VERVORMING VAN LAGERVLAKKEN

R 51

Rekenafdeling Mathematisch Centrum.

1 9 4 9 .

Vervorming van lagervlakken.

1. Inleiding.

De hier volgende berekeningen werden uitgevoerd op verzoek van het Koninklijke/Shell-Laboratorium te Delft. Het onderwerp betreft de bepaling van "De elastische vormverandering van het oppervlak van een halfruimte onder de hydrodynamische drukverdeling behorende bij een parabolische smeerfilm". Vergelijk hiertoe het intern memorandum van de opdrachtgever IM524 met bovengenoemde titel van de hand van H. Blok en J.W. Cohen.

2. Methode en omvang van de berekeningen.

De gespecificeerde opdracht luidde:

1^o. Bepaling van y, y' en y" voor x = − 2,0(0,2)− 0,6(0,1)0,6(0,2) 2,0(0,5)5,0, en voor x = −k en x = k.

2^o. Bepaling van x, y en y" voor die waarde van x in de omgeving van x = k, waarvoor y' = 0.

3^o. Controle van de in IM524 gegeven waarden van k, arctg k en $1 + k^2$.

De nauwkeurigheid van 1^o en 2^o diende 0,01 % te bedragen, die van 3^o het opgegeven aantal, d.w.z. 6 decimalen.

Voor de bepaling van y, y' en y" kan men formules (6), (8), (10) en (14) IM 524 gebruiken. Aangezien er in genoemd memo enige fouten voorkomen, geven wij deze formules hier nog eens:

$$y(x) = -2 + 6\,k^2 - \frac{2k^2(1+3k^2)}{1+k^2} - \frac{2kx(1+3k^2)}{(1+x^2)(1-3k^2)}$$

$$+ \left(\frac{1+k^2}{1+x^2} + 1 - 3k^2\right) \ln (1+k^2) + \left\{\frac{x^2-k^2}{1+x^2} + \frac{k(k+x)(1+3k^2)}{1+k^2}\right\}.$$

$$.\ln(k+x)^2 - (1 - 3k^2)\; x\; I(x)$$

$$y'(x) = 2\,\frac{x-k}{1+x^2} - 2\,\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\;\frac{k(1+3k^2)}{1-3k^2} + \frac{2k(1+3k^2)}{(1+x^2)(1+k^2)}$$

$$+ \left\{\frac{x(1-3k^2)}{1+x^2} - \frac{2x(1+k^2)}{(1+x^2)^2}\right\} \ln (1+k^2)$$

$$+ \left\{\frac{x(1-3k^2)}{1+x^2} + \frac{2x(1+k^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{k(1+3k^2)}{1+k^2}\right\} \ln (k+x)^2$$

$$- (1-3k^2)\; I(x).$$

$$y''(x) = (1+x^2)^{-3} \left[\frac{4(1+2k^2)}{1+k^2} - 8\,k^2 \log(1+k^2) + \frac{16\,k(1+2k^2+3k^4)}{(1+k^2)(1-3k^2)}\,x \right.$$
$$+ \left\{ \frac{8k^2}{1+k^2} + 8 \log(1+k^2) \right\} x^2 - \frac{32k^3}{(1+k^2)(1-3k^2)}\,x^3 - \frac{4}{1+k^2}\,x^4$$
$$\left. + 8(k^2-x^2) \log(k+x)^2 \right]$$

$$I(x) = \int_{-k}^{\infty} \frac{\ln(t-x)^2}{1+t^2}\,dt = \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} k\right) \ln(1+x^2)$$
$$- \mathrm{Cl}\,(\pi - 2 \operatorname{arctg} k) - \mathrm{Cl}\,(\pi - 2 \operatorname{arctg} x)$$
$$- \mathrm{Cl}\,(2 \operatorname{arctg} k + 2 \operatorname{arctg} x)\ .$$

Hierin is $\mathrm{Cl}\,z$ de integraal van Clausen gedefinieerd door:

$$\mathrm{Cl}\,z = - \int_0^z \ln\left(2 \sin \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \sum_{h=1}^{\infty} h^{-2} \sin h z\ .$$

$\mathrm{Cl}\,z$ is eenvoudig te berekenen. Indien men stelt $z = \frac{\pi}{2}\alpha$, dan is nl. $\mathrm{Cl}\,z = - \frac{\pi}{2}\alpha \left[\log \alpha + \log(4+\alpha) + \log(4-\alpha) - 3 \log 2\right]$ -

$$2\pi \left[\log(4+\alpha) - \log(4-\alpha)\right] +$$
$$+ 5{,}091837571\,\alpha + 0{,}021105418\,\alpha^3 + 0{,}000050513\,\alpha^5$$
$$+ 0{,}000000317\,\alpha^7 + 0{,}000000003\,\alpha^9 + \ldots\ldots$$

Met behulp van deze formules zijn voor $x = -2{,}3;\ -1{,}0;\ -k;\ 0;\ k;$ $1{,}0$ en $6{,}8$ de waarden van y en y' berekend. Vervolgens werd y'' berekend van $x = -2{,}5\ (0{,}1)\ 7{,}0$. Dit gaat zeer snel, aangezien hoofdzakelijk polynomen berekend behoeven te worden, welke op de National uit hun differenties opgebouwd konden worden. Van deze y'' werden de eerste somfunctie en differenties gemaakt. Daarna werd y'' numeriek geintegreerd tot y', waarbij de reeds berekende y' waarden als controle dienden.

Bij het numeriek integreren treedt een moeilijkheid op tengevolge van de singulariteit van y'' en y' in $x = -k$. Om deze te overwinnen zoeken wij de singuliere termen in y'' op. Singulier is de term $8(k^2 - x^2)\ \ln(k+x)^2$, welke geschreven kan worden als

$$\frac{32k}{(1+k^2)^3}\,(k+x) \log|k+x| + \frac{16(-1+11k^2)}{(1+k^2)^4}\,(k+x)^2 \log|k+x| -$$
$$- \frac{192\,k(1-3k^2)}{(1+k^2)^5}\,(k+x)^3 \log|k+x| \ldots.$$

Vervolgens integreren wij de functies $(k+x)^j \log|k+x|$, $(j = 1,2,3)$ op dezelfde wijze numeriek als waarop wij de functie zelf integreerden, d.w.z. met behulp van:

$$\int^{x_0} f(x)\,dx = 0{,}1\left\{\delta_0^{-1} - \frac{1}{12}\delta_0 + \frac{11}{720}\delta_0^3\right\},$$

in de buurt van x = − k. Deze numerieke uitkomst vergelijken wij met de exacte uitkomst van de integralen, nl. met

$$\int^{x_0} (k+x)^j \log|k+x|\,dx = \frac{1}{j+1}(k+x)^{j+1}\left(\log|k+x| - \frac{1}{j+1}\right)$$

Zoals te verwachten is blijkt, dat voor x enigszins kleiner dan −k de fout nul te zijn (na aanpassing van de integratieconstante natuurlijk). Met toenemende x schommelt de fout even om voor x enigszins groter dan −k een bepaald vaste waarde aan te nemen. Met k = 0,475129920 vinden wij de volgende fouten in de integralen (gedefinieerd als exacte waarde minus numerieke waarde):

x	Fout in $\int(k+x)\log\|k+x\|dx$	Fout in $\int(k+x)^2\log\|k+x\|dx$	Fout in $\int(k+x)^3\ln\|k+x\|dx$
− 1,0	0,000000	0,000000	0,000000
− 0,9	0,000001	0,000000	0,000000
− 0,8	0,000002	0,000000	0,000000
− 0,7	0,000014	0,000002	0,000000
− 0,6	− 0,000068	0,000006	0,000002
− 0,5	0,000033	− 0,000056	− 0,000005
− 0,4	− 0,001950	0,000029	0,000004
− 0,3	− 0,001411	0,000000	0,000003
− 0,2	− 0,001458	0,000005	0,000003
− 0,1	− 0,001461	0,000005	0,000002
0	− 0,001462	0,000005	0,000002
0,1	− 0,001462	0,000005	0,000002

Door integratie ziet men, dat de singuliere term in y' bedraagt:

$$\frac{16k}{(1+k^2)^3}(k+x)^2 \ln|k+x| + \frac{16(-1+11k^2)}{3(1+k^2)^4}(k+x)^3 \ln|k+x| + \ldots$$

Wij kunnen nu dus uitrekenen wat numeriek integreren van y" voor fout introduceert in y'; deze fout corrigeren en vervolgens weer uitrekenen, wat voor fout geïntroduceerd wordt bij numerieke integratie van y' op y. Deze fouten zijn:

x	Fout in y'	Fout in y .
− 1,0	0,00000	0,00000
− 0,9	0,00000	0,00000
− 0,8	0,00002	0,00000
− 0,7	0,00012	0,00001
− 0,6	− 0,00050	0,00004
− 0,5	− 0,00026	− 0,00025
− 0,4	− 0,01582	0,00013
− 0,3	− 0,01168	0,00002
− 0,2	− 0,01202	0,00003
− 0,1	− 0,01203	0,00003
0	− 0,01203	0,00003
0,1	− 0,01203	0,00003

Na het aanbrengen van deze correcties en controles waren de y, y' en y" tabellen klaar. Door inverse interpolatie met gebruik van Everett's formule en teruggeworpen vierde differenties werd tenslotte de waarde van x[/] bepaald, waarvoor y' = 0 is. Bij deze **waarde** werden y, y' (ter controle) en y" uitgerekend.

3. Resultaten der berekeningen.

Allereerst de controle van de opgegeven waarde van k, dat is de wortel van de vergelijking.

$$\text{arctg } k + \frac{\pi}{2} = \frac{k(1+3k^2)}{(1+k^2)(1-3k^2)}$$

en afgeleide grootheden. De opgegeven waarden waren bijna goed. Zij bedragen:

$k = 0{,}475129920$

$1 + k^2 = 1{,}225748441$

$\text{arctg } k = 0{,}443554334$

Vervolgens de tafels van y, y' en y".

[/] = in de omgeving van x = k

x	y	y'	y"
- 2,0	3,6292	- 1,1324	- 0,42534
- 1,9	3,5138	- 1,1766	- 0,46138
- 1,8	3,3938	- 1,2248	- 0,50247
- 1,7	3,2687	- 1,2774	- 0,54965
- 1,6	3,1381	- 1,3350	- 0,60424
- 1,5	3,0015	- 1,3985	- 0,66800
- 1,4	2,8582	- 1,4690	- 0,74323
- 1,3	2,7074	- 1,5476	- 0,83309
- 1,2	2,5483	- 1,6362	- 0,94195
- 1,1	2,3798	- 1,7369	- 1,07612
- 1,0	2,2005	- 1,8526	- 1,24509
- 0,9	2,0086	- 1,9876	- 1,46376
- 0,8	1,8021	- 2,1478	- 1,75743
- 0,7	1,5779	- 2,3431	- 2,17362
- 0,6	1,3318	- 2,5900	- 2,81937
- 0,5	1,0573	- 2,9256	- 4,07363
- k	0,9829	- 3,0344	- 4,78621
- 0,4	0,7395	- 3,4611	- 6,22579
- 0,3	0,3615	- 4,1015	- 6,31405
- 0,2	- 0,0784	- 4,6717	- 4,83964
- 0,1	- 0,5655	- 5,0233	- 1,99855
0	- 1,0719	- 5,0430	1,68116
0,1	- 1,5614	- 4,6857	5,40090
0,2	- 1,9976	- 3,9883	8,37157
0,3	- 2,3512	- 3,0534	10,10260
0,4	- 2,6048	- 2,0120	10,51836
k	- 2,7265	- 1,1802	10,11081
0,5	- 2,7541	- 0,9852	9,87168
0,6	- 2,8052	- 0,0598	8,55945
0,60702	- 2,8054	0,0000	8,45261
0,7	- 2,7710	0,7173	6,96140
0,8	- 2,6672	1,3324	5,35673
0,9	- 2,5097	1,7940	3,90987
1,0	- 2,3129	2,1221	2,69318
1,1	- 2,0889	2,3408	1,71898
1,2	- 1,8476	2,4733	0,96715
1,3	- 1,5964	2,5405	0,40398
1,4	- 1,3411	2,5592	- 0,00685
1,5	- 1,0858	2,5430	- 0,29869
1,6	- 0,8333	2,5025	- 0,49982
1,7	- 0,5858	2,4454	- 0,63302
1,8	- 0,3446	2,3775	- 0,71614
1,9	- 0,1105	2,3033	- 0,76281
2,0	0,1160	2,2258	- 0,78331
2,1	0,3346	2,1473	- 0,78532
2,2	0,5454	2,0692	- 0,77452
2,3	0,7485	1,9927	- 0,75505
2,4	0,9440	1,9184	- 0,72995
2,5	1,1323	1,8468	- 0,70142

x	y	y'	y"
2,6	1,3135	1,7782	- 0,67102
2,7	1,4880	1,7126	- 0,63989
2,8	1,6561	1,6502	- 0,60879
2,9	1,8181	1,5908	- 0,57826
3,0	1,9744	1,5345	- 0,54867
3,1	2,1251	1,4811	- 0,52025
3,2	2,2707	1,4304	- 0,49311
3,3	2,4113	1,3824	- 0,46735
3,4	2,5472	1,3369	- 0,44297
3,5	2,6788	1,2938	- 0,41996
3,6	2,8061	1,2528	- 0,39830
3,7	2,9294	1,2140	- 0,37792
3,8	3,0489	1,1772	- 0,35878
3,9	3,1649	1,1422	- 0,34081
4,0	3,2775	1,1090	- 0,32395
4,1	3,3868	1,0774	- 0,30812
4,2	3,4930	1,0474	- 0,29327
4,3	3,5963	1,0187	- 0,27933
4,4	3,6968	0,9915	- 0,26625
4,5	3,7946	0,9655	- 0,25396
4,6	3,8899	0,9406	- 0,24241
4,7	3,9828	0,9170	- 0,23155
4,8	4,0733	0,8943	- 0,22133
4,9	4,1617	0,8727	- 0,21172
5,0	4,2479	0,8520	- 0,20266
5,1	4,3321	0,8321	- 0,19412
5,2	4,4144	0,8131	- 0,18607
5,3	4,4948	0,7949	- 0,17847
5,4	4,5734	0,7774	- 0,17130
5,5	4,6502	0,7606	- 0,16451
5,6	4,7255	0,7445	- 0,15810
5,7	4,7992	0,7290	- 0,15203
5,8	4,8713	0,7141	- 0,14628
5,9	4,9420	0,6997	- 0,14083
6,0	5,0113	0,6859	- 0,13566
6,1	5,0792	0,6726	- 0,13075
6,2	5,1458	0,6597	- 0,12609
6,3	5,2112	0,6474	- 0,12166
6,4	5,2753	0,6354	- 0,11745
6,5	5,3383	0,6239	- 0,11345
6,6	5,4001	0,6127	- 0,10963
6,7	5,4608	0,6019	- 0,10600
6,8	5,5205	0,5915	- 0,10253
6,9	5,5791	0,5814	- 0,09922
7,0	5,6368	0,5716	- 0,09607