

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

REKENAFDELING

Een oplossing van het optimaalprobleem voor symmetrische  
schroeven met een eindig aantal bladen in een homogeen  
snelheidsveld.

R 195

Interimrapport 1

door

J. Berghuis

en

J.A. Zonneveld.

1 9 5 4 .

Een oplossing van het optimaalprobleem voor symmetrische schroeven met een eindig aantal bladen in een homogeen snelheidsveld.

1. Inleiding.

Dit rapport is het eerste van een serie rapporten betreffende research en berekeningen uitgevoerd door de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum in opdracht van het Nederlands Scheepsbouwkundig Proefstation te Wageningen.

Bekend is de oplossing van het optimaal probleem voor schroeven gegeven door S. Goldstein [1].<sup>1)</sup>

De numerieke behandeling van deze oplossing is verbeterd en aangevuld door K.N. Kramer [2]. Beide steunen op de wet voor het minimum energieverlies bij schroeven in een homogeen veld gegeven door A. Betz [3].

In paragraaf 2 geven wij de afleiding van de partiele differentiaalvergelijking, waaraan voldaan moet worden; uitgaande van de wet van Betz.

In paragraaf 3 wordt de oplossing van Goldstein zonder afleiding gegeven, terwijl in paragraaf 4 onze oplossingswijze behandeld wordt.

Wij pakken het vraagstuk vrijwel direct numeriek aan, in tegenstelling met Goldstein en andere, welke de oplossing eerst analytisch afleiden.

In paragraaf 5 vergelijken wij beide methoden.

2. Afleiding der differentiaalvergelijking.

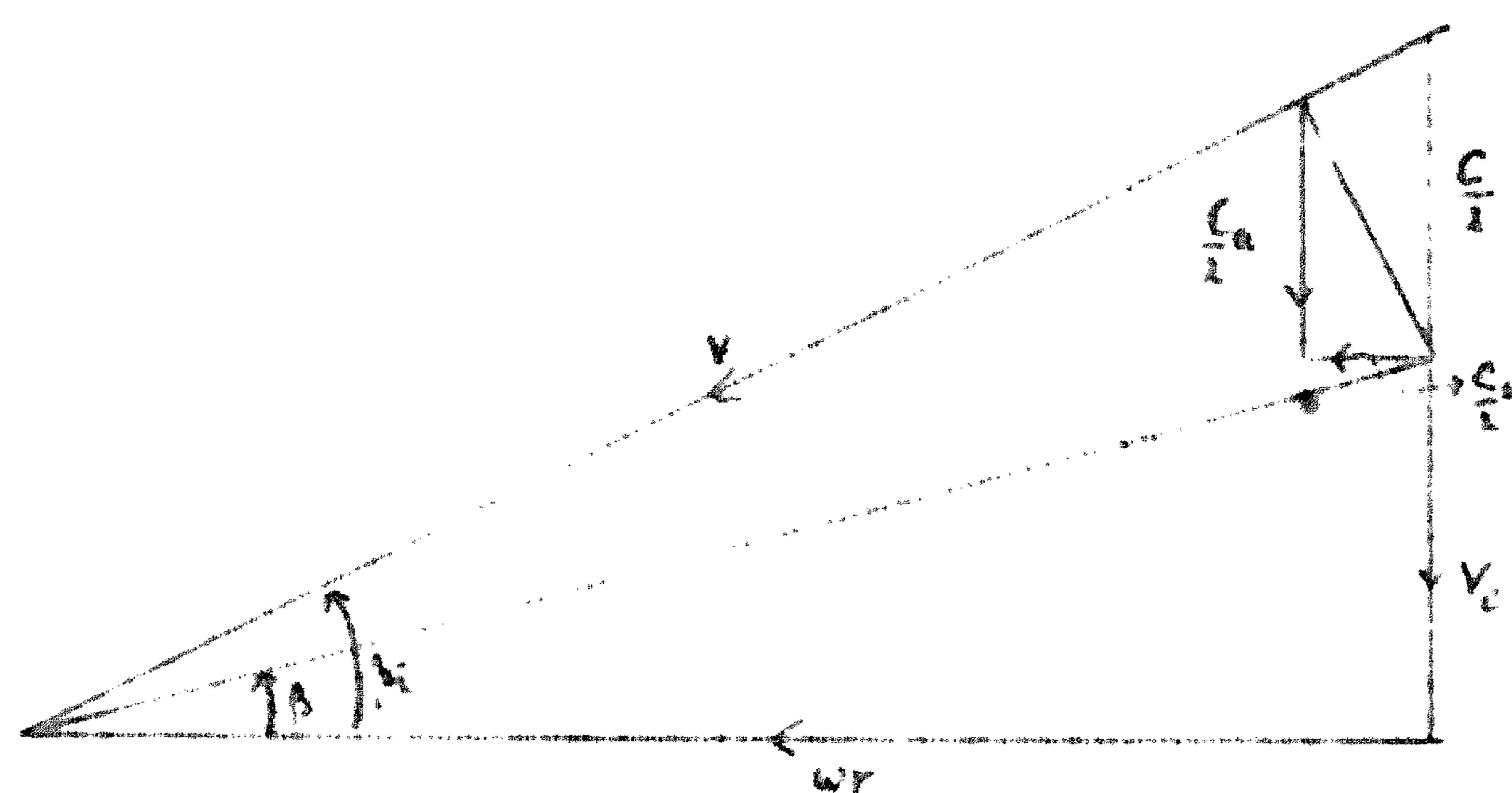
Allereerst voere men de volgende symbolen in:

- $\omega r$  = omtreksnelheid van het schroefbladelement gelegen op straal  $r$ ,
- $v_e$  = gemiddelde intreesnelheid van het water in de schroef op straal  $r$ ,
- $\frac{1}{2}c_n$  = geïnduceerde snelheid ter plaatse van de schroef ten gevolge van de eindige lengte van de schroefbladen,
- $\frac{1}{2}c_a$  = component van  $\frac{1}{2}c_n$  in axiale richting,
- $\frac{1}{2}c_t$  = component van  $\frac{1}{2}c_n$  in tangentiële richting,
- $\beta$  = hydrodynamische spoedhoek niet gecorrigeerd voor de geïnduceerde snelheden,
- $\beta_i$  = hydrodynamische spoedhoek wel gecorrigeerd voor de geïnduceerde snelheden.

---

<sup>1)</sup> Cijfers in vierkante haken verwijzen naar referenties.

Men heeft het volgende snelheidsdiagram zonder wrijving (zie [4])



De voorwaarde van Betz voor minimum energieverlies luidt:

$$\operatorname{tg} \beta_i / \operatorname{tg} \beta = 1/\eta p_i = \text{constant.}$$

Dit betekent dat de stroming achter de schroef zodanig is, alsof de door schroefbladen doorlopen baan in het water behouden blijft.

Voor de werkelijke baan geldt

$$\operatorname{tg} \beta_i = \frac{v_e + \frac{c_a}{2}}{\omega r + \frac{c_t}{2}}.$$

Volgens de opmerking van Prandtl in [3] p. 214 kan men in eerste benadering  $\beta_i$  met  $\beta$  identificeren, mits men  $v_e + \frac{c_a}{2}$  met  $v_e$  en  $\omega r + \frac{c_t}{2}$  met  $\omega r$  identificeert. Voeren wij nog in de snelheidsgraad zonder invloed van de geïnduceerde snelheden

$$\lambda = \frac{v_e}{\omega R}$$

en de snelheidsgraad met invloed van de geïnduceerde snelheden

$$\lambda_i = \frac{v + c_a/2}{\omega R + c_t/2},$$

dan heeft de opmerking van Prandtl het effect, dat wij  $\lambda_i$  door  $\lambda$  mogen vervangen.

Nu gebruike men alleen

$$\operatorname{tg} \beta = \text{constant};$$

hieruit is het schroefoppervlak te construeren.

Laten  $r$ ,  $z$  en  $\theta$  onze cylindercoördinaten zijn en  $x$ ,  $y$  en  $z$  de cartesische coördinaten;  $z$  in de  $v_e$ -richting.

Het schroefoppervlak is dan gegeven door

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta + c) \\ y &= r \sin(\theta + c) \\ z &= -\frac{v_e}{\omega} \theta \quad 0 \leq r \leq R. \end{aligned}$$

De snelheidspotentiaal  $\Phi$  moet voldoen aan de continuïteitsvergelijking

$$\Delta \Phi = 0;$$

in drie dimensies op cylindercoördinaten uitgeschreven

$$\left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \Phi = 0.$$

Als men  $z$  elimineert met behulp van

$$z = - \frac{v_e}{\omega} \theta$$

krijgt men

$$\left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( 1 + \frac{r^2}{R^2} \lambda^{-2} \right) \right\} \Phi = 0.$$

De randvoorwaarde is, dat normale snelheid van de vloeistof aan het schroefoppervlak moet verdwijnen.

$$\frac{c}{2} \cdot \cos \beta = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} \sin \beta.$$

Voeren wij nog in

$$\mu = \frac{\omega r}{v} \quad \text{en} \quad \mu_0 = \frac{\omega R}{v},$$

dan wordt de vergelijking

$$\left\{ \left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right)^2 + (1 + \mu^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right\} \Phi = 0$$

met als randvoorwaarde

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = - \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \quad 0 \leq \mu \leq \mu_0$$

voor  $\xi = k \cdot \frac{2\pi}{n}$ ,  $0 \leq k \leq n$ , waarbij de factor  $\frac{vc}{2\omega}$  is weggelaten.

Verder zij vermeld, dat  $\Phi_{,\theta}$  zijn beide eerste partiële afgeleiden nul worden voor  $\mu \rightarrow \infty$  (de constante in  $\Phi$  is buiten beschouwing gelaten).

### 3. Goldstein's oplossing.

De functie  $\Phi(\mu, \xi)$  moet een periodieke functie in  $\xi$  zijn met de periode  $\frac{2\pi}{n}$ . Verder is  $\Phi(\mu, \xi)$  een oneven functie in  $\xi$ , want als  $\Phi(\mu, \xi)$  een oplossing van het probleem is, dan is ook  $\Phi(\mu, -\xi)$  een potentiaalfunctie en is een oplossing van het overeenkomstige probleem van de tegengestelde draaiende schroef. Wegens de periodiciteit geldt  $\Phi(\mu, \frac{k\pi}{n}) = 0$ , als  $k$  geheel getal is.

Goldstein schrijft allereerst de oplossing in het gebied  $\mu > \mu_0$  op; daar is de oplossing nl. continu.

Hij leidt af

$$\frac{n \omega}{c v_e} \Phi = \sum_{h=1}^{\infty} c_h \frac{K_{nh}(nh \mu)}{K_{nh}(nh \mu_0)} \sin(nh \xi),$$

waarbij  $K_\nu(\nu \mu)$  de Hankelse functie van de eerste soort met imaginair argument is. De coëfficiënten  $c_h$  hangen niet meer van  $\mu$ , maar wel van  $\mu_0$  en  $n$  af.

In het gebied  $0 \leq \mu < \mu_0$  is de oplossing eveneens continu en men verkrijgt na enig gerekken:

$$\frac{n \omega}{c v_e} \Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{4}{\pi} \frac{T_\nu(\nu \mu)}{(2m+1)^2} + a_m \frac{I_\nu(\nu \mu)}{I_\nu(\nu \mu_0)} \right] \cos(\nu \xi)$$

waarin  $\nu = (2m+1) \frac{n}{2}$ ,

$I_\nu(\nu \mu)$  is de Besselfunctie met imaginair argument en  $T_\nu(\nu \mu)$  is een door Goldstein en Kramer aangegeven, met Lommelfuncties samenhangende functie. De coëfficiënten  $a_m$  hangen nog van  $\mu_0$  en  $n$  af.

De coëfficiënten  $a_m$  en  $c_h$  worden bepaald door de eis, dat de oplossing en de afgeleide  $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}$  voor  $\mu = \mu_0$  continu zijn voor elke  $\xi \neq 0$  of  $\frac{2\pi K}{n}$ .

Het blijkt mogelijk te zijn de  $c_h$ 's te elimineren, zodat men het volgende systeem vergelijkingen op te lossen krijgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_{m,1} a_m = y_1 \quad (l = 1, 2, 3, \dots)$$

met

$$f_{m,1} = \frac{(2m+1) \frac{I'_\nu(\nu \mu_0)}{I_\nu(\nu \mu_0)} - 2 l \frac{K'_{nl}(nl \mu_0)}{K_{nl}(nl \mu_0)}}{4l^2 - (2m+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} y_1 &= 2l \frac{K'_{nl}(nl \mu_0)}{K_{nl}(nl \mu_0)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{T_\nu(\nu \mu_0)}{(2m+1)^2 \{4l^2 - (2m+1)^2\}} - \\ &- \sum_{m=0}^{\infty} \frac{T'_\nu(\nu \mu_0)}{(2m+1) \{4l^2 - (2m+1)^2\}} \end{aligned}$$

De oplossing van dit systeem vergelijkingen gaat moeizaam en Kramer heeft er dan ook een speciaal hoofdstuk aan gewijd, waarin hij een betere methode dan die van Goldstein aangaf.

4. Onze methode.

In het volgende zal het speciale geval  $n = 3$  behandeld worden. Dit is echter geen beperking, omdat de behandeling voor andere  $n$ -waarden analoog is.

Het probleem is de functie  $\Phi(\mu, \xi)$  te vinden, die voldoet aan

$$\left(\mu \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\right)^2 + (1 + \mu^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = 0$$

en aan  $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -\frac{\mu^2}{1 + \mu^2}$  voor  $\xi = 0$ ,  $0 \leq \mu \leq \mu_0$ .

Verder geldt  $\Phi(\mu, \frac{\pi}{3}) = 0$  en  $\Phi(\mu, 0) = 0$  voor  $\mu \geq \mu_0$ . Wij willen een relaxatie proces toepassen en zorgen eerst, dat de singuliere punten van het veld  $0 \leq \mu \leq \infty$  en  $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{3}$  in het oneindige komen te liggen.

De singuliere punten zijn  $\mu = 0$  (de naaf van de schroef)  $\mu = \mu_0$  en  $\xi = 0$  (de tip). De afbeelding is dus niet conform, maar waar wij geen potentiaalvergelijking hebben, komt dat er ook niet meer op aan.

Achtereenvolgens worden toegepast de transformaties

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \mu^3 \\ \beta &= 3\xi \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \mu_0^{-3} \alpha \cos \beta - 1 \\ y &= 2 \mu_0^{-3} \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \text{Arth} \left\{ 2x / (x^2 + y^2 + 1) \right\} \\ v &= \text{artg} \left\{ 2y / (x^2 + y^2 - 1) \right\} \end{aligned} \right\},$$

waarbij de vergelijking (1,1) overgaat in

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \frac{\mu_0^6}{4} \frac{\alpha^{-4/3}}{(\text{ch } u - \cos v)^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = 0$$

en

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} = r^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{s}{\partial u} + 2 pr \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + p^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} + q \frac{\partial}{\partial v} \cdot$$

Hierin is gesteld

$$p = e^u \cos v - 1,$$

$$r = -e^u \sin v,$$

$$q = r(1 + rp),$$

$$s = p + 1 - e^{2u} \cos v,$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \mu_0^6 \cdot e^u \cdot (\text{ch } u - \cos v)^{-1}.$$

Terwijl de voorwaarde (1,2) overgaat in

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)_{v=\pi} = \frac{1/3}{(1+e^u)(1+\alpha^{-2/3})}$$

en

$$\Phi = 0 \text{ voor } v = 0,$$

en

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0 \text{ voor } u = v = 0.$$

Nu is dus de sector uit het  $(\mu, \xi)$  vlak aangegeven door  $0 \leq \mu < \infty$ ,  $0 \leq \xi < \pi/3$  afgebeeld op de strook  $-\infty < u < \infty$ ,  $0 \leq v \leq \pi$  van het  $(u, v)$  vlak. Hier eindigt onze analyse. Om relaxatie mogelijk te maken, brengt men een voldoende fijn rechthoekig net aan.

Bij de vervanging van de differentiaalën door hun differentiequotienten spelen behalve de waarde van de functie in het punt, waarin men relaxeert, ook nog de waarden in de omliggende 8 punten een rol. Zij de punten in de u richting gekozen met een interval van a, in de v richting met een interval van b. De nummering der punten geschiedt als volgt:

$$\begin{array}{ccc} 6. & 3. & 5. \\ 2. & 0. & 1. \\ 7. & 4. & 8. \end{array}$$

De waarde van de functie in het i-de punt zij  $\bar{\Phi}_i$ . Nu is het residu R in het 0-de punt bepaald door

$$R = \sum_0^8 a_i \bar{\Phi}_i,$$

waarbij

$$a_0 = -\frac{2}{a^2} (1 + t r^2) - \frac{2}{b^2} (1 + t p^2)$$

$$a_1 = \frac{1+tr^2}{a^2} + \frac{st}{2a}$$

$$a_2 = \frac{1+tr^2}{a^2} - \frac{st}{2a}$$

$$a_3 = \frac{1+tp^2}{b^2} + \frac{qt}{2b}$$

$$a_4 = \frac{1+tp^2}{b^2} - \frac{qt}{2b}$$

$$a_5 = -a_6 = a_7 = -a_8 = \frac{prt}{2ab}$$

$$\text{en } t = \mu_0^2 \frac{2^{-4/3} e^{-2/3 \cdot u}}{(ch u - \cos v)^{4/3}}.$$

Het punt  $u = 0$ ,  $v = 0$  is de afbeelding van het oneindige punt van het  $(\mu, \xi)$  vlak. In het  $(\mu, \xi)$  vlak gedraagt de oplossing zich

als een  $K_\nu(\sqrt{\mu})$  functie en wordt dus voor grote waarden van  $\mu > \mu_0$  exponentieel nul. In de omgeving van het punt  $u = 0, v = 0$  moet onze oplossing dus ook exponentieel nul worden. Dit gebeurt ook, want de coëfficiënten  $a_0, a_1$  enz. worden exponentieel groot in die omgeving.

Een voordeel is dat nu makkelijker met behulp van automatische rekenapparaturen gewerkt kan worden. Zo werden de coëfficiënten  $a_i$  voor elk punt  $(u, v)$  van het veld op de A.R.R.A. berekend en de relaxatie verder uitgevoerd op I.B.M. ponskaartenmachines. Het interval in de  $u$ -richting was daarbij een kwart en in de  $v$  richting gelijk aan  $\pi/16$ . De uitvoering op ponskaarten wordt weergegeven in rapport R 195 II.

##### 5. Vergelijking van beide methodes.

Zoals men ziet, vragen beide methodes de oplossing van een  $\infty$  stelsel vergelijkingen met  $\infty$  onbekenden, in beide gevallen gepaard gaande met moeizaam rekenwerk.

Door de ingewikkelde vorm van de coëfficiënten  $f_{m,n}$  in de bekende  $y_n$ , wordt het werken op een automatische rekenapparatuur zeer bemoeilijkt, terwijl de in onze methode voorkomende coëfficiënten  $a_i$  samengesteld zijn uit  $e$ -machten en sin-functies.

De relaxatie echter vergt nog al wat iteraties. Men dient een beginschatting te nemen voor de snelheidspotentiaal over het gehele veld en itereert deze. Vertoont in een punt de achtereenvolgens geitereerde functie een bepaalde trend, dan is het verstandig deze functiewaarde te extrapoleren. Het is echter mogelijk de functiewaarden na ongeveer 20 iteraties te bepalen in 4 decimalen (met een afwijking van een paar eenheden in het  $4^e$  cijfer).

Kramer en Goldstein hebben de snelheidspotentiaal slechts in drie decimalen, terwijl hun interval veel groter is dan het onze.

De thans verkregen waarden zijn goed differentieerbaar.



- 1 S. Goldstein, On the Vortex Theory of Screw Propellers.  
Proc. of Roy Soc. A, Vol. 123, 1929, p. 440-465.
- 2 K. N. Kramer, Weiterführung von Goldstein's Lösung des  
Optimalproblems für Schraubenpropeller.  
D.L.F. Forschungsbericht Nr 1531
- 3 A. Betz, Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust.  
Mit Zusatz von L. Prandtl. Göttinger Nachrichten 1919, p. 193-223.
- 4 J.D. van Manen, Invloed van de ongelijkmatigheid van het  
snelheidsveld op het ontwerp van scheepsschroeven. Diss. 1951.
- 5 F.L. Westwater, Some applications of conformal transformation  
to airscrew theory.  
Proc. Cambridge Phil. Soc. Bd. 32 (1936), p.676.
- 6 Y.V.G. Acharya en G. Janakiram, Circulation distribution for  
six- and eight-blades propellers.  
Appl. Sci. Research, Sect. A, Vol. 3, nr 6, p.410.