Stichting
MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
Amsterdam

R 124

Stroming van Twee Homogene Vloëistoffen met Gemeenschappelijk Grensvlak in een Poreus Medium

[1952]

Stroming van twee homogene vloeistoffen met gemeenschappelijk grensvlak in een poreus medium.

1. Inleiding.

Dit rapport belicht een aantal aspecten van het volgende probleem.

Tussen twee evenwijdige ondoorlaatbare wanden bevinden zich in een poreus medium twee homogene vloeistoffen met dichtheden γ_1 en γ_2 en op afstand x boven de onderste wand bevindt zich een put (pompmechanisme) met behulp waarvan de bovenste vloeistof weggepompt wordt. Stel de vloeistoffen strekken zich tot in het oneindige uit en tot op het tijdstip t = 0 is alles in rust. Het grensvlak der twee vloeistoffen is da[n] horizontaal, zegge p meter, boven de onderste ondoorlaatbare laag. Gevraagd wordt nu een en ander te vertellen over de beweging van de zwaardere vloeistof, indien op tijdstip t = 0 de put ter sterkte Q wordt aa[n]gezet.

Theorie en berekeningen werden uitgevoerd ten behoeve van de Gemeen[te]telijke Waterleidingen van Amsterdam. Bij de duinwatervoorziening is m[en] n.l. op dit probleem terechtgekomen, waarbij de eerste vloeistof zoet- de tweede zoutwater is. Dit probleem is echter onder de naam "waterconing" bekend bij de oliewinning. *)

2. Algemene beschouwingen.

In het vervolg zullen alle grootheden, welke betrekking hebben op d[e] eerste resp. tweede vloeistof, voorzien worden van de index 1 resp. 2.

De potentiaal zal worden aangeduid met de letter φ, de druk met p, de versnelling van de zwaartekracht met g, de viscositeit met μ en constanten van Darcy met k. De afstand der twee parallelle wanden zij H.

Het probleem is axiaal-symmetrisch, er wordt echter wel eens gewerk[t] in het Cartesische stelsel met z-as door de put loodrecht op de onders[te] wand, welke laatste tevens de x- en y-as bevat. Veelal wordt ook een (z,r,ϑ) systeem gebruikt, waarbij de z-as gelegd is als in het Cartesische stelsel, de oorsprong ligt steeds in de onderste vaste wand.

De beweging der vloeistoffen wordt, afgezien van de werking van het pompmechanisme, beinvloed door de zwaartekracht, de viscositeit en de diffusie.

De diffusie zal geheel buiten beschouwing gelaten worden. In verban[d] met het feit, dat de snelheden klein zijn, zal de diffusie slechts in een laagje optreden, welk laagje dan maar als grensvlak geidealiseerd dient te worden.

Het viscositeitseffect zal in paragraaf 3 nader bestudeerd worden, maar blijkt dan van geringer orde dan de zwaartekracht, zodat uitsluitend deze laatste ter verdere bestudering overblijft.

3. De viscositeit.

Ten einde een indicatie te krijgen over de invloed van het verschil in viscositeit der twee vloeistoffen, beschouwe men het volgende probleem:

Er worde homogeen zoet water aangezogen door de put Q, zich bevinden in het bovenste van twee poreuze media met horizontaal grensvlak, op ee hoogte h daarvan gelegen. In de twee media is de constante van Darcy ve schillend (k_1 en k_2).

In de bovenste laag denke men zich de potentiaal opgebouwd uit een term φ_1^o ten gevolge van het veld van de put en een storingsterm φ_1^1 te gevolge van het aanwezig zijn van een vlak van discontinuiteiten in de constante van Darcy.

In het axiaal-symmetrische coordinatenstelsel (z,r,ϑ) moet men vol doen aan de potentiaalvergelijking

$$\varphi_{rr} + r\,\varphi_r + \varphi_{zz} = 0, \tag{3.1}$$

met de voorwaarden in het grensvlak $z = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1 = \varphi_2\,, \\ &k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Substitueert men nu

$$\varphi_1^o = \frac{Q}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda|z-h|}\, J_o(\lambda r)\,d\lambda, \tag{3.3}$$

$$\varphi_1^1 = \int_0^\infty f_1(\lambda) e^{-\lambda z}\, J_o(\lambda r)\,d\lambda, \tag{3.4}$$

$$\varphi_2 = \int_0^\infty f_2(\lambda) e^{\lambda z}\, J_o(\lambda r)\,d\lambda, \tag{3.5}$$

waarbij de $f_1(\lambda)$ en $f_2(\lambda)$ nader te bepalen zijn met behulp van (3.2). vindt dan

$$f_1(\lambda) = \varepsilon_1 \frac{Q}{4\pi}\, e^{-\lambda h}, \tag{3.6}$$

$$f_2(\lambda) = \varepsilon_2 \frac{Q}{4\pi}\, e^{\lambda h}, \tag{3.7}$$

met $\varepsilon_1 = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$ en $\varepsilon_2 = \frac{2k_1}{k_1+k_2}$.

Op de positieve z-as geldt dan:

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi}\left\{-\frac{1}{z-h} + \frac{\varepsilon_1}{z+h}\right\}$$

en dus

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q}{4\pi}\left\{\frac{1}{(z-h)^2} - \frac{\varepsilon_1}{(z+h)^2}\right\}.$$

De tijd, waarin de afstand h van het scheidingsvlak tot de put word afgelegd, voor een deeltje op de z-as, is nu gelijk aan:

$$t = \frac{4\pi}{Q} \int_{0}^{h} \frac{dz}{\frac{1}{(z-h)^2} - \frac{\varepsilon}{(z+h)^2}} \sim \frac{4\pi\, h^3}{3Q} \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{3}\right) \qquad (3.8$$

Uit de opgegeven waarden voor de k_1 en k_2 volgt $\varepsilon_1 = 0.04$. In dit probleem zal dus de invloed der viscositeit ten hoogste 2% bedragen, i wat verwaarloosd wordt. Alhoewel hier geen rekening is gehouden met de vaste wanden, is toch niet te verwachten, dat in het in de inleiding geformuleerde probleem de invloed van de viscositeit groter zal zijn.

Men bepale zich dus verder tot de zwaartekracht.

4. Het zwaartekrachtsveld.

Het scheidingsvlak der twee vloeistoffen is een discontinuiteitsvla De potentiaal wordt in de eerste vloeistoffen gegeven door

$$\bar{\varphi}_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma_1 g}, \qquad (4.1$$

en de snelheid door

$$\vec{v}_1 = k_1 \text{ grad } \bar{\varphi}_1. \qquad (4.2$$

Evenzo voor de tweede vloeistof

$$\bar{\varphi}_2 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma_2 g} \qquad (4.3$$

en

$$\vec{v}_2 = k_2 \text{ grad } \bar{\varphi}_2 \qquad (4.4$$

Voert men echter in als potentialen:

$$\varphi_1 = k_1 \bar{\varphi}_1 = k_1 z_1 + \frac{k_1 p_1}{\gamma_1 p} \qquad (4.5$$

$$\varphi_2 = k_2 \bar{\varphi}_2 = k_2 z_2 + \frac{k_2 p_2}{\gamma_2 g} \qquad (4.5$$

en dus

$$\vec{v}_{1,2} = \text{grad } \varphi_{1,2} \qquad (4.6$$

dan geldt op het grensvlak

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= z_2 \\ p_1 &= p_2 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{aligned}\right\} \qquad (4.7$$

Men kan zich nu in het gehele veld één enkele potentiaalfunctie φ denken, welke ter plaatse aan het scheidingsvlak een discontinuiteit vertoont van de grootte

$$\Delta \varphi = (k_1 - k_2)z + \left(\frac{k_1}{\gamma_1 g} - \frac{k_2}{\gamma_2 g}\right) p. \tag{4.8}$$

Nu wordt verondersteld, dat men bij benadering kan schrijven

$$p = -\tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)\, gz, \tag{4.9}$$

zodat de sprong, welke optreedt in de potentiaal gelijk wordt aan

$$\Delta \varphi = k \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1} z \tag{4.10}$$

waarin tevens $k_1 = k_2$ gesteld is.

Nu is bekend, dat een discontinuiteitsvlak in de potentiaal ter ster[illegible] Λ overeenkomt met een dipoolbelegging (ev. wervelbelegging) van dat vlak.

Men kan zich dus het veld opgebouwd denken uit een potentiaal φ^0 t[illegible] gevolge van het op het tijdstip $t = 0$ in werking gestelde pomp-mechani[illegible] me en een potentiaal ten gevolge van het vlak met dipoolbelegging gelijk aan

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Lambda \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r_{12}}\right) d\,O,$$

waarin de integratie uitgestrekt dient te worden over het gehele disco[illegible] tinuiteitsvlak, r_{12} is de afstand van een ruimtepunt tot een variabel punt van het integratieoppervlak en ν de naar boven gekeerde normaal op het oppervlak. De bewegingvan het grensvlak der twee vloeistoffen i[illegible] dus te bestuderen aan de hand van de volgende integro-differentiaalver[illegible] gelijkingen:

$$\frac{dx}{dt} = -\left\{\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \iint_S \Lambda \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \cdot \frac{1}{r_{12}}\, d\,O\right\}. \tag{4.11}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\left\{\frac{\partial \varphi^0}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} \iint_S \Lambda \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \cdot \frac{1}{r_{12}} .d\,O\right\}. \quad (4.11$$

$$\frac{dz}{dt} = -\left\{\frac{\partial \varphi^0}{\partial z} + \frac{1}{4\pi} \iint_S \Lambda \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \cdot \frac{1}{r_{12}} \cdot d\,O\right\}. \quad (4.11$$

Op elk ogenblik kan dus de snelheid van een deeltje op het oppervla[illegible] berekend worden, indien de plaats en de vorm van het oppervlak bekend i[illegible] Het is dus mogelijk de integratie, stapsgewijze uit te voeren en men heeft dus een oplossingsmethode verkregen, welke alleen de vereenvoudi[illegible] ging (4.9) bevat. Deze methode heeft echter een groot bezwaar, zij is n.l. te bewerkelijk. Het probleem is nog steeds twee-dimensionaal, weliswaar onafhankelijk van ϑ, maar wel afhankelijk van t en r. Nu ka[illegible] men vermoeden, dat de afhankelijkheid van r wellicht uit het probleem is weg te werken. Van het oppervlak weet men uit ervaringsfeiten, d[illegible] in de beginne de top vlak is, d.w.z. de eerste afgeleide waar r i[illegible] gelijk aan nul, zodat het mogelijk moet zijn enige vrij nauwkeurig bij de werkelijkheid aansluitende, mathematisch gemakkelijk hanteerbare oppervlak aan te nemen, welke het probleem niet noemenswaard zullen beinvloeden. Daar zijn in het volgende allereerst 2 oppervlakken nader bestudeerd, welke de z.g. klokvorm bezitten en ook, maar met het oog op het "doorschieten" der top naar de put, een kegelvormig oppervlak.

5. __Klokvormig oppervlak.__

Zij ξ de z-coordinaat op het dipoolvlak en ρ de r-coordinaat. Nu zij

$$\xi - p = (h-p)\; f(\rho/a), \tag{5.1}$$

waarbij a een parameter voorstelt, nodig om de tweede afgeleide in de top vast te leggen. Verder dient de functie f zodanig gekozen, dat voor $\rho \to \infty$ $\xi = p$ wordt.

Uit de integro-differentiaalvergelijkingen kunnen nu een tweetal differentiaalvergelijkingen voor h-p en a worden afgeleid, welke dus uit de gegeven begintoestand numeriek geintegreerd kunnen worden.

Een integratie kan men zich direct uitgevoerd denken, n.l. die over ϑ. Zij $\Phi(r,z,\rho,\xi)$ de potentiaal in het punt (r,z) der ruimte tengevolge van een ring dipolen ter sterkte 1, beschreven door de ring (ρ,ξ) op het discontinuiteitsoppervlak, dan heeft men

$$\frac{dr}{dt} = -\left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial r} + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \Lambda \,.\, \frac{\partial \Phi}{\partial r} \,.\, \rho \,.\, ds\right) \tag{5.2}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial z} + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \Lambda \,.\, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \,.\, \rho \,.\, ds\right) \tag{5.2}$$

Men kan in plaats van het oppervlak zich dan verder beperken tot een beschouwing van de kromme, welke door wenteling het oppervlak voortbrengt. De kromming van de curve (5.1) in de top $\rho = 0$ wordt weergegeven door

$$K = \frac{1}{R} = -\frac{d^2\xi}{d\rho^2} = -\frac{h}{a^2}\, f''(\rho/a) \tag{5.3}$$

De verandering van de kromming met de tijd wordt berekend door toepassing van de opvatting van Lagrange. Op het tijdstip t = 0 is h = p en de deeltjes van het grensvlak liggen op de lijn z = p. De parameter, welke de deeltjes karakteriseert is dan hun r-coordinaat λ. Op elk tijdstip zijn dus ρ en ξ functies van λ en t en na invoering van

$$\psi = -\left\{\varphi^0 + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \Lambda(\lambda,t)\,\Phi(r,z,\rho,\xi)\,.\,\rho\,.\,ds\right\} \tag{5.4}$$

ziet men

$$\frac{\partial r(\lambda,t)}{\partial t} = \psi_r$$

$$\frac{\partial z(\lambda,t)}{\partial t} = \psi_z.$$

In de top geldt:

$$\frac{dh}{dr} = \frac{\frac{\partial h}{\partial \lambda}}{\frac{\partial r}{\partial \lambda}} = 0$$

$$K = \frac{-\partial^2 h}{\partial r^2} = -\frac{\frac{\partial^2 h}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial h}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial \lambda^2}}{(\frac{\partial r}{\partial \lambda})^2} = -\frac{\frac{\partial^2 r}{\partial \lambda^2}}{(\frac{\partial z}{\partial \lambda})^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial r}{\partial \lambda} = \psi_{rr}\cdot\frac{\partial r}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \psi_{zz}\cdot\frac{\partial z}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda^2} = \gamma_{zrr}\cdot(\frac{\partial z}{\partial \lambda})^2 + \psi_{zz}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{r}{\partial \lambda} = \psi_{rr}\cdot\frac{\partial r}{\partial \lambda}$$

waarbij gebruik is gemaakt van

$$\psi_{zzr} = \gamma_{zr} = \frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0 \text{ voor } r = 0.$$

En zo vindt men tenslotte

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \gamma_z \qquad (5.5$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = K\left\{\gamma_{zz} - 2\,\gamma_{rr}\right\} - \gamma_{zrr}, \qquad (5.5$$

als differentiaalvergelijkingen voor de h en K. Het eerste doel is nu bepaling van de functie $\Phi(r,z,\rho,\xi)$.

6. Berekening van de potentiaal van een dipoolring.

Eenvoudig in te zien is

$$\Phi(r,z,\rho,\xi) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r_{12}}\right) d\vartheta \qquad (6.1$$

en

$$r_{12}^2 = r^2 + \rho^2 - 2\,r\rho\cos\vartheta + (z-\xi)^2$$

ϑ is daarbij de hoek tussen de meridiaanvlakken van het punt (r,z) wa de potentiaal berekend wordt en van het punt (ρ,ξ) op de dipoolring. Z verder ν de hoek, welke de normaal met de r-as maakt, dan is

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \rho}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial \xi}\sin\alpha.$$

Gemakkelijk af te leiden zijn

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial \rho} = \frac{\rho - r\cos\vartheta}{r_{12}} \quad , \quad \frac{\partial r_{12}}{\partial r} = \frac{r-\rho\cos\vartheta}{r_{12}} , \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial \xi} = -\frac{(z-\xi)}{r_{12}} \quad , \quad \frac{\partial r_{12}}{\partial z} = \frac{z-\xi}{r_{12}} , \tag{6.2}$$

met behulp waarvan te schrijven is

$$\Phi(r,z,\rho,\xi) = -\cos\alpha\,\Phi' + \sin\alpha\,\Phi'' \tag{6.3}$$

waarin

$$\Phi' = \int_0^{2\pi} (\rho - r\cos\vartheta) r_{12}^{-3}\, d\vartheta .$$

en

$$\Phi'' = \int_0^{2\pi} (z-\xi).\, r_{12}^{-3}\, d\vartheta .$$

En men vindt

$$\Phi'_z = -3(z-\xi)\int_0^{2\pi} (\rho - r\cos\vartheta) r_{12}^{-5}\, d\vartheta ,$$

$$\Phi''_z = \int_0^{2\pi} r_{12}^{-3}\, d\vartheta - 3(z-\xi)^2 \int_0^{2\pi} r_{12}^{-5}\, d\vartheta ,$$

$$\Phi'_{zz} = -3\int_0^{2\pi} (\rho - r\cos\vartheta) r_{12}^{-5}\, d\vartheta + 15\,(r-\xi)^2 \int_0^{2\pi} (\rho - r\cos\ ) r_{12}^{-7}$$

$$\Phi''_{zz} = -9\,(z-\xi)\int_0^{2\pi} r_{12}^{-5}\, d\vartheta + 15(z-\xi)^3 \int_0^{2\pi} r_{12}^{-7}\, d\vartheta ,$$

$$\Phi'_r = -3\int_0^{2\pi} (\rho - r\cos\vartheta)(r-\rho\cos\vartheta) r_{12}^{-5}\, d\vartheta - \int_0^{2\pi} \cos\vartheta\, r_{12}^{-3}\, d\vartheta ,$$

$$\Phi''_r = -3\,(z-\rho)\int_0^{2\pi} (r-\rho\cos\vartheta) r_{12}^{-5}\, d\vartheta ,$$

$$\Phi'_{rr} = 3\int_0^{2\pi} \cos\vartheta (r-\rho\cos\vartheta) r_{12}^{-5}\, d\vartheta + 15\int_0^{2\pi} (\rho - r\cos\vartheta)(r-\rho\cos\vartheta)^2 r_{12}^{-7}$$

$$\Phi''_{rr} = -3\,(z-\xi)\int_0^{2\pi} r_{12}^{-5}\, d\vartheta + 15(z-\xi)\int_0^{2\pi} (r-\rho\cos\vartheta)^2\, r_{12}^{-7}\, d\vartheta ,$$

$$\Phi'_{rrz} = 15(z-\xi)\int_0^{2\pi} (\rho - r\cos\vartheta) r_{12}^{-7}\, d\vartheta - 30(z-\xi)\int_0^{2\pi} \cos\vartheta (r-\rho\cos\vartheta) r_{1}$$

$$- 105(z-\xi)\int_0^{2\pi} (\rho - r\cos\vartheta)(r-\rho\cos\vartheta)^2\, r_{12}^{-9}\, d\vartheta ,$$

$$\Phi''_{rrz} = -3\int_0^{2\pi} r_{12}^{-5}\, d\vartheta + 15(z-\xi)^2 \int_0^{2\pi} r_{12}^{-7}\, d\vartheta + 15\int_0^{2\pi} (r-\rho\cos\vartheta)^2\, r_{12}^{-7} d$$

$$- 105\,(z-\xi)^2 \int_0^{2} (r-\rho\cos\vartheta)^2\, r_{12}^{-9}\, d\vartheta .$$

Na $r = 0$ gesteld te hebben en $r_{12}^2 = R^2 = \rho^2 + (z-\xi)^2$, komt er tenslotte

$$\Phi_z' = 6\pi\rho(z-\xi).R^{-5}, \tag{6.4}$$

$$\Phi_z'' = 2\pi R^{-3} - 6\pi(z-\xi)^2 R^{-5}, \tag{6.4}$$

$$\Phi_{zz}' - 2\Phi_{rr}' = 18\pi\rho R^{-5} + 30\pi\rho\{(z-\xi)^2 - \rho^2\} R^{-7}, \tag{6.4}$$

$$\Phi_{zz}'' = 2\Phi_{rr}'' = -6\pi(z-\xi)R^{-5} + 30\pi(z-\xi)\ (z-\xi)^2 - \rho^2\} R^{-7}, \tag{6.4}$$

$$\Phi_{rrz}' = 60\pi\rho(z-\xi)R^{-7} - 105\pi\rho^3(z-\xi)R^{-9}, \tag{6.4}$$

$$\Phi_{rrz}'' = -6\pi R^{-5} + 30\pi(z-\xi)^2 R^7 + 15\pi\rho^2 R^{-7} - 105\pi\rho^2(z-\xi)^2 R^{-9}. \tag{6.4}$$

De differetiaalvergelijkingen voor de hoogte en de kromming zijn nu in verband met

$$\cos\alpha = -\frac{d\xi}{ds} \quad \text{en} \quad \sin\alpha = \frac{d\rho}{ds}$$

gemakkelijk te geven. Neem $\xi = \xi(\rho)$, dus als een functie van ρ, dan volgt:

$$\frac{dz}{dt} = -\left\{\varphi_z^o + \pi\sigma\int_0^\infty \xi\ R^{-5}\left[-3\rho^2(z-\xi)d\xi + \{R^2 - 3(z-\xi)^2\}\rho\ d\rho\right]\right\},$$

$$\frac{dK}{dt} = -K\left\{-4\varphi_{rr}^o + 3\pi\sigma\int_0^\infty \xi\ .R^{-7}\left[\{3\rho R^2 + 5\rho\left[(z-\xi)^2 - \rho^2\right]\}\rho\, d\rho + \{-(z-\xi)R^2 + 5(z-\xi)\left[(z-\xi)^2 - \rho^2\right]\}\rho\, d\rho\right]\right\}$$

$$+\left\{\varphi_{rrz}^o + \frac{3\pi\sigma}{2}\int_0^\infty \xi.R^{-9}\left[\rho^2(z-\xi)\{20R^2 - 35\rho^2\}d\xi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \{-2R^4 + 10(z-\xi)^2R^2 + 5\rho^2R^2 - 35\rho^2(z-\xi)^2\}\rho\, d\rho\right]\right\},$$

en deze vergelijkingen zijn om te werken tot

$$\frac{dh}{dt} = -\left\{\varphi_z^o - \pi\int_{\rho=0}^\infty \Lambda\ d\left[\frac{\rho^2}{R^3}\right]\right\}, \tag{6.5}$$

$$\frac{dK}{dt} = K\left\{4\varphi_{rr}^o - 6\pi\int_{\rho=0}^\infty \Lambda\, d\left[\frac{\rho^2(z-\xi)}{R^5}\right]\right\} + \left\{\varphi_{rrz}^o + \frac{3\pi}{2}\int_{\rho=0}^\infty \Lambda\, d\left[\frac{\rho^2\{-\rho^2+4(z-\xi}{R^7}\right.\right. \tag{6.5}$$

Bij controle blijkt, dat de integraal voorkomende in de eerste formule (6.5) bij afleiding naar z de eerste integraal van de tweede formul oplevert en deze laatste levert op zijn beurt weer de derde integraal.

De eerstvolgende paragraaf zal de formules ter berekening van de termen ten gevolge van de put tussen 2 evenwijdige vaste wanden bevatten. Dan zal voor de kromme (5.1) een Gauss kromme gesubstitueerd worden, later een kromme van het type

$$\xi - p = (h-p)(1+\rho^2/A)^{-3/2}.$$

7. De put in het homogene veld.

Men dient de berekening uitsluitend door te voeren voor het punt (0,h). Gebruikmakend van het spiegelingsprincipe van Schwarz (zie ook (2)) vindt men, indien ψ de logarithmische afgeleide der gammafunctie voorstelt:

$$\varphi^{o}_{z} = \frac{Q}{16 H^2 \pi}\left[\psi'\left(\frac{x-h}{2H}\right) - \psi'\left(\frac{x+h}{2H}\right) + \psi'\left(\frac{2H-x-h}{2H}\right) - \psi'\left(\frac{2H-x+h}{2H}\right)\right] \quad (7.1$$

$$\varphi^{o}_{rr} = \frac{Q}{64\pi H^3}\left[\psi''\left(\frac{x-h}{2H}\right) + \psi''\left(\frac{x+h}{2H}\right) + \psi''\left(\frac{2H-x-h}{2H}\right) + \psi''\left(\frac{2H-x+h}{2H}\right)\right] \quad (7.$$

$$\varphi^{o}_{rrz} = \frac{-3Q}{192\pi H^4}\left[\psi'''\left(\frac{x-h}{2H}\right) - \psi'''\left(\frac{x+h}{2H}\right) + \psi'''\left(\frac{2H-x-h}{2H}\right) - \psi'''\left(\frac{2H-x+h}{2H}\right)\right] \quad (7$$

8. De Gauss-kromme.

Men stelt als nieuwe variabele

$$\Lambda = \sigma(h-p)\,\lambda \quad (8.1)$$

dus

$$\xi - p = (h-p)\,\lambda \quad (8.1)$$

en

$$\lambda(\rho) = e^{-\rho^2/a^2}. \quad (8.2)$$

Voor de kromming K in $\rho = 0$ vindt men

$$K = \frac{2(h-p)}{a} \quad (8.3)$$

of

$$a = \frac{2(h-p)}{K} \quad (8.3)$$

Bij substituering van (8.2) in (6.5) dient men evenwel te bedenken, dat de dipoollaag zich bevindt tussen 2 evenwijdige ondoorlaatbare wanden. De dipoollaag moet dus gespiegeld worden in die wanden.

In den beginne zullen de bijdragen van het dipoolvlak gering zijn. In verband met de grootte der afstanden lijkt het aannemelijk uitsluitend het dipoolvlak en zijn gespiegelde in de dichtsbijzijnde wand in de berekening mede te nemen.

Voor de numerieke berekening ga men over op

$$\lambda = \cos^2 \frac{\pi}{2}\psi$$

waarbij men verder heeft

$$\rho^2 = -\frac{2(h-p)}{K}\ln\cos^2\frac{\pi}{2}\psi;$$

$$R^2 = -\frac{2(h-p)}{K}\ln\cos^2\frac{\pi}{2}\psi + (h-p)^2\sin^4\frac{\pi}{2}\psi,$$

en
$$R_{sp}^2 = -\frac{2(h-p)}{K}\ln\cos^2\frac{\pi}{2}\psi + \left\{h(1+\cos^2\frac{\pi}{2}\psi) + p\sin^2\frac{\pi}{2}\psi\right\}^2$$

Na een partiele integratie toegepast te hebben op de formules (6.5) komt er ten slotte

$$\frac{dh}{dt} = -\left[\varphi_z^o + \frac{\pi^2\sigma(h-p)^2}{K}\int_0^1 R^{-3}\ln\cos^2\frac{\pi}{2}\psi.\sin\pi\psi d\psi - \frac{\pi^2\sigma(h-p)}{K}\int_0^1 R_{sp}^{-3}\ln\cos^2\frac{\pi}{2}\psi\sin\pi\psi d\psi\right]. \qquad (8.4)$$

$$\frac{dK}{dt} = K\left[4\varphi_{rr}^o + \frac{6\pi^2\sigma(h-p)^3}{K}\int_0^1 R^{-5}\ln\cos^2\frac{\pi}{2}\psi\sin^2\frac{\pi}{2}\psi\sin\pi\psi d\psi + \right.$$
$$+ \frac{6\pi^2\sigma(h-p)^2}{K}\int_0^1 R_{sp}^{-5}\ln\cos^2\pi/2\psi\left\{h(1+\cos^2\frac{\pi}{2}\psi) + p\sin^2\pi/2\psi\right\}\sin\pi\psi d\psi$$
$$+\left[\varphi_{rrz}^o - \frac{3\pi^2\sigma(h-p)^3}{K}\int_0^1 R^{-7}\left\{K^{-1}\ln\cos^2\frac{\pi}{2}\psi + 2(h-p)\sin^4\frac{\pi}{2}\psi.\right.\right.$$
$$.\ln\cos^2\frac{\pi}{2}\psi\sin\pi\psi d\psi +$$
$$+\frac{3\pi^2\sigma(h-p)^2}{K}\int_0^1 R_{sp}^{-7}\left\{K^{-1}(h-p)\ln\cos^2\frac{\pi}{2}\psi + 2\left\{h(1+\cos^2\frac{\pi}{2}\psi) + p\sin^2\frac{\pi}{2}\psi\right.\right.$$
$$\left.\left.\ln\cos^2\frac{\pi}{2}\psi\sin\pi\psi d\psi\right\}\right] \qquad (8.5)$$

Er is thans nog een kleinigheid te vereffenen:

De integrand van de derde integraal in (8.5) wordt oneindig voor $\psi = 0$ ten gevolge van een niet toegestane verwisseling van het differentiatie- en integratieteken in de buurt van $\psi = 0$. Deze moeilijkheid wordt verholpen door van Δ af te integreren en het eerste deel $0 \leftrightarrow \Delta$ met behulp van de reeksontwikkeling voor ψ aan te pakken:

Definieer δ met

$$\cos^2\frac{\pi}{2}\Delta = e^{-\delta^2/a^2}$$

dan is de integraal van 0 tot gelijk aan

$$\frac{6\pi\sigma(h-p)}{2a^2}\left\{-\frac{1}{\delta} - \frac{16}{3}\frac{h-p}{a^2} - \frac{15(h-p)^2}{2a^4}\delta + \left[\frac{5(h-p)^2}{3a^6} + \frac{35(h-p)^4}{8a^8}\right]\delta^3 \ldots\right. \qquad (8.5)$$

Voor de volledigheid volgt nu nog:

$$h(t_{i+1}) = h(t_i) + \left(\frac{dh}{dt}\right)_{h_i,K_i} dt_i \qquad (8.6)$$

$$K(t_{i+1}) = K(t_i) + \left(\frac{dK}{dt}\right)_{h_i,K_i} dt_i \qquad (8.6)$$

$$t_{i+1} = t_i + d\,t_i. \qquad (8.6)$$

9. Enige uitkomsten.

Gebruikmakend van de volgende gegevens:

$k = 30$ m/dag
$\gamma g = 1.020$ gr/cm^3
$H = 140$ m.
$x = 126$ m.
$p = 60$ m.
$Q = 250$ m^3/dag $= 91250$ m^3/jaar.

blijkt, dat $\sigma = -219$ m/jaar en de tegenwerkende zoutinvloed is al hee spoedig groter dan de optrekkende krachten der put. Het volkomen zeewater wordt dan hoogstens 10 cm opgetrokken.

Neemt men nu het volkomen zeewater als in rust aan, dus als vaste wand en denkt men zich daarop een laag brak water met een soortelijk gewicht van 1,001 dan krijgt men de nieuwe gegevens:

$H = 80$ m.
$x = 66$ m.
$\sigma = -10{,}95$ m/jaar
$p = 1, 5, 20$ m.

Voor kleine waarden van t blijkt dan bij de berekening, dat de ter $\frac{h-p}{K}$ in $\cos^2 \frac{\pi}{2}\gamma$ voorkomende in de noemers der integranden belangrijk groter is dan $(h-p)^2 \sin^4 \frac{\pi}{2}\gamma$. Analytisch is dit in te zien aan de hand van de formules (7.1), waaruit blijkt dat K enige orders kleiner is dan h-p in het begin.

Dit levert een middel op voor een belangrijke vereenvoudiging, een vereenvoudiging welke zelfs in het begin 3 goede cijfers oplevert:

$$\frac{dh}{dt} = F+B(h-p)+\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma K^{\frac{1}{2}}(h-p)^{\frac{1}{2}} - 2\pi\sigma(h-p)^2 K^{-1}\left\{\frac{2(h-p)}{K}+4h^2\right\}^{-\frac{3}{2}} \quad (9$$

$$\frac{dK}{dt} = K\Big[C+24\pi\sigma\sqrt{\pi}(1-\sqrt{2})2^{-\frac{5}{2}}K^{\frac{1}{2}}(h-p)^{\frac{1}{2}}+12\pi\sigma(h-p)^3K^{-1}(5h+3p)\left\{\frac{2(h-p)}{K}+4h^2\right\}^{-\frac{5}{2}}$$

$$+\Big[D+E(h-p)+12\pi\sigma\sqrt{\pi}\,2^{-\frac{7}{2}}K^{\frac{3}{2}}(h-p)^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{4}{3}(1-3\sqrt{3})K(h-p)\right\}$$

$$+12\pi\sigma(h-p)^2K^{-1}\left\{\frac{2(h-p)}{K}+4h^2\right\}^{-\frac{7}{2}}\left\{\frac{2(h-p)}{K}-2(h+p)^2-(h^2-p^2)-\frac{2}{9}(h-\right.$$

(9.

F, B, C, D en E zijn constantes welke eenvoudig uit de puttermen te halen zijn.

In grafiek I is nu het h,K veld getekend voor $p = 20$ met daarin de vectoren $\frac{dH}{dK}$ voor $dt = 10^{-1}$ jaar. Verder zijn getekend de krommen $\frac{dh}{dt}$ · en $\frac{dK}{dt} = 0$. Uitgaande van $h = 0$ en $K = 0$ komt men langs de integraalbe na een paar jaar tot een stationnaire toestand $\frac{dh}{dt} = \frac{dK}{dt} = 0$, waarbij

$h = 3{,}8$ m. en $K = 0{,}0036$ zijn.

Voor lagere p is de belangrijkste verandering, deze, dat de kromme $\frac{dh}{dt} = 0$ lager ligt dan voor deze p. De stationnaire toestand wordt dus eerder bereikt.

Interessant is op te merken, dat in eerste instantie de op de $\frac{dh}{dt}$ tegenwerkende zoutinvloed evenredig is met de wortel uit de hoogte en uit de kromming der top.

Dit laatste geeft weer, dat de terugwerkende kracht in een bepaald punt niet alleen afhankelijk is van het feit of er in dat punt zout aanwezig is, maar vooral ook van de hoeveelheid zout welke in de omgeving van dat punt aanwezig is. Bij het wegnemen van het pompmechani zal een steilere piek dan sneller terugvallen dan een stompere.

10. <u>Een voor $\rho \to \infty$ niet exponentieel dalende kromme</u>.

Gaat men uit van het homogene geval, dus van één vloeistof, dan v plaatst een oorspronkelijk horizontaal vlak zich in het eerst als

$$\xi = (h-p)\chi = (h-p)(1 + \rho^2/A)^{-3/2}. \qquad (10.$$

Dit oppervlak wordt nu gebruikt om te onderzoeken, hoe de vorm van de kromme, het resultaat beinvloed

Uit (10.1) volgt $K = \frac{3(h-p)}{A}$

$$A = \frac{3(h-p)}{K}$$

en na een soortgelijke herleiding als in paragraaf 8 krijgt men

$$\frac{dh}{dt} = -\varphi_z^o + \frac{3\pi^2\sigma(h-p)A}{16}\left\{\int_0^1 R^{-3}\sin^3\pi\psi\, d\psi - \int_0^1 R_{sp}^{-3}\sin^3\pi\psi\, d\psi\right\} \quad (10$$

en

$$\frac{dK}{dt} = K\Big[4\varphi_{rr}^o + 9\pi^2\sigma(h-p)^2 A\Big\{\int_0^1 \sin^3 \tfrac{\pi}{2}\psi(1-\cos^3\tfrac{\pi}{2}\psi)\cos^5\tfrac{\pi}{2}\psi . R^{-5}$$

$$-\frac{1}{h-p}\int_0^1 \sin^3\tfrac{\pi}{2}\psi\{h+p+(h-p)\cos^3\tfrac{\pi}{2}\psi . \cos^5\tfrac{\pi}{2}\psi . R^{-5}\, d\psi\Big\}\Big]$$

$$+\varphi_{rrz} + \frac{9\pi^2\sigma(h-p)A}{4}\Big\{\int_0^1 G . \sin^3\tfrac{\pi}{2}\psi\cos^5\tfrac{\pi}{2}\psi . R^{-7}\, d\psi - \int_0^1 J\sin^3\tfrac{\pi}{2}$$

$$\cos^5\tfrac{\pi}{2}\psi R_{sp}^{-7}\, d\psi\Big\} \quad ($$

waarin $R^2 = A\sin^2\frac{\pi}{2}\psi + \cos^2\frac{\pi}{2}\psi(1-\cos^3\frac{\pi}{2}\psi)^2 (h-p)^2, \qquad (10$

$$R_{sp}^2 = A\sin^2\tfrac{\pi}{2}\psi + \cos^2\tfrac{\pi}{2}\psi\{(h+p)+(h-p)\cos^3\tfrac{\pi}{2}\psi\}^2, \qquad (10$$

$$G = -A\sin^2\tfrac{\pi}{2}\psi + 4\cos^2\tfrac{\pi}{2}\psi(h-p)(1-\cos^3\tfrac{\pi}{2}\psi) \qquad (10$$

$$J = -A\sin^2\tfrac{\pi}{2}\psi + 4\cos^2\tfrac{\pi}{2}\psi\{(h+p)+(h-p)\cos^3\tfrac{\pi}{2}\psi\}^2 \qquad (10$$

Op een zelfde wijze als in paragraaf 9 speelt ook hier $A \sin^2 \frac{\pi}{2} \psi$ een grote rol en de vereenvoudiging gaat ook hier door.

De eerste integraal in formule (10.2) levert dan

$$2\pi . 3^{-\frac{1}{2}} \sigma (h-p)^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} \qquad (10.$$

Vergelijking met formule (9.1) leert dan dat qualitatief gezien een zelfde effect wordt bereikt, quantitatief is het praetisch ook hetzelfde. De factor $\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}2533$ wordt in (10.8) vervangen door $2.3^{-\frac{1}{2}} = 1{,}1547$. De vorm der kromme, mits in tweede benadering goed in de top en de juiste waarde aannemend in $\rho = \infty$ doet er blijkbaar niets toe. Ook hier zal dus een stationnaire toestand bereikt worden.

11. Het kegeloppervlak.

Als laatste vorm zal een kegeloppervlak gesubstitueerd worden. Di vereist iets meer berekening.

Karakteriserende grootheden voor de kegel zijn nu h-p en α de tophoek der kegel. Er zijn weer uitdrukkingen nodig voor $\frac{dh}{dt}$ en $\frac{d\alpha}{dt}$, waar alleen de tweede nog afgeleid dient te worden.

Veronderstel het deeltje (ρ, ξ) op het tijdstip t de snelheden u in de ρ-richting en v in de z-richting heeft. In de top is de snelhe $\frac{dh}{dt}$. Na dt is de top gekomen in h+dh, α is overgegaan in α+dα en men ziet

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho}{h-\xi}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + d\alpha) = \frac{\rho - u\,dt}{h+dh-\xi-v\,dt} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + d\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\, d\alpha}$$

$$\xi = h - \rho \operatorname{cotg}\alpha , \qquad (11.$$

dus

$$d\alpha = \frac{-u\,dt - \operatorname{tg}\alpha(dh - v\,dt)}{dh + \rho \operatorname{cotg}\alpha - v\,dt + \rho \operatorname{tg}\alpha - u \operatorname{tg}\alpha\, dt} ,$$

of $$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\rho}\left\{ - u - \operatorname{tg}\alpha . \left(\frac{dh}{dt} - v\right)\right\} . \qquad (11.$$

Hierbij neme men nog de eerste formule van (6.5), daarbij bedenken dat de bovengrens van de integraal nu gelijk is aan $\rho = (h-p)\operatorname{tg}\alpha$

$$\frac{dh}{dt} = -\left\{ \varphi_2^0(o,h) - \frac{\pi}{2}\int_0^{(h-p)\operatorname{tg}\alpha} (\xi-p)_\rho . -6\sigma\rho(h-\xi).R^{-5}.\cos\alpha.d\rho \right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{2}\int_0^{(h-p)\operatorname{tg}\alpha} (\xi-p)_\rho .2\sigma\left\{\rho^2 - 2(h-\xi)^2\right\} R^{-5} \sin\alpha . d\rho \right\} \qquad (11.$$

Evenzo kan men uitdrukkingen voor dα u en v afleiden. Dank zij (11 zijn de integraties in (11.3) direct uit te voeren en verkrijgt men een oneindige waarde, ook de $\frac{d\alpha}{dt}$ levert oneindig.

Het is natuurlijk mogelijk dat de verwisseling van integratie en differentiatie niet is toegestaan, maar ook de berekening (in het g val $\frac{dh}{dt}$) waarbij de differentiatie na de integratie wordt uitgevoerd (een lastig werkje) levert oneindig op. Het is dus niet aannemelijk, dat het oppervlak de kegelvorm aanneemt.

12. Conclusies.

Uit het vele werk wat verricht is, valt te constateren dat de invloed der viscositeit te verwaarlozen is, en dat het oppervlak uitsluitend een singulier punt (kegelpunt) zal aannemen in de bron.

Welke vorm het discontinuiteitsvlak heeft, weet men nog niet, maar een klokvormig oppervlak zal in het algemeen een invloed hebben als aangegeven in paragraaf 8 e.v.

Het is best mogelijk, dat de oppervlakken tot nu toe beschouwd te weinig mogelijkheden inhouden, d.w.z. men zou nog een parameter vrij moeten laten (bijv. 4e afgeleide etc.). Dit laatste zou echter de hoeveelheid analytisch en numeriek werk belangrijk vergroten.

Neemt men een veel lagere concentratie zout, bijv. $\frac{1}{300}$ van het zeewater, dan is bij een laag brak water van 1 meter dikte na ongeveer 40 jaar het zoute water in de bron.

13. Literatuur.

(1) M. Muskat, The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Medi pag. 481 e.v.

(2) M.Muskat, The Flow of Homogeneous Fluids Through Poreus Medi pag. 266 e.v.


p=20
integraal-
baan.
$\frac{dk}{dt}=0$
$\frac{dh}{dt}=0$
-p
k
0
0.001
0.002
0.003
0.004
0.005
0.006
0.007
1
2
3
4
5