MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

REKENAFDELING

Leiding: Prof. Dr Ir A. van Wijngaarden

OVER EEN ITERATIEMETHODE TER BEPALING VAN WORTELS VAN ALGEBRAISCHE VERGELIJKINGEN

Ir A.J.W. Duijvestijn
en
M.L. Potters.

MR 10.

1 9 5 3 .

OVER EEN ITERATIEMETHODE TER BEPALING VAN WORTELS VAN ALGEBRAISCHE VERGELIJKINGEN.

Inleiding:

Laat $P(x)$ een polynoom zijn van de graad n met nulpunten p_i. Indien de coefficient van x^n gelijk aan 1 is, geldt:

$$P(x)=\prod_{1}^{n}(x-p_i) \qquad p_i \neq p_j \quad i \neq j \tag{1.1}$$

Vervolgens is nog een tweede polynoom $Q(n)$ van de graad m gegeven met nulpunten q_i. Hier is eveneens ondersteld, dat de coefficient van x^m gelijk is aan 1.

Derhalve is:

$$Q(x)=\prod_{1}^{m}(x-q_i) \qquad q_i \neq p_j \tag{1.2}$$

voor alle i's en j 's.

Uit de polynomen $P(x)$ en $Q(x)$ vormt men een nieuw polynoom $R(x)$ met nulpunten r_i:

$$R(x)=\prod_{1}^{M}(x-r_i)=P(x)+\varepsilon\, Q(x)$$

waarin $M = \max(m,n)$ als $\varepsilon \neq -1$.

In het volgende zal een iteratieve methode worden aangegeven om die nulpunten r_i van $R(x)$ te vinden, die voor $\varepsilon \longrightarrow 0$ in de buurt liggen van de nulpunten p_i van $P(x)$.

Tevens zullen de omstandigheden worden beschouwd, waaronder het proces convergeert.

Iteratieschema:

De nulpunten van $R(x)$ voldoen aan de vergelijking

$$R(x)=P(x)+\varepsilon\, Q(x)=0$$

of aan:

$$\prod_{i=1}^{n}(x-p_i)+\varepsilon\prod_{1}^{m}(x-q_i)=0.$$

Deze vergelijking is als volgt te schrijven:

$$(x-p_l)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n}(x-p_i)+\varepsilon\prod_{1}^{m}(x-q_i)=0$$

of

$$x-p_l=-\varepsilon\frac{\prod_{1}^{m}(x-q_i)}{\prod_{1,\ i\neq l}^{n}(x-p_i)}$$

Stel vervolgens:

$$x=\psi(x)=p_l-\varepsilon\frac{\prod_{i=1}^{m}(x-q_i)}{\prod_{i=1,\ i\neq l}^{n}(x-p_i)} \tag{2.1}$$

Men kiest nu het volgende iteratieproces:

$$x_n = \psi(x_{n-1}).$$

Convergentievoorwaarden:

Er gold

$$x = \psi(x) = p_1 - \varepsilon \frac{\prod_{i=1}^{m} (x-q_i)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{n} (x-p_i)} \qquad \text{voor } x = r_i.$$

Om de convergentie te beschouwen dient nu een ε omgeving aangegeven te worden, waarvoor $x(\varepsilon)$ regulier is. Het is immers de bedoeling de omgeving van de oplossing van

$$x - \psi(x) = 0$$

te beschouwen.

Indien men nu

$$\varepsilon = z$$

en

$$x - p_1 = w$$

stelt, gaat

$$x - \psi(x)$$

over in:

$$\varphi(w,z) = (w+p_1) - p_1 + z \frac{\prod_{i=1}^{m} (w+p_1-q_i)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{n} (w+p_1-p_i)} \qquad (3.1)$$

Men kan nu opmerken, dat: $\varphi(0,0) = 0$. Verder is $\varphi(w,z)$ in w en in z analytisch. Bovendien zijn de beide partiele afgeleiden in de omgeving van $w = 0$ en $z = 0$ ongelijk aan nul.

Volgens Bieberbach bestaat dan een oplossing $w(z)$, die in $z = 0$ verdwijnt en in de omgeving van $z = 0$ analytisch is. Kies nu $\varepsilon = z$ in deze omgeving.

Vervolgens dient te worden opgemerkt, dat $\psi(x)$ in de omgeving van $x = p_1$ analytisch is in x. Derhalve bestaat in die omgeving $\psi'(x)$.

Volgens Darboux geldt:

$$|x - x_n| = |\psi(x) - \psi(x_{n-1})| \leq |\text{supremum } \psi'(\xi_{n-1})| \, |x - x_{n-1}|$$

$$\xi_{n-1} \in \overline{x\, x_{n-1}} \qquad (3.2)$$

Dus ξ_{n-1} is een element van lijnstuk $x\, x_{n-1}$.

Indien men nu het product vormt van linker- en rechterleden voor iedere n , verkrijgt men:

$$|x - x_n| \leq |x - x_o| \prod_{k=1}^{n} \text{supremum } \psi'(\xi_k) \quad \xi_k \in \overline{x - x_k}$$

Voor convergentie is dus voldoende, dat $|\psi'(\xi_k)| < 1$.

Nu is

$$\psi'(x) = \varepsilon \frac{\prod_{i=1}^{m}(x-q_i)}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{n}(x-p_i)} \left\{ \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{n} \left(\frac{1}{x-p_i}\right) - \sum_{1}^{m} \frac{1}{(x-q_i)} \right\} \qquad (3.3)$$

Om de $\psi'(x)$ te schatten in de omgeving van $x = p_1$, worden de volgende veronderstellingen gemaakt:

In de omgeving van $x-p_1$ zij

$$|x - p_i| > A \qquad \text{voor elke i.}$$

Verder zij voor elke i

$$C < |x - q_i| < B$$

dan is

$$\psi'(x) \leq \varepsilon \frac{B^m}{A^n} \left\{ \frac{n-1}{A^{n-1}} + \frac{m}{C^m} \right\} = \varepsilon B^m \left\{ \frac{n-1C^m + mA^{n-1}}{A^{2n-1}\ C^m} \right\}$$

in de omgeving van x = pl.

Voor convergentie is dus voldoende als voldaan is aan:

$$\varepsilon < \frac{B^m\{n-1C^m + m\ A^{n-1}\}}{A^{2n-1}\ C^m} \qquad (3.4)$$

Hulpiteratie:

Als men twee iteraties uitgevoerd heeft, kan men nog een tussenstap doen, die sneller naar het resultaat voert. De eerste schatting was x_o. Hieruit volgde een x_1. Deze gaf op zijn beurt x_2.

$$x_o \rightarrow x_1$$

$$x_1 \rightarrow x_2.$$

Men vindt dan volgens Hartree:

$$\frac{x^* - x_2}{x^* - x_1} = \frac{x^* - x_1}{x^* - x_o} \qquad (4.1)$$

Men kan aantonen dat dit een "tweede" orde proces is.

Voorbeeld:

Zij n = 18 en m= 16. $\varepsilon = 2,35397.10^{-7}$.

de wortels p_i	de wortels q_i
$\pm$ 0,503615	$\pm$ 3,37048i (2x)
$\pm$ 0,426579 + i 0,476072 en $\pm$ 0,426579-i 0,476072	$\pm$ 1,90020i (2x)
$\pm$ 0,268643 + i 0,803448 en $\pm$ 0,268643-i 0,803448	$\pm$ 1,50000i (2x)
$\pm$ 0,126801 + i 0,975814 en $\pm$ 0,126801-i 0,975814	$\pm$ 1,37026i (2x)
$\pm$ 0,0222782+ i 1,045506 en $\pm$ 0,0222782-i 1,045506.	

Men kan nu de polynomen $P(x)$ en $Q(x)$ vormen.
Men stelt hierin $x^2 = y$.

Als beginschatting werd genomen:

$$x_0 = - 0,426579 + i\ 0,476072.$$

Derhalve

$$\begin{aligned} y_0 &= - 0,04467491 + i\ 0,40616463 \\ y_1 &= - 0,05617247 + i\ 0,38356578 \\ y_2^* &= - 0,05781654 + i\ 0,38062092 \\ y_2 &= - 0,05808857 + i\ 0,38018082 \\ y_3 &= - 0,05810669 + i\ 0,38015247 \\ y_4 &= - 0,05810944 + i\ 0,38014853 \\ y_4^* &= - 0,05810993 + i\ 0,38014790 \\ y_5 &= - 0,05810993 + i\ 0,38014790 \end{aligned}$$

Hieruit volgt voor $x = - 0,404013 + i\ 0,470464$.

Literatuur.

Bieberbach, Funktionentheorie, p.192.
Hartree, Proceedings Cambridge Society, Vol.45, 1949, blz.230.
Handelingen, 33ste Natuur- en Geneeskundig Congres te Leiden, W.v. Luxemburg.