STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
REKENAFDELING

R 12

Berekeningen betreffende acoustische metingen in het oor.

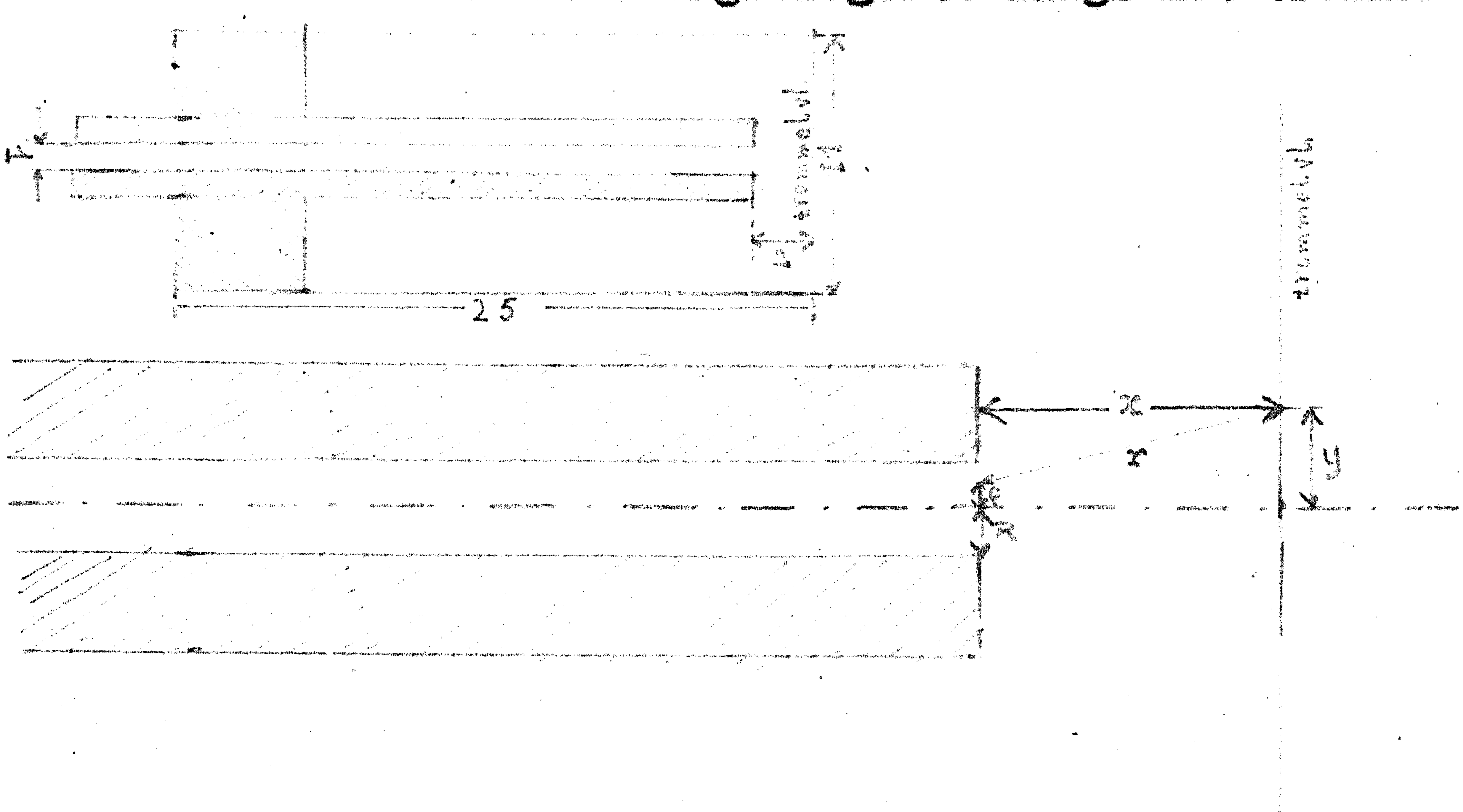
door

[Staf van de Rekenafdeling]

[1948]

Verslag over de berekeningen betreffende acoustische metingen in het oor.

Een gehoorgang, welke beschouwd wordt als een rechte buis van ongeveer 25 mm lengte en 11 mm diameter, welke aan een zijde is afgesloten door een trommelvlies, wordt het open uiteinde eveneens afgesloten, met uitzondering van een stuk in het midden, waar een buisje van 1 mm inwendige diameter, dat tot ongeveer 2 mm voor het trommelvlies komt. (Vgl. fig.).Van buiten af wordt geluid toegevoerd van zekere toonhoogte, nagegaan wordt nu wat het verloop van de geluidsdruk en dat van de energieafgifte langs het trommelvlies is.



De voortplanting van de geluidsgolven wordt het best omschreven door de potentiaal φ , welke een functie is van de plaatscoordinaten en de tijd. Leggen we de x-as langs het buisje, met de oorsprong in het uiteinde (zie fig.), dan is in het buisje voor de aankomende golf

$$\varphi = A\, e^{-iw(t - \frac{x}{c})}$$

(A = amplitudo,
w = 2 π x frequentie,
c = geluidssnelheid),

of in reele schrijfwijze

$$\varphi = A \cos w \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

De snelheid van de trillende luchtdeeltjes in de x-richting inden we door naar x te differentieren en het tegengestelde daarvan te nemen, deze is dus

$$v_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = i\,\frac{w}{c}\,A\,e^{-iw(t - x/c)}$$

of reëel

$$v_x = \frac{w}{c}\,A \sin w\,(t - \frac{x}{c})\ ,$$

terwijl de druk gelijk is aan de afgeleide van φ naar t, vermenigvuldigd met de dichtheid van de lucht d

$$p = d\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\,i\,w\,d\,A\,e^{-iw(t - \frac{x}{c})}$$

of reëel

$$p = -\,w\,d\,A \sin w\,(t - \frac{x}{c}).$$

Tenslotte is de energiestroom in de x-richting

$$S_x = p\,v_x$$

x = 0 geeft

$$v_x = i\,A\,w/c\;\;e^{-iwt}$$

resp.

$$v_x = \frac{w}{c}\;A \sin w\,t,$$

dit betekent, dat buiten het buisje de potentiaalfunctie de vorm heeft

$$\varphi = \frac{i}{2\pi}\;\frac{Aw}{c}\int\frac{e^{-iw(t - r/c)}}{r}\;d\,\sigma$$

te integreren over de buisopening en waarin r de afstand is van het punt waar we φ willen kennen tot een punt van het integratieoppervlak.

In de exponent van de e-macht staat $wr/_c$, de r varieert slechts weinig als we over het integratie oppervlak gaan, terwijl $w/_c = \frac{2\pi}{\lambda}$ omgekeerde van de golflengte klein is t.o.v. r, we mogen dan wel $e^{-iw(t - r/c)}$ voor het integraalteken nemen. Zo vinden we, als ρ de afstand tot oorsprong van een punt op het integratie oppervlak, R de straal van het buisje en y de afstand tot x-as van punt op trommelvlies is;

$$\varphi = \frac{iAw}{2\pi c} \; e^{-iw\left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}\right)} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{R} \frac{\rho \, d\rho \, d\vartheta}{\sqrt{x^2 + \rho^2 + y^2 - 2\rho y \cos\vartheta}}$$

$$\approx \frac{iAw}{c} \; e^{-iw\left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}\right)} \left[\sqrt{x^2 + \rho^2 + y^2} \right]_0^R$$

en dus

$$v_x = + \frac{Aw^2}{c^2} \; e^{-iw\left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}\right)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \left[\sqrt{x^2 + \rho^2 + y^2} \right]_0^R +$$

$$- \frac{iAw}{c} \; e^{-iw\left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}\right)} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + \rho^2 + y^2}} \right]_0^R +$$

en

$$p = \frac{Aw^2}{c} \, d \; e^{-iw\left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}\right)} \left[\sqrt{x^2 + \rho^2 + y^2} + \cancel{y \log \left\{ \rho - y + \sqrt{x^2 + (\rho - y)^2} \right.} \right]_0^R$$

We schrijven dit in de vorm

$$v_x = \left\{ \frac{Aw^2}{c^2} \; f(x,y) \; \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{iAw}{c} \; g(x,y) \right\} e^{-iw\left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}\right)}$$

$$p = \frac{Aw^2 d}{c} \; f(x,y) \; e^{-iw\left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}\right)}$$

Op reële wijze geschreven wordt dit

$$v_x = \frac{Aw^2}{c^2} f(x,y) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos w \left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}\right)$$

$$+ \frac{Aw}{c} g(x,y) \sin w \left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}\right)$$

$$\text{en } p = \frac{Aw^2 d}{c} f(x,y) \cos w \left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}\right) .$$

Het product hiervan geeft ons de energiestroom in de x-richting. Middelen we deze over de tijd, dan krijgen we de gemiddelde energieafgifte per tijdseenheid en per opp. eenheid ter plaatse op het trommelvlies. Noemen we deze $\overline{S}$, dan is dus

$$\overline{S} = \frac{1}{2} \frac{A^2 w^4}{c^3} d \, f^2(x,y) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$

We willen slechts het verloop van p en $\overline{S}$ langs het trommelvlies kennen. We kunnen willekeurige eenheden aannemen; als deze kozen we $\frac{Aw^2 d}{c}$ resp. $\frac{1}{2} \frac{A^2 w^4 d}{c^3}$. Dan wordt dus de amplitude A_p van de drukvariaties:

$$A_p = f(x,y)$$

$$\text{en } \overline{S} = A_p^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\text{met } f(x,y) = \left[\left[\sqrt{x^2 + (\rho+y)^2}\right]_0^R \cancel{+ y \log \left\{ \rho - y + \sqrt{x^2 + (\rho-y)^2} \right\}} \right]_{\rho=0}^R$$

Hier is R = 0,5 mm; x = 2 mm, we vonden dan onderstaande tabel:

y(mm)	A_p	$\overline{S}$
0	0,062	0,0038
0,5	0,060	0,0035
1,0	0,055	0,0027
1,5	0,050	0,0020
2,0	0,044	0,0014
2,5	0,039	0,0010
	0,035	0,0007
	0,031	0,0005
	0,028	0,0004

$\mu = b^2 \rho \qquad f^2 = \xi - \frac{a^2}{2b^2}$

$\mu' = b'^2 \rho'^2 \qquad f'^2 = \xi' - \frac{a^2}{2b'^2}$

$\rho' = \rho$

$f_1 = \xi^2 (\xi^2 b \rho^2 + \frac{a^2}{2}\rho^2 - \xi^2 b^2 - \frac{a^2}{2})^2$

$= \xi^6 (b'^2 - b^2)^2 \rho^2$

$f_2 = \alpha' \beta' (\xi^2 b'^2 \rho'^2 - \xi^2 b^2 \rho^2 - \frac{a^2}{2}\rho^2)^2$

$= \alpha' \beta' \{ \xi^2 (b'^2 - b^2) - \frac{a^2}{2} \}^2 \rho^2$

$f_3 = \alpha' \beta'^2 \frac{b^2}{4} \rho \; b'^2 \rho \; a^4 / 4 b^2 b'^2$

$= \frac{a^4 \alpha' \beta'^2}{4} \rho^2$

$g_1 = \xi^2 \alpha \beta \alpha' \beta' (b'^2 - b^2)^2 \rho^2$

$g_2 = \alpha \beta (\xi^2 \rho^2 b'^2 + \frac{a^2}{2} \rho^2 - \xi^2 \rho^2 b^2)^2$

$= \alpha \beta \{ \xi^2 (b'^2 - b^2) + \frac{a^2}{2} \}^2 \rho^2$

$g_3 = \alpha \beta' \frac{b^2 b'^2 \rho^2}{4 b^2 b'^2} a^4$

$= \frac{a^4 \alpha \beta'}{4} \rho^2$

$a^2 = 1 \quad a = 1$

$a^2 = 2 \quad a = \sqrt{2}$

$b^2 = \frac{1}{3} \quad b = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$b'^2 = \frac{2}{3} \quad b' = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

$f_1 = \frac{\xi^6}{9} \qquad f_2 = \frac{\alpha' \beta'}{9} \{ \xi^2 - \frac{3}{2} \}^2$

$= \frac{\alpha' \beta'}{9} (\xi^2 - \frac{3}{2})^2$

$f_3 = \frac{\alpha' \beta}{}$

$\xi^2 \alpha \beta \; \alpha' \beta'$