

MATHEMATISCH CENTRUM

2e Boerhaavestraat 49
AMSTERDAM (O.)

—
Telefoon 51660

(Administratie, Bibliotheek, Afd. Statistiek,
Afd. Zuivere Wiskunde)

—
Telefoon 56643

(Afd. Toegepaste Wiskunde, Rekenafdeling)

TW no 20.

(R 182)

Resultaten van berekeningen betreffende de vorm van
het zoetwaterlichaam onder een duinterrein van de
Gemeentewaterleidingen te Amsterdam.

door

J. Berghuis, T.C. Braakman en G.W. Veltkamp.

1 9 5 3 .

Resultaten van berekeningen betreffende de vorm van
het zoetwaterlichaam onder een duinterrein van de
Gemeentewaterleidingen te Amsterdam.

1. Inleiding.

De Afdeling Toegepaste Wiskunde van het Mathematisch Centrum stelde een onderzoek in naar de vorm van het zoetwaterlichaam onder het duinterrein gelegen bij Vogelenzang in opdracht van de Gemeentewaterleidingen van Amsterdam.

Dit onderzoek, dat zeer uitgebreid geweest is, kan nog niet als afgesloten beschouwd worden. In dit rapport worden slechts de numerieke resultaten vermeld van een drietal, met dit onderzoek samenhangende, problemen te weten:

Probleem I: Gevraagd wordt bij gegeven bovenwaterstanden (in het duinterrein 2,5 m +) en grondconstanten de vorm van een stationair zoetwaterlichaam met een tong onder zee te bepalen.

Het blijkt, dat met de gevolgde rekenmethode geen oplossing van dit probleem te vinden is.

Probleem II: Gevraagd wordt bij gegeven bovenwaterstand (in het duinterrein 2,5 m +) en grondconstanten de vorm van een stationair zoetwaterlichaam, dat aan de voet van het duin begint, te bepalen.

Dit probleem is volledig opgelost.

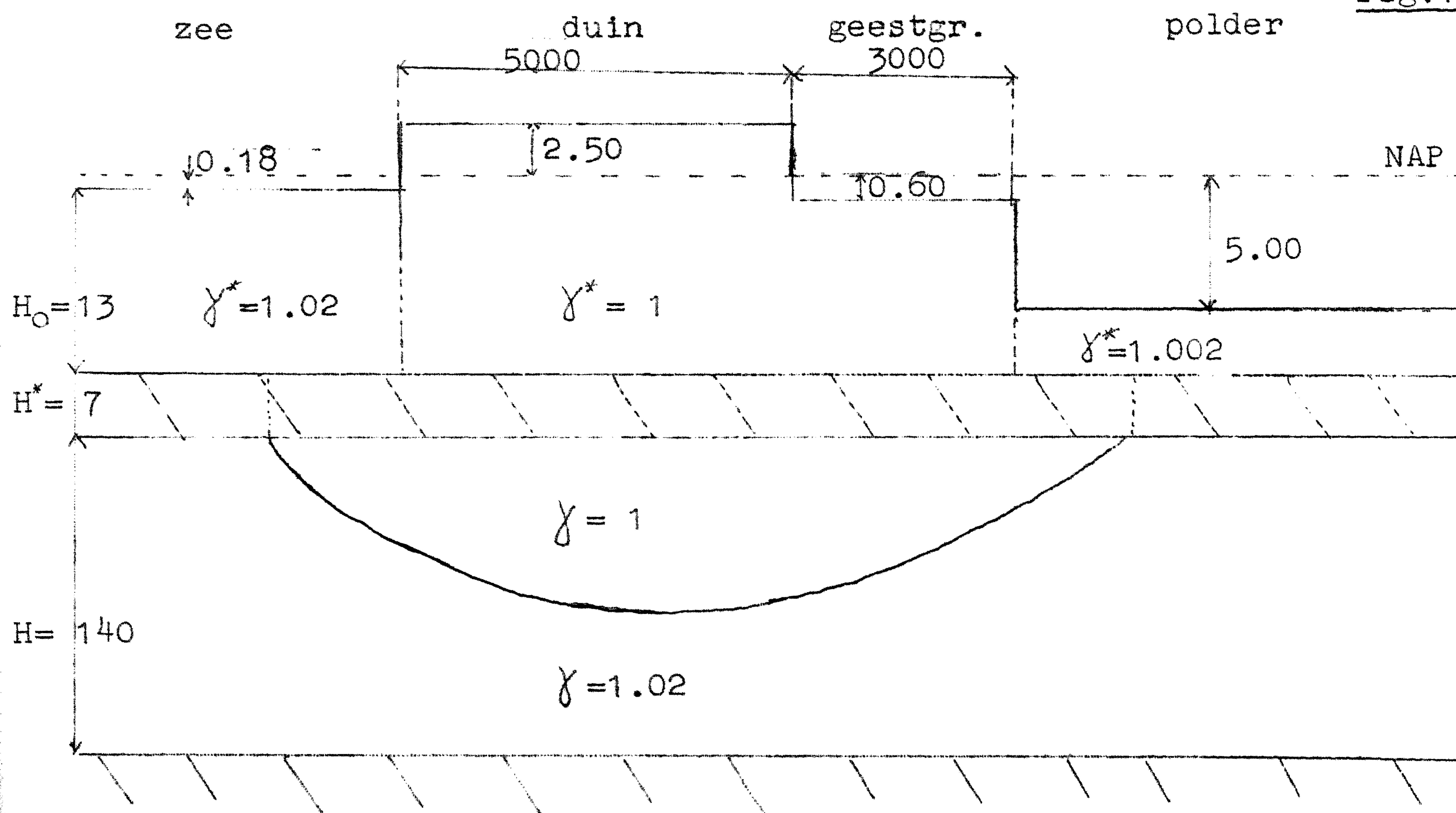
Probleem III: Numeriek werd gecontroleerd de grafische berekening van tekening 19 van het Rapport 1940, De Watervoorziening van Amsterdam.

Het ligt in de bedoeling de theoretische beschouwingen betreffende dit onderzoek neer te leggen in een afzonderlijk rapport.

Het numerieke gedeelte van dit onderzoek werd verzorgd door de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum.

2. Geo-hydrologische gegevens.

fig.1.



Zie voor de verschillende afmetingen van het geschematiseerde geo-
hydrologisch profiel, fig. 1.

Onderste kleilaag: ondoorlaatbaar.

Onderste zandpakket: $k = 32 \text{ m/dag}$ ($kD = 4500 \text{ m}^2/\text{dag}$).

Bovenste kleilaag: in de verschillende berekeningen zijn verschillende
waarden van c gebruikt:

In Probleem I: onder zee $c = 1000 \text{ d}$.
onder land eerste 2 km $c = 2500 \text{ d}$,
daarna $c = 4000 \text{ d}$.

In Probleem II: onder zee $c = 1000 \text{ d}$.
onder land $c = 3500 \text{ d}$.

In Probleem III: overal $c = 2670 \text{ d}$.

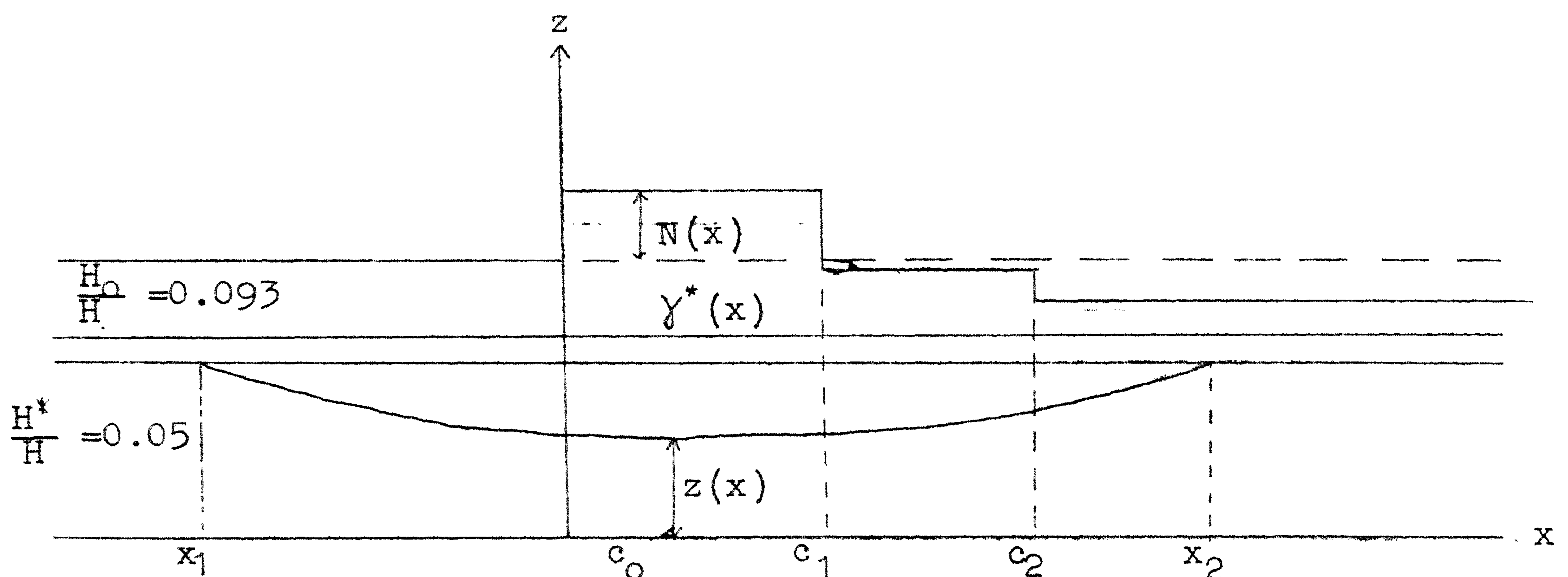
Van deze kleilaag nemen we aan, dat hij ononderbroken is, overal 7 m.
dik is en in het gebied boven het zoetwaterlichaam geheel verzadigd is
met zoet water, daarbuiten met zout water.

Soortelijke gewichten: zoet water: 1 (duin, geestgrond en zoetwater-
lichaam)
zeewater : 1.020 (zee, onder en naast het zoet-
waterlichaam)
brak water: 1.002 (Haarlemmermeer).

3. Basis-vergelijkingen.

Lengte-eenheid $H = 140 \text{ m}$,

Coördinatenstelsel - zie fig.2.



Potentialen:

Als nulvlak wordt het zeeniveau genomen.

ψ_1 : potentiaal zoet water onder de eerste kleilaag,

ψ_2 : potentiaal zout water onder de eerste kleilaag,

Φ_1 : potentiaal juist boven de eerste kleilaag, gemeten in meters
zoet water.

Φ_2 : potentiaal juist boven de eerste kleilaag, gemeten in meters
zout water.

Als de potentiaalverliezen door stroming boven de eerste kleilaag verwaarloosd worden, dan geldt

$$\bar{\Phi}_1(x) = \gamma^*(x) N(x) + (\gamma^*(x) - 1) H_0, \quad (1)$$

$$\gamma \bar{\Phi}_2(x) = \gamma^*(x) N(x) + (\gamma^*(x) - \gamma) H_0, \quad (2)$$

als $N(x)$: hoogte bovenwaterstand boven zee-niveau;

(x) : s.g. bovenwater; $\gamma = 1.02$.

De hoogte van het grensvlak boven de onderste kleilaag zij $z(x)$; eindpunten zijn x_1 en x_2 .

Voor de stroming in het onderste zandpakket geldt nu (als het zoetwaterlichaam stationair is):

Voor $x < x_1$ en $x > x_2$:

$$\xi \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} = \varphi_2 - \bar{\Phi}_2 \quad (3)$$

Voor $x_1 < x < x_2$:

$$\xi \frac{d}{dx} \left\{ (1-z) \frac{d\varphi_1}{dx} \right\} = \varphi_1 - \bar{\Phi}_1 \quad (4)$$

$$\xi \frac{d}{dx} \left(z \frac{d\varphi_2}{dx} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\varphi_1 - \gamma \varphi_2 = (\gamma - 1) (H_0 + H^* + H - H.z), \quad (6)$$

als

$$\xi = \frac{kc}{H}. \quad (7)$$

Als randvoorwaarden hebben we hierbij

$$x = \pm \infty : \varphi_2 = \bar{\Phi}_2 \quad (8)$$

$$x = x_1 \text{ en } x_2 : z = 1 \quad (9)$$

$$\varphi_2 \text{ en } \frac{d\varphi_2}{dx} \text{ continu,} \quad (10)$$

$$\text{en } \frac{d\varphi_1}{dx} \text{ eindig.} \quad (11)$$

Het is gebleken, dat deze een-dimensionale beschrijving gerechtvaardigd is, omdat ξ groot is en $\frac{dz}{dx}$ overal klein is.

4. Herleiding differentiaalvergelijkingen.

Uit (5) volgt, dat voor $x_1 < x < x_2$

$$\frac{d\varphi_2}{dx} = -\frac{c}{z}, \quad (12)$$

waarin C een constante is.

Met behulp van (8) t/m (10) kunnen we nu (3) integreren, waaruit volgt:

$$\varphi_2(x_1) = -c\sqrt{\xi_1} \quad (13)$$

$$\varphi_2(x_2) = c\sqrt{\xi_2} + \bar{\Phi}_2(x_2) \quad (14)$$

als ϱ_1 de waarde van ϱ voor $x < x_1$, ϱ_2 die voor $x > x_2$ is.

Definieer in het interval $x_1 < x < x_2$ de functie

$$y(x) = - \frac{\varphi_2(x)}{c} \quad (15)$$

Dan is $z = \frac{1}{y'}$ volgens (12). (16)

Uit (4) en (6) volgt dan voor $x_1 < x < x_2$

$$\varrho \frac{d}{dx} \left\{ \left(1 - \frac{1}{y'}\right) (Ay' - \frac{y''}{(y')^2}) \right\} = \bar{\Phi}(x) + A y + \frac{1}{y'} \quad (17)$$

waarin $\bar{\Phi}(x) = \frac{\gamma^*(x) N(x)}{(\gamma-1)H} - \frac{\gamma-\gamma^*(x)}{\gamma-1} \frac{H_0}{H} - \frac{H^*}{H} - 1,$ (18)

en $A = \frac{\gamma}{(\gamma-1)H} c.$ (19)

Uit (13) en (14) krijgen we:

$$y(x_1) = y_1 = \sqrt{\varrho_1}, \quad (20)$$

$$y(x_2) = y_2 = -\sqrt{\varrho_2} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\gamma^*(x_2)N(x_2) - (\gamma-\gamma^*(x_2))H_0}{(\gamma-1)H} \quad (21)$$

Terwijl verder uit (9), resp. (11) volgt

$$y'(x_1) = y'(x_2) = 1$$

en $y''(x_1)$ en $y''(x_2)$ eindig.

Hierin zijn x_1 , x_2 en A nog onbekend. Voor A kan echter een bovengrens aangegeven worden, daar in de tong aan de zeezijde geen zout water in mag stromen. Hiervoor is nodig en voldoende

$$\varphi(x_1) \geq \bar{\Phi}_1(x_1), \quad \text{hetgeen levert:}$$

$$A \leq \frac{H^*}{H \sqrt{\varrho_1}} \quad (22)$$

In (17) wordt nu y als onafhankelijke variabele ingevoerd, hetgeen na integratie levert:

$$z(y) = \int_{y_1}^y \left\{ \frac{z(u)}{1-z(u)} \cdot \Psi(u) - A \right\} du + 1 \quad (23)$$

waarin

$$\Psi(y) = \int_{y_1}^y \frac{z(u) \{ \bar{\Phi}(x) + Au + z(u) \}}{\rho(x)} du \quad (24)$$

een functie van y is, die pas geheel bepaald kan worden, wanneer $y = y(x)$ bekend is, omdat in de integraal $\bar{\Phi}$ en ϱ voorkomen, welke als functies van x gegeven zijn.

5. Probleem I.

Gevraagd om bij de bovenwaterstanden van fig.1 en de in § 2 genoemde grondconstanten de vorm van een stationair zoetwaterlichaam met een tong onder zee te bepalen.

Successieve approximatie, waarbij uitgaande van een aangenomen vorm van het zoetwaterlichaam met behulp van (23) een nieuwe ("betere") vorm berekend wordt, mislukt, daar dit proces instabiel blijkt te zijn (een kleine verandering van de aangenomen $z(y)$ geeft een zeer grote verandering in de uit (23) berekende $z(y)$).

Vervolgens is naar de oplossing gezocht met behulp van een iteratiemethode.

Daar uit (16) volgt, dat bij bekende $z(y)$ x als functie van y gegeven wordt door

$$x = x_1 + \int_{y_1}^y z(u) du$$

kan vergelijking (23) numeriek geïntegreerd worden, als we x_1 en A geven.

De aangenomen x_1 wordt nu gecontroleerd met behulp van de eis

$$z(y_2) = 1.$$

Hiermee bepaalt men bij een gegeven A een bijbehorende x_1 . (y_2 is volgens (21) bepaald, zodra A gegeven is).

Daar $z'(y_2)$ eindig moet zijn, moet $\psi(y_2) = 0$ zijn. Deze eis bepaalt de juiste waarde van y_2 .

Uit (22) en (21) volgt, dat $y_2 \geq 511,89$.

Het hierboven geschetste procedé werd nu uitgevoerd voor een aantal waarden van y_2 .

Voor $y_2 > 560$ is het onmogelijk een x_1 te vinden, zodanig, dat $z(y_2) = 1$ wordt. Voor lagere waarden van y_2 blijkt $\psi(y_2)$ een dalende functie van y_2 te zijn, die voor $y_2 = 511,89$ nog negatief is.

Het blijkt dus, dat met deze rekenmethode bij de gegeven grondconstanten en bovenwaterstanden geen stabiele toestand met tong onder zee te vinden is.

Opmerking: In het geval van de tong met stilstaand zoet water, blijkt uit een eenvoudige beschouwing, dat de aangenomen discontinuïteit in de bovenwaterstand bij $x = 0$ niet in strijd is met de opgestelde differentiaalvergelijkingen. Het falen van de bovenstaande oplossingsmethode wordt dus zeer waarschijnlijk niet door deze discontinuïteit veroorzaakt.

6. Probleem II.

Gevraagd bij de bovenwaterstanden van fig.1 en de in § 1 voor dit geval genoemde grondconstanten de vorm van een stationair zoetwaterlichaam, dat in $x = 0$ begint, te bepalen.

De eis, dat $\frac{d\varphi}{dx}$ eindig is, kan niet gehandhaafd blijven. Hiertegenover staat, dat nu x_1 niet meer als onbekende optreedt.

Uitgaande van een stelsel vergelijkingen, dat analoog is aan (23) en (24) kan bij een aangenomen $z(y)$ een nieuwe $z(y)$ berekend worden.

Dit werd gedaan voor een aantal functies $z(y)$. Op deze wijze blijkt vrij snel, hoe men een aangenomen $z(y)$ moet veranderen, opdat de berekende $z(y)$ ongeveer samen valt met de aangenomen functie.

Het resultaat vindt men in de grafiek probleem II, waarbij I de aangenomen $z(y)$ voorstelt (getekend als functie van x) en II de hier uit berekende z .

Opmerking: Maakt men de rechter tong van de kromme I iets korter (+ 70 m.), dan eindigt de rechter tong van II links van het punt $x = 11$ km. De gemiddelde afwijking van de kromme I en II is dan echter iets slechter dan in het getekende geval.

7. Probleem III.

In Rapport 1940, De Watervoorziening van Amsterdam, is in tekening 19 een grafische berekening uitgevoerd van de bovenwaterstanden behorende bij een aangenomen zoetwaterlichaam, waarbij het water in de tong aan de zeezijde in rust is. Deze berekening werd numeriek gecontroleerd.

De grondconstanten, welke niet duidelijk vermeld zijn in het Rapport 1940, zijn zodanig bepaald, dat in het gebied $x < 0$ de vorm van het zoetwaterlichaam en de potentialen zo dicht benaderd werden.

De resultaten zijn neergelegd in grafiek probleem III (de functie $N(x)$ is het equivalent van $p(x)$, $\varphi_2(x)$ dat van $\psi(x)$ uit Rapport 1940).

De eindwaarde van $\varphi_1(x)$ en $N(x)$ voor $x = \infty$ blijkt - 5.50 te zijn.