Stichting
MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
Amsterdam

R 175

Berekening van de Correctiefactor voor Schroeven

1952

BEREKENING VAN DE CORRECTIEFACTOR VOOR SCHROEVEN.

1. Inleiding.

In opdracht van het Scheepsbouwkundig Proefstation te Wageningen, werd door de Afdeling Toegepaste Wiskunde van het Mathematisch Centrum het artikel van I. Ginzel en H. Ludwieg (1) "Zur Theorie der Breitblattschraube" gecontroleerd en goed bevonden.

De Rekenafdeling berekende daarna de correctiefactor K^*, dat is de verhouding tussen de effectieve en geometrische welving van het schroefbladprofiel voor de volgende waarden van

$$\begin{aligned} \sigma &= 0{,}2,\quad 0{,}5,\quad 0{,}7,\quad 0{,}9, \\ \lambda &= 0{,}2,\quad 0{,}4,\quad 0{,}6. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Hierin is σ de coordinaat van het z.g. "Aufpunkt" en λ de snelheidsgraad.

Uitgegaan is daarbij van de door Kramer (4) berekende waarden voor de Goldsteinfactor $K_o(x)$ en van het profiel aangegeven in figuur I door Strassl (3). Dit laatste is:

$$^1/D = a\sqrt{1-x} + b(1-x), \tag{1.2}$$

met
$$a = 1{,}66628,$$
$$b = -1{,}63267.$$

2. Het rekenschema.

Uit de bovengenoemde publicatie van Ginzel en Ludwieg volgt dan een rekenschema, waarin x de lopende coordinaat langs het schroefblad is en $\Gamma_o(x)$ de circulatie om het schroefblad voorstelt:

Zij, allereerst gedefinieerd:

$$\bar{x} = (x^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.1}$$

$$\varphi(x) = 2^{-\frac{1}{2}}.\bar{x}^{-1}.\, ^1/D, \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \varphi(2^{-\frac{1}{2}}), \\ \Gamma_o(x) &= 2^{-1}.\pi.(x/\bar{x})^2.\, K_o(x), \\ \bar{\Gamma}_o &= 2\int_o^1 x\,\Gamma_o(x)dx, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\bar{\sigma}(x) = 1 + (\sigma - x).\bar{x}^{-1}, \tag{2.4}$$

$$k^2(x) = 4\,\bar{\sigma}(x)\left\{1 + \bar{\sigma}(x)\right\}^{-2}, \tag{2.5}$$

$$f(x) = x\,\varphi(x), \tag{2.6}$$
$$g(x) = \lambda\,\varphi(x),$$
$$H(x) = \Gamma_o(x).\varphi^{-1}(x).$$

Verder zijn $F(k,\psi)$ en $E(k,\psi)$ de normaalvormen van Legendre voor de elliptische integralen van de eerste resp. de tweede soort, terwijl $K = F(h,\pi/2)$ en $E = E(k,\pi/2)$.

Stelt men nu nog

$$\alpha = \pi/3 + \overline{\varphi}, \tag{2.7}$$
$$\beta = \pi/3 - \overline{\varphi}, \tag{2.7}$$

en

$$A(x) = \frac{1}{1-\overline{\sigma}(x)}\left\{E - \left[E\left(k, \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi(x)}{2}\right) - \frac{k^2 \sin\varphi(x)}{2\left(1-k^2\cos^2\frac{\varphi(x)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\} \tag{2.8}$$

$$B(x) = \frac{1}{1+\overline{\sigma}(x)}\left\{K - F\left(k, \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi(x)}{2}\right)\right\}, \tag{2.9}$$

dan is

$$K^*(\sigma,\lambda) = \frac{\sigma^2 K_o(\sigma)}{2(^1/D)^2.(\sigma^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}.\ I(\sigma,\lambda)} \tag{2.10}$$

waarin

$$I(\sigma,\lambda) = \sum_{i=1}^{3} I_i(\sigma,\lambda)$$

en

$$I_1(\sigma,\lambda) = \frac{1}{4\pi}\int_0^1 H(x)\frac{\{\sigma f(x)+\lambda g(x)\} - (x-\sigma)\{\sigma f'(x)+\lambda g'(x)\}}{(\lambda^2+\sigma^2)^{\frac{1}{2}}\{(x-\sigma)^2+f^2(x)+g^2(x)\}^{3/2}}\,dx, \tag{2.11}$$

$$I_2(\sigma,\lambda) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^1 H'(x)\,\frac{\{x\sigma+\lambda^2\}\{A(x)+B(x)\}}{\overline{x}^2\,(\lambda^2+\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx, \tag{2.12}$$

$$I_3(\sigma,\lambda) = \frac{\overline{\Gamma}_o}{4\pi\,\overline{\varphi}\,(\sigma^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}\sum_{i=1}^{4} C_i \tag{2.13}$$

Accenten betekenen steeds differentiaties naar x. Er rest nog de uitdrukkingen voor de C_i's te geven.

$$C_1 = -\frac{\lambda^2\overline{\varphi}\cos\alpha + \sigma^2\sin\alpha}{(\lambda^2\varphi^2+\sigma^2\sin^2\alpha)}\left\{\frac{1+\sigma\cos\alpha}{(\sigma^2+2\sigma\cos\alpha+1+\lambda^2\overline{\varphi}^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sigma\cos\alpha}{(\sigma^2+\lambda^2\overline{\varphi}^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}, \tag{2.14}$$

$$C_2 = \frac{\sigma^2\sin - \lambda^2\overline{\varphi}\cos\beta}{(\lambda^2\overline{\varphi}^2+\sigma^2\sin^2\beta)}\left\{\frac{1+\sigma\cos\beta}{(\sigma^2+2\sigma\cos\beta+1+\lambda^2\overline{\varphi}^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sigma\cos\beta}{(\sigma^2+\lambda^2\overline{\varphi}^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}, \tag{2.15}$$

$$C_3 = \frac{-\lambda^2(\sigma+\frac{1}{2})+\lambda(1+\sigma/2)}{\{\lambda^2(\sigma^2+\sigma+1)+(1+\sigma/2)^2\}}\left\{\frac{2^{-1}.3^{\frac{1}{2}}.\quad+\quad(1+\ ^2)}{[\sigma^2+\sigma+1+\varphi^2(1+\lambda^2)-\overline{\varphi}.\sigma.3^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}} - \frac{2^{-1}.3^{\frac{1}{2}}.\sigma-\overline{\varphi}(1+\lambda^2)}{[\sigma^2+\sigma+1+\varphi^2(1+\lambda^2)+\varphi.\sigma.3^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}}\right\} \tag{2.16}$$

$$C_4 = \frac{2\lambda^2\bar{\varphi}}{\sigma\{\sigma^2+\lambda^2\bar{\varphi}^2\}^{\frac{1}{2}}} \tag{2.17}$$

3. Moeilijkheden.

Het grootste deel van de berekeningen is gewijd, zoals duidelijk is, aan de integralen $I_1(\sigma,\lambda)$ en $I_2(\sigma,\lambda)$. De eerste bevat nog een wortelsingulariteit, welke evenwel gemakkelijk te verhelpen is met de transformatie

$$u = (1-x)^{\frac{1}{2}}$$

of
$$x = 1 - u^2 \tag{3.1}$$

De waarde $H(0)$ is te bepalen met behulp van extrapolatie van de waarden van $H(x)$ voor $x > 0$.

De tweede levert echter veel meer moeilijkheden op: De nadere beschouwing van $A(x)$ leert, dat deze een factor $(x-\sigma)^{-1}$ bevat, terwijl $A(x)$ en $B(x)$ beide nog logarithmische singulariteiten bevatten. Men kan echter een numerieke behandeling toepassen, welke toch het goede antwoord levert, zoals in de volgende paragraaf zal worden aangetoond. Daarbij komt bovendien, dat er numeriek gedifferentieerd moet worden ten einde $H'(x)$ te verkrijgen. Dit zijn processen, waarbij van de weinige cijfers die bekend zijn van de $\Gamma_0(x)$ en $\varphi(x)$ niets meer overblijft. Men kan proberen een beter resultaat te verkrijgen door het proces der numerieke differentiatie te vermijden, en wel door $I_2(\sigma,\lambda)$ een maal partieel te integreren. Dit is een werkje, wat in verband met de singulariteiten, welke voorkomen, wel bijzondere oplettendheid vereist. Na enig rekenwerk en enkele limietovergangen vind men dan, indien verondersteld wordt dat:

$$F(x) = \frac{x\sigma+\lambda^2}{\{(\sigma^2+\lambda^2)(x^2+\lambda^2)\}^{\frac{1}{2}}}\left\{E - E\left[k, \frac{\pi-\varphi(x)}{2}\right] + \frac{k^2 \sin\varphi(x)}{2(1-k^2\cos^2\frac{\varphi(x)}{2})^{\frac{1}{2}}}\right\}, \tag{3.2}$$

$$G(x) = \frac{x\sigma+\lambda^2}{\{(\sigma^2+\lambda^2)(x^2+\lambda^2)\}^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2\,\bar{x}-(x-\sigma)} \tag{3.3}$$

en accentendifferentiaties betekenen naar x:

$$I_2(\sigma,\lambda) = -\frac{1}{4\pi}\Big[H(1).F(1).(1-\sigma)^{-1} - H(\sigma)F(\sigma)\sigma^{-1}(1-\sigma)^{-1} + H'(\sigma)\,F(\sigma)\ln\left(\frac{1-\sigma}{\sigma}\right)$$

$$-\int_0^1\left\{H(x)F'(x)-H(\sigma)F'(\sigma)\right\}(x-\sigma)^{-1}dx + \int^1\Big[H(x)F(x)-H(\sigma)F(\sigma) - \left\{H(x)F(x)\right\}'_{x=\sigma}(x-\sigma)\Big](x-\sigma)^{-2}dx$$

$$+ H(\sigma)G'(\sigma)\left\{(1-\sigma)\ln(1-\sigma)+\sigma\ln\sigma-1\right\} + H(\sigma)\,G(\sigma)\,\ln\left(\frac{1-\sigma}{\sigma}\right)$$
$$-\int_0^1\left\{H(x)G'(x)K+H(\sigma)G'(\sigma)\ln|x-\sigma|\right\}dx-\int_0^1\left\{H(x)G(x)K'+H(\sigma)G(\sigma)(x-\sigma)^{-1}\right\}dx$$
$$+\int_0^1 H(x)\left\{G(x)\,F(x)\right\}'dx.\Big] \tag{3.4}$$

Tijdens het berekenen bemerkt men echter, dat de moeilijkheden in het geheel niet afgenomen zijn. Het is namelijk ondoenlijk F(x) analytisch te differentieren, zodat men hier ook weer op numerieke differentiatie terugvalt. Elke integraal blijft logarithmische singulariteiten bevatten. De berekening van de integranden levert weer cijferverlies, vooral in de omgeving van $x = \sigma$.

4. Behandeling van singuliere integralen.

Stel men wenst te berekenen $I = \int_a^b f(z)dz$, waarbij I gedefinieerd is als hoofdwaarde-integraal. Laat f(z) in de omgeving van z_o de volgende ontwikkeling toelaten:

$$f(z)= \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-z_o)^n, \tag{4.1}$$

zodat dus

$$g(z)= f(z) - \frac{a_{-1}}{z-z_o} \tag{4.2}$$

een reguliere functie is in $z = z_o$.

Is nu a_{-1} op een of andere wijze te berekenen, hetzij analytisch, hetzij numeriek, dan is de berekening van

$$I = \int_a^b g(z)dz + a_{-1}\int_a^b \frac{dz}{z-z_o} \tag{4.3}$$

uit te voeren. f(z) behoeft daartoe slechts gegeven te zijn in een voldoend aantal punten. Men zou dan echter de functie g(z) moeten berekenen, hetwelk vermeden kan worden.

Voert men n.l. in het symbool I_p^N voor de operatie van het numerieke integreren met een vooraf vastgelegd aantal medegenomen differenties p, dan geldt ook, aangezien elk numeriek proces een lineaire operator is:

$$I = I_p^N f(z) + a_{-1}\left[\int_a^b \frac{dz}{z-z_o} - I_p^N \frac{1}{z-z_o}\right], \tag{4.4}$$

waarbij de tussen de accoladen voorkomende term in feite aangeeft de fout ontstaan bij het niet geoorloofde numerieke integreren van de singuliere term $(z-z_o)^{-1}$.

Dit proces, het domweg over de singulariteit heen integreren en de fout later herstellen, is ook toe te passen op elke soort van singulariteit, mits de integralen althans betekenis hebben.

In het bijzonder gaat dit goed voor pooltermen van hogere orde en logarithmische singulariteiten. Duidelijk is, dat meer dan een singulier punt toegelaten kan worden.

Geen der basispunten mag in het algemeen samenvallen met $z = z_o$ in het proces der numerieke integratie. Een uitzondering is het geval der hoofdwaarde-integraal. In $z = z_o$ kan men dan de niet bestaande waarde van $f(z_o)$ vervangen door nul.

5. Resultaten en conclusie.

Het eindresultaat voor de functie $K^*(\sigma,\lambda)$ werd:

$\sigma\downarrow$ $\lambda\rightarrow$	0,2	0,4	0,6
0,2	0,870	0,666	0,675
0,5	0,888	0,868	0,758
0,7	0,724	0,662	0,650
0,9	0,470	0,478	0,491
1,0	0	0	0

Dit komt slecht overeen met de figuren van Strassl. Ter orientering beschouwe men de cijfers voor de $I_1(\sigma,\lambda)$ bij overeenkomstige (σ,λ)-waarden

	$I_1(\sigma,\lambda)$			$I_3(\sigma,\lambda)$		
$\sigma\downarrow$ $\lambda\rightarrow$	0,2	0,4	0,6	0,2	0,4	0,6
0,2	2,13	1,58	1,27	2,254	2,084	1,794
0,5	1,99	1,42	1,10	1,944	1,456	1,159
0,7	2,26	1,54	1,16	2,230	1,543	1,175
0,9	4,01	2,55	1,87	4,015	2,560	1,877

$I_2(\sigma,\lambda)$

$\sigma\downarrow$ $\lambda\rightarrow$	0,2		0,4		0,6	
0,2	0,20	0,22	0,49	0,50	0,09	0,10
0,5	- 0,04	- 0,04	- 0,00	0,00	0,10	0,10
0,7	0,14	0,14	0,31	0,31	0,20	0,20
0,9	0,75	0,75	0,44	0,44	0,35	0,35

Bij de $I_2(\sigma,\lambda)$ staat de waarde berekend na partiele integratie voorop. Men ziet, dat de onregelmatigheid in de $K^*(\sigma,\lambda)$-waarden veroorzaakt wordt door die in de $I_2(\sigma,\lambda)$.

Het wordt dus een eerste vereiste betere waarden te verkrijgen voor de $\Gamma_o(x)$. Ter vergelijking heeft men nog een tabelletje voor $H'(x)$: