MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

REKENAFDELING

Leiding: Prof. Dr Ir A. van Wijngaarden

HARMONISCHE ANALYSE VAN PERIODIEKE FUNCTIES

Intern Rapport R 156.

1 9 5 3 .

HARMONISCHE ANALYSE VAN PERIODIEKE FUNCTIES

1. In dit verslag worden verschillende rekenschema's behandeld voor de harmonische analyse van periodieke functies, waarvan op een eindig aantal aequidistante punten in een periode gegeven zijn de functiewaarden zelf ofwel de waarden van de integraal der functie vanaf het begin der periode. Als de gegevens of waarnemingen min of meer afwijken van de juiste waarden (bv. door waarnemingsfouten of door storingen in de te onderzoeken functie) en deze afwijkingen volgens een of andere waarschijnlijkheidsdichtheid zijn verdeeld, wordt de nauwkeurigheid van de resultaten onderzocht.

2. Formules.

De volgende eenvoudig te bewijzen formules zullen worden toegepast:

$$\sum_{k=1}^{N} \cos \nu(k-1) = \frac{\sin\frac{1}{2} N\nu}{\sin\frac{1}{2}\nu} \cos \tfrac{1}{2}(N-1)\nu$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sin \nu(k-1) = \frac{\sin\frac{1}{2} N\nu}{\sin\frac{1}{2}\nu} \sin \tfrac{1}{2}(N-1)\nu$$

$$\sum_{k=1}^{N} \cos \nu(k-1) \cos \mu(k-1) = \frac{\sin N\frac{\nu-\mu}{2} \cos (N-1)\frac{\nu-\mu}{2}}{2 \sin \frac{\nu-\mu}{2}} + \frac{\sin N\frac{\nu+\mu}{2} \cos (N-1)\frac{\nu+\mu}{2}}{2 \sin \frac{\nu+\mu}{2}} \qquad (\nu \neq \mu)$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sin\nu(k-1) \sin\mu(k-1) = \frac{\sin N\frac{\nu-\mu}{2} \cos (N-1)\frac{\nu-\mu}{2}}{2 \sin \frac{\nu-\mu}{2}} - \frac{\sin N\frac{\nu+\mu}{2} \cos (N-1)\frac{\nu+\mu}{2}}{2 \sin \frac{\nu+\mu}{2}} \qquad (\nu \neq \mu)$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sin\nu(k-1) \cos\mu(k-1) = \frac{\sin N\frac{\nu-\mu}{2} \sin (N-1)\frac{\nu-\mu}{2}}{2 \sin \frac{\nu-\mu}{2}} + \frac{\sin N\frac{\nu+\mu}{2} \sin (N-1)\frac{\nu+\mu}{2}}{2 \sin \frac{\nu+\mu}{2}} \qquad (\nu \neq \mu)$$

$$\sum_{k=1}^{N} \cos^2 \nu(k-1) = \frac{N}{2} + \frac{\sin N\nu \cos (N-1)\nu}{2 \sin \nu}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sin^2 \nu(k-1) = \frac{N}{2} - \frac{\sin N\nu \cos (N-1)\nu}{2 \sin \nu}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sin \nu(k-1) \cos \nu(k-1) = \frac{\sin N\nu \sin (N-1)\nu}{2 \sin \nu}$$

$$
\left.\begin{array}{llllllll}
 & & f_1 & f_2 & f_3 & \cdots\cdots\cdots & f_{2h-1} & f_{2h} \\
 & f_{4h} & f_{4h-1} & f_{4h-2} & f_{4h-3} & \cdots\cdots\cdots & f_{2h+1} & \\
\hline
\text{Som} & \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots\cdots\cdots & \sigma_{2h-1} & \sigma_{2h} \\
\text{Verschil} & & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \cdots\cdots\cdots & \delta_{2h-1} &
\end{array}\right\} \qquad (3.4.1)
$$

$$
\left.\begin{array}{lllllll}
 & \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots\cdots & \sigma_{h-1} & \sigma_h \\
 & \sigma_{2h} & \sigma_{2h-1} & \sigma_{2h-2} & \cdots\cdots & \sigma_{h+1} & \\
\hline
\text{Som} & \sigma\sigma_0 & \sigma\sigma_1 & \sigma\sigma_2 & \cdots\cdots & \sigma\sigma_{h-1} & \sigma\sigma_h \\
\text{Verschil} & \delta\sigma_0 & \delta\sigma_1 & \delta\sigma_2 & \cdots\cdots & \delta\sigma_{h-1} &
\end{array}\right\} \qquad (3.4.2)
$$

$$
\left.\begin{array}{lllllll}
 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \cdots\cdots & \delta_{h-1} & \delta_h \\
 & \delta_{2h-1} & \delta_{2h-2} & \delta_{2h-3} & \cdots\cdots & \delta_{h+1} & \\
\hline
\text{Som} & \sigma\delta_1 & \sigma\delta_2 & \sigma\delta_3 & \cdots\cdots & \sigma\delta_{h-1} & \sigma\delta_h \\
\text{Verschil} & \delta\delta_1 & \delta\delta_2 & \delta\delta_3 & \cdots\cdots & \delta\delta_{h-1} & ,
\end{array}\right\} \qquad (3.4.3)
$$

dan kan het stelsel (3.3) geschreven worden in de vorm

$$
\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{k=0}^{h} \sigma\sigma_k = 4\,h\,a_0 \;;\; \sum\limits_{k=0}^{h} (-1)^k\, \sigma\sigma_k = 4\,h\,a_{2h} \\[2ex]
\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{k=0}^{h} \sigma\sigma_k \cos i\,x_k = 2\,h\,a_i \\[2ex]
\sum\limits_{k=1}^{h} \delta\delta_k \sin i\,x_k = 2\,h\,b_i
\end{array}\right\} (i = 2,4,6,\ldots,2h-2) \\[4ex]
\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{k=0}^{h} \delta\sigma_k \cos i\,x_k = 2\,h\,a_i \\[2ex]
\sum\limits_{k=1}^{h} \sigma\delta_k \sin i\,x_k = 2\,h\,b_i
\end{array}\right\} (i = 1,3,5,\ldots,2h-1)
\end{array}\right\} \qquad (3.5)
$$

Rekenschema's volgens (3.4) en (3.5) zijn bekend voor m = 12,24,36 en 100. Ter vergelijking met in de volgende §§ te behandelen schema's laten we er hier twee volgen.

a) Rekenschema voor $m = 12$ en $n \leqq 4$.

Na berekening van de grootheden $\sigma\sigma$, $\delta\sigma$, $\sigma\delta$ en $\delta\delta$ volgens (3.4) volgt:

	$\sigma\sigma_0$	$\sigma\sigma_1$
	$\sigma\sigma_3$	$\sigma\sigma_2$
Som	$\sigma\sigma\sigma_0$	$\sigma\sigma\sigma_1$
Verschil	$\delta\sigma\sigma_0$	$\delta\sigma\sigma_1$

	$\sigma\sigma\sigma_0$
	$\sigma\sigma\sigma_1$
Som	s

	$\delta\delta_1$
	$\delta\delta_2$
Som	$\sigma\delta\delta$
Verschil	$\delta\delta\delta$

I	II_1	II_2	II_3	II_4	II_5	II_6	II_7	II_8	II_9
sin 30°		$\delta\sigma_2$	$\delta\sigma\sigma_1$		$-\sigma\sigma\sigma_1$	$\sigma\delta_1$			
sin 60°		$\delta\sigma_1$				$\sigma\delta_2$	$\sigma\delta\delta$		$\delta\delta\delta$
sin 90°	s	$\delta\sigma_0$	$\delta\sigma\sigma_0$	$\delta\sigma_0$	$\sigma\sigma\sigma_0$	$\sigma\delta_3$		$\sigma\delta_1$	
				$-\delta\sigma_2$				$-\sigma\delta_3$	
$\sum(I \times II_i)$	$12a_0$	$6a_1$	$6a_2$	$6a_3$	$6a_4$	$6b_1$	$6b_2$	$6b_3$	$6b_4$

b) Rekenschema voor $m = 24$ en $n \leqq 4$.

Na berekening van de grootheden $\sigma\sigma$, $\delta\sigma$, $\sigma\delta$ en $\delta\delta$ volgens (3.4) volgt:

	$\sigma\sigma_0$	$\sigma\sigma_1$	$\sigma\sigma_2$	$\sigma\sigma_3$
	$\sigma\sigma_6$	$\sigma\sigma_5$	$\sigma\sigma_4$	
Som	$\sigma\sigma\sigma_0$	$\sigma\sigma\sigma_1$	$\sigma\sigma\sigma_2$	$\sigma\sigma\sigma_3$
Verschil	$\delta\sigma\sigma_0$	$\delta\sigma\sigma_1$	$\delta\sigma\sigma_2$	

	$\sigma\sigma\sigma_0$	$\sigma\sigma\sigma_1$
	$\sigma\sigma\sigma_3$	$\sigma\sigma\sigma_2$
Som	$\sigma\sigma\sigma\sigma_0$	$\sigma\sigma\sigma\sigma_1$
Verschil	$\delta\sigma\sigma\sigma_0$	$\delta\sigma\sigma\sigma_1$

	$\sigma\sigma\sigma\sigma_0$
	$\sigma\sigma\sigma\sigma_1$
Som	s

	$\delta\sigma_0$	$\delta\sigma_1$
	$-\delta\sigma_4$	$-\delta\sigma_3$
		$-\delta\sigma_5$
Som	$\sigma\delta\sigma_0$	$\sigma\delta\sigma_1$

	$\delta\delta_1$	$\delta\delta_2$	$\delta\delta_3$
	$\delta\delta_5$	$\delta\delta_4$	
Som	$\sigma\delta\delta_1$	$\sigma\delta\delta_2$	$\sigma\delta\delta_3$
Verschil	$\delta\delta\delta_1$	$\delta\delta\delta_2$	

	$\delta\delta\delta_1$
	$\delta\delta\delta_2$
Som	$\sigma\delta\delta\delta$

	$\sigma\delta_1$	$\sigma\delta_2$
	$\sigma\delta_3$	
	$-\sigma\delta_5$	$-\sigma\delta_6$
Som	$\sigma\sigma\delta_1$	$\sigma\sigma\delta_2$

I	II_1	II_2	II_3	II_4	II_5	II_6	II_7	II_8	II_9
sin 15°		$\delta\sigma_5$				$\sigma\delta_1$			
sin 30°		$\delta\sigma_4$	$\delta\sigma\sigma_2$		$\delta\sigma\sigma\sigma_1$	$\sigma\delta_2$	$\sigma\delta\delta_1$		
sin 45°		$\delta\sigma_3$		$\sigma\delta\sigma_1$		$\sigma\delta_3$		$\sigma\sigma\delta_1$	
sin 60°		$\delta\sigma_2$	$\delta\sigma\sigma_1$			$\sigma\delta_4$	$\sigma\delta\delta_2$		$\sigma\delta\delta\delta$
sin 75°		$\delta\sigma_1$				$\sigma\delta_5$			
sin 90°	s	$\delta\sigma_0$	$\delta\sigma\sigma_0$	$\sigma\delta\sigma_0$	$\delta\sigma\sigma\sigma_0$	$\sigma\delta_6$	$\sigma\delta\delta_3$	$\sigma\sigma\delta_2$	
$\sum(I \times II_i)$	$24a_0$	$12a_1$	$12a_2$	$12a_3$	$12a_4$	$12b_1$	$12b_2$	$12b_3$	$12b_4$

Literatuur: C. Runge, Zeitschrift für Math.und Phys. 78 (1902) en 48 (1903)
"Theorie und Praxis der Reihen", Leipzig 1904;
"Erläuterung des Rechnungsformulars zur Zerlegung einer empirisch gegebenen periodischen Function in Sinuswellen", Braunschweig 1913;
Fr.A.Willers "Practical Analysis", New York 1948;
Verlsag R 144, Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum, 1951.

4. Schema's volgens de klassieke methode, als gegeven zijn de waarden van de integraal der functie vanaf het begin der periode.

Van de functie $f(x)$ zijn de waarden der integraal $F(x)$ vanaf het begin der periode gegeven op de punten $x_k = \frac{2\pi}{m} k$ $(k = 0,1,2,\ldots,m)$ met $\frac{2\pi}{m} = \varepsilon_m$. Voor de berekening van n harmonischen (ook nu $2n+1 \leqq m+1$ nemen we, eveneals in § 3, als benadering van $f(x)$

$$y(x) = a_o + \sum_1^n i\,(a_i \cos i\,x + b_i \sin i\,x)$$

zodat

$$Y(x) = \int_{x_o}^{x} y(x)dx = Y(x_o) + a_o\,x + \sum_1^n i\,\frac{1}{i}\left\{a_i \sin i\,x + b_i(1-\cos ix)\right\}$$

een benadering is van $F(x)$.

Dan geldt:

$$\begin{aligned} y^*(x_k) &= Y(x_k) - Y(x_{k-1}) \\ &= (x_k - x_{k-1})\,a_o + \sum_1^n i\,\frac{1}{i}\Big\{a_i(\sin i\,x_k - \sin i\,x_{k-1}) - \\ &\qquad\qquad -b_i(\cos i\,x_k - \cos ix_{k-1})\Big\} \\ &= \varepsilon_m\,a_o + \sum_1^n i\Big[\frac{1}{i}\left\{a_i \sin i\,\varepsilon_m - b_i(1-\cos i\,\varepsilon_m)\right\}\cos i\,x_k \\ &\qquad + \frac{1}{i}\left\{a_i(1-\cos i\,\varepsilon_m) + b_i \sin i\,\varepsilon_m\right\}\sin i\,x_k\Big] \\ &= A_o + \sum_1^n i\,(A_i \cos i\,x_k + B_i \sin i\,x_k) \qquad (k = 1,2,\ldots,m) \end{aligned}$$

met

$$\left.\begin{aligned} A_o &= \varepsilon_m\,a_o \\ A_i &= \frac{1}{i}\left\{a_i \sin i\,\varepsilon_m - b_i\,(1-\cos i\,\varepsilon_m)\right\} \\ B_i &= \frac{1}{i}\left\{a_i(1-\cos i\,\varepsilon_m) + b_i \sin i\,\varepsilon_m\right\} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (4.1)$$

De functie $y^*(x) = A_o + \sum_1^n i\,(A_i \cos i\,x + B_i \sin i\,x)$, gedefinieerd voor de punten $x_k = \varepsilon_m k$ $(k = 1,2,\ldots,m)$, is eveneens periodiek en is te beschouwen als benadering van de functie $F(x_k) - F(x_{k-1})$ $(k = 1,2,\ldots,m)$. De coefficienten A_o, A_i en B_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ kunnen dus volgens de methode van § 3 worden berekend en de grootheid $\sum_1^m k \left\{F(x_k) - F(x_{k-1}) - y^*(x_k)\right\}^2$ is dan minimaal. Daarna volgen de coefficienten a_o, a_i en b_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ direct uit (4.1):

$$\left.\begin{array}{l} a_o = \dfrac{A_o}{\varepsilon_m} \\[2ex] \left.\begin{array}{l} a_i = \dfrac{i}{2(1-\cos i\varepsilon_m)} \left\{A_i \sin i\,\varepsilon_m + B_i(1-\cos i\,\varepsilon_m)\right\} \\[2ex] b_i = \dfrac{i}{2(1-\cos i\varepsilon_m)} \left\{B_i \sin i\,\varepsilon_m - A_i(1-\cos i\varepsilon_m)\right\} \end{array}\right\} (i=1,2,\ldots,n) \end{array}\right\} \quad (4.2)$$

5. Schema's volgens een benaderingsmethode, als de functiewaarden zelf gegeven zijn.

De minimalisering van (3.1) volgens de methode der kleinste kwadraten, hetgeen tot de vergelijkingen (3.2) leidt, betekent voor het rekenwerk, dat de waarnemingen vermenigvuldigd moeten worden met sinus- en cosinusfuncties met dezelfde periode als de te berekenen harmonischen. Het aantal vermenigvuldigingen, dat hiervoor nodig is, is tamelijk groot. Door nu de exacte sinus- en cosinusfuncties te vervangen door z.g. "vierkante" sinus- en cosinusfuncties of "zeven", d.w.z. periodieke functies met dezelfde periode als de betreffende sinus- en cosinusfuncties, die echter alleen kleine gehele waarden aannemen (b.v. $\pm$ 2, $\pm$ 1, 0) terwijl de onderlinge orthogonaliteit gehandhaafd moet blijven, worden alle vermenigvuldigingen teruggebracht tot optellingen, terwijl het aantal delingen hetzelfde blijft. Het rekenwerk blijft dus eenvoudiger. Wel moet voor iedere combinatie (n,m)-waarden afzonderlijk worden onderzocht hoe de "zeven" het meest geschikt gekozen kunnen worden; dit kan men echter eens en voor al doen. Aan de eis van onderlinge orthogonaliteit blijkt alleen te kunnen worden voldaan als $n \ll m$ hetgeen in de practijk echter wel het meest voorkomt.

Dit principe is voorgesteld door Doodson en Warburg en uitgewerkt door Scheen. Doodson en Warburg gebruiken alleen +1 of -1, al naar gelang de sinus en cosinus positief of negatief zijn. Scheen voegt ook 0 toe. In het volgende laten we ook $\pm$ 2 en eventueel nog grotere gehele getallen toe. De vorm van de volgens dit principe op te stellen schema's is daarom niet algemeen aan te geven en we zullen de methode nu toelichten aan enkele voorbeelden.

a) $m = 12$ en $n \leqq 4$.

De benadering voor f(x) is

$$y(x) = a_o + \sum_{1}^{4} i \; (a_i \cos ix + b_i \sin ix).$$

In tabel 5.a.1. (zie blz. 16) berekenen we met deze formule f(x) voor ieder basispunt (met $f_k = f(x_k)$).

Uit deze tabel kunnen we $f(x_k)$ ($k = 0,1,\ldots,12$) direct aflezen, bv.

$$f(x_4) = a_o - 0{,}5\; a_1 - 0{,}5\; a_2 + a_3 - 0{,}5\; a_4 + 0{,}866025\; (b_1 - b_2 + b_4).$$

Tabel (5.a.2) geeft de "zeven" zoals die aan de hand van tabel 5.a.1. het meest geschikt kunnen worden gekozen. Iedere "zeef" laat een en slechts een coefficient door.

Tabel 5.a.2.

Basispunt	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Zeef voor a_0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
" " a_1	+2	+1	0	-1	-2	-2	-2	-1	0	+1	+2	+2
" " a_2	+1	-1	-2	-1	+1	+2	+1	-1	-2	-1	+1	+2
" " a_3	0	-1	0	+1	0	-1	0	+1	0	-1	0	+1
" " a_4	-1	-1	+2	-1	-1	+2	-1	-1	+2	-1	-1	+2
" " b_1	+1	+2	+2	+2	+1	0	-1	-2	-2	-2	-1	0
" " b_2	+1	+1	0	-1	-1	0	+1	+1	0	-1	-1	0
" " b_3	+1	0	-1	0	+1	0	-1	0	+1	0	-1	0
" " b_4	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0

Het rekenschema, dat volgens tabel 5.a.2. kan worden opgesteld, is hetzelfde als dat onder 3a), behalve het laatste stuk, waarvoor in de plaats komt:

Schema 5.a.3.

s	$2\delta\sigma_0$ $2\delta\sigma_1$ $\delta\sigma_2$	$2\delta\sigma\sigma_0$ $\delta\sigma\sigma_1$	$\delta\sigma_0$ $-\delta\sigma_2$	$2\sigma\sigma\sigma_0$ $-\sigma\sigma\sigma_1$	$\sigma\delta_1$ $2\sigma\delta_2$ $2\sigma\delta_3$	$\sigma\delta\delta$	$\sigma\delta_1$ $-\sigma\delta_3$	$\delta\delta\delta$
$12a_0$	$12{,}9282a_1$	$12a_2$	$6a_3$	$12a_4$	$12{,}9282b_1$	$6{,}9282b_2$	$6b_3$	$6{,}9282b_4$

b) $m = 24$ en $n \leqq 4$.

Op dezelfde wijze als onder a) bepalen we in tabel 5.b.1. f(x) in de basispunten, in tabel 5.b.2. de "zeven" en het schema 5.b.3. voor de berekening der coefficienten. (Voor tabel 5.b.1. en schema 5.b.3. zie blz.17).

Tabel 5.b.2.

Basispunt	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\pi \rightarrow$ etc.
Zeef voor a_0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1 → symm.
" " a_1	+2	+2	+1	+1	+1	0	-1	-1	-1	-2	-2	-2 → "
" " a_2	+2	+1	0	-1	-2	-2	-2	-1	0	+1	+2	+2 → "
" " a_3	+1	0	-1	-1	-1	0	+1	+1	+1	0	-1	-1 → "
" " a_4	+1	-1	-2	-1	+1	+2	+1	-1	-2	-1	+1	+2 → "
" " b_1	+1	+1	+1	+2	+2	+2	+2	+2	+1	+1	+1	0 → antim
" " b_2	+1	+2	+2	+2	+1	0	-1	-2	-2	-2	-1	0 → "
" " b_3	+1	+1	+1	0	-1	-1	-1	0	+1	+1	+1	0 → "
" " b_4	+1	+1	0	-1	-1	0	+1	+1	0	-1	-1	0 → "

6. Schema's volgens een benaderingsmethode, als gegeven zijn de waarden van de integraal der functie vanaf het begin der periode.

Het principe van de "vierkante" sinus- en cosinusfuncties kan ook in dit geval volledig worden toegepast. Door het vervangen van vermenigvuldigen door optellen krijgen we hier een extra voordeel: in het rekenschema kunnen de integraalwaarden zelf worden gebruikt i.p.v. hun opvolgende verschillen, waarvan bij de methode van § 4 moet worden uitgegaan. Omdat ook in dit geval de vorm van de schema's niet algemeen is aan te geven, werken we nu enkele voorbeelden nader uit.

a) $m = 24$ en $n \leqq 3$.

De benadering voor $F(x)$ is

$$Y(x) = Y(x_o) + a_o\, x + \sum_{1}^{3} \frac{1}{i}\left\{ a_i \sin i\, x + b_i(1 - \cos i\, x)\right\}$$

In tabel 6.a.1. (zie blz. 18) berekenen we met deze formule voor ieder interval de toename van $F(x)$ (als $F_k = F(x_k)$).

Uit deze tabel lezen we direct af, dat de toename van $F(x)$ in b.v. het vierde interval, dus $F(x_4) - F(x_3)$ bij benadering gelijk is aan $0{,}2618a_o + 0{,}1589a_1 - 0{,}0670a_2 - 0{,}2357a_3 + 0{,}2071\, b_1 + 0{,}2500b_2 + 0{,}0976b_3$.

Kiezen we de "zeven" als aangegeven in tabel 6.a.2.(zie blz.19) dan blijkt, dat iedere "zeef" een en slechts een coefficient doorlaat en we vinden:

$$\begin{aligned}
6{,}2832a_o &= F_{24} - F_o\\
3{,}4640a_1 &= (F_{24}-F_o)-(F_{20}-F_4)-(F_{16}-F_8)\\
3{,}4640a_2 &= (F_{24}-F_o)-(F_{22}-F_2)-(F_{20}-F_4)+(F_{16}-F_8)+(F_{14}-F_{10})\\
4\quad a_3 &= (F_{24}-F_o)-2(F_{22}-F_2)+2(F_{18}-F_6)-2(F_{14}-F_{10})\\
6{,}6920b_1 &= -(F_{23}+F_1)-(F_{21}+F_3)+(F_{15}+F_9)+(F_{13}+F_{11})\\
3{,}4640b_2 &= -(F_{23}+F_1)+(F_{19}+F_5)+(F_{17}+F_7)-(F_{13}+F_{11})\\
2{,}8284b_3 &= -(F_{23}+F_1)+(F_{21}+F_3)+(F_{19}+F_5)-(F_{17}+F_7)-(F_{15}+F_9)+(F_{13}+F_{11})
\end{aligned}\tag{6.a.3.}$$

Uit de vergelijkingen (6.a.3.) volgt dan het rekenschema 6.a.4.

Schema 6.a.4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(arg.)	(F)	(F)	(3)-(2)	(3)+(2)							
0	F_o	F_{24}	$F_{24}-F_o$		+	+	+	+			
1	F_1	F_{23}		$F_{23}+F_1$					-	-	-
2	F_2	F_{22}	$F_{22}-F_2$				-	-2			
3	F_3	F_{21}		$F_{21}+F_3$					-		+
4	F_4	F_{20}	$F_{20}-F_4$			-	-				
5	F_5	F_{19}		$F_{19}+F_5$						+	+
6	F_6	F_{18}	$F_{18}-F_6$					+2			
7	F_7	F_{17}		$F_{17}+F_7$						+	-
8	F_8	F_{16}	$F_{16}-F_8$			-	+				
9	F_9	F_{15}		$F_{15}+F_9$					+		-
10	F_{10}	F_{14}	$F_{14}-F_{10}$				+	-2			
11	F_{11}	F_{13}		$F_{13}+F_{11}$					+	-	+
12	F_{12}				$6{,}2832a_o$	$3{,}4640a_1$	$3{,}4640a_2$	$4a_3$	$6{,}6920b_1$	$3{,}4640b_2$	$2{,}8284b_3$

b) $m = 48$ en $n \leqq 4$.

De benadering voor $F(x)$ is

$$Y(x) = Y(x_o) + a_o\, x + \sum_{1}^{4} \frac{1}{i} \left\{ a_i \sin i\, x + b_i (1 - \cos i\, x) \right\}.$$

Op dezelfde wijze als onder a) berekenen we volgens deze formule 'n tabel 6.b.1. voor $F_k - F_{k-1}$ (hier niet opgenomen) en kiezen de "zeven" als aangegeven in tabel 6.b.2. (zie blz.19)

Iedere zeef laat weer een en slechts een coefficient door volgens de formules (6.b.3), waaruit het rekenschema 6.b.4.(zie blz.20) volgt

$$6{,}2832a_o = F_{48} - F_o$$

$$6{,}6924a_1 = 2(F_{48}-F_o)-(F_{42}-F_6)-(F_{38}-F_{10})-(F_{34}-F_{14})-(F_{30}-F_{18})$$

$$7{,}4640a_2 = 2(F_{48}-F_o)-(F_{44}-F_4)-2(F_{42}-F_6)-(F_{40}-F_8)+(F_{32}-F_{16})+2(F_{30}-F_{18})+(F_{28}-F_{20})$$

$$\begin{aligned} 6{,}8291a_3 = {} & 2(F_{48}-F_o)-(F_{46}-F_2)-2(F_{44}-F_4)-(F_{42}-F_6)+(F_{38}-F_{10}) \\ & +2(F_{36}-F_{12})+(F_{34}-F_{14})-(F_{30}-F_{18})-2(F_{28}-F_{20})-(F_{26}-F_{22}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3{,}4640a_4 = {} & (F_{48}-F_o)-(F_{46}-F_2)-(F_{44}-F_4)+(F_{40}-F_8)+(F_{38}-F_{10}) \\ & -(F_{34}-F_{14})-(F_{32}-F_{16})+(F_{28}-F_{20})+(F_{26}-F_{22}) \end{aligned}$$

$$3{,}6958b_1 = -(F_{45}+F_3)+(F_{27}+F_{21})$$

$$\begin{aligned} 6{,}6924b_2 = {} & -(F_{47}+F_1)-(F_{45}+F_3)+(F_{39}+F_9)+(F_{37}+F_{11})+(F_{35}+F_{13})+(F_{33}+F_{15})- \\ & -(F_{27}+F_{21})-(F_{25}+F_{23}) \end{aligned}$$

$$3{,}6958b_3 = -(F_{47}+F_1)+(F_{41}+F_7)+(F_{39}+F_9)-(F_{33}+F_{15})-(F_{31}+F_{17})+(F_{25}+F_{23})$$

$$\begin{aligned} 3{,}4640b_4 = {} & -(F_{47}+F_1)+(F_{43}+F_5)+(F_{41}+F_7)-(F_{37}+F_{11})-(F_{35}+F_{13})+(F_{31}+F_{17})+(F_{29}+F_{19}) \\ & -(F_{25}+F_{23}) \end{aligned}$$

(6.b.3)

Opmerkingen: 1) De rekenschema's 6.a.4. en 6.b.4. geven de coefficienten a_i en b_i zelf en niet, zoals bij de klassieke methode, via hulpcoefficienten A_i en B_i.

2) Het rekenwerk **is** vooral in dit geval veel eenvoudiger: minder optellen en aftrekken, niet vermenigvuldigen en slechts enkele malen delen.

7. De nauwkeurigheid van de resultaten bij afwijkingen in het waarnemingsmateriaal.

7.1. Onder zeer algemene voorwaarden wordt in de Waarschijnlijkheidsrekening de volgende stelling bewezen (o.a. vermeld in het rapport "Harmonic Analysis of Tidal Phenomena" door W.L. Scheen):

Stel $f(x)$ is een functie van x en wordt waargenomen voor N opeenvolgende waarden $x_1, x_2, \ldots, x_N$ van x. Door storingen en/of waarnemingsfouten worden niet $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_N)$ gevonden, maar $f(x_1)+\alpha_1, f(x_2)+\alpha_2, \ldots, f(x_N)+\alpha_N$, waarin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ beschouwd worden als N onafhankelijke waarnemingen van 'n stochastische variabele $\underline{\alpha}$ ') met gemiddelde 0 en

') Stochastische variabelen worden onderstreept.

en spreiding σ.

Als nu $g_1(x)$, $g_2(x), \ldots, g_l(x)$ lineair onafhankelijke functies van x zijn en de coefficienten $\underline{a}_1^*, \underline{a}_2^*, \ldots, \underline{a}_l^*$ volgens de methode der kleinste kwadraten zo bepaald worden, dat de functie $y(x)=\sum_1^l \underline{a}_i^* g_i(x)$ de waarnemingen zo goed mogelijk benadert, dan is voldaan aan de vergelijkingen

$$\sum_1^l s_{hi} \, \underline{a}_i^* = \sum_1^N g_h(x_k) \left\{ f(x_k)+\alpha_k \right\} \qquad (h = 1,2,\ldots,l)$$

met

$$s_{hi} = \sum_1^N g_h(x_k) \, g_i(x_k),$$

of in matrixnotatie (matrices met l rijen en kolommen)

$$S = G\, G^T \qquad (G^T \text{ betekent de getransponeerde van } G).$$

Verder geldt:

De coefficienten $\underline{a}_1^*, \underline{a}_2^*, \ldots, \underline{a}_l^*$ zijn simultaan verdeeld volgens een l-dimensionale waarschijnlijkheidsdichtheid met gemiddelden $a_1, a_2, \ldots, a_l$ (zijnde de waarden, die de coefficienten zouden aannemen, als er geen afwijkingen waren) en met

$$M = \sigma^2 S^{-1}$$

als matrix voor de 2e momenten.

7.2. Om deze stelling te kunnen toepassen voor de in § 3 behandelde rekenschema's (het geval, dat de functiewaarden zelf gegeven zijn) moeten we veronderstellen:

1) De te onderzoeken periodieke functie wordt exact voorgesteld door de functie
$$y(x)= a_o + \sum_1^n (a_i \cos i\, x + b_i \sin i\, x);$$
2) Bij elke waarneming $f(x_i)$ treedt een afwijking op, zodanig, dat alle $f(x_i)$ met gelijke spreiding σ onderling onafhankelijk zijn verdeeld om hun ware waarden $y(x_i)$. Iedere waarneming $f(x_i)$ is dan te beschouwen als een steekproef uit een verdeling met gemiddelde $y(x_i)$ en spreiding σ.

In ons geval met m waarnemingen van een periodieke functie op aequidistante punten in één periode is, m.b.v. de formules van § 2, eenvoudig te bewijzen, dat de matrix S uit genoemde stelling een zeer eenvoudige gedaante heeft, n.l.

$$s_{11} = m$$
$$s_{ii} = m/2 \quad (i = 2,3,\ldots,2n+1)$$
$$s_{ih} = 0 \text{ voor } i \neq h \quad (i,h = 1,2,\ldots,2n+1),$$

d.w.z. een matrix met 2n+1 rijen en kolommen, waarvan alle elementen buiten de hoofddiagonaal 0 zijn. Alle correlatiecoefficienten van de coefficienten $\underline{a}_o^*, \underline{a}_1^*, \ldots, \underline{a}_n^*, \underline{b}_1^*, \ldots, \underline{b}_n^*$ zijn dus 0 en voor de spreidingen geldt:

$$\sigma(\underline{a}_o^*) = \sigma\sqrt{1/m} \quad \text{en} \quad \sigma(\underline{a}_i^*)= \sigma(\underline{b}_i^*)= \sigma\sqrt{2/m} \qquad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Voor de benaderingsmethode voor dit geval geldt (zie de schema's van §5):

a) $m = 12$ en $n \doteq 4$.

De coefficienten:

$$
\begin{aligned}
\underline{a}_0^* &= 1/12\ s \\
\underline{a}_1^* &= 1/12{,}9282\ (2\delta\sigma_0 + 2\delta\sigma_1 + \delta\sigma_2) \\
\underline{a}_2^* &= 1/12\ (2\delta\sigma\sigma_0 + \delta\sigma\sigma_1) \\
\underline{a}_3^* &= 1/6\ (\delta\sigma_0 - \delta\sigma_2) \\
\underline{a}_4^* &= 1/12\ (2\sigma\sigma\sigma_0 - \sigma\sigma\sigma_1) \\
\underline{b}_1^* &= 1/12{,}9282\ (\sigma\delta_1 + 2\sigma\delta_2 + 2\sigma\delta_3) \\
\underline{b}_2^* &= 1/6{,}9282\ \sigma\sigma\delta \\
\underline{b}_3^* &= 1/6(\sigma\delta_1 - \sigma\delta_3) \\
\underline{b}_4^* &= 1/6{,}9282\ \delta\delta\delta
\end{aligned}
$$

zijn simultaan verdeeld met gemiddelden a_0; a_1; a_2; a_3; a_4; b_1; b_2; b_3; b_4 en spreidingen $0{,}29\sigma$; $0{,}31\sigma$; $0{,}33\sigma$; $0{,}41\sigma$; $0{,}33\sigma$; $0{,}31\sigma$; $0{,}41\sigma$; $0{,}41\sigma$; $0{,}41\sigma$.

Vergelijking der spreidingen:

	Klassieke methode	Benaderingsmethode
$\sigma(\underline{a}_0^*)$	$0{,}29\sigma$	$0{,}29\sigma$
$\sigma(\underline{a}_1^*)$	$0{,}41\sigma$	$0{,}31\sigma$
$\sigma(\underline{a}_2^*)$	$0{,}41\sigma$	$0{,}33\sigma$
$\sigma(\underline{a}_3^*)$	$0{,}41\sigma$	$0{,}41\sigma$
$\sigma(\underline{a}_4^*)$	$0{,}41\sigma$	$0{,}33\sigma$
$\sigma(\underline{b}_1^*)$	$0{,}41\sigma$	$0{,}31\sigma$
$\sigma(\underline{b}_2^*)$	$0{,}41\sigma$	$0{,}41\sigma$
$\sigma(\underline{b}_3^*)$	$0{,}41\sigma$	$0{,}41\sigma$
$\sigma(\underline{b}_4^*)$	$0{,}41\sigma$	$0{,}41\sigma$

b) $m = 24$ en $n \doteq 4$.

De coefficienten:

$$
\begin{aligned}
\underline{a}_0^* &= 1/24\ s \\
\underline{a}_1^* &= 1/24{,}5193\ (2\delta\sigma_0 + 2\delta\sigma_1 + 2\delta\sigma_2 + \delta\sigma_3 + \delta\sigma_4 + \delta\sigma_5) \\
\underline{a}_2^* &= 1/25{,}8564\ (2\delta\sigma\sigma_0 + 2\delta\sigma\sigma_1 + \delta\sigma\sigma_2) \\
\underline{a}_3^* &= 1/14{,}4853\ (\sigma\delta\cdot\sigma_0 + \sigma\delta\sigma_1) \\
\underline{a}_4^* &= 1/24\ (2\delta\sigma\sigma\sigma_0 + \delta\sigma\sigma\sigma_1) \\
\underline{b}_1^* &= 1/24{,}5193\ (\sigma\delta_1 + \sigma\delta_2 + \sigma\delta_3 + 2\sigma\delta_4 + 2\sigma\delta_5 + 2\sigma\delta_6) \\
\underline{b}_2^* &= 1/25{,}8564\ (\sigma\delta\delta_1 + 2\sigma\delta\delta_2 + 2\sigma\delta\delta_3) \\
\underline{b}_3^* &= 1/14{,}4853\ (\sigma\sigma\delta_1 + \sigma\sigma\delta_2) \\
\underline{b}_4^* &= 1/13{,}8564\ \sigma\delta\delta\delta
\end{aligned}
$$

zijn simultaan verdeeld met gemiddelden a_0; a_1; a_2; a_3; a_4; b_1; b_2; b_3; b_4 en spreidingen $0{,}20\sigma$; $0{,}23\sigma$; $0{,}22\sigma$; $0{,}29\sigma$; $0{,}24\sigma$; $0{,}23\sigma$; $0{,}22\sigma$; $0{,}29\sigma$; $0{,}29\sigma$.

Vergelijking der spreidingen:

	Klassieke methode	Benaderingsmethode
$\sigma(\underline{a}_o^*)$	$0{,}20\sigma$	$0{,}20\sigma$
$\sigma(\underline{a}_1^*)$	$0{,}29\sigma$	$0{,}23\sigma$
$\sigma(\underline{a}_2^*)$	$0{,}29\sigma$	$0{,}22\sigma$
$\sigma(\underline{a}_3^*)$	$0{,}29\sigma$	$0{,}29\sigma$
$\sigma(\underline{a}_4^*)$	$0{,}29\sigma$	$0{,}24\sigma$
$\sigma(\underline{b}_1^*)$	$0{,}29\sigma$	$0{,}23\sigma$
$\sigma(\underline{b}_2^*)$	$0{,}29\sigma$	$0{,}22\sigma$
$\sigma(\underline{b}_3^*)$	$0{,}29\sigma$	$0{,}29\sigma$
$\sigma(\underline{b}_4^*)$	$0{,}29\sigma$	$0{,}29\sigma$

7.3. Om de stelling van 7.1 te kunnen toepassen voor de in § 4 behandelde rekenschema's (het geval, dat gegeven zijn de waarden van de integraal der functie vanaf het begin der periode), moet nog iets meer verondersteld worden:

1) De integraal, vanaf het begin der periode, van de te onderzoeken periodieke functie wordt exact voorgesteld door de functie

$$Y(x)= a_o\, x + \sum_1^n \frac{1}{i}\left\{a_i \sin i\, x + b_i(1-\cos i\, x)\right\} \quad (\text{stel } Y(x_o)=0)$$

2) We beschouwen niet de integraalwaarden $F(x_i)$, maar de toenamen $f^*(x_i)= F(x_i) - F(x_{i-1})$ als waarnemingen. Bij elk van deze "waarnemingen" treedt een afwijking op zodanig, dat alle $f^*(x_i)$ met gelijke spreiding onderling onafhankelijk zijn verdeeld om hun ware waarden $y^*(x_i)$.

3) De hulpcoefficienten $\underline{A}_o^*$, $\underline{A}_1^*,\ldots,\underline{A}_n^*$, $\underline{B}_1^*,\ldots,\underline{B}_n^*$ zijn onderling onafhankelijk verdeeld (dit volgt nl. niet uit het feit, dat de correlatiecoefficienten nul zijn!)

Op dezelfde wijze als in 7.2. vinden we dan

$$\sigma(\underline{A}_o^*)= \sigma\sqrt{1/m} \quad \text{en} \quad \sigma(\underline{A}_i^*)= \sigma(\underline{B}_i^*)= \sigma\sqrt{2/m} \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Hieruit en uit de vergelijkingen 4.2. en onderstelling 3) volgt voor de spreidingen van de coefficienten $\underline{a}_o^*,\underline{a}_1^*,\ldots,\underline{a}_n^*,\underline{b}_1^*,\ldots,\underline{b}_n^*$ zelf:

$$\sigma(\underline{a}_o^*) = \frac{\sigma}{\varepsilon_m\sqrt{m}} \quad \text{en} \quad \sigma(\underline{a}_i^*)= \sigma(\underline{b}_i^*)= \frac{i\,\sigma}{\sqrt{m(1-\cos i\,\varepsilon_m)}} \qquad (i =1,2,\ldots,n)$$

Voor de benaderingsmethode voor dit geval geldt (zie de schema's van § 6)

a) $m = 24$ en $n \leqq 3$.

De coefficienten: $\underline{a}_o^* = \frac{1}{6{,}2832}\sum_1^{24} f^*(x_i)$

$$\underline{a}_1^* = \frac{1}{3{,}4640}\left(\sum_1^4 - \sum_9^{16} + \sum_{21}^{24}\right) f^*(x_i)$$

$$\underline{a}_2^* = \frac{1}{3{,}4640}\left(\sum_1^2 - \sum_5^8 + \sum_{11}^{14} - \sum_{17}^{20} + \sum_{23}^{24}\right) f^*(x_i)$$

$$\underline{a}_3^* = \frac{1}{4}\left(\sum_1^2 - \sum_3^6 + \sum_7^{10} - \sum_{11}^{14} + \sum_{15}^{18} - \sum_{19}^{22} + \sum_{23}^{24}\right) f^*(x_i)$$

$$\underline{b}_1^* = \frac{1}{6,6920}\left(\sum_{2}^{11} i + \sum_{4}^{9} i - \sum_{13}^{23} i - \sum_{16}^{21} i\right) f^*(x_i)$$

$$\underline{b}_2^* = \frac{1}{3,4640}\left(\sum_{2}^{5} i - \sum_{8}^{11} i + \sum_{14}^{17} i - \sum_{20}^{23} i\right) f^*(x_i)$$

$$\underline{b}_3^* = \frac{1}{2,8284}\left(\sum_{2}^{3} i - \sum_{6}^{7} i + \sum_{10}^{11} i - \sum_{14}^{15} i + \sum_{18}^{19} i - \sum_{22}^{23} i\right) f^*(x_i)$$

zijn simultaan verdeeld met gemiddelden a_o; a_1; a_2; a_3; b_1; b_2; b_3 en spreidingen 0,78 σ; 1,15 σ; 1,15 σ; 1,22 σ; 0,85 σ; 1,15 σ; 1,22 σ.

Vergelijking der spreidingen:

	Klassieke methode	Benaderingsmethode
$\sigma(\underline{a}_o^*)$	0,78 σ	0,78 σ
$\sigma(\underline{a}_1^*)$	1,05 σ	1,15 σ
$\sigma(\underline{a}_2^*)$	1,12 σ	1,15 σ
$\sigma(\underline{a}_3^*)$	1,13 σ	1,22 σ
$\sigma(\underline{b}_1^*)$	1,05 σ	0,85 σ
$\sigma(\underline{b}_2^*)$	1,12 σ	1,15 σ
$\sigma(\underline{b}_3^*)$	1,13 σ	1,22 σ

b) $m = 48$ en $n \leqq 4$.

De coefficienten: $\underline{a}_o^* = \frac{1}{6,2832} \sum_{1}^{48} i \; f^*(x_i)$

$$\underline{a}_1^* = \frac{1}{6,6924}\left(\sum_{1}^{10} i + \sum_{1}^{6} i - \sum_{15}^{34} i - \sum_{19}^{30} i + \sum_{39}^{48} i + \sum_{43}^{48} i\right) f^*(x_i)$$

$$\underline{a}_2^* = \frac{1}{7,4640}\left(\sum_{1}^{6} i + \sum_{1}^{4} i - \sum_{7}^{18} i - \sum_{9}^{16} i + \sum_{19}^{30} i + \sum_{21}^{28} i - \sum_{31}^{42} i - \sum_{33}^{40} i + \sum_{43}^{48} i + \sum_{45}^{48} i\right) f^*(x_i)$$

$$\underline{a}_3^* = \frac{1}{6,8291}\left(\sum_{1}^{4} i + \sum_{1}^{2} i - \sum_{5}^{12} i - \sum_{7}^{10} i + \sum_{13}^{20} i + \sum_{15}^{18} i - \sum_{21}^{28} i - \sum_{23}^{26} i + \sum_{29}^{36} i + \right.$$

$$\left. + \sum_{31}^{34} i - \sum_{37}^{44} i - \sum_{39}^{42} i + \sum_{45}^{48} i + \sum_{47}^{48} i\right) f^*(x_i)$$

$$\underline{a}_4^* = \frac{1}{3,4640}\left(\sum_{1}^{2} i - \sum_{5}^{8} i + \sum_{11}^{14} i - \sum_{17}^{20} i + \sum_{23}^{26} i - \sum_{29}^{32} i + \sum_{35}^{38} i - \sum_{41}^{44} i + \sum_{47}^{48} i\right) f^*(x_i)$$

$$\underline{b}_1^* = \frac{1}{3,6958}\left(\sum_{4}^{21} i - \sum_{28}^{45} i\right) f^*(x_i)$$

$$\underline{b}_2^* = \frac{1}{6,6924}\left(\sum_{2}^{11} i + \sum_{4}^{9} i - \sum_{14}^{23} i - \sum_{16}^{21} i + \sum_{26}^{35} i + \sum_{28}^{33} i - \sum_{38}^{47} i - \sum_{40}^{45} i\right) f^*(x_i)$$

$$\underline{b}_3^* = \frac{1}{3,6958}\left(\sum_{2}^{7} i - \sum_{10}^{15} i + \sum_{18}^{23} i - \sum_{26}^{31} i + \sum_{34}^{39} i - \sum_{42}^{47} i\right) f^*(x_i)$$

$$\underline{b}_4^* = \frac{1}{3,4640}\left(\sum_{2}^{5} i - \sum_{8}^{11} i + \sum_{14}^{17} i - \sum_{20}^{23} i + \sum_{26}^{29} i - \sum_{32}^{35} i + \sum_{38}^{41} i - \sum_{44}^{47} i\right) f^*(x_i)$$

zijn simultaan verdeeld met gemiddelden $a_o, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ en spreidingen 1,10 σ, 1,20 σ, 1,12 σ, 1,24 σ, 1,63 σ, 1,62 σ, 1,20 σ, 1,62 σ, 1,63 σ.

Vergelijking der spreidingen:

	Klassieke methode	Benaderingsmethode
$\sigma(\underline{a}_0^*)$	$1{,}10\ \sigma$	$1{,}10\ \sigma$
$\sigma(\underline{a}_1^*)$	$1{,}56\ \sigma$	$1{,}20\ \sigma$
$\sigma(\underline{a}_2^*)$	$1{,}56\ \sigma$	$1{,}12\ \sigma$
$\sigma(\underline{a}_3^*)$	$1{,}57\ \sigma$	$1{,}24\ \sigma$
$\sigma(\underline{a}_4^*)$	$1{,}58\ \sigma$	$1{,}63\ \sigma$
$\sigma(\underline{b}_1^*)$	$1{,}56\ \sigma$	$1{,}62\ \sigma$
$\sigma(\underline{b}_2^*)$	$1{,}56\ \sigma$	$1{,}20\ \sigma$
$\sigma(\underline{b}_3^*)$	$1{,}57\ \sigma$	$1{,}62\ \sigma$
$\sigma(\underline{b}_4^*)$	$1{,}58\ \sigma$	$1{,}63\ \sigma$

7.4. Uit de vergelijking der spreidingen voor de beide methoden volgt, dat, indien het te verwerken waarnemingsmateriaal groot is, het in beide gevallen aanbeveling verdient om voor de berekening van lagere harmonischen rekenschema's op te stellen volgens het in de §§ 5 en 6 beschreven principe van de "vierkante" sinus- en cosinusfuncties.

Programma voor de National 31.

Harmonische analyse volgens schema 6.a.4. (blz.8)

1	2	3	4	5	6	7
0,K4	-1,-2,-3,-4	-5,-6,-7	+3,+4,+X	-5,+7	+2,+3	+6,+7
N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	A.A.	N.A.
(Pr.arg)	(Pr.F_0)	(Pr.F_1)	(Pr.F_2)	(Pr.F_3)	(Pr.F_4)	(Pr.F_5)

8	9	10	11	12	13	14	15
-4,-X	+6,-7	+2,-3	+5,-7	-3,+4,+X	+5,-6,+7	0	+5,-6,+7
N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.
(Pr.F_6)	(Pr.F_7)	(Pr.F_8)	(Pr.F_9)	(Pr.F_{10})	(Pr.F_{11})	(Pr.F_{12})	(Pr.F_{13})

16	17	18	19	20	21	22	23
+3,-4,-X	+5,-7	-2,+3	+6,-7	+4,+X	+6,+7	-2,-3	-5,+7
N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.
(Pr.F_{14})	(Pr.F_{15})	(Pr.F_{16})	(Pr.F_{17})	(Pr.F_{18})	(Pr.F_{19})	(Pr.F_{20})	(Pr.F_{21})

24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
-3,-4,-X	-5,-6,-7	+1,+2,+3,+4	+4	0	0	0	0	0	0
			TX	T1	T2	T3	T4	T5	T6
N.A.	N.A.	N.A.							
(Pr.F_{22})	(Pr.F_{23})	(Pr.F_{24})	(N.P.)						

34

0,R4

T7

P.F.(2 regels)

Tabel 5.a.1.

Basispunt	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Functie	f_o	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
Coefficienten van													
a_o	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a_1	1	0,866025	0,5	0	-0,5	-0,866025	-1	-0,866025	-0,5	0	0,5	0,866025	1
a_2	1	0,5	-0,5	-1	-0,5	0,5	1	0,5	-0,5	-1	-0,5	0,5	1
a_3	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
a_4	1	-0,5	-0,5	1	-0,5	-0,5	1	-0,5	-0,5	1	-0,5	-0,5	1
b_1	0	0,5	0,866025	1	0,866025	0,5	0	-0,5	-0,866025	-1	-0,866025	-0,5	0
b_2	0	0,866025	0,866025	0	-0,866025	-0,866025	0	0,866025	0,866025	0	-0,866025	-0,866025	0
b_3	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
b_4	0	0,866025	-0.866025	0	0,866025	-0,866025	0	0,866025	-0,866025	0	0,866025	-0,866025	0

Tabel 5.b.1.

Basispunt	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\pi \rightarrow$ etc.
Functie	f_o	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	$f_{12} \rightarrow$ etc.
Coefficienten van													
$10^4.a_o$	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000 → symm.
$10^4.a_1$	10000	9659	8660	7071	5000	2588	0	- 2588	- 5000	- 7071	- 8660	- 9659	-10000 → "
$10^4.a_2$	10000	8660	5000	0	- 5000	- 8660	-10000	- 8660	- 5000	0	5000	8660	10000 → "
$10^4.a_3$	10000	7071	0	- 7071	-10000	- 7071	0	7071	10000	7071	0	- 7071	-10000 → "
$10^4.a_4$	10000	5000	- 5000	-10000	- 5000	5000	10000	5000	- 5000	-10000	- 5000	5000	10000 → "
$10^4.b_1$	0	2588	5000	7071	8660	9659	10000	9659	8660	7071	5000	2588	0 → antim.
$10^4.b_2$	0	5000	8660	10000	8660	5000	0	- 5000	- 8660	-10000	- 8660	- 5000	0 → "
$10^4.b_3$	0	7071	10000	7071	0	- 7071	-10000	- 7071	0	7071	10000	7071	0 → "
$10^4.b_4$	0	8660	8660	0	- 8660	- 8660	0	8660	8660	0	- 8660	- 8660	0 → "

Schema 5.b.3.

s								
	$2\delta\sigma_o$	$2\delta\sigma\sigma_o$	$\sigma\delta\sigma_o$	$2\delta\sigma\sigma\sigma_o$				
	$2\delta\sigma_1$	$2\delta\sigma\sigma_1$	$\sigma\delta\sigma_1$	$\delta\sigma\sigma\sigma_1$	$\sigma\delta_1$	$\sigma\delta\delta_1$	$\sigma\sigma\delta_1$	$\sigma\delta\delta\delta$
	$2\delta\sigma_2$	$\delta\sigma\sigma_2$			$\sigma\delta_2$	$2\sigma\delta\delta_2$	$\sigma\sigma\delta_2$	
	$\delta\sigma_3$				$\sigma\delta_3$	$2\sigma\delta\delta_3$		
	$\delta\sigma_4$				$2\sigma\delta_4$			
	$\delta\sigma_5$				$2\sigma\delta_5$			
					$2\sigma\delta_6$			
$24a_o$	$24,5193a_1$	$25,8564a_2$	$14,4853a_3$	$24a_4$	$24,5193b_1$	$25,8564b_2$	$14,4853b_3$	$13,8564b_4$

Tabel 6.a.1.

Interval	$0-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}-\frac{11\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}-\pi \rightarrow$	etc.
Functie	F_1-F_0	F_2-F_1	F_3-F_2	F_4-F_3	F_5-F_4	F_6-F_5	F_7-F_6	F_8-F_7	F_9-F_8	$F_{10}-F_9$	$F_{11}-F_{10}$	$F_{12}-F_{11} \rightarrow$	etc.
Coefficienten van													
$10^4.a_0$	2618	2618	2618	2618	2618	2618	2618	2618	2618	2618	2618	2618 $\rightarrow$	symm.
$10^4.a_1$	2588	2412	2017	1589	999	341	- 341	- 999	-1589	-2071	-2412	-2588 $\rightarrow$	"
$10^4.a_2$	2500	1830	670	- 670	-1830	-2500	-2500	-1830	- 670	670	1830	2500 $\rightarrow$	"
$10^4.a_3$	2357	976	- 976	-2357	-2357	- 976	976	2357	2357	976	- 976	-2357 $\rightarrow$	"
$10^4.b_1$	341	999	1589	2071	2412	2588	2588	2412	2071	1589	999	341 $\rightarrow$	antim.
$10^4.b_2$	670	1830	2500	2500	1830	670	- 670	-1830	-2500	-2500	-1830	- 670 $\rightarrow$	"
$10^4.b_3$	976	2357	2357	976	- 976	-2357	-2357	- 976	976	2357	2357	976 $\rightarrow$	"

Tabel 6.a.2.

Interval	$0-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}-\frac{11\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}-\pi$	→ etc.
Zeef voor a_0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	→ symm.
" " a_1	+1	+1	+1	+1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	→ "
" " a_2	+1	+1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	+1	+1	→ "
" " a_3	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	→ "
" " b_1	0	+1	+1	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+1	+1	0	→ antim.
" " b_2	0	+1	+1	+1	+1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	→ "
" " b_3	0	+1	+1	0	0	-1	-1	0	0	+1	+1	0	→ "

Tabel 6.b.2.

zeef voor																									
a_0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	→ symm.
a_1	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+1	+1	+1	+1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	→ symm.
a_2	+2	+2	+2	+2	+1	+1	-1	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-1	+1	+1	+2	+2	+2	+2	→ symm.
a_3	+2	+2	+1	+1	-1	-1	-2	-2	-2	-2	-1	-1	+1	+1	+2	+2	+2	+2	+1	+1	-1	-1	-2	-2	→ symm.
a_4	+1	+1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	+1	+1	+1	+1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	+1	+1	→ symm.
b_1	0	0	0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0	0	0	→ antim.
b_2	0	+1	+1	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+1	+1	0	0	-1	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-1	0	→ antim.
b_3	0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0	→ antim.
b_4	0	+1	+1	+1	+1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	+1	+1	+1	+1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	→ antim.

Schema 6.b.4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
(arg)	(F)	(F)	(3)-(2)	(3)+(2)									
0	F_o	F_{48}	$F_{48}-F_o$		+ 1	+2	+2	+2	+1				
1	F_1	F_{47}		$F_{47}+F_1$							-1	-1	-1
2	F_2	F_{46}	$F_{46}-F_2$					-1	-1				
3	F_3	F_{45}		$F_{45}+F_3$						-1	-1		
4	F_4	F_{44}	$F_{44}-F_4$				-1	-2	-1				
5	F_5	F_{43}		$F_{43}+F_5$									+1
6	F_6	F_{42}	$F_{42}-F_6$			-1	-2	-1					
7	F_7	F_{41}		$F_{41}+F_7$								+1	+1
8	F_8	F_{40}	$F_{40}-F_8$				-1		+1				
9	F_9	F_{39}		$F_{39}+F_9$							+1	+1	
10	F_{10}	F_{38}	$F_{38}-F_{10}$			-1		+1	+1				
11	F_{11}	F_{37}		$F_{37}+F_{11}$							+1		-1
12	F_{12}	F_{36}	$F_{36}-F_{12}$					+2					
13	F_{13}	F_{35}		$F_{35}+F_{13}$							+1		-1
14	F_{14}	F_{34}	$F_{34}-F_{14}$			-1		+1	-1				
15	F_{15}	F_{33}		$F_{33}+F_{15}$							+1	-1	
16	F_{16}	F_{32}	$F_{32}-F_{16}$				+1		-1				
17	F_{17}	F_{31}		$F_{31}+F_{17}$								-1	+1
18	F_{18}	F_{30}	$F_{30}-F_{18}$			-1	+2	-1					
19	F_{19}	F_{29}		$F_{29}+F_{19}$									+1
20	F_{20}	F_{28}	$F_{28}-F_{20}$				+1	-2	+1				
21	F_{21}	F_{27}		$F_{27}+F_{21}$						+1	-1		
22	F_{22}	F_{26}	$F_{26}-F_{22}$					-1	+1				
23	F_{23}	F_{25}		$F_{25}+F_{23}$							-1	+1	-1
24	F_{24}												
					$6,2832a_o$	$6,6924a_1$	$7,4640a_2$	$6,8291a_3$	$3,4640a_4$	$3,6958b_1$	$6,6924b_2$	$3,6958b_3$	$3,4640b_4$