stichting
mathematisch
centrum

AFDELING NUMERIEKE WISKUNDE NN 10/77 MAART

F.J. RECKERS

KWADRATUURMETHODEN VOOR HET NUMERIEK OPLOSSEN VAN LINEAIRE VOLTERRA INTEGRAALVERGELIJKINGEN VAN DE EERSTE EN TWEEDE SOORT

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O).

AMS(MOS) subject classification scheme (1970): 45L10, 65R05

Kwadratuurmethoden voor het numeriek oplossen van lineaire Volterra integraalvergelijkingen van de eerste en tweede soort

door

F.J. Reckers

SAMENVATTING

Dit stageverslag handelt over numerieke oplossingsmethoden voor lineaire integraalvergelijkingen van de vorm:

$$g(t) = \alpha . f(t) + \int_0^t K(t-s) f(s) ds, \quad 0 \le t \le T, \qquad \alpha = 0 \text{ of } 1. \tag{0.1}$$

Achtereenvolgens komen toepassingen van trapeziumregel, midpointregel, produktintegratie en Gauss-Legendre-integratie aan de orde.

TREFWOORDEN: *Volterra integraalvergelijkingen*

VOORWOORD

Dit rapport beschrijft enige methoden voor het oplossen van een klasse van integraalvergelijkingen. De numerieke resultaten zijn verkregen door het testen op de Control Data Cyber 73/2 computer van de SARA.

De schrijver wil zijn dank betuigen aan dr.ir. H.J.J. te Riele voor zijn begeleiding tijdens de stage en de vele suggesties voor dit rapport, en aan prof.dr. P.J. van der Houwen voor de begeleiding tijdens de stage.

0. INLEIDING

Dit stageverslag handelt over numerieke oplossingsmethoden voor lineaire integraalvergelijkingen van de vorm:

$$(0.1)\qquad g(t) = \alpha.f(t) + \int_0^t K(t-s)f(s)ds, \quad 0 \le t \le T, \qquad \alpha = 0 \text{ of } 1.$$

De functies $g(t)$ en $K(t-s)$ zijn bekend voor $0 \le t \le T$, resp. $0 \le s \le t \le T$; de functie $f(t)$ wordt gezocht voor $0 \le t \le T$. Steeds is verondersteld dat de functies voldoende vaak differentieerbaar zijn.

In het geval $\alpha = 0$ heet (0.1) een Volterra integraalvergelijking van de eerste soort, als $\alpha = 1$ is (0.1) een Volterra integraalvergelijking van de tweede soort.

Achtereenvolgens komen toepassingen van trapeziumregel, midpointregel, produktintegratie en Gauss-Legendre-integratie aan de orde.

1. TRAPEZIUMREGEL, SMOOTHING, EXTRAPOLATIE

Een benadering van de oplossing van vergelijking (0.1) verkrijgen we met behulp van de herhaalde trapeziumregel. Deze heeft de vorm

$$(1.1)\qquad \int_{t_0}^{t_N} y(s)ds = \frac{h}{2}\,(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{N-1}+y_N) - \frac{Nh^3}{12}\,y''(\xi),$$

waarbij $t_i = ih$, $y_i = y(t_i)$ voor $i = 0,1,\ldots,N$, en $t_0 \le \xi \le t_N$.
Zij $h = T/N$, $t_i = ih$, $K_i = K(t_i)$, $f_i = f(t_i)$, $g_i = g(t_i)$ voor $i = 0,1,\ldots,N$.
Toepassing van (1.1) op (0.1) leidt tot de relaties

$$(1.2)\qquad g_i = \frac{h}{2}\,(K_if_0+2K_{i-1}f_1+2K_{i-2}f_2+\ldots+2K_1f_{i-1}+K_0f_i) + \alpha f_i,$$

voor $i = 1,2,\ldots,N$. Met de definitie $g_i^* = 2g_i/h - K_if_0$ kunnen we stelsel (1.2) schrijven als

$$
(1.3)\qquad
\begin{aligned}
g_1^* &= (K_0+\tfrac{2\alpha}{h})\, f_1\\
g_2^* &= 2K_1\, f_1 + (K_0+\tfrac{2\alpha}{h}) f_2\\
g_3^* &= 2K_2\, f_1 + 2K_1 f_2 + (K_0+\tfrac{2\alpha}{h}) f_3\\
&\vdots\\
g_N^* &= 2K_{N-1} f_1 + 2K_{N-2} f_2 + \dots + (K_0+\tfrac{2\alpha}{h}) f_N.
\end{aligned}
$$

Dit is equivalent met

$$
(1.4)\qquad
\begin{pmatrix} g_1^* \\ g_2^* \\ g_3^* \\ \vdots \\ g_N^* \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
(K_0+\frac{2\alpha}{h}) & & & \bigcirc \\
2K_1 & (K_0+\frac{2\alpha}{h}) & & \\
2K_2 & 2K_1 & (K_0+\frac{2\alpha}{h}) & \\
\vdots & \vdots & & \ddots \\
2K_{N-1} & 2K_{N-2} & --- & (K_0+\frac{2\alpha}{h})
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix},
$$

in matrix notatie $g = Kf$, met K een onderdriehoeksmatrix. Als de diagonaal-elementen ongelijk aan 0 zijn, dan is de matrix K niet singulier, zodat het stelsel een unieke oplossing heeft.

Vooraf moet de waarde f_0 berekend zijn. Indien $\alpha = 1$ (vergelijking van de tweede soort), dan geldt $f_0 = g_0$. In het geval $\alpha = 0$ (vergelijking van de eerste soort) gaat (0.1) bij differentiatie van linker- en rechterlid naar t over in

$$
(1.5)\qquad g'(t) = K(0)f(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}[K(t-s)].f(s)ds.
$$

Substitutie van $t = 0$ geeft $g'(0) = K(0)f(0)$. Als $K(0) \neq 0$, dan geldt $f(0) = g'(0)/K(0)$.

Wanneer $\alpha = 0$ en $K(0) = 0$, dan is de matrix K in (1.3) singulier en bovendien is f_0 dan niet met behulp van formule (1.5) te berekenen. Na herhaald differentieren van linker- en rechterlid tot voor zekere r $K^{(r)}(0) \neq 0$, ontstaat de vergelijking

$$
(1.6)\qquad g^{(r)}(t) = \int_0^t \frac{\partial^r}{\partial t^r}[K(t-s)].f(s)ds,
$$

die wel met deze methode oplosbaar is. Een algoritme voor het oplossen van (1.4) is

$$\text{(1.7)}\qquad \begin{aligned}&\text{Voor } i = 1,2,\dots,N\\ &s = 2*\sum_{j=1}^{i-1} K_{i-j}f_j\\ &f_i = (g_i^*-s)/(K_0+\tfrac{2\alpha}{h}).\end{aligned}$$

Uit het bovenstaande blijkt dat de trapeziumregel geschikt is om toe te passen, als de functiewaarden van g en K in de punten t_i berekend kunnen worden. In dat geval kan $g'(0)$ door numeriek differentieren bepaald worden, bijvoorbeeld met een van Newton's formules met voorwaartse differenties:

$$\text{(1.8)}\qquad \begin{aligned}&\text{a)}\quad g'(0) = \frac{1}{h}\,(\Delta g_0-\tfrac{1}{2}\Delta^2 g_0) + O(h^2);\\ &\text{b)}\quad g'(0) = \frac{1}{h}\,(\Delta g_0-\tfrac{1}{2}\Delta^2 g_0+\tfrac{1}{3}\Delta^3 g_0) + O(h^3).\end{aligned}$$

JONES [1] onderzocht de convergentie van het beschreven proces. Hij bewees dat, zowel voor vergelijkingen van de eerste soort ($\alpha=0$) met $K(0) \neq 0$ als voor vergelijkingen van de tweede soort ($\alpha\neq0$), voor elke waarde van t de fout in de berekende waarde $\tilde{f}(t)$ van de oplossing in t van de orde h^2 is. Bovendien vormen in het eerste geval de fouten E_i in $\tilde{f}(t_i)$ een oscillerende rij, en ze zijn in het algemeen voor twee opeenvolgende waarden van i tegengesteld van teken.

Jones stelde het volgende *smoothing* proces voor om, gebruik makend van dit foutenpatroon, de berekende oplossing te verbeteren.

Stel dat $\tilde{f}_0,\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_N$ de berekende waarden zijn. Vorm hiermee de rij $\tilde{f}_0,\tfrac{1}{4}(\tilde{f}_0+2\tilde{f}_1+\tilde{f}_2),\dots,\tfrac{1}{4}(\tilde{f}_{N-2}+2\tilde{f}_{N-1}+\tilde{f}_N),\tilde{f}_N$. Deze komt in het algemeen beter overeen met de exacte oplossing $f_0,f_1,f_2,\dots,f_N$. De maximale fout wordt zeker kleiner, de oplossing "gladder".

Extrapolatie in de even punten is een tweede methode om de oplossing te verbeteren.

Stel, $f_0^{(1)},f_1^{(1)},f_2^{(1)},\dots,f_{2N}^{(1)}$ is de oplossing, berekend met staplengte h, en $f_0^{(2)},f_2^{(2)},f_4^{(2)},\dots,f_{2N}^{(2)}$ is de oplossing, berekend met staplengte 2h. De bijbehorende afbreekfouten E_1 en E_2 zijn [2,p.166]

$E_1 = ch^2 + O(h^3)$, $E_2 = c(2h)^2 + O(h^3)$, $(c \in \mathbb{R})$, zodat $E_2 - 4E_1 = O(h^3)$. De afbreekfouten in de rij $\tilde{f}_{2i} = (4f_{2i}^{(1)} - f_{2i}^{(2)})/3$ $(i = 1,2,\ldots,N)$ zijn dus van de orde h^3.

VOORBEELD

$$(1.9) \qquad \cos t = \int_0^t \{-\sin(t-s)\}.f(s)ds, \qquad 0 \le t \le 2.$$

Daar in (0.1) in dit geval $K(0) = -\sin(0) = 0$ en $\alpha = 0$, is de trapeziumregel niet direct toepasbaar. Na differentiatie van linker- en rechterlid gaat (1.9) over in

$$(1.10) \qquad \sin t = \int_0^t \cos(t-s)f(s)ds, \qquad 0 \le t \le 2.$$

Resultaten voor (1.10)

trapeziumregel			trapeziumregel + smoothing		
h	max.rel.fout onevenpunten	max.rel.fout evenpunten	h	max.rel.fout onevenpunten	max.re.fout evenpunten
1/10	$1.634\ 10^{-3}$	$2.990\ 10^{-5}$	1/10	$8.322\ 10^{-4}$	$8.322\ 10^{-4}$
1/20	$4.146\ 10^{-4}$	$1.873\ 10^{-6}$	1/20	$2.083\ 10^{-4}$	$2.083\ 10^{-4}$
1/40	$1.040\ 10^{-4}$	$1.172\ 10^{-7}$	1/40	$5.208\ 10^{-5}$	$5.208\ 10^{-5}$
1/80	$2.603\ 10^{-5}$	$7.351\ 10^{-9}$	1/80	$1.302\ 10^{-5}$	$1.302\ 10^{-5}$

trapeziumregel + extrapolatie		trapeziumregel + smoothing + extrapolatie	
h	max.rel.fout in even punten	h	max.rel.fout in even punten
1/10	$2.014 \; 10^{-3}$	1/10	$3.518 \; 10^{-6}$
1/20	$5.423 \; 10^{-4}$	1/20	$2.890 \; 10^{-7}$
1/40	$1.381 \; 10^{-4}$	1/40	$1.916 \; 10^{-8}$
1/80	$3.467 \; 10^{-5}$	1/80	$1.215 \; 10^{-9}$

De fout heeft een oscillerend karakter. Na smoothing is de fout in alle punten vrijwel gelijk.

Bij de tabel met extrapolatieresultaten zijn de twee randpunten niet meegeteld vanwege de aparte berekening van f(0). Het blijkt, dat smoothen van de oplossing vóór het extrapoleren nuttig is.

2. MIDPOINTREGEL VOOR VERGELIJKINGEN VAN DE EERSTE SOORT

Een variant van de trapeziumregel is de midpointregel, beschreven door de formule

$$\int_{t_0}^{t_N} y(s)ds = h(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+\ldots+y_{N-\frac{3}{2}}+y_{N-\frac{1}{2}}) - \frac{Nh^3}{24}\, y''(\xi), \tag{2.1}$$

waarbij $t_i = ih$, $y_{i+\frac{1}{2}} = y(t_i+\frac{1}{2}h)$ voor $i = 0,1,\ldots,N$, en $t_0 \le \xi \le t_N$. De toepassing van (2.1) op (0.1) leidt tot de vergelijkingen

$$g_i = h(K_{i-\frac{1}{2}}f_{\frac{1}{2}}+K_{i-\frac{3}{2}}f_{\frac{3}{2}}+\ldots+K_{\frac{3}{2}}f_{i-\frac{3}{2}}+K_{\frac{1}{2}}f_{i-\frac{1}{2}}) \tag{2.2}$$

voor $i = 1,2,\ldots,N$, waarbij $h = T/N, K_{j+\frac{1}{2}} = K((j+\frac{1}{2})h), f_{j+\frac{1}{2}} = f((j+\frac{1}{2})h)$ voor $j = 1,2,\ldots,i$ en $g_i = g(ih)$. Uitschrijven van (2.2) levert

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\frac{1}{2}} & & & \bigcirc \\ K_{\frac{3}{2}} & K_{\frac{1}{2}} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ K_{N-\frac{1}{2}} & K_{N-\frac{3}{2}} & \cdots & K_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\frac{1}{2}} \\ f_{\frac{3}{2}} \\ \vdots \\ f_{N-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Het voordeel is, dat een schatting van een waarde van f, zoals bij de trapeziumregel, niet meer nodig is. Ook bij deze methode is de fout in de berekende waarde $\tilde{f}(t)$ van de oplossing in t voor elke waarde van t van de orde h^2. Het ligt voor de hand de oplossing weer te smoothen, wat precies zo gebeurt als bij de trapeziumregel. Voor het extrapoleren passen we de midpointregel toe met staplengten h en h/3. Met de gevonden oplossingen

$$f^{(1)}_{\frac{1}{2}},\ f^{(1)}_{\frac{3}{2}},\ f^{(1)}_{\frac{5}{2}},\ldots,f^{(1)}_{N-\frac{1}{2}} \qquad \text{en}$$

$$f^{(2)}_{\frac{1}{6}},\ f^{(2)}_{\frac{3}{6}},\ f^{(2)}_{\frac{5}{6}},\ldots,f_{N-\frac{3}{6}},f_{N-\frac{1}{6}} \qquad \text{vormen we de rij}$$

$$\tilde{f}\left(\frac{rh}{2}\right) = (9f^{(2)}_{r/2} - f^{(1)}_{r/2})/8 \quad (r = 1,3,5,\ldots), \qquad \text{waardoor de}$$

fout in de punten $\frac{rh}{2}$, $r = 1,3,5,\ldots$ van de orde h^3 wordt [2,pp.166-167]

3. PRODUKTINTEGRATIE VOOR INTEGRAALVERGELIJKINGEN VAN DE EERSTE SOORT

De eerste middelwaardestelling van de integraalrekening geeft (voor continue functies g en f) de relatie

$$(3.1) \qquad \int_a^b f(s)g(s)ds = f(\xi)\int_a^b g(s)ds \text{ voor zekere } \xi,\ a < \xi < b.$$

Zij weer $h = T/N$, $t_i = ih$, $K_i = K(t_i)$, $g_i = g(t_i)$, $f_{i+\frac{1}{2}} = f(t_i+\frac{1}{2}h)$ voor $i = 0,1,\ldots,N$. Toepassing van (3.1) op (0.1) met $\alpha = 0$ leidt tot het schema

$$(3.2) \qquad g(t_i) = \int_0^{t_i} K(t_i-s)f(s)ds = \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(t_i-s)f(s)ds =$$

$$= \sum_{j=0}^{i-1} f(\xi_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(t_i-s)ds, \qquad (i = 1,2,\ldots,N).$$

De functie $K(t-s)$ is bekend, zodat de integralen in het rechterlid van (3.2) berekenbaar zijn. Zij

$$(3.3) \qquad I_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(s)ds, \qquad \text{dan is}$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} K(t_i-s)ds = \int_{t_{i-j-1}}^{t_{i-j}} K(u)du = I_{i-j} ,$$

voor $i = 1,2,\ldots,N$, $j = 0,1,\ldots,i$. Als benadering van ξ_j gebruiken we $t_j + \frac{1}{2}h$ voor alle j. Schema (3.2) gaat nu over in

$$(3.4) \qquad g(t_i) = \sum_{j=0}^{i-1} f_{j+\frac{1}{2}} * I_{i-j} \qquad i = 1,2,\ldots,N,$$

uitgeschreven

$$(3.5) \qquad \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & & \bigcirc \\ I_2 & I_1 & \\ \vdots & & \ddots \\ I_N & I_{N-1} \ldots & I_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\frac{1}{2}} \\ f_{\frac{3}{2}} \\ \vdots \\ f_{N-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

We benaderen K op het interval $[t_{j-1},t_{j+1}]$ door een polynoom p met behulp van een voorwaartse formule van Gauss, zo dat p in de steunpunten t_{j-1}, t_j en t_{j+1} met K samenvalt; in formule [zie 3, pp.44-45]

$$K(s) \simeq p(s)$$

met

$$p(s) = K_j + \frac{s-jh}{h} \Delta K_j + \frac{(s-jh)(s-(j+1)h)}{2h^2} \Delta^2 K_{j-1}$$

voor $s \in [t_{j-1},t_{j+1}]$, zodat $K(s) - p(s) = O(h^3)$ op het betreffende interval. Dan geldt voor de integralen

$$I_j \simeq \int_{t_{j-1}}^{t_j} p(s)ds = \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(s)ds + O(h^4),$$

zodat

$$(3.6) \qquad I_j \simeq \begin{cases} \frac{h}{12}(5K_{j-1}+8K_j-K_{j+1}), & j = 1,2,\ldots,N-1; \\ \frac{h}{12}(5K_N+8K_{N-1}-K_{N-2}), & j = N. \end{cases}$$

Gebruiken we 4 steunpunten $t_{j-2},t_{j-1},t_j,t_{j+1}$ voor de benadering van K(s) op $[t_{j-2},t_{j+1}]$ door een polynoom

$$q(s) = K_{j-1} + \frac{(s-(j-1)h)}{h} \Delta K_{j-1} + \frac{(s-(j-1)h)(s-jh)}{2h^2} \Delta^2 K_{j-1} +$$

$$+ \frac{(s-(j-1)h)(s-jh)(s-(j+1)h)}{6h^3} \Delta^3 K_{j-2}$$

dat in de steunpunten met K(s) samenvalt, dan geldt

$$I_j \simeq \int_{t_{j-1}}^{t_j} q(s)ds = \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(s)ds + O(h^5), \text{ zodat}$$

$$(3.7) \qquad I_j \simeq \begin{cases} \frac{h}{24}(9K_0+19K_1-5K_2+K_3), & j = 1; \\ \frac{h}{24}(-K_{j-2}+13K_{j-1}+13K_j-K_{j+1}), & j = 2,3,\ldots,N-1; \\ \frac{h}{24}(9K_N+19K_{N-1}-5K_{N-2}+K_{N-3}), & j = N. \end{cases}$$

Analoog levert het gebruik van 5 steunpunten $t_{j-2},\ldots,t_{j+2}$ de volgende formules

$$(3.8) \qquad I_j \simeq \begin{cases} \frac{h}{720}(251K_0+646K_1-264K_2+106K_3-19K_4), & j = 1; \\ \frac{h}{720}(-19K_{j-2}+346K_{j-1}+456K_j-74K_{j-1}+11K_{j+2}), & j = 2,\ldots,N-2; \\ \frac{h}{720}(11K_{N-4}-74K_{N-3}+456K_{N-2}+346K_{N-1}-19K_N), & j = N-1; \\ \frac{h}{720}(-19K_{N-4}+106K_{N-3}-264K_{N-2}+646K_{N-1}+251K_N), & j = N. \end{cases}$$

Uit bovenstaande formules blijkt dat de matrix I in (3.5) een norm heeft van grootte orde h. Bij gebruik van k steunpunten voor K is de fout in de elementen van I van orde h^{k+1}; de norm $\|\delta I\|$ van δI, de verstoring in I ten gevolge van de vervanging van K door een polynoom, is van orde h^{k+1}; dan is dus $\|\delta I\|/\|I\|$ van orde h^k. Een bekende formule [2,p.26] voor de bovengrens van de relatieve fout in de oplossing f ten gevolge van de verstoring van de matrixelementen in (3.5) is

$$(3.9) \qquad \frac{\|\delta f\|}{\|f\|} \le \frac{X(I)\frac{\|\delta I\|}{\|I\|}}{1-X(I)\frac{\|\delta I\|}{\|I\|}},$$

waarbij $X(I) = \|I\| \, \|I^{-1}\|$ het conditiegetal van I is. Indien de matrix I niet te slecht geconditioneerd is, is de bovengrens van orde h^k. Produktintegratie is een geschikte methode als de functie K zich "slecht" gedraagt (sterk oscilleert), maar de oplossing f "tam" is (lineair, glad). Deze methode is precieser dan de trapeziumregel en de midpointregel, omdat de integralen van K nauwkeuriger worden uitgerekend. De orde is minstens 2. Hieronder volgt een tabel met resultaten voor het voorbeeld:
vgl. (0,1) met $\alpha = 0$, $g(t) = \sin t$, $K(t-s) = \cos(t-s)$, $T = 2$.

Getabelleerd zijn relatieve fouten.

	Kernpolynoom graad 2		Kernpolynoom graad 3		Kernpolynoom graad 4	
h	gem.	max.	gem.	max.	gem.	max.
1/10	$3.932\ 10^{-5}$,	$7.861\ 10^{-5}$	$1.256\ 10^{-6}$	$2.619\ 10^{-6}$	$7.614\ 10^{-8}$	$2.547\ 10^{-7}$
1/20	$5.064\ 10^{-6}$,	$1.012\ 10^{-5}$	$8.692\ 10^{-8}$	$1.665\ 10^{-7}$	$2.387\ 10^{-9}$	$8.036\ 10^{-9}$
1/40	$6.421\ 10^{-7}$,	$1.284\ 10^{-6}$	$5.700\ 10^{-9}$	$1.157\ 10^{-8}$	$7.476\ 10^{-10}$	$2.505\ 10^{-10}$
1/80	$8.083\ 10^{-8}$,	$1.616\ 10^{-7}$	$3.646\ 10^{-10}$	$7.607\ 10^{-10}$	$2.342\ 10^{-12}$	$7.709\ 10^{-12}$

4. GAUSS-LEGENDRE-INTEGRATIE

In deze paragraaf komt de toepassing van Gauss-Legendre-integratie op de vergelijking

$$(4.1)\qquad g(t) = \alpha.f(t) + \int_0^t K(t-s)f(s)ds, \qquad 0 \le t \le T, \qquad \alpha = 0 \text{ of } 1,$$

aan de orde. De punten waarin de oplossing wordt berekend hoeven hierbij niet equidistant te zijn. Eerst volgt nu een korte bespreking van Lagrange-interpolatie, eigenschappen van Lagrange-functies, en Gauss-Legendre-integratie; daarna de toepassing op vergelijking (4.1).

Lagrange's formule voor een polynoom $\tilde{f}(s)$, dat in steunpunten $s_1, s_2, \ldots, s_m$ met een gegeven functie f(s) samenvalt, is

$$(4.2)\qquad \tilde{f}(s) = \sum_{i=1}^{m} L_i^m(s)f(s_i),$$

waarbij

$$L_i^m(s) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} [(s-s_j)/(s_i-s_j)], \qquad \text{voor } i = 1,2,\ldots,m.$$

Twee eigenschappen van de Lagrange-functies L_i^m zijn hier van belang.

1) $L_i^m(s_j) = 0$ als $i \neq j$, $L_i^m(s_i) = 1$, $(i,j = 1,2,\ldots,m)$;
2) De Lagrange-functies zijn invariant onder lineaire transformaties, d.w.z. als de steunpunten s_i en het punt s vervangen worden door $s_i' = as_i + b$, resp. $s' = as + b$, dan geldt:
   $L_i^m(s')$ op de steunpunten s_i' is gelijk aan $L_i^m(s)$ op de steunpunten s_i.

De Gauss-Legendre-formule voor het berekenen van de integraal van een functie y(s) over het interval [a,b] is

$$(4.3)\qquad \int_a^b y(s)ds \simeq \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{m} A_i y(s_i),$$

waarbij $s_i \in [a,b]$ voor alle i. De gewichten $A_1, A_2, \ldots, A_m$ worden gegeven door

$$(4.4)\qquad A_i = \int_{-1}^{1} L_i^m(s)ds, \qquad i = 1,2,\ldots,m.$$

In (4.4) is L_i^m gegeven op de lineair naar [-1,1] getransformeerde steunpunten $s_i \in [a,b]$. Kiezen we hiervoor de m nulpunten van het Legendre-polynoom van graad m in [-1,1], dan is de afbreekfout in (4.3) een (zeer klein) veelvoud van $y^{(2m)}(\xi)$ voor zekere $\xi \in [a,b]$. Tabellen van de nulpunten van Legendre-polynomen en de bijbehorende gewichten, zijn voor verschillende waarden van m, in 15 cijfers nauwkeurig, te vinden in [4, pp.916-919]. We keren nu terug tot de integraalvergelijking (4.1).

Zij $N \in \mathbb{N}$, $t_N = Nh = T$, $0 < u_1 < \ldots < u_m \leq h$, $t_i = ih$, $t_{ij} = t_i + u_j$ voor $i = 0,1,\ldots,N$, $j = 1,2,\ldots,m$. De intervallen $[t_i,t_{i+1}]$ noemen we nu blokken, de punten t_{ij} roosterpunten. Op het blok $[t_i,t_{i+1}]$ stellen we f voor door een polynoom van de vorm (4.2), dat met f samenvalt in de roosterpunten t_{ij}. We berekenen f achtereenvolgens in de blokken $[t_0,t_1],\ldots,[t_{N-1},t_N]$ alsvolgt. Indien de oplossing in de blokken $[t_k,t_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots,i-1$ berekend is, kunnen we de waarden $f(t_{ij})$ $(j = 1,\ldots,m)$ verkrijgen door het oplossen van m vergelijkingen in deze onbekenden.

In de punten t_{ij} $(i = 0,\ldots,N-1;\ j = 1,\ldots,m)$ geldt

$$(4.5)\qquad g(t_{ij}) = \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} K(t_{ij}-s)f(s)ds + \int_{t_i}^{t_{ij}} K(t_{ij}-s)f(s)ds + \alpha f(t_{ij}).$$

Toepassing van (4.2) en (4.3) op (4.5) geeft

$$(4.6)\qquad \begin{aligned} g(t_{ij}) = {} & \sum_{k=0}^{i-1} \left[\frac{h}{2} \sum_{\ell=1}^{m} A_\ell K(t_{ij}-t_{k\ell}) \left\{ \sum_{i=1}^{m} L_i^m(t_{k\ell}) f(t_{k\ell}) \right\}\right] + \\ & \frac{u_j}{2} \sum_{\ell=1}^{m} \left[A_\ell K(t_{ij}-(t_i+u_ju_\ell/h)) \left\{ \sum_{k=1}^{m} L_k^m((t_i+u_ju_\ell/h) f(t_{ik}) \right\}\right] \\ & + \alpha \sum_{k=1}^{m} L_k^m(t_{ij}) f(t_{ik}). \end{aligned}$$

Toepassing van de genoemde twee eigenschappen van de Lagrange-functies geeft

$$(4.7)\qquad \begin{aligned} g(t_{ij}) = {} & \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{\ell=1}^{m} A_\ell K(t_{ij}-t_{k\ell}) f(t_{k\ell}) + \\ & \sum_{k=1}^{m} f(t_{ik}) \left[\frac{u_j}{2} \sum_{\ell=1}^{m} A_\ell K(u_j-u_ju_\ell/h) L_k^m(u_ju_\ell/h)\right] + \alpha f(t_{ij}). \end{aligned}$$

Definiëren we nu

$$\left(b^{(i)}\right)_j = g(t_{ij}) - \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{\ell=1}^{m} A_\ell K(t_{ij}-t_{k\ell})f(t_{k\ell}),$$

(4.8) $$(S)_{jk} = \frac{u_j}{2}\sum_{\ell=1}^{m} A_\ell K(u_j-u_ju_\ell/h)L_k^m(u_ju_\ell/h),$$

$$\left(f^{(i)}\right)_j = f(t_{ij}),$$

voor $i = 0,1,\ldots,N-1$; $k,j = 1,2,\ldots,m$, dan komt schema (4.7) in matrixnotatie overeen met

(4.9) $$b^{(i)} = (\alpha I+S)f^{(i)}, \qquad i = 0,1,\ldots,N-1.$$

De matrix $\alpha I + S$ hangt niet van i af. We hoeven hem dus maar één keer te berekenen. Indien hij niet singulier is inverteren we hem; we kunnen dan $f^{(i)}$ eenvoudig met een matrix-vector vermenigvuldiging bepalen als $f^{(0)},f^{(1)},\ldots,f^{(i-1)}$ bekend zijn:

(4.10) $$f^{(i)} = (\alpha I+S)^{-1}b^{(i)}.$$

De afbreekfout in (4.3) is, als de steunpunten en bijbehorende gewichten zijn gekozen zoals onder (4.4) is aangegeven, van de vorm [2,p.14]

(4.11) $$E_1 = c_1(b-a)^{2m+1}f^{(2m)}(\xi),$$

waarbij c_1 van m afhangt, maar niet van a en b. Indien het interval [a,b] wordt onderverdeeld in blokken met lengte h, en we de formule op elk blok toepassen, dan wordt de afbreekfout

(4.12) $$E_2 = c_2(b-a)h^{2m}f^{(2m)}(\xi).$$

Bij de implementatie is, om rechtsgesloten formules te krijgen, de volgende keuze gedaan voor $u_1,u_2,\ldots,u_m$:

$$(4.13)\quad \begin{cases} u_j = h(s_j+1)/2, & j = 1,2,\ldots,m-1; \\ u_m = 1 & , \end{cases}$$

waarin de punten s_j de nulpunten zijn van het Legendre-polynoom van graad m-1. De bijbehorende gewichten zijn:

$$(4.14)\quad \begin{cases} A_j = \int_{-1}^{1} L_j^{m-1}(s)ds, & j = 1,2,\ldots,m-1; \\ A_m = 0, \end{cases}$$

met $L_j^{m-1}(s)$ op steunpunten $s_1,s_2,\ldots,s_{m-1}$.

De Hoog en Weiss tonen aan, dat de orde van convergentie van dit proces gelijk aan m is.

Voor de volledigheid geven we hier nog het numerieke schema voor de *algemene* lineaire vorm van vergelijking (0.1),

$$(4.15)\quad g(t) = \int_0^t K(t,s)f(s)ds + \alpha f(t), \qquad 0 \le t \le T, \qquad \alpha = 0 \text{ of } 1,$$

namelijk, voor $i = 0,1,\ldots,N-1$; $j = 1,2,\ldots,m$:

$$(4.16)\quad g(t_{ij}) = \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{\ell=1}^{m} A_\ell K(t_{ij},t_{k\ell})f(t_{k\ell}) +$$

$$\sum_{k=1}^{m} f(t_{ik})\left[\frac{u_j}{2}\sum_{\ell=1}^{m} A_\ell K(t_{ij},t_i+u_ju_\ell/h)L_k^m(t_i+u_ju_\ell/h)\right]$$

$$+ \alpha f(t_{ij}).$$

Definieren we nu

$$(4.17)\quad \begin{aligned} \left(b^{(i)}\right)_j &= g(t_{ij}) - \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{\ell=1}^{m} A_\ell K(t_{ij},t_{k\ell})f(t_{k\ell}), \\ \left(S^{(i)}\right)_{jk} &= \frac{u_j}{2}\sum_{\ell=1}^{m} A_\ell K(t_{ij},t_i+u_ju_\ell/h)L_k^m(t_i+u_ju_\ell/h), \\ \left(f^{(i)}\right)_j &= f(t_{ij}) \end{aligned}$$

voor $i = 0,1,\ldots,N-1$; $k,j = 1,2,\ldots,m$, dan wordt schema (4.16) in matrix notatie beschreven door

$$b^{(i)} = (\alpha I+S^{(i)})\ f^{(i)}, \qquad i = 0,1,\ldots,N-1. \tag{4.18}$$

Het belangrijke verschil met de schema's (4.7) en (4.8) is, dat de matrix van het stelsel nu van i afhangt, zodat hij N maal in plaats van één maal berekend en geïnverteerd moet worden.

De hier beschreven methode is afkomstig van de HOOG en WEISS [5]. Zij spreken zich echter niet uit over de lokatie van de roosterpunten in de blokken. In de numerieke voorbeelden die ze geven, [5,p.31] en [2,p.173] kiezen ze deze punten equidistant. De keuze van de roosterpunten, zoals boven beschreven, geeft betere resultaten.

VOORBEELDEN

1) $e^{-t} + t - 1 = \int_0^t (1+t-s)f(s)ds,\ 0 \le t \le 6.$

<u>m = 3</u>: getabelleerd zijn absolute fouten

t	h = .4	h = .2	h = .1
2	$8.926\ 10^{-5}$	$9.197\ 10^{-6}$	$1.041\ 10^{-6}$
4	$7.893\ 10^{-6}$	$1.007\ 10^{-6}$	$1.267\ 10^{-7}$
6	$3.830\ 10^{-6}$	$4.447\ 10^{-7}$	$5.358\ 10^{-8}$

2) $\frac{1}{2}t + \frac{4}{5}t^5 = \int_0^t (\frac{1}{2} + t^4 - s^4) f(s)ds,\ 0 \le t \le 1.5$

	m = 3;	m = 4
t	h = .15	h = .15
.3	2.497 10^{-5}	2.274 10^{-13}
.6	2.058 10^{-5}	2.274 10^{-13}
.9	1.340 10^{-5}	9.095 10^{-13}
1.2	1.412 10^{-5}	9.095 10^{-13}
1.5	1.223 10^{-5}	1.705 10^{-12}

Kort geleden heeft R. SMARZEWSKI [6] aangetoond, dat optimale nauwkeurigheid bereikt kan worden door de punten $u_1, u_2, \ldots, u_m$ gelijk te kiezen aan de nulpunten van het m^e orde Jacobi-polynoom in het interval [0,1].

LITERATUUR

[1] JONES, G., *On the numerical solution of convolution integral equations and systems of such equations*, Math. Comp., 15 (1961), pp. 131-142.

[2] DELVES, L.M. & J. WALSH (eds.), *Numerical solution of integral equations*, Clarendon Press, Oxford, 1974.

[3] SCHEID, F., *Theory and problems of numerical analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.

[4] ABRAMOWITCH M. & J.A. STEGUN (eds.), *Handbook of Mathematical functions*, NBS, Washington.

[5] HOOG DE F. & R. WEISS, *On the solution of Volterra equations of the first kind*, Numer. Math., 21 (1973), pp. 22-32.

[6] SMARZEWSKI, R., *A method for solving the Volterra integral equation of the first kind*, Zastosowania Matematyki, 15 (1976), pp. 117-123.