STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

DR 17

DE transformatie van Euler.

A.van Wijngaarden.

1957

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

De transformatie van Euler

Zij de in de omgeving van $z = 0$ analytische functie $f(z)$ daar voorgesteld door de reeks

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k \tag{1}$$

Door de transformatie $z = z_0 v(1 - v)^{-1}$ ontstaat de reeks

$$f(z) = \frac{z_0}{z + z_0} \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z + z_0}\right)^h \sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k} u_k z_0^{\,k}, \tag{2}$$

welke wij de gegeneraliseerde Euler-getransformeerde van de oorspronkelijke reeks noemen. De keuze van z_0 bepaalt het karakter van de transformatie. Door bijv. in (2) te substitueren $z_0 = z$ verkrijgt men de klassieke Euler-transformatie

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} 2^{-h-1} \sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k} u_k z_0^{\,k} \tag{3}$$

en door de z_0 tot ∞ te laten naderen gaat (2) weer in (1) over. Het speciale geval $z_0 = pz$ is onderzocht door Knopp en Hardy. Door bij iedere z een geschikte z_0 te kiezen (welke van de functie $f(z)$ afhangt) kan men natuurlijk de transformatie bepaalde voorwaarden laten vervullen, die anders onvervulbaar zijn. Zo kan men zich afvragen hoe z_0 gekozen moet worden opdat het gebied waarin (2) convergeert zo groot mogelijk is. Bij de keuze $z_0 = pz$ geldt (Knopp) dat het convergentiegebied ligt binnen het Borelpolygoon van $f(z)$ en daartoe nadert als p tot 0 nadert. Als men echter de singulariteiten van $f(z)$ kent, dan kan men z_0 zo kiezen dat het convergentiegebied het Borelpolygoon bevat en i.h.a. veel groter is, ja zelfs de gehele Mittag-Leffler-ster van $f(z)$ kan uitmaken. Dit is merkwaardig, omdat de transformatie volledig constructief is, d.w.z. dat voor het berekenen van een eindig aantal termen van (2) slechts een eindig aantal arithmetische bewerkingen behoeven te worden uitgevoerd. Bij de bewijsvoering kan bovendien met vrucht gebruik worden gemaakt van elementaire planimetrie.

De belangrijkste toepassingen op numeriek gebied worden evenwel gevonden door een eenvoudige transformatie als (3) toe te passen op langzaam convergerende alternerende reeksen, waarbij een uiterst eenvoudig en doeltreffend middel aanwezig is om deze reeksen numeriek te sommeren. Men merke n.l. op dat de som over k in (2) en (3) uiterst eenvoudig recurrent door optellen kan worden verkregen.

Heeft de te sommeren reeks echter alleen positieve termen en is ze slecht convergent, d.w.z. proberen we f(z) te vinden in of nabij een singulier punt, dan helpen bovengenoemde transformaties niet of nauwelijks. Natuurlijk kan men in een speciaal geval wel vaak door een of andere speciale kunstgreep aan deze moeilijkheid ontkomen, maar een methode die ongeacht het speciale karakter van de termen der reeks werkt, is de volgende: Zij te sommeren

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k . \tag{4}$$

Voer in de sommen

$$v_k = a_k + 2a_{2k} + 4a_{4k} + 8a_{8k} + \ldots, \tag{5}$$

welke veel beter convergeren dan de gegeven som, en waarbij bovendien

$$v_{2k} = \tfrac{1}{2}(v_k - a_k). \tag{6}$$

Dan geldt:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} v_k ; \tag{7}$$

Wat onder de genoemde aannamen een langzaam convergerende reeks is, waarvan slechts weinige termen berekend behoeven te worden om haar met behulp van (3) te sommeren.

Deze methode is voor berekeningen welke met de hand uitgevoerd worden, wellicht niet aantrekkelijk, maar is door haar simpele structuur buitengewoon geschikt voor automatische rekenmachines. Voor de machine ARMAC van het Mathematisch Centrum werd deze methode geprogrammeerd en de machine kan dus reeksen van het gegeven type sommeren als slechts de additionele informatie medegegeven wordt hoe bij gegeven k de a_k berekend wordt. Een voorbeeld van een van de vele sommetjes, die wij er op berekenden om het programma te controleren is:

$$\log \frac{1}{1 - x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$$

voor x = 0.99999999, waarbij na enige tijd inderdaad $\log 10^8$ afgeleverd werd, berekend uit de machtreeks!

A. van Wijngaarden.
Zwolle,
3-1-1957.