STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

DR 4

Berekening van bepaalde integralen met behulp van de omkeerstelling van Mellin en de intergralen van Barnes.

C.S.Meyer.

1949

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

DR 4

Prof.dr. C.S. Meyer

Berekening van bepaalde integralen met behulp van de omkeerstelling van Mellin en de integralen van Barnes

1949

Voordrachten door Prof. Dr. C.S. Meyer op
11 en 25 Maart 1949
over

Berekening van bepaalde integralen met behulp van de omkeerstelling van Mellin en de integralen van Barnes

(1) $$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i+\lambda}^{\infty i+\lambda} \phi(s)\, z^{s}\, ds \qquad (\alpha < \lambda < \beta)$$

(2) $$\phi(s) = \int_0^{\infty} F(z)\, z^{-s-1}\, dz \qquad (\alpha < \Re(s) < \beta)$$

Deze formules zijn de z.g. omkeerformules van Mellin. Deze combinatie van formules heeft twee betekenissen:

1e. Voldoet $\phi(s)$ aan bepaalde voorwaarden en wordt F(z) door (1) gedefinieerd, dan kan men $\phi(s)$ uit F(z) terugvinden met behulp van formule (2). Dit is de 1e omkeerstelling van Mellin.

2e. Voldoet F(z) aan bepaalde voorwaarden en wordt $\phi(s)$ door (2) gedefinieerd, dan kan men F(z) uit $\phi(s)$ terugvinden met behulp van (1). Dit is de 2e omkeerstelling van Mellin.

Toepassingen. Bekend zijn de formules:

$$\Gamma(-s) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{-s-1}\, dz \qquad (\Re(s) < 0)$$

$$\frac{\Gamma(a+s)\,\Gamma(-s)}{\Gamma(a)} = \int_0^{\infty} \frac{z^{-s-1}\, dz}{(1+z)^{a}} \qquad (-\Re(a) < \Re(s) < 0)$$

Toepassing van de 2e stelling van Mellin levert dus

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i+\lambda}^{\infty i+\lambda} \Gamma(-s)\, z^{s}\, ds = e^{-z} \qquad (\lambda < 0)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i+\lambda}^{\infty i+\lambda} \Gamma(a+s)\,\Gamma(-s)\, z^{s}\, ds = \frac{\Gamma(a)}{(1+z)^{a}} \qquad (-\Re(a) < \lambda < 0)$$

Deze beide formules kunnen ook worden bewezen zonder gebruik van de omkeerstelling van Mellin, n.l. door de residuën van de integrand te berekenen in de polen rechts van de integratieweg.

Als uitbreiding van deze formules worden integralen afgeleid voor gegeneraliseerde hypergeometrische functies ${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; z)$

Bijvoorbeeld: $$\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\Gamma(\alpha_1+s)\,\Gamma(\alpha_2+s)\cdots\Gamma(\alpha_p+s)\,\Gamma(-s)\, z^{s}\, ds}{\Gamma(\beta_1+s)\,\Gamma(\beta_2+s)\cdots\Gamma(\beta_p+s)} =$$

$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\beta_1)\,\Gamma(\beta_2)\cdots\Gamma(\beta_p)}\; {}_pF_p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p; -z)$$

De integratieweg D loopt van $-\infty i+\lambda$ naar $\infty i+\lambda$ op zodanige wijze, dat alleen de polen 0,1.2,.... van de integrand rechts van D liggen. Een dergelijke weg is steeds mogelijk, mits geen der getallen α gelijk is aan 0, -1,-2,....

Voor de functie $K_\nu(z)$ die gedefinieerd kan worden door

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\Gamma(-\nu)\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} {}_0F_1\left(1+\nu; \frac{z^2}{4}\right) + \frac{1}{2}\Gamma(\nu)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} {}_0F_1\left(1-\nu; \frac{z^2}{4}\right)$$

($\nu \neq$ geheel; voor $\nu =$ geheel wordt $K_\nu(z)$ door een grensovergang gedefinieerd)
wordt de volgende integraal afgeleid

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cdot \frac{e^{-z}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} F\left(\tfrac{1}{2}+\nu, \tfrac{1}{2}-\nu; \alpha; -\frac{t}{2z}\right) dt$$

Hierin is $|\arg z| < \pi$; α is een willekeurig getal, dat voldoet aan $\Re(\alpha) > 0$

Vele bekende integralen voor $K_\nu(z)$ blijken als bijzonder geval in deze zeer algemene formule opgesloten te zitten, bijv.

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh u} \cosh \nu u \, du$$

Voor het product $K_\nu(z e^{\frac{1}{2}\pi i}) . K_\nu(z e^{-\frac{1}{2}\pi i})$ wordt de volgende formule afgeleid:

$$K_\nu(z e^{\frac{1}{2}\pi i})\, K_\nu(z e^{-\frac{1}{2}\pi i}) = \frac{2\pi}{z\, \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1} K_{\alpha-\beta}(2t)\, {}_3F_2\left(\tfrac{1}{2}+\nu, \tfrac{1}{2}-\nu, \tfrac{1}{2}; \alpha, \beta; -\frac{t^2}{z^2}\right) dt$$

Hierin is $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$; α en β zijn willekeurige getallen , die voldoen aan $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\beta) > 0$.

Vele bekende integralen voor $K_\nu(z e^{\frac{1}{2}\pi i}) . K_\nu(z e^{-\frac{1}{2}\pi i})$ zijn slechts bijzondere gevallen van deze algemene formule, bijv. de bekende betrekkingen

$$K_\nu(z e^{\frac{1}{2}\pi i}) . K_\nu(z e^{-\frac{1}{2}\pi i}) = 2\int_0^\infty K_0(2z \sinh u) \cosh 2\nu u \, du$$

$$K_\nu(z e^{\frac{1}{2}\pi i}) . K_\nu(z e^{-\frac{1}{2}\pi i}) = 2 \cos \nu\pi \int_0^\infty K_{2\nu}(2z \sinh u)\, du$$

$$|\Re(\nu)| < \tfrac{1}{2}$$