STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
REKENAFDELING

R 03

Berekeningen betreffende reflactie van Seismische golven op scheidingsvlak van 2 onbegrensde media.

(voorlopig rapport)

door

[Staf van de Rekenafdeling]

[1948]

Voorlopig Verslag van de berekeningen betreffende reflactie van seismische golven op scheidingsvlak van 2 onbegrensde vaste media.

Gevraagd werd de uitwijkingen in horizontale en verticale richting te berekenen ten gevolge van de longitudinale conische golf in het bovenste medium bij een afstand 1 van stootbron en van het punt, waar de golf bepaald wordt, boven het scheidingsvlak, bij longitudinale snelheden 1 en $\sqrt{2}$ in bovenste en onderste medium resp. en transversale snelheden $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ resp. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$, terwijl stootbron en punt van aankomst op afstanden r = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 10 werden genomen. Voor de oorspronkelijke stoot werd aangenomen, dat de uitwijkingspotentiaal een eenheidsfunctie was.

De uitwijkingspotentiaal van de conische golf is dan (vgl. v.d. Waerden-report)

$$A(t,r,z) = -\frac{2}{\pi R_1} \int_{W_0}^{c} P(W) \sqrt{\frac{c^2 - W^2}{(W-W_0)(W-W_1)}} \, dW$$

waarin hier

$$R_1 = \sqrt{r^2 + z_1^2}$$

$z_1 = 2 - z$, waarin na de nog uit te voeren differentiaties $z = 0$ te nemen is

$$P(W) = \frac{\delta\varepsilon' - \delta'\varepsilon}{\varepsilon'^2 + \delta'^2(c^2 - W^2)}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad \delta = \delta_1 + \delta_2$$

$$\varepsilon' = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad \delta' = -\delta_1 + \delta_2$$

$$\varepsilon_1 = (1 - W^2)^3$$

$$\varepsilon_2 = -W \left\{ \sqrt{W^2 + 2}\,(W^2 + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{9}{4}\sqrt{W^2 + \tfrac{1}{2}} \right\}$$

$$\delta_1 = \sqrt{W^2 + \tfrac{1}{2}}\,(\tfrac{5}{2} - W^2)^2 + \tfrac{9}{4}\sqrt{W^2 + 2}$$

$$\delta_2 = -W \sqrt{W^2 + 2}\,\sqrt{W^2 + \tfrac{1}{2}}\,\sqrt{1 - W^2}.$$

$$c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$W_0 = \frac{1}{R_1^2}\left(z_1 t + r\sqrt{a^2 R_1^2 - t^2}\right)$$

$$W_1 = \frac{1}{R_1^2}\left(z_1 t - r\sqrt{a^2 R_1^2 - t^2}\right), \text{ d.w.z.}$$

$W_{0,1}$ zijn de wortels van de vergelijking

$$R_1^2 W^2 - 2 z_1 t W + t^2 - r^2 = 0 .$$

We schrijven

$$A = \frac{2}{\pi R_1} \int_{W_0}^{c} \frac{\gamma(W)}{\sqrt{W-W_1}} \cdot \sqrt{\frac{c-W}{W-W_0}}\, d W.$$

$$\text{met} \quad \gamma(W) = - P(W) \sqrt{c + W}$$

$\gamma(W)$ is een van z_1, t en r onafhankelijke functie van de integrand, die we eens en voor al kunnen uitrekenen. Dit werd gedaan in 5 decimalen met een interval van 0,01 opklimmend voor W tussen 0,15 en 0,75, zijnde een gebied van W-waarden, dat, met een kleine uitbreiding aan de randen, die waarden van W bevatte, dat bij de integraties in aanmerking kwam. Hieruit werd door subtabulatie een tabel verkregen in 2 decimalen met 0,001 opklimmend, wat bij het volgende rekenwerk voldoende nauwkeurig was en hoogstens nog lineaire interpolatie vereiste.

De uitwijkingen zijn resp.

$$u_z = \frac{\partial A}{\partial z} = - \frac{\partial A}{\partial z_1}$$

$$u_r = - \frac{\partial A}{\partial r}$$

waarbij $u_z = \frac{\partial A}{\partial z}$ wordt genomen, zodat uitwijkingen naar boven als positief worden aangerekend (de pos. z-as stond naar beneden).

We kunnen in A eerst W_0 en W_1 als onafhankelijk van z, r en t denken, we geven dan de bijbehorende afgeleiden naar r en z_1 door resp. $\frac{\partial A}{\partial r}$ en $\frac{\partial A}{\partial z_1}$ aan.

Nu is

$$\frac{\partial A}{\partial r} = - \frac{2 r}{\pi R_1^3} \int_{W_0}^{c} \frac{\gamma(W)}{\sqrt{W-W_1}} \sqrt{\frac{c-W}{W-W_0}}\, d W .$$

$$\frac{\partial A}{\partial z_1} = - \frac{2 z_1}{\pi R_1^3} \int_{W_0}^{c} \frac{\gamma(W)}{\sqrt{W-W_1}} \sqrt{\frac{c-W}{W-W_0}}\, d W .$$

$$\frac{\partial A}{\partial W_1} = \frac{1}{\pi R_1} \int_{W_0}^{c} \frac{\gamma(W)}{\{\sqrt{W-W_1}\}^3} \sqrt{\frac{c-W}{W-W_0}}\, d W ,$$

en ten slotte vinden we door partiele integratie

$$A = - \frac{4}{\pi R_1} \int_{W_0}^{c} \sqrt{W - W_0}\ \frac{d}{dW} \left\{ \gamma(W) \sqrt{\frac{c-W}{W-W_1}} \right\} d W .$$

$$= - \frac{4}{\pi R_1} \int_{W_0}^{c} \gamma'(W) \sqrt{\frac{(c-W)(W-W_0)}{W-W_1}}\, d\,W$$

$$+ \frac{2}{\pi R_1} \int_{W_0}^{c} \gamma'(W) \sqrt{\frac{W-W_0}{(c-W)(W-W_1)}}\, d\,W$$

$$+ \frac{2}{\pi R_1} \int_{W_0}^{c} \frac{\gamma(W)}{(W-W_1)^{3/2}} \sqrt{(c-W)(W-W_0)}\, d\,W\,.$$

We vinden dan

$$\frac{\partial A}{\partial W_0} = \frac{2}{\pi R_1} \int_{W_0}^{c} \frac{\gamma'(W)}{\sqrt{W-W_1}} \sqrt{\frac{c-W}{W-W_0}}\, d\,W$$

$$- \frac{1}{\pi R_1} \int_{W_0}^{c} \frac{\gamma(W)}{(W-W_1)^{1/2}} \sqrt{\frac{1}{(c-W)(W-W_0)}}\, d\,W$$

$$- \frac{1}{\pi R_1} \int_{W_0}^{c} \frac{\gamma(W)}{(W-W_1)^{3/2}} \sqrt{\frac{c-W}{W-W_0}}\, d\,W\,.$$

Stellen we dus

$$I_1 = \int_{W_0}^{c} \gamma \sqrt{\frac{c-W}{(W-W_0)(W-W_1)}}\, d\,W$$

$$I_2 = \int_{W_0}^{c} \gamma' \sqrt{\frac{c-W}{(W-W_0)(W-W_1)^3}}\, d\,W$$

$$I_3 = \int_{W_0}^{c} \frac{\gamma}{(W-W_1)^{1/2}} \sqrt{\frac{1}{(c-W)(W-W_0)}}\, d\,W$$

$$I_4 = \int_{W_0}^{c} \gamma'' \sqrt{\frac{c-W}{(W-W_1)(W-W_0)}}\, d\,W\,.$$

dan is

$$\frac{\partial A}{\partial W_0} = \frac{1}{\pi R_1} \left\{ 2\,I_4 - I_2 - I_3 \right\}$$

$$\frac{\partial A}{\partial W_1} = \frac{1}{\pi R_1}\, I_2$$

$$\frac{\partial A}{\partial z_1} = - \frac{2z}{\pi R_1^3}\, I_1$$

$$\frac{\partial A}{\partial r} = - \frac{2r}{\pi R_1^3}\, I_1$$

Nu passen we toe de transformatie

$$W = \frac{c+W_0}{2} + \frac{c-W_0}{2} \sin \frac{\pi}{2}\varphi$$

dan vinden we

$$I_1 = \frac{\pi(c-W_o)}{4} \int \frac{\gamma(W)}{W-W_1} \left(1 - \sin\frac{\pi\varphi}{2}\right) d\varphi$$

$$I_2 = \frac{\pi(c-W_o)}{4} \int \frac{\gamma(W)}{(W-W_1)^{3/2}} \left(1 - \sin\frac{\pi\varphi}{2}\right) d\varphi$$

$$I_3 = \frac{\pi}{2} \int \frac{\gamma(W)}{(W-W_1)^{1/2}} d\varphi$$

$$I_4 = \frac{\pi(c-W_o)}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma'(W)}{(W-W_1)^{1/2}} \left(1 - \sin\frac{\pi\varphi}{2}\right) d\varphi$$

De singulariteiten van de integrand zijn nu verdreven , ende integraties lopen zeer gemakkelijk, daar de gemiddelde oneven differenties van de integrand aan de uiteinden nul zijn, daar W en daarmee ook de betreffende functie van W, evenals $(1-\sin\frac{\pi}{2}\varphi)$ symmetrisch zijn zowel om $\varphi = +1$ als $\varphi = -1$. In de algemene formule voor numerieke integratie

$$\int^{0} f(x)\,d\,x = w\left\{ \delta^{-1}_{o} - \frac{1}{12}\delta_{o} + \frac{11}{720}\delta^{3}_{o} - \frac{191}{60480}\delta^{5}_{o} + \ldots \right.$$

alleen de eerste term overblijft, en we feitelijk niets anders dan de trapesiumregel toe te passen.

De nauwkeurigheid van de integraties werd gecontroleerd door één keer met interval van 0,1 en één keer met interval van 0,2 te integreren.

De afgeleide γ' werd numeriek bepaald uit de tabel in 5 decimalen van γ . Ook van γ' werd een tabel in 2 decimalen vervaardigd die met 0,001 opklom.

Nu is ten slotte

$$u_z = -\frac{\partial A}{\partial z_1} = -\frac{\delta A}{\delta z_1} - \frac{\partial A}{\partial W_o}\cdot\frac{\partial W_o}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial W_1}\cdot\frac{\partial W_1}{\partial z}$$

$$u_r = -\frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial A}{\partial W_o}\cdot\frac{\partial W_o}{\partial r} - \frac{\partial A}{\partial W_1}\cdot\frac{\partial W_1}{\partial r}$$

Uit de vergelijking voor W_o en W_1 volgt

$$(2 R_1^2 W - 2 z_1 t)\,d W + (2 z_1 W^2 - 2 W t)\,d z_1 + (2 r W^2 - 2 r)\,d r = 0$$

$$\frac{W}{z_1} = \frac{W t - W^2 z_1}{R_1^2 W - z_1 t}$$

$$\frac{W}{r} = \frac{1 - W^2}{R_1^2 W - z_1 t}\, r$$

waarbij nog op te merken is dat

$$R_1^2\, W_o - z_1\, t = -\,(R_1^2\, W_1 - z_1\, t\,)$$

want

$$R_1^2\, (W_o + W_1) = 2\, z_1\, t,$$

zodat als $N = R_1^2\;\; W_o - z_1\, t = -\,(R_1^2\, W_1 - z_1\, t)$

$$\frac{\partial W_o}{\partial z_1} = \frac{W_o\, t - W_o^2\, z_1}{N} \qquad\qquad \frac{\partial W_1}{\partial z_1} = -\,\frac{W_1\, t - W_1^2\, z_1}{N}$$

$$\frac{\partial W_o}{\partial r} = \frac{1 - W_o^2}{N}\, r \qquad\qquad \frac{\partial W_1}{\partial r} = -\, r\;\; \frac{1 - W_1^2}{N}$$

Bij de aankomst van de conische golf, d.i. bij $t = \frac{r+z_1}{2}$, wordt $W_o = c$, de integralen I_1, I_2 en I_4 waar een factor $c - W_o$ voorstaat, worden dan nul
Dat betekent, dat alleen overblijft

$$\frac{\partial A}{\partial W_o} = -\,\frac{1}{2\, R_1}\int_{-1}^{+1} \frac{f}{(W-W_1)^{1/2}}\; d\varphi$$

met $W = c$ onafhankelijk van

$$\text{en } W_1 = \frac{1}{R_1^2}\left\{ z_1\; \frac{r+z_1}{\sqrt{2}} - r\sqrt{R_1^2 - \frac{(r+z_1)^2}{2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{R_1^2}\left\{ z_1\; \frac{r+z_1}{\sqrt{2}} - r\; \frac{r-z_1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{R_1^2\sqrt{2}}\left\{ z_1^2 + 2\, r\, z_1 + r^2 \right\},$$

en dus

$$W - W_1 = \frac{2\, r}{R_1^2\sqrt{2}}\;\; (r - z_1)$$

dus

$$\frac{\partial A}{\partial W_o} = -\,\frac{1}{2}\;\; \frac{f(c)}{\sqrt{r(r-z_1)\sqrt{2}}}$$

Verder

$$\frac{\partial W_o}{\partial z_1} = \frac{t/\sqrt{2} - z_1/2}{R_1^2/\sqrt{2} - z_1\, t}$$

$$= \frac{1}{(r-z_1)\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial W_o}{\partial r} = \frac{1}{2} \quad \frac{r}{R_1^2/\sqrt{2} - z_1 \ t}$$

$$= \frac{1}{(r-z_1)\sqrt{2}}$$

en dus

$$(u_z)_{t=t_o} = (u_r)_{t=t_o} = \frac{1}{2} \quad \frac{\gamma(c)}{\{ r(r-z_1)^3(\sqrt{2})^3 \}^{1/2}}$$