STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

REKENAFDELING

R 93

Verslag naar aanleiding van het onderzoek van biologisch-landbouwkundige aard van Dr. P.J.H. van Ginneken betreffende samenhangende opbrengstcijfers y en z in de loop t der groeiperioden.

door

[Staf van de Rekenafdeling]

[1950]

Rapport R 93.

Inleiding.

In een onderzoek van biologisch-landbouwkundige aard van Dr P.J.H. van Ginneken worden samenhangende opbrengstcijfers y en z bestudeerd in de loop t der groeiperiode. Een opgestelde werkhypothese leidt tot de volgende relaties:

$$z = B(1-e^{-\beta y}) - Ay \tag{1}$$

en

$$K_2' \, t = \int^{y} \frac{dy}{z.y} = I \tag{2}$$

In (2) is K_2' een niet nader gedefinieerde constante en is de ondergrens der integratie op een passende wijze te kiezen.

De opgave luidde nu enerzijds uit gegeven empirische waarnemingen (t,z,y) met behulp van de methode der kleinste quadraten de beste waarden der parameters A, B en β af te leiden, anderzijds de integratie van (2) zodanig uit te voeren, dat de parameters A, B en β zo goed mogelijk behouden blijven en voorts deze integratie werkelijk uit te voeren voor de gevonden parameterwaarden.

Berekening van de parameters A, B en β.

Zij

$$R_k = z_k - B(1-e^{-\beta y_k}) + Ay_k \, , \tag{3}$$

dan dienen A, B en β zo bepaald te worden, dat

$$\sum_k R_k^2 = \text{minimum} \, . \tag{4}$$

Uit (3) volgen de partiele afgeleiden:

$$\frac{\partial R_k}{\partial A} = y_k \, , \quad \frac{\partial R_k}{\partial B} = -(1-e^{-\beta y_k}) \, , \quad \frac{\partial R_k}{\partial \beta} = -\,By_k \, e^{-\beta y_k} \tag{5}$$

Vergelijking (4) is identiek met het drietal:

$$U = \sum_k \frac{\partial R_k}{\partial A} R_k = 0, \; V = \sum_k \frac{\partial R_k}{\partial B} R_k = 0, \; W = \sum_k \frac{\partial R_k}{\partial \beta} R_k = 0 \, . \tag{6}$$

Bij gegeven A, B en β zijn natuurlijk i.h.a. U, V en W niet allen nul. Dan moeten deze grootheden vermeerderd worden met grootheden ΔA, ΔB en $\Delta\beta$, welke schattenderwijs volgen uit de drie vergelijkingen.

$$\frac{\partial U}{\partial A}\Delta A + \frac{\partial U}{\partial B}\Delta B + \frac{\partial U}{\partial \beta}\Delta\beta = -\Delta U,$$

$$\frac{\partial V}{\partial A}\Delta A + \frac{\partial V}{\partial B}\Delta B + \frac{\partial V}{\partial \beta}\Delta\beta = -\Delta V, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial A}\Delta A + \frac{\partial W}{\partial B}\Delta B + \frac{\partial W}{\partial \beta}\Delta\beta = -\Delta W .$$

Hierin is dus:

$$\frac{\partial U}{\partial A} = \sum y_k^2 \;;\; \frac{\partial V}{\partial A} = \frac{\partial U}{\partial B} = -\sum (1-e^{-\beta y_k})y_k \;;\; \frac{\partial W}{\partial A} = \frac{\partial U}{\partial \beta} = -B\sum y_k^2\, e^{\beta y_k} \;;$$

$$\frac{\partial V}{\partial B} = -\sum (1-e^{-\beta y_k})^2; \;\; \frac{\partial W}{\partial B} = \frac{\partial V}{\partial \beta} = -B\sum y_k(1-e^{-\beta y_k})e^{-\beta y_k} + \sum R_k y_k\, e^{-\beta y_k};$$

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = -B^2\sum y_k^2\, e^{-2\beta y_k} - B\sum R_k\, y_k^2\, e^{-\beta y_k} .$$

Op deze wijze vindt men betere waarden voor A, B en β. Na enige iteraties zijn A, B en β constant geworden. Een maatstaf voor de benadering is bovendien $\sum R_k^2$.

Uitgegaan werd van een volgens grafische methoden verkregen ruwe schatting:

$A = 0.8025$; $B = 862.0$; $\beta = 0.01140$. Hierbij is $\sum R_k^2 = 182428$.

De laatste iteratieresultaten, welke niet noemenswaard meer verschillen, luiden:

$A = 0.7677$; $B = 871.1$; $\beta = 0.006373$; $\sum R_k^2 = 60286$.

$A = 0.7653$; $B = 869.3$; $\beta = 0.006393$. ; $\sum R_k^2 = 60285$.

Deze laatste waarden worden als uiteindelijk beschouwd.

3. <u>Het berekenen van de integraal.</u>

Te berekenen is de integraal

$$I = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y\{B(1-e^{-\beta y})-Ay\}} . \qquad (8)$$

Wij voeren in:

$$\eta = \beta y \;;\; \gamma = A/(B\beta - A) \;;\; B - A/\beta = C \;; \qquad (9)$$

$$F_\gamma(x) = \int_1^x \frac{d\eta}{\eta\{1-e^{-\eta}-\gamma(e^{-\eta}+\eta-1)\}} . \qquad (10)$$

Dan is

$$I = \frac{1}{C} \left\{ F_\gamma(\beta y) - F_\gamma(\beta y_0) \right\} . \qquad (11)$$

Uit de numerieke waarden van A, B en β volgt in het onderhavige geval:

$$\gamma = 0.1597 \quad ; \qquad C = 749.6 \; .$$

De integraal $F_\gamma(x)$ werd op tweerlei wijzen berekend. Voor $x \geq 2.5$ werd zij door numerieke integratie gewonnen. Voor kleine x daarentegen kan men gemakkelijk een reeksontwikkeling naar x afleiden, door de noemer in een machtreeks naar η te ontwikkelen. Dan vindt men:

$$F_\gamma(x) = \Big[-\eta^{-1} + \frac{1+\gamma}{2} \ln \eta + \left\{ \frac{(1+\gamma)^2}{4} - \frac{1+\gamma}{6} \right\} \eta + \left\{ \frac{(1+\gamma)^3}{16} - \frac{(1+\gamma)^2}{12} + \frac{1+\gamma}{48} \right\} \eta^2$$
$$+ \left\{ \frac{(1+\gamma)^4}{48} - \frac{(1+\gamma)^3}{24} + \frac{5(1+\gamma)^2}{216} - \frac{1+\gamma}{360} \right\} \eta^3 + \ldots \Big]_1^x \qquad (12)$$

Voor de speciale waarde van $\gamma = 0.1597$ is

$$F_{0.1597}(x) = \left[-\eta^{-1} + 0.57985 \ln \eta + 0.14294\, \eta + 0.00957\, \eta^2 + 0.00061\, \eta^3 + \ldots \right]_1^x$$

Op deze wijze werd $F_\gamma(x)$ berekend en hieruit I, waarbij βy_0 arbitrair gelijk aan 1 werd gesteld, voor een aantal ronde waarden van y. Men mag dus een arbitraire constante bij I optellen. De resultaten zijn vermeld in onderstaande tabel.

y	I	y	I
0	-	100	- 0.00118
1	- 0.211	150	- 0.00010
2	- 0.107	200	0.00054
5	- 0.0433	300	0.00136
10	- 0.0219	400	0.00193
15	- 0.0146	500	0.00239
20	- 0.0109	600	0.00283
25	- 0.00861	700	0.00326
50	- 0.00386	800	0.00373
75	- 0.00213		