OVER DE CONVERGENTIE VAN EEN ITERATIEPROCES VOOR BILINEAIRE VERGELIJKINGEN.

M.L. Potters.

Rapport MR 9

van de

Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam.

1 9 5 2 .

Over de convergentie van een iteratieproces voor bilineaire vergelijkingen.

1. Op te lossen zij het stelsel bilineaire vergelijkingen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11} & p_1 & q_1 & + & a_{12} & p_1 & q_2 & + \dots + & a_{1m} & p_1 & q_m = b_1 \\
 & + & & & & + & & & & + & \\
a_{21} & p_2 & q_1 & + & a_{22} & p_2 & q_2 & + \dots + & a_{2m} & p_2 & q_m = b_2 \\
 & + & & & & + & & & & + & \vdots \\
 & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
 & + & & & & + & & & & + & \\
a_{m1} & p_m & q_1 & + & a_{m2} & p_m & q_2 & + \dots + & a_{mm} & p_m & a_m = b_m \\
 & \parallel & & & & \parallel & & & & \parallel & \\
 & c_1 & & & & c_2 & & \dots\dots & & c_m &
\end{array} \qquad (1,1)$$

waarbij geldt $\sum_{i=1}^{m} c_i = \sum_{i=1}^{m} b_i$, terwijl alle a_{ij}, b_i, c_i reeel zijn.

Deze 2 m vergelijkingen met 2 m onbekenden p_i en q_i $(i = 1 \dots m)$ zijn niet onafhankelijk; de oplossing bevat een willekeurige constante. Is $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$ een oplossing van (1,1), dan voldoet ook $a\, p_i^{(0)}$, $a^{-1}\, q_i^{(0)}$.

De volgende iteratiemethode wordt toegepast:

Zij voor de p_i verkregen de benadering $p_i(n)$ $(i = 1 \dots m)$, dan wordt een benadering voor de q_i berekend volgens

$$q_i(n+1) = \frac{c_i}{\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, p_j(n)} \qquad (1,2a)$$

Hieruit volgt dan weer een nieuw stel p_i:

$$p_i(n+2) = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j(n+1)}. \qquad (1,2b)$$

Elke berekening van een stel p_i of een stel q_i wordt dus als een iteratiestap beschouwd. De beginschatting $p_i(0)$ zij de nulde stap. Hiervan uitgaande worden derhalve de $p_i(n)$ met even n en de $q_i(n)$ met oneven n berekend.

2. Voor het geval m = 2 kan het stelsel (1,1) exact opgelost worden, terwijl anderzijds eenvoudige convergentievoorwaarden van de methode (1,2) voor dit geval kunnen opgesteld worden. In het volgende zij daarom de beperking tot m = 2 gemaakt. Het stelsel (1,1) wordt:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & p_1 & q_1 & + & a_{12} & p_1 & q_2 = b_1 \\
 & + & & & & + & \\
a_{21} & p_2 & q_1 & + & a_{22} & p_2 & q_2 = b_2 \\
 & \parallel & & & & \parallel & \\
 & c_1 & & & & c_2 &
\end{array} \qquad (2,1)$$

Een der vier onbekenden p_1, p_2, q_1, q_2 kan als parameter beschouwd worden en een der vier vergelijkingen weggelaten. Om de hierdoor ontstane asymmetrie te ontgaan, kunnen als volgt nieuwe coefficienten en onbekenden worden ingevoerd:

$$S = \frac{b_1+b_2}{2} = \frac{c_1+c_2}{2} \qquad\qquad b_1 = S + V$$

$$V = \frac{b_1-b_2}{2} \qquad \text{waaruit volgt} \qquad \begin{aligned} b_2 &= S - V \\ c_1 &= S + W \end{aligned} \tag{2,2a}$$

$$W = \frac{c_1-c_2}{2} \qquad\qquad c_2 = S - W$$

$$z = p_1\, q_1 \qquad\qquad q_1 = \frac{z}{p_1}$$

$$x = \frac{p_2}{p_1} \qquad \text{waaruit volgt} \qquad q_2 = \frac{yz}{p_1} \tag{2,2b}$$

$$y = \frac{q_2}{q_1} \qquad\qquad p_2 = x\, p_1$$

De vergelijkingen (2,1) gaan hiermee over in

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}\, z & + & a_{12}\, yz & = & S + V \\ + & & + & & \\ a_{21}\, xz & + & a_{22}\, xyz & = & S - V \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ S + W & & S - W & & \end{array} \tag{2,3}$$

Dit stelsel heeft twee oplossingen

$$x = \frac{(WD-VP)+R}{2a_{21}a_{22}(S+V)} \tag{2,4a}$$

$$y = \frac{(VD-WP)+R}{2a_{12}a_{22}(S+W)} \tag{2,4b}$$

$$z = \frac{2a_{22}(S+V)(S+W)}{(S+W+V)D+SP+R} \tag{2,4c}$$

Hierin is $D = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

$$P = a_{11}\, a_{22} + a_{12}\, a_{21}$$

$$R^2 = (V^2 + W^2 - S^2)D^2 - 2\,VWPD + S^2P^2.$$

Men kan het teken van R kiezen en verkrijgt dus twee oplossingen (2,4). Voor het reeel zijn van p_1, p_2, q_1, q_2 is nodig en voldoende dat x, y en z reeel zijn. De voorwaarde hiertoe is

$$R^2 \geqslant 0 \tag{2,5}$$

3. Het iteratieproces (1,2) toegepast op het stelsel (2,1) levert

$$q_1(n+1) = \frac{c_1}{a_{11}p_1(n)+a_{21}p_2(n)} \tag{3,1a}$$

$$q_2(n+1) = \frac{c_2}{a_{12}p_1(n)+a_{22}p_2(n)} \tag{3,1b}$$

$$p_1(n+2) = \frac{b_1}{\frac{a_{11}c_1}{a_{11}p_1(n)+a_{21}p_2(n)} + \frac{a_{12}c_2}{a_{12}p_1(n)+a_{22}p_2(n)}} \tag{3,2a}$$

$$p_2(n+2) = \frac{b_2}{\frac{a_{21}c_1}{a_{11}p_1(n)+a_{21}p_2(n)} + \frac{a_{22}c_2}{a_{12}p_1(n)+a_{22}p_2(n)}} \tag{3,2b}$$

Onder invoering van $x(n) = \frac{p_2(n)}{p_1(n)}$ gaat (3,2) over in

$$x(n+2) = \frac{t_1+t_2\ x(n)}{n_1+n_2\ x(n)} \tag{3,3}$$

waarin

$$\begin{aligned} t_1 &= b_2(c_1 + c_2)a_{11}\ a_{12} \\ t_2 &= b_2(c_1\ a_{11}\ a_{22} + c_2\ a_{12}\ a_{21}) \\ n_1 &= b_1(c_1\ a_{12}\ a_{21} + c_2\ a_{11}\ a_{22}) \\ n_2 &= b_1(c_1 + c_2)\ a_{21}\ a_{22} \end{aligned} \tag{3,4}$$

(3,3) is een differentievergelijking voor $x(n)$. Een dergelijke geldt ook voor $y(n) = \frac{q_2(n)}{q_1(n)}$.

Uit (3,2) kan ook een differentievergelijking voor $p_1(n)$ verkregen worden, waarin echter $x(n)$ nog voorkomt:

$$\frac{p_1(n+2)}{p_1(n)} = \frac{b_1t_1+(b_1t_2+b_2n_1)x(n)+b_2n_2x^2(n)}{(b_1+b_2)\{t_1+t_2\ x(n)\}} \tag{3,5}$$

Als randvoorwaarden komen bij (3,3) en (3,4) nog de beginschattingen voor $x(0)$ en $p_1(0)$. Een oplossing voor (3,3) kon gevonden worden.

4. De functie $f(n)$ zij als volgt gedefinieerd:

$$\frac{f(n)}{f(0)} = \frac{AN+C}{BN+C} \tag{4,1}$$

met $N = \text{th}\ kn$, terwijl A, B, C, $f(0)$ en k constanten zijn.

Schrijft men $K = \mathrm{th}\ 2k$, dan geldt

$$\mathrm{th}\ k(n+2) = \frac{N+K}{1+NK}$$

Hieruit volgt $\dfrac{f(n+2)}{f(0)} = \dfrac{A(N+K)+C(1+NK)}{B(N+K)+C(1+NK)}$ (4,2)

Eliminatie van N uit (4,1) en (4,2) levert een differentievergelijking voor f(n):

$$\frac{f(n+2)}{f(0)} = \frac{K(A^2-C^2)\ f(0)+\{C(A-B)-K(AB-C^2)\}\ f(n)}{\{C(A-B)+K(AB-C^2)\}\ f(0)-K(B^2-C^2)\ f(n)} \qquad (4,3)$$

Nu zijn de vergelijkingen (3,3) en (4,3) dezelfde, als tussen haar coefficienten t_1, t_2, n_1, n_2 resp. A, B, C, K de volgende relaties bestaan:

$$K^2 = 1 - 4\,\frac{n_1 t_2 - t_1 n_2}{(n_1+t_2)^2} \qquad (4,4a)$$

$$A = \frac{1}{K}\left\{\frac{t_1}{f(0)} - \frac{n_1-t_2}{2}\right\} \qquad (4,4b)$$

$$B = \frac{1}{K}\left\{\frac{n_1-t_2}{2} + n_2\ f(0)\right\} \qquad (4,4c)$$

$$C = \frac{n_1+t_2}{2} \qquad (4,4d)$$

$$f(0) = x(0) \qquad (4,4e)$$

De vergelijking (3.3) wordt dus opgelost door

$$x(n) = \frac{AN+C}{BN+C} \cdot x(0) \qquad (4,5)$$

De coefficienten hierin zijn door (4,4) op het teken van K na bepaald. Het teken van K is echter voor x(n) irrelevant; zij $K \geqslant 0$ gekozen. Door (4,5) is x(n) nu bepaald als functie van $N = \mathrm{th}(\frac{n}{2}\ \mathrm{arc\ th}\ K)$.

Bij gegeven K is N weliswaar niet voor alle n eenduidig bepaald als functie van n, maar juist wel voor de even waarden van n.

5. Wat de convergentie van het iteratieproces aangaat, kan allereerst opgemerkt worden, dat x(n) in het algemeen een pool zal hebben, en wel voor $n_p = \frac{1}{k}\ \mathrm{ar'\ th} - \frac{C}{B}$.

Het geval echter, dat n_p even is, kan uitgesloten worden door x(0) en daarmede B en C geschikt te kiezen.

De convergentie van x(n) hangt dus slechts af van het asymptotisch gedrag van N, waarvoor de parameter K, die volgens (4,4a) en (3,4) uit de coefficienten der vergelijkingen volgt, beslissend is.

Er zijn zes gevallen te onderscheiden, waarvan hieronder een overzicht volgt:

	K^2	N(voor even n)	$\lim_{n\to\infty} N$
1)	< 0	$i \operatorname{tg} (\frac{n}{2} \operatorname{arctg} \frac{K}{i})$	geen
2)	$= 0$	0	geen
3)	>0 en <1	$\operatorname{th} (\frac{n}{2} \operatorname{ar} \operatorname{th} K)$	1
4)	$= 1$	$\frac{\lvert n \rvert}{n}$	1
5)	> 1	$\operatorname{coth} (\frac{n}{2} \operatorname{ar} \operatorname{coth} K)$	1
6)	∞	∞	geen

1) $x(n)$ convergeert niet
2) $x(n) \equiv x(0)$. Dit geval treedt op voor $b_1+b_2=c_1+c_2 = 0$.
3) $x(n)$ convergeert
4) $x(n) \equiv \frac{A+C}{B+C}\, x(0)$ voor $n > 0$. Dit geval treedt op als $c_1=0$, $c_2=0$ of $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$.
5) $x(n)$ convergeert
6) $x(n) \equiv \frac{A}{B}\, x(0)$.

De convergentievoorwaarde luidt dus

$$K^2 \geqslant 0 \tag{5,1}$$

Hieraan is in elk geval voldaan als alle $a_{ij}, b_i, c_i > 0$ zijn [1].
In de notatie van 2. geldt

$$K = \frac{SR}{S^2P-VWD} \tag{5,2}$$

zodat de voorwaarden (2,5) en (5,1) dezelfde zijn!

Uit (5,2) volgt ook, dat het proces naar dìe oplossing (2,4) convergeert, waarvoor R het teken van $\frac{S}{S^2P-VWD}$ heeft, (want $K \geqslant 0$).
De andere oplossing, $\lim_{n\to -\infty} x(n)$ is instabiel en zou gevonden worden door het proces (3,1 - 3,2) achterstevoren uit te voeren.

Over de aard van de convergentie kan nog het volgende opgemerkt worden:

Voor $k\,n \gg 1$ is $N = \operatorname{th} kn = 1 - 2e^{-2kn}$. In (4,5) gesubstitueerd leidt dit tot

$$\frac{x(n+2)-x(n)}{x(n)-x(n-2)} = \frac{1-K}{1+K} \tag{5,3}$$

[1] Cf. W. Peremans, Over de oplossing van een stelsel bilineaire vergelijkingen, Rapport Z.W. 1952-015.

6. Ter illustratie van het bovenstaande moge hier een uitgewerkt voorbeeld voor het geval $0 < K^2 < 1$ volgen.

In (2,1) zij

$$a_{11} = 2 \qquad b_1 = 18$$
$$a_{12} = 3 \qquad b_2 = 22$$
$$a_{21} = 1 \qquad c_1 = 12$$
$$a_{22} = 2 \qquad c_2 = 28$$

Met deze coefficienten is $R^2 = 19044 > 0$

$$K \doteq 0.99137931.$$

Volgens (2.4) heeft dit stelsel de volgende oplossingen, waarvan de eerste de stabiele blijkt te zijn:

	x	y	z
1)	2	$\frac{4}{3}$	3
2)	$-\frac{11}{6}$	$-\frac{7}{12}$	72

De iteratie begint met de schatting $p_1(0) = 6.00$, $p_2(0) = -10{,}99$, welke dicht bij de instabiele oplossing ligt. Hiervan uitgaande wordt in 12 stappen de eerste oplossing in 8 decimalen nauwkeurig verkregen.

De coefficienten A, B en C in (4,5) worden:

$$A = -2786.6434 \qquad C = 2784.0000$$
$$B = -2781.5791.$$

In (5,3) wordt $\frac{1-K}{1+K} = 0.004329$ (De afwijkende waarde voor n = 10 is een gevolg van de afronding).

In de kolommen 2, 3, 4, 5 is het iteratieproces (1,2) uitgevoerd, terwijl 6, 7 en 8 het verloop van x(n) bij dit proces aangeven. In 9 en 10 is x(n) berekend volgens (4.5).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	$p_1(n)$	$p_2(n)$	$q_1(n)$	$q_2(n)$	$x(n)$	$x(n+2)-x(n)$	$\frac{x(n+2)-x(n)}{x(n)-x(n-2)}$	$N=\text{th}2k.\frac{n}{2}$	$x(n)$
$-\infty$								-1	$-1.8333=-\frac{11}{6}$
0	6.00	- 10.99			-1.83166667			0	-1.8317
1			11.88	- 7.035					
2	6.78	- 10.046			-1.48171091			0.99137931	-1.4833
3			3.415	112.90					
4	$(10^{-2}x)5.209$	9.598			1.84258015	0.15670933		0.99996252	1.8417
5			0.59952038	0.80406628					
6	4.98443803	9.96533450			1.99928948	0.00070744	0.00451435	0.99999984	1.9993
7			0.60198020	0.80266063					
8	4.98346833	9.96692133			1.99999692	0.00000307	0.00433959	1.00000000	2.0000
9			0.60199084	0.80265455					
10	4.98346413	9.96692819			1.99999999	0.00000001	(0.00325733)	1.00000000	2.0000
11			0.60199089	0.80265452					
12	4.98346412	9.96692824			2.00000000			1.00000000	2.0000
13			0.60199089	0.80265452					
∞								1	2.0000

7. Opmerking over de convergentie in het algemene geval.

Uit (1,2a) en (1,2b) volgt:

$$p_i(n+2)=\frac{b_i}{\sum_{j=1}^{m}\frac{a_{ij}\;c_j}{\sum_{l=1}^{m} a_{lj}\;p_l(n)}} \qquad (i = 1 \;\dots\; m) \qquad (7.1)$$

Voer weer in de verhoudingen

$$x_i(n)=\frac{p_i(n)}{p_m(n)}=\frac{p_i(n)}{p_{r+1}(n)} \qquad (i = 1 \;\dots m-1 = r) \qquad (7,2)$$

waardoor (7,1) overgaat in

$$x_i(n+2)=\frac{T_i(n)}{N_i(n)}=\frac{\sum_{(v)} t^{(i)}_{n_1 n_2 \dots n_r} x_1^{n_1}(n)\; x_2^{n_2}(n)\dots x_r^{n_r}(n)}{\sum_{(v)} n^{(i)}_{n_1 n_2 \dots n_r} x_1^{n_1}(n)\; x_2^{n_2}(n)\dots x_r^{n_r}(n)} \qquad (7,3)$$

$$(i = 1 \dots r)$$

Hierin betekent $\sum_{(v)}$ de som over die variaties van $n_1, n_2 \dots n_r$, waarbij $n_j = 0,1,2,\dots$ en $\sum_{j=1} n_j \leqslant r$.

$T_i(n)$ en $N_i(n)$ zijn dus polynomen van de graad r in de r functies $x_j(n)$. De coefficienten $t^{(i)}_{n_1 \dots n_r}$ en $n^{(i)}_{n_1 \dots n_r}$ hangen van de coefficienten van (1,1) af.

Veronderstel nu, dat de door (7,3) bepaalde rij $x_i(n)$ convergeert:

$$\lim_{n\to\infty} x_i(n) = x_i \qquad (i = 1 \dots r)$$

Met

$$T_i = \lim_{n\to\infty} T_i(n) \text{ en } N_i = \lim_{n\to\infty} N_i(n)$$

is dan $x_i = \frac{T_i}{N_i}$.

Bij invoering van $\varepsilon_i(n) = x_i - x_i(n)$ geldt $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_i(n) = 0$; zij n reeds zo groot, dat $\varepsilon_i(n) \ll x_i$.

Met (7,3) is nu aequivalent:

$$\varepsilon_i(n+2)=\frac{T_i}{N_i}-\frac{T_i(n)}{N_i(n)}=$$

$$=\frac{T_i}{N_i}-\frac{T_i-\sum_{(v)} t^{(i)}_{n_1 n_2 \dots n_r} \sum_{j=1}^{r} n_j\, x_1^{n_1} x_2^{n_2}\dots x_j^{n_j-1}\dots x_r^{n_r}\; \varepsilon_j(n)}{N_i-\sum_{(v)} n^{(i)}_{n_1 n_2 \dots n_r} \sum_{j=1}^{r} n_j\, x_1^{n_1} x_2^{n_2}\dots x_j^{n_j-1}\dots x_r^{n_r}\; \varepsilon_j(n)}$$

ofwel

$$\varepsilon_i(n+2)=\sum_{j=1}^{r} A_{ij}\,\varepsilon_j(n) \qquad (i = 1 \dots r) \qquad (7,4)$$

waarin de A_{ij} van n onafhankelijke constanten zijn, bepaald door de $t^{(i)}_{n_1 \ldots n_2}$, $n^{(i)}_{n_1 \ldots n_2}$, en door de oplossing x_j $(j = 1 \ldots r)$.

De oplossing van de differentievergelijking (7,4) kan als volgt uitgedrukt worden:

Zij A de matrix (A_{ij}), I de eenheidsmatrix van orde r en α een kolommatrix van r ~~(m-1)~~ onbekenden α_j dan heeft het stelsel vergelijkingen

$$(A - \lambda I)\alpha = 0 \tag{7,5}$$

slechts voor die waarden van λ een oplossing, waarvoor

$$\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0. \tag{7,6}$$

Stel de uit (7,7) gevonden eigenwaarden λ_l van A nu alle verschillend, dan vindt men r stelsels oplossingen $\alpha^{(l)}$ van (7,5), die dus voldoen aan

$$(A - \lambda_l I)\alpha^{(l)} = 0. \qquad (l = 1 \ldots r)$$

of

$$\sum_{j=1}^{r} A_{ij}\alpha_j^{(l)} = \lambda_l \alpha_i^{(l)} \qquad \begin{matrix}(i = 1 \ldots r) \\ (l = 1 \ldots r)\end{matrix} \tag{7,7}$$

Is verder $k_l = -\frac{1}{2}\log\lambda_l$, dan is de oplossing van (7,4) te schrijven als

$$\varepsilon_j(n) = \sum_{l=1}^{r} \alpha_j^{(l)} e^{-k_l n} \qquad (j = 1 \ldots r) \tag{7,8}$$

Tenslotte, als $\beta_j^{(l)}$ de elementen zijn van de inverse van de matrix $\alpha_j^{(l)}$ (in beide is j de rijen-index), dan geldt:

$$\sum_{l=1}^{r} \beta_j^{(l)} \varepsilon_l(n+2) = \lambda_j \sum_{l=1}^{r} \beta_j^{(l)} \varepsilon_l(n) \qquad (j=1 \ldots r) \tag{7,9}$$

Er zijn dus r lineaire combinaties van $\varepsilon_j(n)$, welke <u>lineair convergeren</u>. Noodzakelijke voorwaarde is, dat $|\lambda_l| < 1$. Voor m = 2 vindt men de formule (5,3) weer terug.