STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

DR 29

Una nota su un analogo infinitesimale del
q-d algoritmo.

Rendiconti di matematica e delle sue applicazione, 21
(1962), p 77-85).

P. Wynn.

1962

P. WYNN

29

Una nota su un analogo infinitesimale del $q-d$ algoritmo

EDIZIONI CREMONESE
ROMA 1962

WYNN, P.
1962
Rendiconti di Matematica
(1-2) Vol. 21, pp. 77-85

Una nota su un analogo infinitesimale del $q-d$ algoritmo

di **P. WYNN** (Amsterdam)

Il problema di sviluppare l'integrale di Laplace

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, \Phi(a+t)\, dt \tag{1}$$

in una frazione continua

$$F(z) = \frac{\Phi(a)}{z - Q_1(a) -} \, \frac{E_1(a)}{z - Q_2(a) -} \, \frac{E_2(a)}{z - Q_3(a) -} \cdots$$

può essere affrontato in due modi. Il primo, essendo essenzialmente un processo discreto, usa un risultato della teoria del $q-d$ algoritmo [1]. Secondo questo la serie infinita

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_{m+r}\, z^{-r-1} \tag{2}$$

può essere trasformata nella frazione continua

$$\frac{c_m}{z - q_1^{(m)} -} \, \frac{e_1^{(m)} q_1^{(m)}}{z - q_2^{(m)} - e_1^{(m)} -} \cdots \frac{e_r^{(m)} q_r^{(m)}}{z - q_{r+1}^{(m)} - e_r^{(m)} -} \cdots \tag{3}$$

nella quale le quantità $e_r^{(m)}$, $q_r^{(m)}$ vengono determinate con l'applicazione ricorrente della regola del rombo

$$q_r^{(m)} + e_r^{(m)} = q_r^{(m+1)} + e_{r-1}^{(m+1)} \tag{4}$$

e

$$q_{r+1}^{(m)}\, e_r^{(m)} = q_r^{(m+1)}\, e_r^{(m+1)} \tag{5}$$

usando come valore iniziale $e_0^{(m)} = 0$, $q_1^{(m)} = c_{m+1}/c_m$.

Conformemente l'integrale (1) è sviluppato formalmente secondo le potenze inverse di z, dando luogo alla serie

$$F(z) \backsim \sum_{r=0}^{\infty} \Phi^{(r)}(a)\, z^{-r-1} \tag{6}$$

ed i coefficienti nella frazione continua della forma (3), corrispondenti alla serie (6), vengono determinati dalle relazioni (4) e (5), quando vi si ponga $c_s = \Phi^{(s)}(a)$.

Usando la notazione

$$H_k^{(m)}\{c_s\} = \begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{m+k-2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m+k-1} & c_{m+k} & \cdots & c_{m+2k-2} \end{vmatrix}, \quad H_0^{(m)}\{c_s\} = 1 \tag{7}$$

si può dimostrare [2] che

$$e_r^{(m)} = \frac{H_{r+1}^{(m)}\{c_s\}\, H_{r-1}^{(m+1)}\{c_s\}}{H_r^{(m)}\{c_s\}\, H_r^{(m+1)}\{c_s\}} \tag{8}$$

$$q_r^{(m)} = \frac{H_r^{(m+1)}\{c_s\}\, H_{r-1}^{(m)}\{c_s\}}{H_r^{(m)}\{c_s\}\, H_{r-1}^{(m+1)}\{c_s\}} \tag{9}$$

$$e_r^{(m)}\, q_r^{(m)} = \frac{H_{r+1}^{(m)}\{c_s\}\, H_{r-1}^{(m)}\{c_s\}}{[H_r^{(m)}\{c_s\}]^2} \tag{10}$$

e che i denominatori

$$p_n^{(0)}(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z & \cdots & z^n \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} \end{vmatrix}} (-1)^n \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

delle ridotte successive della frazione continua (3) soddisfanno la relazione ricorrente

$$(12)\qquad p^{(0)}_{n+1}(z) = (z - q^{(0)}_{n+1} - e^{(0)}_n)\, p^{(0)}_n(z) - e^{(0)}_n\, q^{(0)}_n\, p^{(0)}_{n-1}(z)$$

con

$$p^{(0)}_0(z) = 1,\ p^{(0)}_1(z) = z - q^{(0)}_1$$

Per distinguere fra i coefficienti di frazioni continue derivate da diverse serie di potenze, i coefficienti ed i vari associati determinanti di Hankel verranno scritti con un argomento esprimente la forma generale del coefficiente c_s. Così i determinanti di Hankel che si riferiscono ai coefficienti della serie (6) si scriveranno

$$H_k^{(m)}\{\Phi^{(s)}(a)\} \qquad\qquad m, k = 0, 1, \ldots$$

e la frazione continua per la serie (6) si scriverà

$$\frac{\Phi(a)}{z - q^{(0)}_1\{\Phi^{(s)}(a)\} -}\ \frac{e^{(0)}_1\{\Phi^{(s)}(a)\}\, q^{(0)}_1\{\Phi^{(s)}(a)\}}{z - q^{(0)}_2\{\Phi^{(s)}(a)\} - e^{(0)}_1\{\Phi^{(s)}(a)\} -} \cdots \frac{e^{(0)}_r\{\Phi^{(s)}(a)\}\, q^{(0)}_r\{\Phi^{(s)}(a)\}}{z - q^{(0)}_{r+1}\{\Phi^{(s)}(a)\} - e^{(0)}_r\{\Phi^{(s)}(a)\} -} \cdots$$

Occorre osservare che l'uso delle relazioni di rombo (4) e (5) dà pure i coefficienti nella frazione continua

$$F_m(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, \Phi^{(m)}(a+t)\, dt =$$

$$= \frac{\Phi^{(m)}(a)}{z - q^{(m)}_1\{\Phi^{(s)}(a)\} -}\ \frac{e^{(m)}_1\{\Phi^{(s)}(a)\}\, q^{(m)}_1\{\Phi^{(s)}(a)\}}{z - q^{(m)}_2\{\Phi^{(s)}(a)\} - e^{(m)}_1\{\Phi^{(s)}(a)\} -} \cdots \frac{e^{(m)}_r\{\Phi^{(s)}(a)\}\, q^{(m)}_r\{\Phi^{(s)}(a)\}}{z - q^{(m)}_{r+1}\{\Phi^{(s)}(a)\} - e^{(m)}_r\{\Phi^{(s)}(a)\} -} \cdots$$

Il secondo metodo consiste nel trasformare la serie infinita

$$h \sum_{r=0}^{\infty} \Phi(a + rh)\, e^{-(r+1)hz}$$

considerata come uno sviluppo secondo le potenze inverse di e^{hz}, in una frazione continua nell'argomento e^{hz}, usando le regole di rombo (4) e (5) con $c_r = \Phi(a + rh)$, e tenendo conto del comportamento della frazione continua e dei suoi coefficienti, quando h tende a zero. È opportuno di sostituire la variabile discreta r nelle relae

$$(21)\qquad \lim_{h\to 0}\,[q_{r+1}^{(0)}\{\Phi(t+sh)\}+e_r^{(0)}\{\Phi(t+sh)\}]=Q_r(t)=$$

$$=\frac{H_{r+1}^{(1)}\{\Phi^{(s)}(t)\}\,H_r^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}}{H_{r+1}^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}\,H_r^{(1)}\{\Phi^{(s)}(t)\}}+\frac{H_{r+1}^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}\,H_{r+1}^{(1)}\{\Phi^{(s)}(t)\}}{H_r^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}\,H_r^{(1)}\{\Phi_r^{(s)}(t)\}}.$$

Applicando una nota regola di derivazione segue che

$$(22)\qquad \frac{d}{dt}H_k^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}=\begin{vmatrix}\Phi(t) & \Phi'(t) & \dots & \Phi^{(k-1)}(t)\\ \Phi'(t) & \Phi''(t) & \dots & \Phi^{(k)}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \Phi^{(k-2)}(t) & \Phi^{(k-1)}(t) & \dots & \Phi^{(2k-3)}(t)\\ \Phi^{(k)}(t) & \Phi^{(k+1)}(t) & \dots & \Phi^{(2k-1)}(t)\end{vmatrix}$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}E_r(t)=$$

$$=\frac{H_{r+1}^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}H_{r-1}^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}}{[H_r^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}]^2}\left[\frac{\frac{d}{dt}H_{r-1}^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}}{H_{r-1}^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}}+\frac{\frac{d}{dt}H_{r+1}^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}}{H_{r+1}^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}}-\frac{2\frac{d}{dt}H_r^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}}{H_r^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}}\right]$$

onde si può scrivere, usando la formula (22), ed il primo sviluppo di Schweins [4]

$$\frac{-H_{r+1}^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}\,H_{r-1}^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}}{[H_r^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}]^2}\times$$

$$\times\left[\frac{H_{r+1}^{(1)}\{\Phi^{(s)}(t)\}H_r^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}}{H_{r+1}^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}H_r^{(1)}\{\Phi^{(s)}(t)\}}-\frac{H_r^{(1)}\{\Phi^{(s)}(t)\}\,H_{r-1}^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}}{H_r^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}\,H_{r-1}^{(1)}\{\Phi^{(s)}(t)\}}\right]=$$

$$=-E_r(t)\,[q_{r+1}^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}-q_r^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}]$$

o, coll'uso della regola di rombo (4):

$$-E_r(t)\,[q_{r+1}^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}-q_r^{(1)}\{\Phi^{(s)}(t)\}-e_{r-1}^{(1)}\{\Phi^{(s)}(t)\}+e_r^{(0)}\{\Phi^{(s)}(t)\}]$$

e finalmente

$$E_r(t)\,[Q_{r+1}(t)-Q_r(t)]$$

in accordo con l'equazione (17). L'equazione (16) si può dedurre in analoga maniera dalle espressioni (20) e (21) in collegamento con (22).

Se la serie (2) è lo sviluppo in serie di potenze di una funzione razionale di z, il cui denominatore è un polinomio di grado n in z, e il cui numeratore è un polinomio di grado $n-1$ al massimo, la frazione continua (3) si arresta, e nello schema $q-d$ (4) e (5) tutte le $e_n^{(s)}$, $s=0, 1, \ldots$ risultano nulle. Tuttavia può accadere che per caso una quantità $e_r^{(\overline{m})}$ sia zero. La quantità $q_{r+1}^{(\overline{m})}$ dedotta con l'applicazione dell'equazione (5), è allora formalmente infinita. Anche le due quantità $e_{r+1}^{(\overline{m})}$ e $e_{r+1}^{(\overline{m}-1)}$ sono formalmente infinite, e la quantità $q_{r+1}^{(\overline{m}-1)}$ è indeterminata. Si può superare questa difficoltà con l'applicazione di certe regole singolari. Essa nasce perchè la medesima relazione lineare esiste fra i gruppi dei coefficienti $c_{\overline{m}}, c_{\overline{m}+1}, \ldots, c_{\overline{m}+n}$, se $\overline{m}=m, m+1, \ldots, m+n$, però non per valori generici di $\overline{m}$. Dall'esame della formula coi determinanti si può vedere facilmente che casi singolari non nascono nella forma continuativa dell'algoritmo $q-d$. O esiste una relazione lineare di ordine finito fra le derivate successive della funzione $\Phi(t)$, — nel qual caso l'integrale di Laplace è equivalente ad una funzione razionale di z, la funzione $E_n(t)$ è identicamente nulla, e la frazione continua (18) si arresta — oppure non c'è tale relazione e tutte le funzioni $E_r(t)$, $Q_r(t)$ sono completamente determinate.

Un altro uso al quale servono le formule con determinanti (20) e (21) è di esprimere i risultati ottenuti dall'applicazione delle relazioni (16) e (17) (alle differenze e differenziali) alla funzione $\Phi(t)\, e^{-\eta t}$. Occorre ricordare che

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^s \{e^{-\eta t}\, \Phi(t)\} = e^{-\eta t} \sum_{r=0}^{r=s}{}' \binom{r}{s} (-\eta)^{r-s} \left(\frac{d}{dt}\right)^s \Phi(t). \tag{23}$$

Se si sostituisce la funzione $\Phi(t)$ nelle formule (20) e (21) con la $e^{-\eta t}\, \Phi(t)$, e se si usa l'equazione (23), e, dov'è opportuno, la relazione

$$H_r^{(1)}\left\{\frac{d^s}{dt^s} e^{-\eta t}\Phi(t)\right\} = \begin{vmatrix} 1 & e^{-\eta t}\, \Phi(t) & \frac{d}{dt}\{e^{-\eta t}\, \Phi(t)\} \ldots & \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}\{e^{-\eta t}\, \Phi(t)\} \\ 0 & \frac{d}{dt}\{e^{-\eta t}\, \Phi(t)\} & \frac{d^2}{dt^2}\{e^{-\eta t}\, \Phi(t)\} \ldots & \frac{d^r}{dt^r}\{e^{-\eta t}\, \Phi(t)\} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{d^r}{dt^r}\{e^{-\eta t}\, \Phi(t)\} & \frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}}\{e^{-\eta t}\Phi(t)\} \ldots & \frac{d^{2r-1}}{dt^{2r-1}}\{e^{-\eta t}\Phi(t)\} \end{vmatrix}$$

si deduce, dopo opportune operazioni su righe e colonne, che

$$\widetilde{E}_r(a)=\frac{\begin{vmatrix}\Phi(a) & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r)}(a)\\ \Phi'(a) & \Phi''(a) & \dots & \Phi^{(r+1)}(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \Phi^{(r)}(a) & \Phi^{(r+1)}(a) & \dots & \Phi^{(2r)}(a)\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Phi(a) & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r-2)}(a)\\ \Phi'(a) & \Phi''(a) & \dots & \Phi^{(r-1)}(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \Phi^{(r-2)}(a) & \Phi^{(r-1)}(a) & \dots & \Phi^{(2r-4)}(a)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Phi(a) & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r-1)}(a)\\ \Phi'(a) & \Phi''(a) & \dots & \Phi^{(r)}(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \Phi^{(r-1)}(a) & \Phi^{(r)}(a) & \dots & \Phi^{(2r-2)}(a)\end{vmatrix}^2}=E_r$$

$$\widetilde{Q}_{r+1}(a)=\frac{\begin{vmatrix}1 & \Phi(a) & \dots & \Phi^{(r)}(a)\\ \eta & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r+1)}(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \eta^{r+1} & \Phi^{(r+1)}(a) & \dots & \Phi^{(2r+1)}(a)\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Phi(a) & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r-1)}(a)\\ \Phi'(a) & \Phi''(a) & \dots & \Phi^{(r)}(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \Phi^{(r-1)}(a) & \Phi^{(r)}(a) & \dots & \Phi^{(2r-2)}(a)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Phi(a) & \Phi(a) & \dots & \Phi^{(r)}(a)\\ \Phi'(a) & \Phi''(a) & \dots & \Phi^{(r+1)}(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \Phi^{(r)}(a) & \Phi^{(r+1)}(a) & \dots & \Phi^{(2r)}(a)\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & \Phi(a) & \dots & \Phi^{(r-1)}(a)\\ \eta & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r)}(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \eta^{r} & \Phi^{(r)}(a) & \dots & \Phi^{(2r-1)}(a)\end{vmatrix}}+$$

$$+\frac{\begin{vmatrix}\Phi(a) & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r)}(a)\\ \Phi'(a) & \Phi''(a) & \dots & \Phi^{(r+1)}(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \Phi^{(r)}(a) & \Phi^{(r+1)}(a) & \dots & \Phi^{(2r)}(a)\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & \Phi(a) & \dots & \Phi^{(r-2)}(a)\\ \eta & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r-1)}(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \eta^{r-1} & \Phi^{(r-1)}(a) & \dots & \Phi^{(2r-3)}(a)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Phi(a) & \Phi'(a) & \Phi^{(r-1)}(a)\\ \Phi'(a) & \Phi''(a) & \dots\ \Phi^{(r)}(a)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \Phi^{(r-1)}(a) & \Phi^{(r)}(a) & \dots\ \Phi^{(2r-2)}(a)\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & \Phi(a) & \dots & \Phi^{(r-1)}(a)\\ \eta & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r)}(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \eta^{r} & \Phi^{(r)}(a) & \dots & \Phi^{(2r-1)}(a)\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{P_{r+1}^{(0)}(\eta)}{P_r^{(0)}(\eta)}+E_r(a)\,\frac{P_{r-1}^{(0)}(a)}{P_r^{(0)}(a)}$$

dove, come si può vedere dall'equazione (11), i polinomi sono i denominatori delle ridotte successive della frazione continua

$$\frac{\Phi(a)}{\eta - Q_1(a) -} \frac{E_1(a)}{\eta - Q_2(a) -} \cdots \frac{E_r(a)}{\eta - Q_{r+1}(a) -} \cdots$$

e le «tilde» son state usate per indicare il risultato dell'applicazione di relazioni (16) e (17) alla funzione $e^{-\eta t}\,\Phi(t)$. Ma dalla formula ricorrente (vedi equazione (12))

$$p^{(0)}_{r+1}(\eta) = \{\eta - Q_{r+1}(a)\}\, p^{(0)}_r(\eta) - E_r(a)\, p^{(0)}_{r-1}(\eta)$$

$$\widetilde{Q}_{r+1}(t) = Q_r(t) - \eta$$

questo risultato è, naturalmente, dedotto per mezzo dello sviluppo

$$F(z+\eta) = \frac{\Phi(a)}{z-\eta-Q_1(a)-} \frac{E_1(a)}{z+\eta-Q_2(a)-} \cdots \frac{E_r(a)}{z+\eta-Q_{r+1}(a)-} \cdots$$

L'autore ringrazia la Deutsche Forschungsgemeinschaft per avergli procurato una concessione rendendo possibile questa nota. Egli esprime anche la sua gratitudine a Cornelia Halke per avere curato la traduzione italiana del testo.

BIBLIOGRAFIA

1. RUTISHAUSER H., *Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, Birkhäuser Verlag. Basel/Stuttgart 1957.
2. RUTISHAUSER H., *op. cit.* p. 10.
3. RUTISHAUSER H., *Ein kontinuierliches Analogon zum Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, Arch. Math. 5, 132-137 (1954).
4. AITKEN A. C., *Determinants and Matrices*, Oliver and Boyd, 6 Ed. 1949, Ch. V, p. 108.
5. RUTISHAUSER H., *Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, ZAMP, vol. 5, 1954, p. 241.

[*Entrato in Redazione l' 11 settembre 1961*].

Tipografia »Oderisi» Editrice - Gubbio 1962