stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING NUMERIEKE WISKUNDE NN 19/79 JUNI

H. WOLFF

MULTI-GRID TECHNIEK VOOR HET OPLOSSEN VAN FREDHOLM-INTEGRAALVERGELIJKINGEN VAN DE TWEEDE SOORT

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O).

Multi-grid techniek voor het oplossen van Fredholm-integraalvergelijkingen van de tweede soort*)

door

H. Wolff

ABSTRACT

In dit verslag wordt een numerieke methode voor het oplossen van Fredholm-integraalvergelijkingen van de tweede soort behandeld. Voor de discretisering wordt een collocatie-methode gebruikt, waarbij de benaderde oplossing een stuksgewijs cubisch Hermite-polynoom is, en de collocatie op Gauss-punten plaatsvindt.

Speciale aandacht wordt besteed aan het oplossen van het verkregen stelsel algebraïsche vergelijkingen met behulp van een multi-grid methode.

KEYWORDS & PHRASES: *Fredholm-integraalvergelijkingen van de tweede soort, collocatie-methode, multi-grid techniek.*

---
*) Stage-verslag

1. INLEIDING

In dit verslag wordt een collocatie-methode toegepast voor het benaderen van de oplossing van een Fredholm-integraalvergelijking van de tweede soort:

$$\lambda f(x) - \int_a^b k(x,y)f(y)dy = g(x), \qquad a \le x \le b.$$

Deze collocatie-methode is gebaseerd op interpolatie met stuksgewijs cubische polynomen, met continue eerste afgeleide, met Gauss-punten en eindpunten als collocatiepunten.

Het doel van het onderzoek is, het hierdoor ontstane stelsel vergelijkingen op te lossen met behulp van een multi-grid techniek, en de resultaten te vergelijken met die van een direkte oplossingsmethode. De verwachting is dat hiermee een proces van $\mathcal{O}(n^3)$ bewerkingen kan worden teruggebracht tot een $\mathcal{O}(n^2)$ proces.

2. EEN COLLOCATIE-METHODE VOOR FREDHOLM-INTEGRAALVERGELIJKINGEN VAN DE TWEEDE SOORT

In dit hoofdstuk geven we de elementen van de gebruikte expansiemethode. Door toepassing van collocatie op Gauss- en eindpunten reduceert de integraalvergelijking tot een stelsel algebraïsche vergelijkingen, dat in Sectie 2.2 wordt afgeleid. Voor analyse van foutschattingen en een afleiding van de orde van convergentie verwijzen we naar SCHULTZ [2] en HOUSTIS [1].

2.1. Stuksgewijs cubische Hermite interpolatie in de Gauss-punten

Zij $E[a,b]$ de ruimte der reële functies op $[a,b]$ en Δ_N een equidistante partitie van $[a,b]$, d.w.z.

$$\Delta_N = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N = b\}, \quad x_{i+1} = x_i + h, \quad h = (b-a)/N.$$

De ruimte van stuksgewijs, continu differentieerbare cubische polynomen t.o.v. Δ_N, noemen we $M^{1,3}(\Delta_N)$. We willen nu $f \in E[a,b]$ benaderen door $\tilde{f} \in M^{1,3}(\Delta_N)$. Aangezien een derdegraads polynoom op een gesloten interval geheel wordt vastgelegd door de waarden van de functie en zijn afgeleide in de eindpunten, kiezen we als basis voor de ruimte $M^{1,3}(\Delta_N)$ de volgende 2N+2 functies:

$$\phi_{2i}(x) = \Phi\left(\frac{x-x_i}{h}\right),$$

$$\phi_{2i+1}(x) = h\Psi\left(\frac{x-x_i}{h}\right), \qquad i = 0,1,\ldots,N,$$

waarbij

$$\Phi(x) = \begin{cases} (1-x)^2(1+2x), & 0 \le x \le 1 \\ (1+x)^2(1-2x), & -1 \le x \le 0 \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

en

$$\Psi(x) = \begin{cases} x(1-x)^2, & 0 \le x \le 1 \\ x(1+x)^2, & -1 \le x \le 0 \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

want deze functies (elementen van de expansie-methode) hebben de volgende eigenschap:

$$\phi_{2i}(x_j) = \delta_{ij}, \qquad \phi_{2i+1}(x_j) = 0,$$

$$\phi'_{2i}(x_j) = 0, \qquad \phi'_{2i+1}(x_j) = \delta_{ij}, \qquad i,j = 0,1,\ldots,N.$$

We zoeken een benadering $\tilde{f} \in M^{1,3}(\Delta_N)$ voor $f \in E[a,b]$ van de volgende vorm:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{N} \{a_i\, \phi_{2i}(x) + b_i\, \phi_{2i+1}(x)\}. \tag{2.1}$$

De Gauss-punten in het subinterval $[x_i, x_{i+1}]$ zijn

$$\xi_{2i+k} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{(-1)^k}{\sqrt{3}} \cdot \frac{h}{2}, \qquad k = 1,2. \tag{2.2}$$

We introduceren de interpolatie-operator Q_N: $E[a,b] \to M^{1,3}(\Delta_N)$ zó dat

$$(2.3) \qquad (Q_N f)(\sigma_\ell) = f(\sigma_\ell), \qquad \ell = 0,1,\ldots,2N+1,$$

waarbij $\sigma_0 = a$, $\sigma_\ell = \xi_{2i+k}$, $i = 0,1,\ldots,N-1$, $k = 1,2$, $\sigma_{2N+1} = b$. Hiermee is $Q_N f$ één-duidig bepaald ([1]).

2.2. Collocatie

Beschouw de volgende integraalvergelijking:

$$(2.4) \qquad \lambda f(x) - \int_a^b k(x,y) f(y)\,dy = g(x), \qquad a \le x,y \le b.$$

Hierin is $k(x,y)$ een reguliere kern; λ is een constante ($\neq 0$) en geen eigenwaarde van de operator K, gedefinieerd door

$$(Kf)(x) := \int_a^b k(x,y) f(y)\,dy.$$

Dan heeft vergelijking (2.4) een unieke oplossing. We benaderen f door $\tilde{f} \in M^{1,3}(\Delta_N)$,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{N} \{a_i \phi_{2i}(x) + b_i \phi_{2i+1}(x)\},$$

zodanig dat

$$(2.5) \qquad (\lambda I - Q_N K)\tilde{f} = Q_N g.$$

Voor voldoend grote N is vergelijking (2.5) uniek oplosbaar ([1]). Volgens de definitie van Q_N is deze $\tilde{f}$ geheel bepaald door het stelsel lineaire algebraïsche vergelijkingen

$$(2.6) \qquad \lambda \tilde{f}(\sigma_\ell) - \int_a^b k(\sigma_\ell, y)\tilde{f}(y)\,dy = g(\sigma_\ell), \qquad \ell = 0,1,\ldots,2N+1.$$

Zij nu $\vec{u} = (a_0,b_0,a_1,b_1,\ldots,a_N,b_N)^T$, dan gaat (2.6) over in:

$$(\lambda B - A)\vec{u} = \vec{g}, \tag{2.7}$$

$$B = (\beta_{ij}), \quad A = (\alpha_{ij}),$$

waarbij

$$\beta_{ij} = \phi_j(\sigma_i),$$

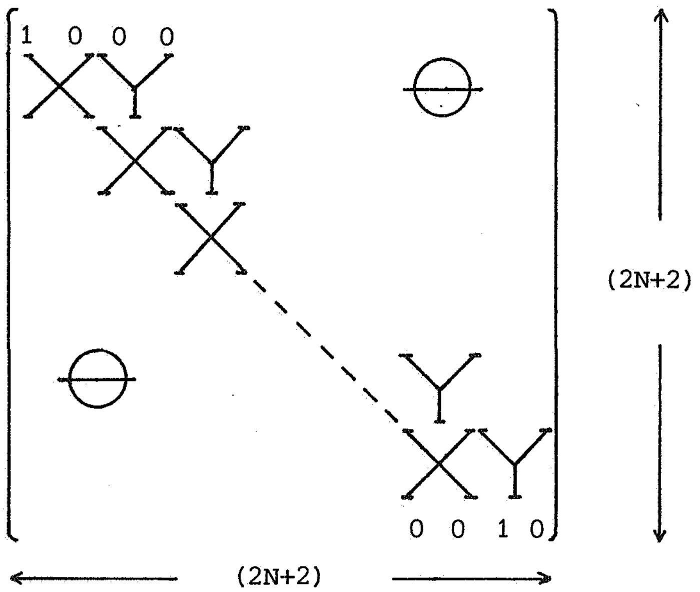
$$\alpha_{ij} = \int_a^b k(\sigma_i, y)\phi_j(y)\,dy, \quad i,j = 0,1,\ldots,2N+1,$$

en

$$\vec{g} = (g(\sigma_0), g(\sigma_1), \ldots, g(\sigma_{2N+1}))^T.$$

De matrix B is voor ieder probleem gelijk (voor vaste N) en wel een band-matrix van breedte 5, $B = \tilde{B}D$, als volgt:

$\tilde{B} =$



,

met

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} \beta & -\delta \\ \alpha & -\gamma \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \frac{9+4\sqrt{3}}{18}, \quad \beta = \frac{9-4\sqrt{3}}{18}, \quad \gamma = \frac{3+\sqrt{3}}{36}, \quad \delta = \frac{3-\sqrt{3}}{36}$$

en

$$D = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & h & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & h & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & h \end{bmatrix}}_{(2N+2)} \; (2N+2) \;,$$

$h = (b-a)/N.$

3. MULTI-GRID TECHNIEK

De multi-grid techniek werkt met een rij roosters $\{\mathcal{G}_\ell\}_{\ell=0,1,2,..}$ van toenemende fijnheid. In dit verslag beschouwen we roosters die overeenkomen met de partities Δ_N (genoemd in Sectie 2.1), $\mathcal{G}_\ell = \Delta_{N_\ell}$, met $N_{\ell+1} = 2N_\ell$. Om een benadering voor de oplossing van ons probleem te bepalen op het fijnste rooster, gaan we als volgt te werk: op het grofste rooster $\mathcal{G}_0$ (level $\ell = 0$) wordt het stelsel vergelijkingen (2.7) direct opgelost. Op de hogere levels ($\ell > 0$) wordt de oplossing iteratief bepaald, waarbij ook correcties via lagere levels uitgevoerd worden. Aangezien de op te lossen stelsels vergelijkingen op alle levels afkomstig zijn van hetzelfde continue probleem, kunnen interacties tussen de verschillende levels plaatsvinden.

In Sectie 3.1 definiëren we het multi-grid proces en in Sectie 3.2 de interacties tussen de verschillende levels.

3.1. Multi-grid techniek voor het oplossen van stelsel (2.7)

De oorspronkelijke vergelijking $(\lambda I - K)f = g$ reduceert door de collocatie-methode toe te passen op rooster $\mathcal{G}_\ell$ tot

(3.1) $$(\lambda B_\ell - A_\ell)\vec{u}_\ell = \vec{g}_\ell.$$

Op rooster $\mathbb{G}_\ell$ ($\ell > 0$) lossen we het stelsel vergelijkingen iteratief op, middels het volgende relaxatie-schema:

(3.2) $$\lambda B_\ell \vec{u}_\ell^{(i+\frac{1}{2})} = A_\ell \vec{u}_\ell^{(i)} + \vec{g}_\ell.$$

We hebben hier als benaderde inverse van $(\lambda B_\ell - A_\ell)$ gekozen $\frac{1}{\lambda} B_\ell^{-1}$. Dit is gemakkelijk in te zien door (3.2) te schrijven als

$$\vec{u}^{(i+\frac{1}{2})} = (I_\ell - \frac{1}{\lambda} B_\ell^{-1}(\lambda B_\ell - A_\ell))\vec{u}_\ell^{(i)} + \frac{1}{\lambda} B_\ell^{-1} \vec{g}_\ell.$$

De residu-vector is

(3.3) $$\vec{r}_\ell = \vec{g}_\ell - (\lambda B_\ell - A_\ell)\vec{u}_\ell^{(i+\frac{1}{2})}.$$

Relaxatie-schema (3.2) passen we toe om de hoogfrequente oscillaties (in vergelijking met de afstand tussen de roosterpunten) in het residu te dempen. De laagfrequente oscillaties in het residu kunnen op een grover rooster worden weergegeven. Om de oplossing $\vec{u}_\ell^{(i+\frac{1}{2})}$ te verbeteren lossen we de volgende vergelijking op rooster $\mathbb{G}_{\ell-1}$ op:

(3.4) $$(\lambda B_{\ell-1}-A_{\ell-1})\vec{u}_{\ell-1} = (\lambda B_{\ell-1}-A_{\ell-1})P_s\vec{u}_\ell^{(i+\frac{1}{2})} + P_r(\vec{r}_\ell) \equiv \vec{g}^{\,*}_{\ell-1}.$$

Hierbij zijn P_s en P_r restrictie-operatoren van de oplossing en het residu naar 1 level lager. De methode is recursief, doordat (3.4) wordt opgelost met dezelfde multi-grid techniek, behalve op rooster $\mathbb{G}_0$, waar het stelsel direct wordt opgelost. We merken op dat $\vec{g}^{\,*}_{\ell-1}$, het rechterlid van (3.4), informatie bevat van hogere levels, en dus ongelijk is aan $\vec{g}_{\ell-1}$ als in (3.1) (d.i. de restrictie van g, het rechterlid van (2.4) tot de collocatiepunten van level ℓ-1). Als eindresultaat van een multi-grid slag krijgen we:

(3.5) $$\vec{u}_\ell^{(i+1)} = \vec{u}_\ell^{(i+\frac{1}{2})} + Q(\vec{u}_{\ell-1} - P_s\vec{u}_\ell^{(i+\frac{1}{2})}),$$

waarbij Q de oplossing interpoleert naar 1 level hoger.

We beëindigen dit multi-grid proces op level ℓ als het residu klein genoeg is, $\|\vec{r}_\ell\| < \varepsilon_\ell$, en interpoleren de oplossing naar een hoger level.

3.2. Interacties tussen de verschillende levels

Als $\vec{u}_\ell^{(i)}$ een benadering is van de oplossing op level ℓ, dan verkrijgen we een eerste benadering $\vec{u}_{\ell+1}^{(1)}$ op level $\ell+1$, door gebruik te maken van de benaderde oplossing van het oorspronkelijke probleem

$$\tilde{f}_\ell = \sum_{j=0}^{2N_\ell+1} u_{\ell,j}^{(i)} \phi_j \in M^{1,3}(\Delta_{N_\ell}),$$

$u_{\ell,j}^{(i)}$ is de j-de component van $\vec{u}_\ell^{(i)}$. Dan is de afgeleide van $\tilde{f}_\ell$:

$$\tilde{f}'_\ell = \sum_{j=0}^{2N_\ell+1} u_{\ell,j}^{(i)} \phi'_j.$$

De interpolatie Q van level ℓ naar $\ell+1$ definiëren we nu door:

$$u_{\ell+1,2k-1}^{(1)} = \tilde{f}_\ell(x_k)$$

$$u_{\ell+1,2k}^{(1)} = \tilde{f}'_\ell(x_k), \qquad x_k \in G_{\ell+1}.$$

Voor de restrictie P_s van $\vec{u}_\ell^{(i)}$ naar level $\ell-1$ maken we op analoge wijze gebruik van $\tilde{f}_\ell \in M^{1,3}(\Delta_{N_\ell})$.

De residu-vector op level ℓ (3.3) kunnen we beschouwen als de residufunctie

$$r_\ell = Q_{N_\ell} g - (\lambda I - Q_{N_\ell} K)\tilde{f}_\ell, \tag{3.6}$$

geëvalueerd in de collocatiepunten van level ℓ (zie (2.6)). Een mogelijke restrictie van het residu tot level $\ell-1$ verkrijgen we door (3.6) te evalueren in de collocatiepunten van level $\ell-1$. Als we aannemen dat de hoogfrequente fluctuaties in de residu-functie zijn gedempt, kunnen we voor de restrictie P_r van het residu volstaan met een grovere benadering. In de numerieke experimenten benaderen we de waarde van de residu-functie in een collocatiepunt van level $\ell-1$, door de waarde van die functie in het dichtstbij gelegen collocatiepunt van level ℓ. De restrictie $P_r(\vec{r}_\ell)$ van de residu-vector tot level ℓ-1 ontstaat dus door het weglaten van een aantal componenten uit $\vec{r}_\ell$.

4. NUMERIEKE EXPERIMENTEN

In dit hoofdstuk geven we numerieke resultaten van de oplossing van enkele integraalvergelijkingen, ontleend aan [1]. De numerieke oplossingen zijn berekend met de collocatie-methode uit Hoofdstuk 2. Het met deze methode verkregen stelsel vergelijkingen, van orde M = 2*N+2, wordt op twee manieren opgelost:

1°. Met een direkte oplossingsmethode (nl. de routine F04ARF uit de NAG-bibliotheek, via LU-decompositie van de matrix). We berekenen de moment-integralen (dit zijn de elementen van de matrix A, zie Sectie 2.2) met 2-punts, respectievelijk 3-punts Gauss-kwadratuur.

Uit PRENTER [3] en HEMKER [4] blijkt dat 2-punts Gauss-kwadratuur voldoende is om de door HOUSTIS [1] afgeleide convergentiesnelheid van de methode te krijgen; 3-punts Gauss-kwadratuur geeft nauwkeuriger resultaten, maar de convergentiesnelheid blijft in theorie dezelfde. Er is zowel 2-punts als 3-punts kwadratuur gebruikt om de resultaten van HOUSTIS [1] te verifiëren.

2°. Met de multi-grid methode uit Hoofdstuk 3, waarbij de moment-integralen worden berekend met 3-punts Gauss-kwadratuur.

We vergelijken de resultaten met die uit HOUSTIS [1], welke verkregen zijn met een direkte oplossingsmethode, en 3-punts Gauss-kwadratuur.

In de tabellen geven we ook de convergentiefaktor

$$\text{rate} = \log\left(\frac{\text{error voor } h}{\text{error voor } h/2}\right) / \log 2.$$

Het multi-grid proces op level ℓ wordt beëindigd, als $\|\vec{r}_\ell\|_\infty < \text{eps}$. Het getal "number" geeft een ruwe schatting van de orde van het aantal operaties, dat nodig is voor het bepalen van de oplossing via de multi-grid methode. De startvector voor het multi-grid proces op level ℓ is de vector $Q(\vec{u}_{\ell-1})$, met $\vec{u}_{\ell-1}$ de oplossing op level ℓ-1. Number op level ℓ wordt daarom bepaald door bij elkaar op te tellen:

1. "number" nodig voor het verkrijgen van $\vec{u}_{\ell-1}$;

2^A. de orde van het aantal operaties nodig voor elke relaxatie-slag op level k, $0 < k \leq \ell$, d.i. $M_k^2 = (2*N_k+2)^2$;

2^B. de orde van het aantal operaties nodig bij het direct oplossen van een lineair stelsel op level k, $k = 0$, d.i. M_k^3.

Testprobleem 1: $k(x,y) = \cos(\pi xy)$, $0 < x,y \leq 1$,
$\lambda = 1$.
Het rechterlid g is zó gekozen, dat $f(x) = e^x \cos(\pi x)$.

		Houstis [1]		Direkt/2-pnt GKW		Direkt/3-pnt GKW		Multi-Grid/3-pnt GKW			
N	M	Max. Error	Rate	Max. Error	Rate	Max. Error	Rate	Max. Error	Eps	Number	Number/M^2
3	8	4.55×10^{-2}		2.26×10^{-3}		1.08×10^{-3}		1.08×10^{-3}			
6	14	4.24×10^{-3}	3.4	1.81×10^{-4}	3.64	1.08×10^{-4}	3.32	1.08×10^{-4}	10^{-7}	2 056	10.49
12	26	3.37×10^{-4}	3.7	1.17×10^{-5}	3.95	7.14×10^{-6}	3.92	7.14×10^{-6}	10^{-8}	5 344	7.90
24	50	2.59×10^{-5}	3.7	7.40×10^{-7}	3.98	4.54×10^{-7}	3.97	4.54×10^{-7}	10^{-9}	14 984	5.99
48	98	1.75×10^{-6}	3.9	4.64×10^{-8}	3.99	2.85×10^{-8}	3.99	2.84×10^{-8}	10^{-10}	46 512	4.84

Testprobleem 2: $k(x,y) = e^{5xy}$, $0 \leq x,y \leq 1$,
$\lambda = 1$.
We kiezen g zó, dat $f(x) = e^x$.

		Houstis [1]		Direkt/2-pnt GKW		Direkt/3-pnt GKW	
N	M	Max. Error	Rate	Max. Error	Rate	Max. Error	Rate
3	8	1.33×10^{-3}		2.36×10^{-1}		1.33×10^{-3}	
6	14	2.17×10^{-5}	5.9	1.10×10^{-2}	4.42	2.16×10^{-5}	5.94
12	26	2.72×10^{-7}	6.3	6.89×10^{-4}	4.00	2.72×10^{-7}	6.31
24	50	$1.1\ \times10^{-8}$	4.6	4.32×10^{-5}	4.00	1.10×10^{-8}	4.63
48	98	8.57×10^{-10}	3.7	2.71×10^{-6}	3.99	7.35×10^{-10}	3.90

De multi-grid methode divergeert voor dit probleem.

Testprobleem 3: $k(x,y) = y-x, \quad 0 \le x,y \le 1,$
$\lambda = 1.$
We kiezen g zó, dat $f(x) = \sqrt{x}$.

		Houstis [1]		Direkt/2-pnt GKW		Direkt/3-pnt GKW		Multi-Grid/3-pnt GKW			
N	M	Max. Error	Rate	Max. Error	Rate	Max. Error	Rate	Max. Error	Eps	Number	Number/M^2
3	8	9.79×10^{-3}		1.04×10^{-2}		9.79×10^{-3}		9.79×10^{-3}			
6	14	6.92×10^{-3}	.5	7.04×10^{-3}	.56	6.92×10^{-3}	.50	6.92×10^{-3}	10^{-7}	2 056	10.49
12	26	4.87×10^{-3}	.5	4.90×10^{-3}	.52	4.87×10^{-3}	.51	4.87×10^{-3}	10^{-8}	5 344	7.90
24	50	3.43×10^{-3}	.5	3.44×10^{-3}	.51	3.43×10^{-3}	.51	3.43×10^{-3}	10^{-9}	21 928	8.77
48	98	2.42×10^{-3}	.5	2.42×10^{-3}	.51	2.42×10^{-3}	.50	2.42×10^{-3}	10^{-10}	85 752	8.92

Testprobleem 4: $k(x,y) = \begin{cases} -x(1-y), & 0 \le x \le y < 1, \\ -y(1-x), & 0 \le y \le x < 1, \end{cases}$
$\lambda = 10/3.$
Kies g zó, dat $f(x) = 25x^5(1-x)$.

		Houstis [1]		Direkt/2-pnt GKW		Direkt/3-pnt GKW		Multi-Grid/3-pnt GKW			
N	M	Max. Error	Rate	Max. Error	Rate	Max. Error	Rate	Max. Error	Eps	Number	Number/M^2
3	8	4.75×10^{-2}		2.75×10^{-2}		2.71×10^{-2}		2.71×10^{-2}			
6	14	4.05×10^{-3}	3.6	3.35×10^{-3}	3.04	2.98×10^{-3}	3.18	2.98×10^{-3}	10^{-7}	2 252	11.49
12	26	3.09×10^{-4}	3.7	3.10×10^{-4}	3.43	2.32×10^{-4}	3.68	2.32×10^{-4}	10^{-8}	4 868	7.20
24	50	2.49×10^{-5}	3.6	3.34×10^{-5}	3.21	1.51×10^{-5}	3.94	1.51×10^{-5}	10^{-9}	12 572	5.03
48	98	2.22×10^{-6}	3.5	5.65×10^{-6}	2.56	8.41×10^{-7}	4.16	8.41×10^{-7}	10^{-10}	41 780	4.35

Testprobleem 5: $k(x,y) = y-x, \quad 0 \le x,y \le 1,$
$\lambda = 1.$
We kiezen het rechterlid g zó, dat $f(x) = x \ln(x)$.

		Houstis [1]		Direkt/2-pnt GKW		Direkt/3-pnt GKW		Multi-Grid/3-pnt GKW			
N	M	Max. Error	Rate	Max. Error	Rate	Max. Error	Rate	Max. Error	Eps	Number	Number/M^2
3	8	1.45×10^{-2}		5.14×10^{-3}		4.79×10^{-3}		4.79×10^{-3}			
6	14	7.24×10^{-3}	1.	2.41×10^{-3}	1.09	2.36×10^{-3}	1.02	2.36×10^{-3}	10^{-7}	2 056	10.49
12	26	3.63×10^{-3}	1.	1.17×10^{-3}	1.04	1.17×10^{-3}	1.01	1.17×10^{-3}	10^{-8}	5 344	7.90
24	50	1.86×10^{-3}	1.	5.81×10^{-4}	1.01	5.80×10^{-4}	1.01	5.80×10^{-4}	10^{-9}	20 576	8.23
48	98	9.09×10^{-4}	1.	2.89×10^{-4}	1.01	2.89×10^{-4}	1.00	2.89×10^{-4}	10^{-10}	83 048	8.64

De resultaten geven aan, dat we de multi-grid methode op efficiënte wijze kunnen gebruiken bij de collocatie-methode. Testprobleem 2 toont het negatieve aspect van de methode aan: het geïmplementeerde relaxatieschema in combinatie met de grove roostercorrectie kan divergeren. Waarschijnlijk is dat voor een grote klasse van problemen een relaxatieschema te vinden is, zodanig dat het multi-grid proces convergeert.

Opmerkelijk zijn de verschillen die bij enkele testproblemen optreden tussen de resultaten van HOUSTIS [1], en onze resultaten met een direkte oplossingsmethode.

5. DISCUSSIE

We hebben in dit verslag de toepasbaarheid van de multi-grid methode voor de oplossing van Fredholm-vergelijkingen van de tweede soort onderzocht. Hiertoe hebben we gebruik gemaakt van een collocatie-methode. SCHIPPERS [5] gebruikt de multi-grid methode bij de direkte kwadratuurmethode van Nyström. Onze numerieke resultaten tonen aan dat de multi-grid methode ook gebruikt kan worden voor stelsels vergelijkingen, die ontstaan door toepassing van de collocatie-methode. Om volledig inzicht te krijgen in de besparing in hoeveelheid computerwerk, die deze methode kan opleveren, is verder onderzoek nodig. Wat betreft de optimale keuze van iteratieschema's en hoeveelheid relaxatieslagen, bestaan dezelfde vragen die gesteld zijn door SCHIPPERS [5].

Door HOUSTIS [1] wordt naar aanleiding van numerieke experimenten gesuggereerd dat de collocatie-methode betere resultaten geeft dan de Nyström-methode, voor problemen met gladde oplossing en niet-gladde kern. In dit geval levert de multi-grid methode de meeste besparing op (number $\approx M^2 \ln M$). Dit kan leiden tot de volgende vragen:

- Zijn er scherpe criteria om aan te geven wanneer de collocatie-methode te prefereren is boven de Nyström-methode?
- Blijft deze voorkeur behouden als we het stelsel vergelijkingen oplossen met de multi-grid methode i.p.v. met een direkte methode?

LITERATUUR

[1] HOUSTIS, E.N. & T.S. PAPATHEODOROU, *A collocation method for Fredholm integral equations of the second kind,* Math. of Comp., vol. 32 (1978), pp.159-173.

[2] SCHULTZ, M.H., *Spline Analysis,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.

[3] PRENTER, P.M., *A collocation method for the numerical solution of integral equations,* SIAM J. Numer. Anal., vol. 10 (1973), pp.570-581.

[4] HEMKER, P.W., *Foutschattingen voor Lobatto-achtige collocatie-methoden voor Fredholm-integraalvergelijkingen van de tweede soort,* schriftelijke notitie, 1978, niet gepubliceerd.

[5] SCHIPPERS, H., *Multi-grid techniques for the solution of Fredholm integral equations of the second kind,* Colloquium Numerical Treatment of Integral Equations, 1978.