STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

REKENAFDELING

R 190

Over de numerieke oplossing van een zekere integraalvergelijking.

door

M.L. Potters.

[1952]

<u>Over de numerieke oplossing van een zekere integraalvergelijking.</u>

M.L. Potters.

1. Gevraagd zij de functie $p(t)$ op te lossen uit de volgende integraalvergelijking

$$F(p,t) = \int_{t_0}^{t} \frac{dp(\tau)}{d\tau}\, Q(t-\tau)\, d\tau \qquad (1,1)$$

Van $F(p,t)$ is de analytische uitdrukking gegeven, terwijl $Q(t)$ in tabelvorm bekend is. Er geldt $Q(0) = 0$.

Berekend worden de functiewaarden $p_i = p(t_i)$ voor $i = 0,1,2,\ldots$, waarbij de punten t_i aequidistant zijn. Noem $t_i - t_{i-1} = \Delta t$.
Hiervoor worden twee methoden aangegeven, welke beide gebruik maken van de integratieformule van Gregory met verwaarlozing van de tweede differentie:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_i} f(\tau, t_i)\, d\tau = \sum_{j=2}^{i-2} f(t_j, t_i) +$$

$$+ \frac{5}{12}\left\{ f(t_0,t_i) + f(t_i,t_i) \right\} + \frac{13}{12}\left\{ f(t_1,t_i) + f(t_{i-1},t_i) \right\} \quad . \qquad (1,2)$$

2. De eerste methode volgt uit directe toepassing van (1,2) op (1,1).
De afgeleide $\frac{dp}{d\tau}$ wordt benaderd volgens

$$\Delta t . \left\{ \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right\}_{\tau = t_i} = \tfrac{1}{2}\,(p_{i+1} - p_{i-1}) \qquad (2,1)$$

Substitutie van $f(\tau,t_i) = \frac{dp(\tau)}{d\tau}\, Q(t_i - \tau)$ in (1,4) levert, met (2,1)

$$\int_{t_0}^{t_i} \frac{dp(\tau)}{d\tau}\, Q(t_i - \tau)\, d\tau = \tfrac{1}{2} \sum_{j=2}^{i-2} (p_{i+1} - p_{i-1})\, Q(t_i - t_j) +$$

$$+ \frac{5}{12}\left\{ \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right\}_{\tau = t_0} Q(t_i - t_0)\,\Delta t + \frac{5}{12}\left\{ \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right\}_{\tau = t_i} Q(0) . \Delta t +$$

$$+ \frac{13}{24}\left\{ (p_2 - p_0)\, Q(t_i - t_1) + (p_i - p_{i-2})\, Q(\Delta t) \right\} . \qquad (2,2)$$

Zij nu de functie $p(t)$ bekend tot en met p_{i-1}, dan volgt uit (1,1) en (2,2) een vergelijking voor p_i van de gedaante

$$F(p_i, t_i) = \alpha\, p_i + \beta_i \qquad (2,3)$$

waarin $\alpha = \frac{13}{24}\, Q(\Delta t)$

$$\beta_i = \frac{5}{12}\left\{\frac{dp(\tau)}{d\tau}\right\}_{\tau=t_0} Q(t_i-t_o).\Delta t + \tfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{i-2}(p_{j+1}-p_{j-1})Q(t_i-t_j)+$$

$$+\frac{13}{24}\left\{(p_2-p_0)\,Q(t_i-t_1)-p_{i-2}\,Q(\Delta t)\right\}.$$

De beginwaarden p_0 en $\left\{\frac{dp}{d\tau}\right\}_{\tau=t_0}$ volgen uit (1,1) door substitutie van t_0 resp. differentiatie naar t en substitutie van t_0.

$$f(p_0,t_0)=0 \tag{2,4a}$$

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial p}\right\}_{\substack{p=p_0\\ t=t_0}}\left\{\frac{dp}{dt}\right\}_{t=t_0}+\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}_{\substack{p=p_0\\ t=t_0}}=0 \tag{2,4b}$$

3. Volgens de tweede methode wordt (1,1) eerst partieel geïntegreerd:

$$F(p,t)=-p_0\,Q(t-t_0)+\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,Q'(t-\tau)\,d\tau \tag{3,1}$$

Substitutie van $f(\tau,t_i)=p(\tau)\,Q'(t-\tau)$ in (1,4) levert nu op soortgelijke wijze als in het voorgaande een vergelijking voor p_i:

$$F(p_i,t_i)=a\,p_i+b_i \tag{3,2}$$

waarin $a=\frac{5}{12}\,Q'(0).\Delta t$

$$b_i=-p_0\,Q(t_i-t_o)+$$

$$+\left[\frac{5}{12}\,p_o\,Q'(t_i-t_0)+\sum_{j=2}^{i-2}p_j\,Q'(t_i-t_j)+\right.$$

$$\left.+\frac{13}{12}\left\{p_1\,Q'(t_i-t_1)+p_{i-1}\,Q'(\Delta t)\right\}\right].\Delta t.$$

4. De vergelijkingen (2,3) resp. (3,2) kunnen langs iteratieve weg opgelost worden. Definieert men n.l. de getallenrij

$$p_i^{(n)}=\frac{F\left\{p_i^{(n-1)},t_i\right\}-\beta_i}{\alpha}\qquad (n=1,2,\ldots) \tag{4,1}$$

dan zal bij geschikte keuze van $p_i^{(0)}$ deze rij naar de gevraagde oplossing p_i van (2,3) convergeren.