golfvergelijking.

We drukken D uit in poolcoördinaten.

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + i \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + i \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

Dit klopt met (20.7).

Bewering:

$$D^n \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda} d\lambda = (ik)^n e^{in\theta} \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + n\lambda} d\lambda. \quad (20.11)$$

Bewijs. Door volledige inductie.

De gelijkheid is geldig voor $n = 1$, want dan staat er (zie 20.10, 9)

$$D(\pi i H_0^{(1)}(k\rho)) = -ik e^{i\theta} \pi H_1^{(1)}(k\rho)$$

in overeenstemming met (20.8). Veronderstel geldigheid voor $n = m$.

Dan is

$$\begin{aligned} D^{m+1} \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda} d\lambda &= (\text{volgens onderstelling}) \\ &= D \left\{ (ik)^m e^{im\theta} \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + m\lambda} d\lambda \right\} \\ &= (ik)^m e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) e^{im\theta} \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + m\lambda} d\lambda \\ &= (ik)^m e^{i\theta} e^{im\theta} \int_S ik e^{ik\rho \cosh \lambda + m\lambda} \cosh \lambda d\lambda \\ &\quad + (ik)^m e^{i\theta} \frac{i}{\rho} im e^{im\theta} \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + m\lambda} d\lambda \\ &= (ik)^{m+1} e^{i(m+1)\theta} \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + m\lambda} \cosh \lambda d\lambda \\ &\quad - (ik)^m e^{i(m+1)\theta} \frac{1}{\rho} \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda} d(e^{m\lambda}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (ik)^{m+1} e^{i(m+1)\theta} \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + m\lambda} \cosh \lambda \, d\lambda \\
&\quad + 0 + (ik)^m e^{i(m+1)\theta} \frac{1}{\rho} \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + m\lambda} ik\rho \sinh \lambda \, d\lambda \\
&= (ik)^{m+1} e^{i(m+1)\theta} \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + m\lambda} (\cosh \lambda + \sinh \lambda) \, d\lambda \\
&= (ik)^{m+1} e^{i(m+1)\theta} \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + (m+1)\lambda} \, d\lambda.
\end{aligned}$$

De gelijkheid is dan ook geldig voor $n = m+1$, dus voor alle gehele $n \geq 0$.

We definiëren nu de Hankelfuncties van de 1e soort en orde n door

$$\begin{aligned}
H_n^{(1)}(k\rho) &= \frac{1}{\pi i} (-k e^{i\theta})^{-n} D^n \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda} \, d\lambda \\
&= (-k e^{i\theta})^{-n} D^n H_0^{(1)}(k\rho)
\end{aligned}$$

zodat

$$H_n^{(1)}(k\rho) = \frac{1}{\pi i} (-i)^n \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + n\lambda} \, d\lambda \quad (20.12)$$

en die van de 2e soort door

$$H_n^{(2)}(k\rho) = \overline{H_n^{(1)}(k\rho)}. \quad (20.13)$$

Zonder bewijs: deze definitie is in overeenstemming met (19.17).

Recursieformules

Voor elke cilinderfunctie $C_n(z)$ geldt

$$C_{n-1}(z) - C_{n+1}(z) = 2 \frac{d}{dz} C_n(z) \quad (20.14)$$

en

$$C_{n-1}(z) + C_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} C_n(z). \quad (20.15)$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d(k\rho)} H_n^{(1)}(k\rho) &= \frac{1}{\pi i} (-i)^n \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + n\lambda} i \cosh \lambda \, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} (-i)^n i \left\{ \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + (n+1)\lambda} \, d\lambda + \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + (n-1)\lambda} \, d\lambda \right\} \\
&= -\frac{1}{2} H_{n+1}^{(1)}(k\rho) + \frac{1}{2} H_{n-1}^{(1)}(k\rho).
\end{aligned}$$

Dus (20.14) geldt voor $C_n(z) = H_n^{(1)}(z)$; met (20.13) en (19.17) volgt dan ook de geldigheid voor $H_n^{(2)}(z)$, $J_n(z)$ en $Y_n(z)$.

$$\begin{aligned}
 H_{n+1}^{(1)}(k\rho) + H_{n-1}^{(1)}(k\rho) &= \\
 &= \frac{1}{\pi i} (-i)^{n+1} \left\{ \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + (n+1)\lambda} d\lambda - \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + (n-1)\lambda} d\lambda \right\} \\
 &= \frac{1}{\pi i} (-i)^{n+1} \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + n\lambda} (e^\lambda - e^{-\lambda}) d\lambda \\
 &= \frac{2}{\pi i} (-i)^{n+1} \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + n\lambda} \sinh \lambda d\lambda \\
 &= \frac{2}{\pi i} (-i)^{n+1} \frac{1}{ik\rho} \int_S e^{n\lambda} d(e^{ik\rho \cosh \lambda}) \\
 &= \frac{-2}{\pi ik\rho} (-i)^n \left\{ 0 - n \int_S e^{ik\rho \cosh \lambda + n\lambda} d\lambda \right\} = + \frac{2n}{k\rho} H_n^{(1)}(k\rho).
 \end{aligned}$$

(20.15) geldt voor $C_n(z) = H_n^{(1)}(z)$, dus ook voor $H_n^{(2)}(z)$, $J_n(z)$ en $Y_n(z)$.

Uit (20.14, 15) volgt nog

$$C_{n-1}(z) = \frac{n}{z} C_n(z) + C_n'(z) \quad (20.16)$$

en

$$C_{n+1}(z) = \frac{n}{z} C_n(z) - C_n'(z) \quad (20.17)$$

21. Bolfunkties

De potentiaalvergelijking

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0 \quad (21.1)$$

luidt in bolcoördinaten (r, θ, φ) , waarvan de betrekkingen gegeven worden door

$$\left. \begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \varphi \\
 y &= r \sin \theta \sin \varphi \\
 z &= r \cos \theta
 \end{aligned} \right\}, \quad (21.2)$$

als volgt

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (21.3)$$

en de golfvergelijking

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k^2 U = 0. \quad (21.4)$$

$$\text{Stel } U(r, \theta, \varphi) = R(r) Q(\theta, \varphi). \quad (21.5)$$

Substitutie, gevolgd door vermenigvuldiging met $r^2 (RQ)^{-1}$, geeft

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) + \frac{1}{Q} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Q}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} \right\} + k^2 r^2 = 0.$$

Stel het r -afhankelijke gedeelte gelijk aan $-\lambda$, en het (θ, φ) -afhankelijke gedeelte gelijk aan λ .

Dus

$$\frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) + (\lambda + k^2 r^2) R = 0 \quad (21.6)$$

en

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Q}{\partial \theta}) + \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} - \lambda \sin^2 \theta Q = 0. \quad (21.7)$$

$$\text{Stel } Q(\theta, \varphi) = P(\theta) \Phi(\varphi). \quad (21.8)$$

Substitutie, gevolgd door deling door $P\Phi$, geeft

$$\frac{\sin \theta}{P} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{dP}{d\theta}) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} - \lambda \sin^2 \theta = 0.$$

Stel het θ -afhankelijke en φ -afhankelijke gedeelte gelijk aan m^2 resp. $-m^2$, zodat

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi \quad (21.9)$$

en

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{dP}{d\theta}) - (m^2 + \lambda \sin^2 \theta) P = 0. \quad (21.10)$$

Een oplossing van (21.4) is bekend zodra we oplossingen bezitten van (21.6, 9, 10).

(21.9) heeft de basisoplossingen

$$\Phi = e^{\pm im\varphi} \quad (21.11)$$

waarbij we m in het algemeen geheel veronderstellen, omdat we een in de ruimte eenduidige oplossing wensen. (Toename van φ met 2π geeft dan dezelfde oplossing.)

Voor $k = 0$ luidt (21.6)

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \lambda R = 0.$$

Bewering: bij geschikte λ is $R = r^n$ een oplossing.

Substitutie geeft inderdaad $\lambda = -n(n+1)$. Uit de bewerking blijkt dat ook $R = r^{-(n+1)}$ voldoet. (Vergelijk de cirkelfuncties $r^{\pm n} \sin n\theta$ en $r^{\pm n} \cos n\theta$, die voldoen aan $U_{xx} + U_{yy} = 0$.)

We stellen dus $\lambda = -n(n+1)$ en beschouwen (21.6)

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - n(n+1)) R = 0$$

of

$$R'' + \frac{2}{r} R' + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R = 0.$$

Dit doet ons denken aan de vergelijking van Bessel. De term $\frac{2}{r} R'$ is te veranderen in $\frac{1}{r} R'$ door de substitutie

$$R(r) = U(r) V(r)$$

die de vergelijking doet overgaan in

$$U''V + 2U'V' + UV'' + \frac{2}{r} (U'V + UV') + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) UV = 0.$$

Kies nu V zo, dat

$$2U'V' + \frac{2}{r} U'V = \frac{1}{r} U'V.$$

(Nemen we rechterlid = 0, dan verdwijnt de term $\frac{1}{r} R'$)

Dit geeft $\frac{V'}{V} = -\frac{1}{2r}$, waarvan een oplossing is: $V = r^{-\frac{1}{2}}$.

De vergelijking wordt, na vermenigvuldiging met \sqrt{r} ,

$$U'' + \frac{1}{r} U' + \left(+\frac{3}{4} r^{-2} - r^{-2} + k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) U = 0$$

of

$$U'' + \frac{1}{r} U' + \left(k^2 - \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{r^2} \right) U = 0.$$

Hiervan zijn de oplossingen (zie 19.1, 9)

$$U = J_{\pm(n+\frac{1}{2})}(kr)$$

zodat oplossingen van (21.6) zijn

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{\pm(n+\frac{1}{2})}(kr) \quad (21.12)$$

(de sferische Besselfuncties)

Opmerking: $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k^{n+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) = \frac{1}{\sqrt{2(n+\frac{1}{2})!}} \left(\frac{r}{2}\right)^n$

$$\lim_{k \rightarrow 0} k^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{-n-\frac{1}{2}}(kr) = \frac{\sqrt{2}}{(-n-\frac{1}{2})!} \left(\frac{r}{2}\right)^{-(n+1)}.$$

Oplossingen van (21.4) zijn dus de functies

$$\frac{1}{\sqrt{r}} J_{\pm(n+\frac{1}{2})}(kr) e^{\pm im\varphi} P(\theta)$$

waarbij $P(\theta)$ een oplossing is van (zie 21.10):

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta} \right) + (n(n+1)\sin^2\theta - m^2) P = 0. \quad (21.13)$$

We substitueren $x = \cos\theta$; $P(\theta)$ gaat over in een functie die we aanduiden met $P(x)$; $\frac{d}{d\theta} = -\sin\theta \frac{d}{dx}$.

De vergelijking wordt

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0$$

of

$$(1-x^2) \frac{d^2P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0. \quad (21.14)$$

Dit is de differentiaalvergelijking van Legendre.

De oplossingen hiervan heten Legendre- of bolfuncties. De veeltermoplossingen zijn de veeltermen $P_n^m(\theta)$ van Legendre en wel voor $m = 0$ de gewone veeltermen $P_n(\theta)$ en voor $m > 0$ de geassocieerde veeltermen.

$$\boxed{m = 0}$$

$$(1-x^2) P''(x) - 2x P'(x) + n(n+1) P(x) = 0. \quad (21.15)$$

We proberen een oplossing te vinden door machtreeksubstitutie. Na deling door de coëfficiënt van $P''(x)$ blijkt $x = 0$ een gewoon punt te zijn voor de coëfficiënten van $P'(x)$ en van $P(x)$.

We substitueren dus $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (en niet, zoals in 19.1

$$x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k).$$

Het resultaat is

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k(k+1) - n(n+1)) a_k x^k = 0$$

zodat ($k+1 \neq 0$, $k+2 \neq 0$)

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1)-n(n+1)}{(k+1)(k+2)} a_k = \frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+1)(k+2)} a_k \quad (k \geq 0). \quad (21.16)$$

De oplossing is dus van de gedaante

$$P(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \dots x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \dots x^{2k+1},$$

een lineaire combinatie van de twee lineair onafhankelijke oplossingen.

De machtreeksen convergeren voor $|x| < 1$, want $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+2}}{a_k} \right| = 1$.

Voor n geheel ≥ 0 is $a_{n+2} = 0$; voor even n is de eerste reeks een veelterm, voor oneven n de tweede reeks. Dit zijn de veeltermen $P_n(x)$. $P_{2j}(x)$ is een even functie; $P_{2j+1}(x)$ is een oneven functie.

Intermezzo

Definitie

Een verzameling reële continue functies $u_1(x), u_2(x), \dots$ is een orthogonaal stelsel in (a, b) indien

$$\int_a^b u_i(x) u_j(x) dx = 0 \quad \text{voor } i \neq j. \quad (21.17)$$

Uiteraard is $\int_a^b u_i^2(x) dx \neq 0$ als $u_i(x) \neq 0$.

Het stelsel is orthonormaal als bovendien voor elke i

$$\int_a^b u_i^2(x) dx = 1.$$

Voorbeeld

Het stelsel functies

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$$

vormt een orthogonaal stelsel in $(-\pi, \pi)$.

Het stelsel

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots \right\}$$

is orthonormaal. Zie (15.9).

Beschouw op (a, b) de differentiaalvergelijking

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + \lambda q(x) u(x) = 0 \quad (21.18)$$

met de randvoorwaarden

$$\left. \begin{aligned} u(a) + \alpha u'(a) &= 0 \\ u(b) + \beta u'(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21.19)$$

λ is een parameter; α en β zijn getallen.

Veronderstel dat (21.18, 19) oplossingen $\neq 0$ in (a, b) bezit voor $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots$ (verschillende λ 's). Zij $u_i(x)$ de bij λ_i behorende oplossing. Uit (21.18) volgt

$$u_j \frac{d}{dx} (p u_i') = -\lambda_i q u_i u_j$$

$$u_i \frac{d}{dx} (p u_j') = -\lambda_j q u_i u_j$$

dus

$$\int_a^b u_j \frac{d}{dx} (p u_i') dx - \int_a^b u_i \frac{d}{dx} (p u_j') dx = (\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b q u_i u_j dx$$

$$\begin{aligned} (\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b q u_i u_j dx &= [u_j p u_i']_a^b - \int_a^b p u_i' u_j' dx + \\ &\quad - [u_i p u_j']_a^b + \int_a^b p u_i' u_j' dx \\ &= 0 \quad (\text{gebruik 21.19}). \end{aligned}$$

Dus

$$\int_a^b q(x) u_i(x) u_j(x) dx = 0 \quad \text{voor } i \neq j.$$

De functies $u_i(x)$ vormen in (a, b) een orthogonaal stelsel met gewichtsfunctie $q(x)$.

Uit de berekening blijkt dat voor deze orthogonaliteit een voldoende voorwaarde is

$$[p(x) u_j(x) u_i'(x)]_a^b = [p(x) u_i(x) u_j'(x)]_a^b. \quad (21.20)$$

(Het type vergelijking (21.18, 19) behoort tot de problemen van Sturm-Liouville.)

Voorbeeld. $p(x) = q(x) = 1$, $a = -\pi$, $b = \pi$

$$u'' + \lambda u = 0.$$

Bij de eigenwaarde $\lambda = n^2$ behoren de eigenfuncties $\cos nx$ en $\sin nx$. Aan voorwaarde (21.20) is voldaan. Het stelsel $\{1, \sin x, \cos x, \dots\}$ is dus orthogonaal (zie ook boven).

Einde intermezzo.

De veelterm $P_n(x)$ voldoet aan (21.18) met $p(x) = 1-x^2$, $q(x) = 1$ en $\lambda = n(n+1)$, terwijl aan (21.20) voldaan is als $(a,b) = (-1,1)$.

Dus

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_k(x) dx = 0 \quad \text{als } n \neq k \quad (21.21a)$$

en we definiëren

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} \quad (21.21b)$$

We bewijzen de formule van Rodrigues:

$$P_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \quad \text{voor } n \geq 0.$$

Stel $p_n(x) = (x^2-1)^n$ voor $n \geq 0$, dan is

$$(x^2-1) p_n'(x) = 2nx p_n(x).$$

We differentiëren $n+1$ maal:

$$\begin{aligned} (x^2-1) p_n^{(n+2)}(x) + \binom{n+1}{1} 2x p_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{2} 2 p_n^{(n)}(x) &= \\ &= 2nx p_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1} 2n p_n^{(n)}(x) \end{aligned}$$

of

$$(1-x^2) p_n^{(n+2)}(x) - 2x p_n^{(n+1)}(x) + n(n+1) p_n^{(n)}(x) = 0.$$

Dus $p_n^{(n)}$ voldoet aan (21.15) en $p_n^{(n)}(x)$ is een veelterm van de graad n .

Hieruit volgt dat $p_n^{(n)}(x)$ een veelvoud is van $P_n(x)$ of

$$P_n(x) = c_n p_n^{(n)}(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n.$$

We bepalen c_n met behulp van (21.21).

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= c_n^2 \int_{-1}^1 p_n^{(n)}(x) p_n^{(n)}(x) dx = c_n^2 \int_{-1}^1 p_n^{(n)}(x) d p_n^{(n-1)}(x) \\ &= c_n^2 [p_n^{(n)}(x) p_n^{(n-1)}(x)]_{-1}^1 - c_n^2 \int_{-1}^1 p_n^{(n+1)}(x) p_n^{(n-1)}(x) dx \end{aligned}$$

$p_n^{(k)}(x) = (x^2-1)^n$, dus $p_n^{(k)}(x)$ bevat minstens één factor (x^2-1) voor $k < n$, dus

$p_n^{(k)}(x) = 0$ voor $x = \pm 1$ als $0 \leq k < n$.
 Verder is $p_n^{(2n)}(x) = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n = (2n)!$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= -c_n^2 \int_{-1}^1 p_n^{(n+1)}(x) p_n^{(n-1)}(x) dx = \dots\dots\dots \\ &= (-1)^n c_n^2 \int_{-1}^1 p_n^{(2n)}(x) p_n(x) dx \\ &= (-1)^n c_n^2 (2n)! \int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx &= \int_{-1}^1 (x+1)^n (x-1)^n dx = \frac{1}{n+1} \int_{-1}^1 (x+1)^n d(x-1)^{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} [(x+1)^n (x-1)^{n+1}]_{-1}^1 - \frac{n}{n+1} \int_{-1}^1 (x+1)^{n-1} (x-1)^{n+1} dx \\ &= -\frac{n}{n+1} \int_{-1}^1 (x+1)^{n-1} (x-1)^{n+1} dx. \end{aligned}$$

Algemeen $\int_{-1}^1 (x+1)^{n-k} (x-1)^{n+k} dx = -\frac{n-k}{n+k+1} \int_{-1}^1 (x+1)^{n-k-1} (x-1)^{n+k+1} dx.$

Dus

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx &= (-1)^n \frac{n(n-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots 2n} \int_{-1}^1 (x-1)^{2n} dx \\ &= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{-1}{2n+1} (-2)^{2n+1} \end{aligned}$$

en

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{1}{2n+1} c_n^2 (n!)^2 2^{2n+1} \frac{2}{2n+1} \Rightarrow c_n = \frac{1}{n! 2^n}.$$

Dus

$$P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \quad (21.22)$$

(Rodrigues)

Uit deze formule leiden we af

$$P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x-1)^n (x+1)^n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x-1)^n \frac{d^k}{dx^k} (x+1)^n \\
&= \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n_{(n-k)} (x-1)^k n_{(k)} (x+1)^{n-k}
\end{aligned}$$

dus

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x-1)^k (x+1)^{n-k} \quad (21.23)$$

waaruit volgt

$$\left. \begin{aligned}
P_n(-1) &= (-1)^n \\
P_n(1) &= 1 \\
P_n(0) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2
\end{aligned} \right\} \quad (21.24)$$

Voorbeelden.

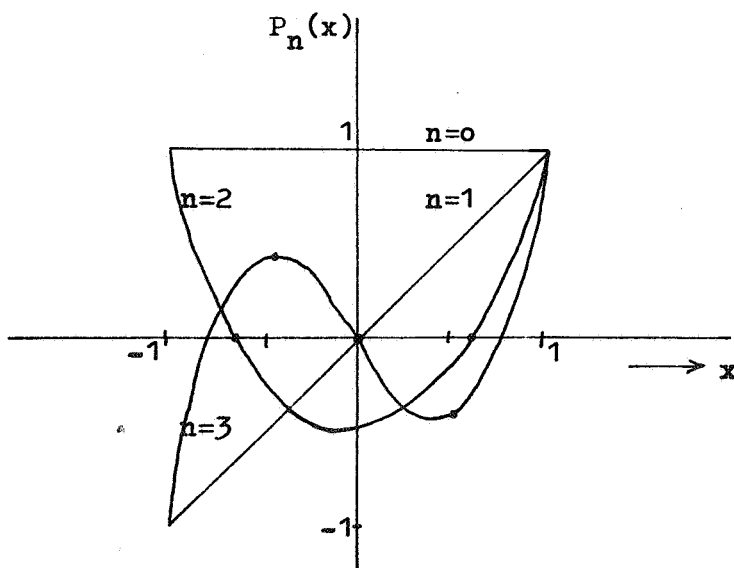
$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$$



Zoals we al hebben gezien, heeft (21.15) nog een van $P_n(x)$ lineair onafhankelijke oplossing.

Stel $P(x) = u(x) P_n(x)$ en substitueer in (21.15).

$$(1-x^2)(u'' P_n + 2u' P_n' + u P_n'') - 2x(u' P_n + u P_n') + n(n+1) u P_n = 0$$

of, daar $P_n(x)$ een oplossing is,

$$(1-x^2) P_n u'' + \{2(1-x^2) P_n' - 2x P_n\} u' = 0$$

$$\frac{u''}{u'} = -2 \frac{P_n'}{P_n} + \frac{2x}{1-x^2}.$$

Hiervan is een oplossing

$$u'(x) = \frac{1}{(1-x^2) P_n^2(x)}.$$

In de omgeving van $x = 1$ is

$$(1-x)u'(x) = \frac{1}{(1+x)P_n^2(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-1)^k$$

want $P_n(1) = 1 \neq 0$.

$$\text{Dus } u'(x) = \frac{\alpha_0}{1-x} - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (x-1)^{k-1}$$

$$u(x) = -\alpha_0 \log |1-x| + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x-1)^k.$$

De tweede oplossing $P(x)$ is voor $x = 1$ dus niet eindig; ze heeft daar een logarithmische singulariteit. Hetzelfde is aan te tonen voor $x = -1$. Dat $x = 1$ en $x = -1$ singuliere punten zijn van vergelijking (21.15) blijkt al uit het nul zijn van de coëfficiënt van $P''(x)$ voor $x = \pm 1$.

$$\boxed{m \neq 0}$$

Vergelijking (21.24)

$$(1-x^2) P'' - 2x P' + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\} P = 0$$

is op te lossen door machtrekssubstitutie.

Hier zullen we een andere weg volgen.

Substitueer $P(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}m} u_m(x)$ voor $m \geq 0$.

Dit geeft

$$(1-x^2) u_m'' - 2(m+1)x u_m' + \{n(n+1) - m(m+1)\} u_m = 0. \quad (*)$$

Differentiëren geeft

$$(1-x^2) u_{m+1}'' - 2(m+2)x u_{m+1}' + \{n(n+1) - (m+1)(m+2)\} u_{m+1}' = 0$$

dus vergelijking (*) met $m+1$ in plaats van m .
Afgezien van een cofactor, is

$$u_{m+1}(x) = u_m'(x),$$

waaruit

$$u_m(x) = \frac{d}{dx} u_{m-1}(x) = \dots = \frac{d^m}{dx^m} u_0(x).$$

Nemen we voor $u_0(x)$ de veeltermoplossing van de gewone differentiaalvergelijking van Legendre, dan is dus de veeltermoplossing van (21.14), afgezien van een normeringsfactor,

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x). \quad (21.25)$$

Kennelijk is $P_n^m(x) \equiv 0$ voor $m > n$.

Voorbeelden.

$$P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$P_2^1(x) = 3x\sqrt{1-x^2} \quad ; \quad P_2^2(x) = 3(1-x^2)$$

$$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)\sqrt{1-x^2} \quad ; \quad P_3^2(x) = 15x(1-x^2)$$

$$P_3^3(x) = 15(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Combinatie van (21.22) en (21.25) geeft

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}}{n! 2^n} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n. \quad (21.26)$$

(Tot zover het eerste gedeelte van dit college.
De syllabus hiervan werd verzorgd door drs B.J.M.Morselt,
Technische Hogeschool te Eindhoven.)