RA

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

GEOHYDROLOGISCH ONDERZOEK VAN NOORDHOLLAND

door

Rekenafdeling Mathematisch Centrum

R 386

1959

In opdracht van de Dienst der Zuiderzeewerken werd door ons onderzocht, ten behoeve van het geohydrologisch onderzoek in Noord-Holland, of uit gegevens betreffende de stijghoogte van het diepe grondwater de te verwachten wijzigingen in deze stijghoogten ten gevolge van de droogmaking van de zuidelijke IJselmeerpolders te berekenen zouden zijn. Ons werd verzocht deze berekeningen uit te voeren.

In uitvoerige besprekingen met de deskundigen van de Dienst der Zuiderzeewerken werd getracht een beeld te verkrijgen van de toelaatbare schematisatie van het gestelde probleem. Zulks met het oog op mogelijke numerieke verwerking enerzijds als met het oog op de noodzakelijkerwijs gebrekkige kennis van de fundamentele sterk van de plaats en mogelijk van de tijd afhankelijke physische grootheden als bodemgesteldheid, enz. anderzijds. Uiteindelijk moesten wij tot de teleurstellende conclusie komen, dat een kostbare en tijdrovende numerieke berekening niet gerechtvaardigd was en een korte uiteenzetting betreffende de uiteindelijk doorslaggevende moeilijkheden wordt hieronder gegeven.

Het is allereerst noodzakelijk de bestaande toestand te analyseren. Aangenomen werd, dat de grondwaterstroming beschreven kan worden door de vergelijking

$$(1) \qquad \Delta\varphi + \frac{h-\varphi}{\lambda^2} - \frac{Q}{kD} = 0 \ .$$

Hierin is φ de stijghoogte van het diepe grondwater ter plaatse, h de bovenwaterstand, Q de wateronttrekking en Δ de operator van Laplace. Voorts werd aangenomen, dat de bodem uit een goed doorlatende onderlaag bestaat met een doorlatendheid kD = 6000 m^2/etm. De moeilijk doorlatende bovenlaag bezit de, vooralsnog onbekende, doorlatendheid c (etm.), waarbij

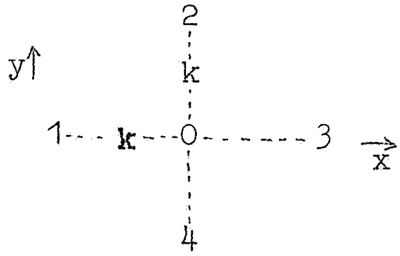
$$(2) \qquad \lambda^2 = kDc \ .$$

Om c te bepalen werd in eerste aanleg Q = 0 gesteld. Door de Dienst der Zuiderzeewerken werd ons opgave verstrekt van de grootheden φ en h, afgeleid uit de isohypsenkaart van het diepe grondwater, over een regelmatig puntennet van 2 x 2 km over Noord-Holland. Uit de vergelijking (1) volgt dan (met Q = 0):

$$c = - \frac{h-\varphi}{kD.\Delta\varphi} \quad . \tag{3}$$

De uitdrukking $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ werd als volgt door een differentie-uitdrukking benaderd.

Laten gegeven zijn de waarden van φ in de punten 0,1,2,3 en 4, waarbij de afstanden in de x en y richtingen zijn k, dan is in eerste benadering



$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4-4\varphi_0}{k^2} \tag{4}$$

Bij toepassing van deze formule vonden wij voor k = 2 km, kD = 6000:

x	y	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	h_0	$k^2\Delta\varphi$	$c.10^{-3}$ (k=2km)	$c.10^{-3}$ (k=4km)
-36	48	-3.85	-3.70	-3.75	-3.90	-3.85	-2.10	.20	- 5.83	- 7.78
-36	46	-3.85	-3.70	-3.85	-3.95	-3.80	-2.10	.10	-11.67	-10.37
-36	44	-3.80	-3.60	-3.85	-3.95	-3.70	-4.00	.10	+ 1.33	+ 1.19
-34	48	-3.90	-3.85	-3.80	-3.95	-3.95	-3.50	.05	- 5.33	- 2.67
-34	46	-3.95	-3.85	-3.90	-4.05	-3.95	-4.50.	.05	+ 7.33	+ 4.19
-34	44	-3.95	-3.80	-3.95	-4.05	-3.85	-4.30	.15	+ 1.56	+ 1.87
-32	48	-3.95	-3.90	-3.80	-3.95	-4.05	-4.30	.10	+ 2.33	+ 1.70
-32	46	-4.05	-3.95	-3.95	-4.10	-4.05	-4.60	.15	+ 2.44	+ 2.10
-32	44	-4.05	-3.95	-4.05	-4.10	-3.95	-4.20	.15	+ 0.67	+ 0,50

Aannemende dat de fout in φ maximaal 0,025 kan zijn, komen wij tot een mogelijke fout in $k^2\Delta\varphi$ van 8.0,025 = 0,20, hetgeen van dezelfde grootte-orde is als $k^2\Delta\varphi$ zelf. Hieruit volgt dus, dat $k^2\Delta\varphi$ numeriek zeer slecht te bepalen is. Voor een 4 km rijzen dergelijke precisie-moeilijkheden.

Het is duidelijk, dat bij toepassing van (3) de onnauwkeurigheid van $k^2 \Delta\varphi$ funest is. Toepassing van (3) leverde dan ook een c-waarden veld, dat physisch irreëel is; c wisselt zelfs van teken! In bovenstaande tabel zijn opgegeven c voor het 2 km net en tevens de c voor het 4 km net.

Een andere oorzaak voor het chaotische verloop van de c kan gelegen zijn in het verwaarlozen van Q. Daartoe werd aan de Dienst der Zuiderzeewerken opgaven verzocht van een gemiddelde Q per roosterpunt.

Voor de in de tabel gebruikte negen punten vinden we dan:

x	y	Qmm	$c.10^{-3}$
-36	48	.16	-12.50
-36	46	.47	5.47
-36	44	.73	- 0.34
-34	48	.51	0.92
-34	46	.70	- 0.88
-34	44	.84	- 0.57
-32	48	.88	- 0.48
-32	46	.84	- 0.89
-32	44	.70	- 0.32 .

Ook deze waarden van c stellen niets voor.

De redenen van het falen van onze bepaling van c kunnen zijn:

1. slecht bepaalde $\Delta\varphi$.
2. mogelijk ontoelaatbare middeling van Q.

In overleg met de Dienst der Zuiderzeewerken werd met deze conclusie het onderzoek onzerzijds (voorlopig) beëindigd.