COLLEGE CAPITA SELECTA WAARSCHIJNLIJKHEIDSREKENING
voor Mathematici (candidaten) 1946-'47
Prof. Dr. D van Dantzig.

Caput I. Grondslagen der Waarschijnlijkheidsrekening.

1. De oudste schrijvers over Whr)[1]: BLAISE PASCAL (1623-1662) en PIERRE DE FERMAT (1601-1665) in hun correspondentie van 1654, CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695; De ratiociniis in ludo aleae; Van Rekeningh in Spelen van Geluck, 1657), JOHAN DE WITT (1625-1672; Waerdije van Lijfrenten nae Proportie van Losrenten, 1671), e.a. hebben niet getracht, van het begrip "Waarschijnlijkheid" of "kans" een definitie te geven. Ook de beschouwingen van JACOB BERNOULLI (1654-1705 Ars Conjectandi, 1713, posthuum), b.v. "Waarschijnlijkheid .. is een graad van zekerheid en verhoudt zich tot deze als een deel tot het geheel" of "De wh wordt beoordeeld naar het aantal en het gewicht der argumenten", kunnen niet als een definitie beschouwd worden. ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754; The Doctrine of Chances, 1st ed. 1718, 2nd ed. 1738) definieert: "The Probability of an Event is greater or less, according to the number of Chances by which it may happen, compared with the whole number of Chances by which it may either happen or fail". Voor "Chances" leze men hier b.v.: mogelijke gevallen.

2. Een kriticus. Een moeilijkheid ontstond doordat de beroemde encyclopedist JEAN BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783) in de jaren 1754-1780 herhaaldelijk betoogde, dat de kans om in twee worpen met een munt minstens eenmaal kruis (K) te gooien niet 3/4 maar 2/3 was. Als nl. kruis de eerste keer gevallen is, behoeft men volgens hem geen tweede keer te werpen; er zijn dus drie gevallen: K, MK, MM, waarvan er twee gunstig zijn, dus de kans is 2/3. Dit werd bestreden door de zoon van NECKER, die opmerkte, dat de drie gevallen niet even waarschijnlijk waren. Volgens d'Alembert's redenering zou (zoals Necker betoogde) de kans om met een driezijdige dobbelsteen in n worpen een bepaalde zijde A te werpen, steeds $<\frac{1}{2}$ zijn, nl. $(2^n-1)/(2^{n+1}-1)$ B.v. voor n=3 zijn de gunstige gevallen: A, BA, CA, BBA, CBA, BCA, CCA, de ongunstige: BBB, BBC, BCB, CBB, CCB, CBC, CCC, dus kans =7/15. Later gaf d'Alembert wel gedeeltelijk toe, dat de gevallen niet even waarschijnlijk zijn, zonder echter ooit tot een juist inzicht in zijn fout te komen. Ook ontkende d'Alembert dat de opeenvolgende worpen onafhankelijk waren. Nadat b.v. Kruis gevallen was, zou de kans op nog eens Kruis kleiner zijn dan die op munt, en wel in des te sterker mate, als het aantal malen, dat K gevallen was groter was. Deze opvatting is in 1916 door een Duitsen philosoof (K.Marbe) opnieuw verdedigd op grond van een foutieve bewerking van statistisch materiaal ("Die Gleichförmigkeit in der Welt") Een andere Duitse filosoof (Sterzinger) betoogde daarentegen, dat gelijksoortige gebeurtenissen elkaar bevorderen, "Gesetz der Kraneltung" (1911). Zijn theorie werd aanvaard door den bioloog Kammerer (1919). Hun statistisch materiaal is echter volgens von Mises onvoldoende om hun these te bewijzen.

Beide fouten berusten op de aandachtsvernauwing die het letten op een bepaald resultaat met zich kan brengen. Doordat in het genoemde voorbeeld de zijde A de aandacht heeft wordt deze anders behandeld dan de beide andere zijden. Zo ook in een "run of events" (term van de Moivre), d.w.z. een serie opeenvolgende gelijke worpresultaten of andere gebeurtenissen, waar b.v geen rekening gehouden wordt met de mogelijkheid van niet waargenomen tussentijdse worpen, die volgens d'Alembert de kansen zouden wijzigen.

)[1] Afkortingen: w=waarschijnlijk, wh(n)=waarschijnlijkheid(heden), whr= waarschijnlijkheidsrekening. "Kans" is synoniem van wh.

3. De aequiprobabiliteitsdefinitie. Vermoedelijk teneinde d'Alemberts fout voortaan te voorkomen heeft PIERRE LOUIS DE LAPLACE (1749-1827; Théorie Analytique des Probabilités, 1re éd. 1812, 2nde éd. 1814, 3me éd. 1820; Essai philosophique sur les Probabilités, inleiding voor de tweede en derde druk van de Th. Analytique, 1814) de definitie gepreciseerd: de wh van een gebeurtenis is de verhouding van het aantal (voor de gebeurtenis) gunstige gevallen tot het totaal aantal mogelijke gevallen, echter met dien verstande, dat deze gevallen gelijkelijk mogelijk (également possibles) moeten zijn, d.w.z. dat wij gelijkelijk onwetend zijn omtrent hun voorkomen. Deze definitie, die gewoonlijk naar Laplace genoemd wordt (al komt de eis van gelijke mogelijkheden ook reeds in het artikel Probabilité van de Encyclopédie voor), is gedurende de gehele negentiende eeuw in gebruik gebleven, al is er wel meermalen kritiek op uitgeoefend.

4. Het indifferentieprincipe. De kritiek richtte zich voornamelijk tegen het "principe van onvoldoende reden", "indifferentieprincipe" of "principe van gelijke verdeling van onwetendheid", zoals het beginsel genoemd wordt, dat aan L-s aequiprobabiliteitsdefinitie ten grondslag ligt. (Het is wel duidelijk, dat "gelijkelijk mogelijk" niet anders is dan "even waarschijnlijk", waarbij deze term met opzet vermeden is om niet de indruk van een vicieuse cirkel te wekken; inderdaad is het mogelijk het algemene begrip "grootte ener wh" te definiëren met behulp van het bijzondere begrip "gelijke wh", mits natuurlijk dit laatste onafhankelijk van het eerste gedefinieerd is).

Dit beginsel houdt dus in, dat aan een aantal eventualiteiten, (mogelijke gebeurtenissen), gelijke waarschijnlijkheden worden toegekend, indien er geen reden is om één ervan eerder (sterker) te verwachten dan de anderen. (Men zou ook kunnen zeggen: indien er geen reden is om aan één ervan een grotere wh toe te kennen dan aan de anderen). Dit principe echter leidt tot contradicties. Indien men b.v. niets weet omtrent de vraag, of de planeet Mars bewoond is, zou men aan deze eventualiteit de wh $\frac{1}{2}$ moeten toekennen (het is zo of het is niet zo). Men kan echter ook zeggen: er is niets bekend omtrent het aantal mensen dat op Mars woont: dit kan evengoed 0 als 1 als 2, enz. zijn. Kent men dus aan deze eventualiteiten gelijk wh toe, dan is de wh dat het aantal =0 is, zelf =0 (of $\frac{1}{n+1}$ als n het maximaal aantal mensen is, dat op Mars zou kunnen wonen), en dus de wh, dat er minstens één mens woont =1 (resp. $\frac{n}{n+1}$). Indien men niets weet omtrent de kleur van een voorwerp, zou men bv aan de wh, dat deze rood is de waarde $\frac{1}{2}$ moeten toekennen (2 eventualiteiten. rood of niet rood), maar evenzo aan de wh, dat deze groen of blauw of paars, enz. is. De som der whn van een aantal elkaar uitsluitende eventualiteiten ware dus >1. (J. VON KRIES). Ook zou op grond van dit principe iemand die niets van een dobbelsteen wist, aan elk der zijden de wh 1/6 toekennen, terwijl b.v. iemand, die wist dat het zwaartepunt dichter bij de zijde 6 dan bij de andere zijden lag juist door deze meerdere kennis niet in staat zou zijn de whr op deze dobbelsteen toe te passen.

5. De spelingstheorie. Het indifferentieprincipe is sterk gekritiseerd door J. VON KRIES (Die Prinzipien der Whr. Eine logische Untersuchung, 1886). Hij wilde het "Prinzip des mangelnden Grundes" (terecht) vervangen door een "Prinzip des zureichenden Grundes", dwz. aan een aantal eventualiteiten alleen dàn gelijke whn toekennen, als daarvoor een dwingende reden bestaat. Von Kries beschouwt eventuele gebeurtenissen, die door de gestelde condities niet volledig bepaald zijn, en dientengevolge een zekere speling (Spielraum) toelaten. De dwingende reden voor gelijke wh zoekt von Kries nu in het bestaan van gelijke spelingen. Hoewel hij het begrip speling nog aan enkele beperkingen

onderwerpt, zijn zijn beschouwingen niet voldoende exact om er volledige theorie uit te ontwikkelen, die ook voor practische toepassingen geschikt is.

Men heeft wel eens voorgesteld (b.v. B.L. VAN DER WAERDEN in een voordracht), de gedachte van von Kries te preciseren met behulp van het fysische begrip "faseruimte". Hoewel dit al direct het bezwaar heeft, dat de toepassingen dan tot mechanische systemen met een eindig aantal vrijheidsgraden beperkt blijven, zou toch een slagen van deze poging van voldoende betekenis zijn, om er de consequenties van na te gaan.

We beschouwen dus een mechanisch systeem met een eindig aantal (n) vrijheidsgraden, bepaald door de noodzakelijke coördinaten $q_1,\ldots,q_n$. (Voor een dobbelsteen of ander vast lichaam b.v. is n=6; men neemt b.v. voor q_1,q_2,q_3 de coördinaten van het zwaartepunt en voor q_4,q_5,q_6, drie hoeken, die de stand van het lichaam in de ruimte bepalen). De kinetische energie T is dan een quadratische functie der fluxies $\dot{q}_i$ (i=1,...,n) met coëfficienten, die zelf van de q kunnen afhangen. De impulsies p_i zijn gedefinieerd door: $p_i = \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_i}$. De faseruimte is dan de 2n-dimensionale ruimte, door alle mogelijke waardestelsels $(p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n)$ doorlopen. Is nu het mechanisch systeem conservatief, d.w.z. zijn de krachten uit een potentiële energie P afleidbaar, die alleen van de coördinaten q_i afhangt, dan leert de stelling van LIOUVILLE, dat het volumeëlement $dp_1\ldots dp_n dq_1\ldots dq_n$ van de faseruimte in de tijd constant is. Hetzelfde is dan ook het geval met het volume, dat door een ongelijkheid $\varphi(p_i,q_i)\geq 0$ (met een continue functie φ) bepaald is, in de onderstelling, dat dit volume eindig is. Een bepaalde toestand van het lichaam is nu door een punt (p_i,q_i) van de faseruimte gegeven; een "speling" van toestanden door een gebied in de faseruimte. Het principe van gelijke spelingen zou er dus toe leiden, dat men de wh van een "speling" van eventuële toestanden evenredig zou stellen met het volume van het bijbehorende gebied in de faseruimte. Hoe plausibel deze definitie op het eerste gezicht ook schijnt, toch leidt zij tot ernstige moeilijkheden.

1. Maar we reeds zeiden blijft de wh-definitie tot conservatieve mechanische systemen beperkt, zodat zij geen toepassingen in de biologie, ekonomie, demografie e.d. veroorlooft.

2. Het totale volume van de faseruimte is in het algemeen oneindig. Wil men dus niet alleen met wh-verhoudingen maar met whn zelf werken dan moet men trachten het volume eindig te houden. In de eerste plaats is daartoe nodig, dat de q_i slechts eindige intervallen kunnen doorlopen. Bij de roulette, opgevat als systeem met één vrijheidsgraad $q=\vartheta$ is dit b.v. het geval; bij een dobbelsteen alleen indien men één punt vasthoudt. Overigens kan men ook oneindige vrijheidsgraden toelaten indien hun veranderingen de energie constant laten (cyclische coördinaten), dus bij een dobbelsteen kan men b.v. ook nog bewegingen over een horizontaal vlak toelaten. Ook bij begrensde q_i kan het volume van de faseruimte oneindig worden, doordat de p_i oneindige intervallen doorlopen. Men kan ook hier eindigheid bereiken met behulp van onderstellingen omtrent de totale of de kinetische energie. De eenvoudigste veronderstelling ware, voor de energie $H(p_i,q_i)$ een gegeven waarde aan te nemen; dit gaat echter niet, doordat men wel in de 2n-dimensionale faseruimte, maar niet in de(2n-1)dimensionale deelruimte $H(p_i,q_i)=E$ (een gegeven constante E) een tegen coördinatentransformaties invariant volume-element bezit. Wel kan men de beperking: $H\leq E$ opleggen. (Naar beneden is H vanzelf begrensd doordat de kinetische energie ≥ 0 is en de potentiële energie door de eindigheid van de coördinaatintervallen begrensd is). Dit komt dus daar op neer, dat men alle energiewaarden $\leq E$ gelijkelijk toelaat en de energiewaarden $> E$ uitsluit. Men kan echter ook t.a.v. de energie een algemenere whonderstelling invoeren, zoals in de thermodynamika geschiedt.

Daar neemt men (MAXWELL, BOLTZMANN, GIBBS) de wh van een toestand met energie H :: $e^{-\frac{H}{kT}}$)[1], waarin kT de in energiemaat gemeten absolute temperatuur is. In beide gevallen wordt dus de wh dW van een volume-element $d\Phi = dp_1 \ldots dp_n dq_1 \ldots dq_n$ niet $= d\Phi$ genomen, maar in het eerste geval:

voor $H(p_i, q_i) \leq E$ $dW = const. d\Phi$

en voor $H > E$ $dW = 0$

en in het tweede geval: $dW = const. e^{-\frac{H}{kT}} d\Phi$

In beide gevallen krijgen we een wh-verdeling, die nog van een willekeurig te kiezen parameter (E resp. T) afhangt. In de fysika is dit geen bezwaar; indien men echter op deze wijze de whr zèlf wil funderen, is dit wèl het geval, daar de ondubbelzinnige bepaaldheid dan verloren gaat.

3. Het derde bezwaar is nog ernstiger. Tot dusverre hebben wij het systeem conservatief verondersteld. In de meeste gevallen (b.v. dobbelsteen, roulette) wordt echter het systeem tenslotte in een evenwichtstoestand waargenomen. Nu kan een conservatief systeem nooit, uitgaande van een niet stabiele toestand in een stabiele evenwichtstoestand komen. D.w.z. het is wezenlijk, dat er niet-conservatieve krachten optreden. Wil men nu op de stelling van Liouville gebaseerde theorie toepassen, dan zal men dW op een nog gecompliceerdere wijze van $d\Phi$ moeten laten afhangen door bemiddeling van een factor, die van de niet-conservatieve krachten afhangt. Men kan hier b.v. denken aan de een of andere functie van de energiedissipatie $-\frac{dE}{dt}$. Dat een dergelijke functie onvermijdelijk is blijkt weer uit het voorbeeld van de roulette: wanneer men nl. de rode velden met een zeer ruwe en de zwarte met een zeer gladde stof bekleedt, is te verwachten, dat het balletje vaker op rood dan op zwart tot rust zal komen, zodat dW niet eenvoudig :: $d\Phi$ (dus $d\vartheta$) gekozen kan worden, maar men genoodzaakt is een factor in te voeren, waardoor de afhankelijkheid van de wrijvingscoëfficient van ϑ tot uitdrukking gebracht wordt. (Bij een zuivere roulette wordt deze factor weer onafhankelijk van ϑ).

4. Tenslotte blijft nog de moeilijkheid, dat, zelfs als dit alles gelukt is, men wel een wh-begrip gedefinieerd heeft, maar men nog niet over middelen beschikt om dit met waarneembare verschijnselen in verband te brengen. Het waarneembaar verschijnsel is dan de veelvuldigheid, waarmee bepaalde toestanden als eindtoestand optreden en uit een op bovenstaande wijze gedefinieerd wh-begrip volgt nog geenszins, dat deze veelvuldigheid met de aldus gedefinieerde wh zelfs maar bij benadering evenredig zal zijn. Integendeel zal in het algemeen de veelvuldigheid van een bepaalde eindtoestand ook nog afhangen van de veelvuldigheid van bepaalde begintoestanden.

Tenslotte kunnen wij dus zeggen, dat er vooralsnog geen aanwijzing bestaat voor de mogelijkheid, het wh-begrip op de stelling van Liouville en daarmee op het spelingsbegrip van von Kries te funderen.

6. Kritiek op de klassieke definitie.

Door deze kritiek tegen de wijze waarop tot "gelijkmogelijkheid" werd geconcludeerd, werd echter de definitie van Laplace zelf nog niet aangetast. Inderdaad is deze gedurende de gehele 19e eeuw door bijna alle mathematici en filosofen aanvaard (b.v. POISSON, LACROIX, QUETELET, DE MORGAN, BOOLE, LAURENT, POINCARE, BERTRAND, BOREL, VON KRIES, FRIES, enz.). Een kritische houding hiertegenover werd daarentegen aangenomen door ELLIS, COURNOT en VENN. Vooral sinds de whr niet meer in hoofdzaak op kansspelen werd toegepast, maar ook in de fysika, de sociale wetenschappen, de biologie, e.d. werd gebruikt, is het begrip der aequiprobabiliteit zèlf aan kritiek onderworpen. Dit is vooral door RICHARD VON MISES gedaan (Wahrscheinlichkeitsrechnung 1931; Wahrscheinlichkeit, Statistiek und Wahrheit 1928, Engelse vertaling 1939) en voorts door zijn aanhangers, b.v. ERNST NAGEL (Principles of the Theory of Probability, in International Encyclopaedia of Unified Science, Vol.1 Nr.6, 1939).

)[1] :: betekent: is evenredig met.

De kritiek is vooral gebaseerd op het feit, dat het wh-begrip vaak wordt toegepast zonder dat men de aequiprobabele eventualiteiten kan aangeven. Dit was reeds het geval bij Laplace zelf, die worpen met een onzuivere munt beschouwde. Indien men b.v. aan de wh om K te werpen de waarde 2/5 toekent, welke zijn dan de 5 eventualiteiten, waarvan er 2 tot K leiden? Klaarblijkelijk berust deze waarde op een geheel ander beginsel, nl. de frequentie waarmede het resultaat K in een serie worpen te voorschijn komt. Evenzo is de uitspraak, dat de sterftekans (binnen een jaar) van een man van 45 jaar =0,003 is, bezwaarlijk te definiëren door te zeggen, dat zich duizend eventualiteiten kunnen voordoen, waarvan er 3 tot sterfte binnen een jaar leiden. Ook bij andere - reeds door Laplace behandelde - problemen, b.v. de vraag naar de kans, dat een kind, dat geboren zal worden een jongen zal zijn, is de gelijkmogelijkheidsdefinitie niet houdbaar.

7. De frequentielimestheorie. Deze kritiek op de gelijkmogelijkheidsdefinitie heeft tot een groep definities van geheel andere aard geleid, die op het begrip frequentiequotient (relatieve frequentie) gebaseerd zijn. Volgens deze definitie betekent b.v. de uitspraak, dat de wh om met een zuivere dobbelsteen een 6 te werpen =1/6 is, in haar eenvoudigste interpretatie, dat in een serie van 6n worpen er n het resultaat 6 geven. In deze vorm is de definitie echter zeker niet algemeen houdbaar, want het frequentiequotient, waarmee de 6 in een serie van 6n worpen optreedt is zeker niet exact constant. Men moet de definitie dan met woorden als: "ongeveer" en: "voor gtote n" aanvullen, waardoor echter haar bepaaldheid verloren gaat. Dergelijke definities zijn gegeven door R.LESLIE ELLIS (1843) en J.VENN (The logic of chance, 1866).

Dit heeft ertoe geleid, dat men de bovengenoemde definitie van wh als frequentiequotient vervangen heeft door een andere, waarbij de wh als limiet van een frequentiequotient optreedt. Dit is het eerst gedaan door A.A.COURNOT (1801-1877, Exposition de la théorie des chances et des probabilités, 1843). Hoewel deze gedachte dus reeds in de vorige eeuw herhaaldelijk uitgesproken is, is zij eerst door VON MISES tot een systematische theorie uitgewerkt.

Von Mises beschouwt een oneindige rij van gebeurtenissen (elementen), waarvan elk één uit een (b.v eindige) verzameling van kenmerken ("Merkmalmenge") bezit. Een dergelijke oneindige rij wordt door von Mises een collectief genoemd, indien aan de volgende twee axiomas voldaan is:

1. Limesaxioma: indien m_n het aantal keren is, dat een bepaald kenmerk K onder de eerste n elementen optreedt, dan bestaat: $\lim \frac{m_n}{n}=p$ voor ieder kenmerk K. Dat is dus de limiet van het frequentiequotient en heet de waarschijnlijkheid van K t.o.v. het collectief.

2. Onregelmatigheidsaxioma. Indien men uit het collectief een deelrij neemt, bestaande uit elementen met rangnummer $n_k (k=1,2,3,\ldots)$ zo, dat $n_{k+1} > n_k$ is en dat n_k niet afhangt van het kenmerk, dat het element met rangnummer n_k bezit, dan moet het frequentiequotient van elk kenmerk K t.o.v. de deelrij dezelfde limiet hebben, als t.o.v. het gegeven collectief.

Op de wijze, waarop von Mises, uitgaande van deze twee axiomas, de whr opbouwt, gaan we hier niet in.

8. Kritiek op het onregelmatigheidsaxioma. Deze theorie van von Mises heeft van verschillende zijden bestrijding ondervonden, die zich vooral gericht heeft tegen het onregelmatigheidsaxioma. Beschouwen wij eenvoudigheidshalve het geval, dat slechts 2 kenmerken optreden, die we met 0 en 1 aangeven, dan is dus een collectief bepaald door een oneindige rij van cijfers 0 en 1. Het geven van dit collectief is dan aequivalent met het geven van de functie l_t, die het rangnummer van de t^e 1 uit de rij aangeeft. Indien nu deze functie als arithmetische functie gegeven is, kan men op talloze wijzen arithmetische functies n_k

construeren, waarvoor het onregelmatigheidsaxiome niet geldt: b.v. kan men kiezen $n_k = l_k$. Hieruit blijktdus, dat de functie l_k niet als arithmetische functie gegeven mag zijn of, hetgeen op hetzelfde neerkomt, dat een collectief niet als in mathematische zin volledig gedefinieerd beschouwd mag worden, maar ofwel empirisch bepaald moet worden, of wel het karakter van een vrije keuzereeks in de zin van L.E.J.BROUWER zal verkrijgen.

Men kan aan deze moeilijkheid tegemoet komen door de verzameling van alle deelrijen, waarvoor het onregelmatigheidsaxiome moet gelden aan zekere beperkingen te onderwerpen. Dit is b.v. gedaan door H.REICHENBACH (Wahrscheinlichkeitslehre 1935), die het onregelmatigheidsaxioma alleen betrekt op die deelrijen, waarvoor n_k een rekenkundige reeks vormt. Deze beperking echter gaat te ver, want beschouwt men b.v. de rij: 1001000010000001... dus $l_k = r^2$, dan is p=0 voor het optreden van de 1 en aan de voorwaarde van Reichenbach is voldaan. Neemt men echter de deelrij. $n_k = k^2$, dan is hiervoor de limiet =1. Dit is dus wel een collectief in de zin van Reichenbach maar niet in de zin van von Mises. En inderdaad lijkt het ongewenst het collectiefbegrip van von Mises uit te breiden tot rijen, die nog zo'n grote mate van regelmatigheid bezitten.

Het is echter wel mogelijk het onregelmatigheidsaxioma op een zodanige wijze te formuleren, dat het mathematisch bruikbaar wordt, dat zelfs de existentie van collectieven vermoedelijk bewijsbaar is, terwijl toch de omvang van het collectiviteitsbegrip practisch met die van von Mises gelijk blijft. (In deze richting zijn de laatste jaren voor de oorlog onderzoekingen gedaan o.a. door A.CHURCH, terwijl A.H.COPELAND en A.WALD onderzoekingen in enigzins andere richting hebben gedaan.). Daartoe maakt men gebruik van één of andere formalisering van de wiskunde der natuurlijke getallen, in het bijzonder van het begrip arithmetische functie. We nemen dan aan, dat alle werkelijk voorkomende arithmetische functies in een bepaalde volgorde ingevoerd zijn. Hoe dit kan geschieden wordt in de leer der grondslagen van de rekenkunde aan de hand van het begrip primitieve en algemene recursie uiteengezet. (b.v. in D.HILBERT en P.BERNAYS: Grundlagen der Mathematik). Men kan dan eisen, dat de limiet van het fq)[1] =p moet zijn voor alle functies n_k , die binnen het beschouwde formalistische systeem gedefinieerd kunnen worden, terwijl dit niet het geval hoeft te zijn voor functies, die binnen het systeem niet, maar in een ruimer systeem wel definieerbaar zijn. Dit komt dus neer op een relativering van het begrip "onregelmatigheid" met behulp ener bekende relativering van het begrip "definieerbaarheid". Het begrip "onregelmatig" impliceert nl. een uitsluitingsnegatie in de zin van G.MANNOURY. het optreden van enigerlei regelmatigheid wordt ontkend, zonder dat een alternatief gesteld wordt. Zulk een negatie is een emotioneel verwerpen, maar houdt geen beschrijving van een feitelijke toestand in. Om dit laatste te bereiken, om dus aan het begrip "onregelmatig" niet uitsluitend een emotionele, maar ook een z.g. indicatieve betekenis te geven, moet de uitsluitingsnegatie door een keuzenegatie vervangen worden. In casu kan dit althans partieel geschieden door de uitspraak, dat geen enkele regelmatigheid zal optreden om te zetten in de eis, dat bepaalde regelmatigheden (bepaald door het formalistisch systeem) niet zullen optreden. Partieel is deze vervanging slechts doordat de in het begrip "oneindig" geïmpliceerde uitsluitingsnegatie behouden blijft. Eerst als ook deze geëlimineerd is, in een strikt finiete theorie dus, heeft de negatie een volledig keuzekarakter ("dit niet", aequivalent met : "dat wel") gekregen.

9. Kritiek op het limesaxioma. Terwijl dus de kritiek tegen het onregelmatigheidsaxioma wel op te vangen is, blijft er een bezwaar van geheel andere aard bestaan tegen het limesaxioma zelf. Immers voor de theorie van von Mises is het wezenlijk, dat het collectief oneindig is, terwijl men in de praktische toepassingen nooit anders dan met eindige waarnemingsreeksen te doen heeft. Dit bezwaar tracht von Mises te weerleggen met de opmerking, dat een dergelijke overgang

)[1] fq = frequentiequotiënt.

van het eindige naar het oneindige als mathematische idealisering ook in allerlei andere gebieden van de ervaringswetenschappen voorkomt, b.v. bij de begrippen "snelheid" of "dichtheid" (soortelijke massa), beide als limiet van een differentiequotient. Iedere uitspraak over differentiaalquotienten en integralen, zoals die gewoonlijk in de fysika voorkomen, is om te zetten in een uitspraak over differentiequotienten of eindige sommen, die met een vooraf bepaalde nauwkeurigheid zal gelden. Indien b.v. de snelheid van een voorwerp (t.o.v. een gegeven coördinatensysteem) op een bepaald tijdstip =v is, dan bedenke men, dat een "tijdstip" eigenlijk een niet te groot, maar ook niet te klein tijdsinterval betekent, waarbinnen de gemiddelde snelheid tussen twee v omsluitende grenzen moet blijven. Zulke grenzen voor t en v zijn, afhankelijk van de meetapparatuur, expliciet aan te geven. Bij het limesaxioma van von Mises daarentegen is de situatie anders, doordat de limieteigenschappen blijven bestaan, wanneer men een nog zo groot beginsegment aan de rij vooraf laat gaan. Heeft men dus b.v. een collectief van von Mises met lim $=\frac{1}{2}$ voor het kenmerk 1 en zet men 1.000.000 maal een 1 er voor, dan blijft deze limiet $=\frac{1}{2}$. Hieruit volgt omgekeerd, dat men uit een eindige rij ènen geen conclusie omtrent de limiet kan trekken, hoe lang deze rij ook is.

Men zou kunnen trachten, het limesaxioma eveneens te redden door te eisen, dat de benadering van het fq tot de limiet met een bepaalde "convergentiesnelheid" plaats vindt, d.w.z., dat

voor $n \geq N(\varepsilon)$ $\quad \left|\frac{m_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon$ is bij een gegeven functie $N(\varepsilon)$.

(De reciproke functie van $N(\varepsilon)$ kan men convergentiesnelheid noemen; b.v. $N(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon(N)=\frac{1}{N}$).

Dit blijkt echter niet mogelijk te zijn, althans niet met behoud van de eigenschappen van de elementaire whr, daar men kan bewijzen, dat bij gegeven p en gegeven $N(\varepsilon)$ er altijd een positieve wh bestaat, dat er verder in de reeks nog een afwijking $>\varepsilon$ optreedt.

Dit komt hier op neer, dat de limiet niet gelijkmatig bestaat voor alle bij een bepaald verschijnsel behorende collectieven met een gegeven beginsegment. Dit komt ook daar op neer, dat de limiet wel in de zin van de klassieke wiskunde gedefinieerd is, maar niet in de zin der intuïtionistische , daar dan bij een gegeven beginsegment van b.v. n elementen de limiet met zekerheid binnen een interval van de grootte 2ε zou moeten liggen, waarbij ε met 1/n naar 0 gaat. En dit is niet het geval, daar bij geen enkele n zelfs $\varepsilon < \frac{1}{2}$ kan zijn. Het blijkt hier dus, dat de eis van de intuïtionistische wiskunde precies overeenstemt met de eis, die door de practijk gesteld is. (vgl. symposium over whr, Nederl. tijdschr. v. Natuurkunde dl 8, 1941, speciaal bl. 70-93).

H.BLUME poogde het collectiefbegrip van von Mises tot eindige collectieven te beperken (Zeitschrift für Physik, dl 92 en 94, 1934 en 1935). Deze poging kan echter nog niet volledig als geslaagd beschouwd worden (vgl. KOLMOGOROFF, Zentralblatt für Mathematik dl 10, 1935).

Hoewel tegen de opbouw van de whr volgens von Mises dus ernstige bezwaren zijn in te brengen, komt hem de zeer grote verdienste toe, dat zijn theorie in hoge mate bevruchtend op de ontwikkeling van de whr gewerkt heeft en het onderzoek naar de grondslagen in een geheel nieuw stadium gebracht heeft. Bovendien heeft hij, o.a. in zijn leerboek over whr diverse nieuwe resultaten aan de whr toegevoegd, die onafhankelijk zijn van de wijze, waarop de theorie gefundeerd wordt, en dus door de kritiek op de grondslagen niet getroffen worden.

10. Subjectivistische opvatting. Aan de frequentie- en frequentielimestheorieen ligt de opvatting ten grondslag, dat een bepaalde eventualiteit (eventueel met betrekking tot zekere onderstellingen) aan bepaalde wh bezit op dezelfde wijze, als een lichaam een zekere massa bezit. Dat hierdoor dus een objectief vaststaande eigenschap van gebeurtenissen wordt weergegeven, waarbij de frequentiebepalingen als een soort van meetmethode moeten worden beschouwd.

Daartegenover staat de opvatting van de subjectivistische school, die het bestaan van een objectieve wh (precieser. van een objectieve grootheid, die de uit de whr bekende eigenschappen bezit) ontkent. Deze opvatting ligt eigenlijk reeds aan de Ars conjectandi van J.BERNOULLI ten grondslag. Volgens haar drukt de wh van een eventualiteit niet een eigenschap van deze eventualiteit uit, maar een eigenschap van onze kennis met betrekking tot deze eventualiteit. In de tegenwoordige tijd is de belangrijkste an meest consequente vertegenwoordiger van deze richting de actuaris BRUNO DE FINETTI te Triest.

Hij definieert de wh van een eventualiteit E met betrekking tot een bepaalde proefpersoon P als de verhouding: $p=\frac{k}{k+1}$, wanneer P bereid is k tegen één te wedden, dat de eventualiteit E zal gebeuren. De whr is nu volgens de Finetti het stelsel van de eigenschappen, die aldus gedefinieerde whn moeten bezitten, opdat zij cohaerent zijn, d.w.z. niet met zekerheid winst of verlies voor P zullen opleveren. Dit komt er op neer, dat als enige conditie geldt, dat de som der whn van een stelsel elkaar uitsluitende eventualiteiten, waarvan met zekerheid één moet optreden (een kategorisch systeem) gelijk 1 is. Dat deze voorwaarde nodig en voldoende is, wordt door de Finetti bewezen door de voorwaarde, waaraan weddenschappen onderworpen zijn, te preciseren. Daartoe eist men van P, dat hij, als hij de weddenschap op k tegen één afsluit, altijd als dit verlangd wordt bereid zal zijn, een willekeurig aantal coupons à f p,- zij het te verkopen of ook te kopen, met de voorwaarde, dat hij, als E optreedt, op ieder van deze coupons f 1,- zal betalen resp. ontvangen. De Finetti bewijst nu, dat de bovengenoemde voorwaarde nodig is, opdat P zich tegen zeker verlies kan hoeden. Neem daartoe aan, dat $E_1 \ldots E_n$ een kategorisch systeem vormen en $p_1 \ldots p_n$ de door P vastgestelde whn zijn. Is nu:

$$p_1+p_2+\ldots+p_n < 1$$

dan kan het publiek, door van alle bonnen evenveel te kopen P een zeker verlies van $(1-\sum p_i)$ gulden per serie berokkenen. Is daarentegen $\sum p_i > 1$, dan kan het publiek door gelijke aantallen bonnen aan P te verkopen hem $(\sum p_i -1)$ gulden per serie zeker verlies laten lijden.

Volgens deze opvatting blijven dus de waarden, die men aan de whn kan toekennen nog in hoge mate onbepaald. B.v. zou men sterftekansen even goed kunnen bepalen op grond van een sterftetafel van 1693 als van 1930 en op deze wijze een cohaerent systeem verkrijgen, dat echter praktisch niet bruikbaar is. Nu kan men eventueel aan de Finetti toegeven, dat de nadere vaststelling der waarden van de wh niet tot de whr behoort, maar in ieder geval moet op enigerlei wijze de band gelegd worden tussen de waarden, die voor de wh gekozen worden en de statistische gegevens, waarop deze gebaseerd zijn. De situatie is min of meer vergelijkbaar met die in de mechanika, wanneer deze op de eerste 3 wetten van Newton wordt opgebouwd, of ook in de analytische mechanika, wanneer men deze beschouwt als de theorie der kanonische vergelijkingen. In beide gevallen zijn aanvullende wetten nodig, zoals de gravitatiewet van Newton of de electrische en magnetische wetten van Coulomb en Ampère, die tot uitdrukking brengen, welke waarden de krachten of de energie onder gegeven omstandigheden bezitten.

De subjectivistische richting miskent enigzins de betekenis van een mathematische theorie, die bestemd is om subjectieve gewaarwordingen te formaliseren. Deze is wellicht het duidelijkst in te zien aan de hand van het analoge voorbeeld der warmteleer. De sensorische warmtegewaarwordingen hebben evenzeer een subjectief karakter als de verwachtingen. De fysische warmteleer dient nu juist om de intrasubjectieve warmtegewaarwordingen te vervangen door meer intersubjectieve (objectieve) waarnemingen van thermometers. Deze laatste zijn daarom voor dit doel bruikbaar omdat binnen niet te ruime grenzen doorgaans en gemiddeld niet te kleine verschillen tussen temperatuuraflezingen met overeenkomstige verschillen tussen warmtegewaarwordingen corresponderen. Strikte en algemeen geldige overeenstemming kan men niet verwachten en is de facto ook niet aanwezig, maar in de fysische warmteleer en de daarop steunende mathematische theorieen (thermodynamika en kinetische gastheorie) wordt een deel der voor de warmtegewaarwordingen gebruikte terminologie op de aflezingsresultaten overgedragen. Op dezelfde wijze dienen we op de statistische waarnemingen een mathematische theorie op te bouwen, die als vervanging van de met die waarnemingen samenhangende verwachtingen kan dienen. Men kan desgewenst ook hier de subjectieve termen als wh e.d. aanhouden, maar zal ook hier rekening moeten houden met de mogelijkheid, dat bij bepaalde personen of onder bepaalde omstandigheden de subjectieve graden van verwachting niet met de statistische resultaten overeenstemmen. Het zou in principe zelfs mogelijk zijn een pathologie van optimisten en pessimisten op te bouwen, maar natuurlijk altijd slechts nadat de objectieve begrippen gedefinieerd en bestudeerd zijn.

De Finetti, die whn wil <u>definiëren</u> met behulp van graden van bereidheid tot het aangaan van bepaalde weddenschappen is dan te vergelijken met een arts, die de patient <u>vraagt</u>, hoe warm hij het heeft en daarmee niet alleen de koortstoestand van de patient wil beoordelen, maar ook nog zijn koortsthermometer wil ijken.

11. <u>Axiomatische theorie</u>. De axiomatische richting in de whr wordt vooral vertegenwoordigd door A.KOLMOGOROFF (Grundbegriffe der Whr,1933). De door hem ontworpen axiomatiek komt in principe reeds voor in een iets oudere publicatie van H.REICHENBACH terwijl reeds G.BOHLMANN in zijn encyclopaedieartikel van 1901 een axiomatische basis aan de whr trachtte te geven. De axiomatiek van Kolmogoroff heeft het voordeel, bijzonder eenvoudig en zeer algemeen te zijn.

Kolmogoroff gaat uit van een willekeurige eindige of oneindige verzameling E, welker elementen hij <u>elementaire gebeurtenissen</u> noemt. Een willekeurige deelverzameling van E noemt hij een <u>gebeurtenis</u>. Wij zullen deze term echter vervangen door: <u>eventualiteit</u>). Het begrip deelverzameling kan daarbij nog op één of andere wijze beperkt worden tot een <u>klasse</u> K van verzamelingen, mits.

1) het complement van elke verzameling dier klasse
en 2) de doorsnede (dus ook de vereniging) van eindig veel verzamelingen dier klasse, zelf weer tot K behoren.
(Men kan dus b.v. alle deelverzamelingen van Borel van de gegeven verzameling nemen).

Een klasse van verzamelingen, die aan de voorwaarden 1) en 2) voldoet heet een <u>verzamelings-lichaam</u>.

De <u>axiomata</u> van Kolmogoroff luiden als volgt:

I) K is een verzamelingslichaam.
II) de gegeven verzameling E behoort tot K.
III) aan iedere tot K behorende verzameling A is een niet-negatief reëel getal P(A) toegevoegd. Dit getal heet de wh van de eventualiteit A.
IV) $P(E)=1$.
V) Als A en B geen elementen gemeen hebben is: $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.)'

Een functie P(A), die aan axioma V voldoet heet een <u>additieve verzamelingsfunctie</u>. Een verzamelings-lichaam met een verzamelingsfunctie, die aan bovenstaande axiomas voldoet wordt door Kolmogoroff een <u>waarschijnlijkheidsveld</u> genoemd. Kolmogoroff merkt op, dat de op empirische eventualiteiten betrekking hebbende terminologie met behulp van een verzamelingslichaam geformaliseerd kan worden door middel van een door hem aangegeven vertaalschema, dat als volgt luidt.

eventualiteiten:	verzamelingen:
1) A en B sluiten elkaar uit.	1) A en B zijn disjunct, d.i.: $A \cap B = 0$
2) X gebeurt dan en slechts dan, als $A_1 \ldots A_n$ allen gebeuren. (conjunctie van $A_1, \ldots, A_n$).	2) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = X$.

)' $A \cup B$ (lees: A met B) resp. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ is de vereniging van A en B, resp. $A_1 \ldots A_n$
$A \cap B$ (lees: A door B) resp. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ is de doorsnede van A en B, resp. $A_1 \ldots A_n$

3) $\bar{A}$ gebeurt dan en slechts dan, als A niet gebeurt.	3) $\bar{A}$ is de complementaire verzameling van A (t.o v. E)
4) X gebeurt dan en slechts dan, als mistens één van $A_1 \dots A_n$ gebeurt.	4) $\bigcup_1^n A_i = X$.
5) A is onmogelijk.	5) A=o (A is leeg)
6) A gebeurt zeker.	6) A=E.
7) steeds wanneer A gebeurt, gebeurt B.	7) $A \subset B$.

Uit de axiomas volgt nu, daar $A \cup \bar{A}=E$ en $A \cap \bar{A}=o$ is:
$P(A)+P(\bar{A})=1$ of: $P(\bar{A})=1-P(A)$, dus voor alle A is: $0 \leq P(A) \leq 1$,
en in het bijzonder, daar $\bar{E}=o$ is: $P(o)=0$.
Indien $A_1 \dots A_n$ elkaar uitsluiten is: $P(\bigcup_1^n A_i)=\sum_1^n P(A_i)$ (optellingstheorema)
Indien $P(A)>0$ is heet $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ de voorwaardelijke wh van B onder de voorwaarde A.
Dan geldt: $P(A\cap B)=P(A).P_A(B)$ en door inductie:
$P(\bigcap_1^n A_i)=P(A_1).P_{A_1}(A_2).P_{A_1\cap A_2}(A_3).\dots.P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$. (vermenigvuldigingstheorema)
Verder heeft men:
$P_A(B)\geq 0 \qquad P_A(E)=1 \qquad P_A(B\cup C)=P_A(B)+P_A(C)$
Dit laatste als $A\cap B\cap C$ leeg is, dus zeker als $B\cap C$ leeg is.
Hieruit volgt, dat $P_A(B)$ bij gegeven A t.o.v. het gegeven verzamelingslichaam een wh-veld definieert, dus: alle voor de wh $P(B)$ bewezen eigenschappen gelden ook voor de voorwaardelijke wh $P_A(B)$.
We merken nog op, dat:
$P_E(B)=P(B) \qquad P_A(A)=1$ en $P_B(A)=\frac{P(A)}{P(B)}P_A(B)$ ($P(A)$ en $P(B)>0$).
Een stelsel eventualiteiten, die elkaar 2 aan 2 uitsluiten, noemen we een exclusief systeem; een stelsel, waarvan minstens één met zekerheid optreedt, een volledig systeem. Een stelsel eventualiteiten, dat zowel exclusief als volledig is, noemen we een kategorisch systeem. Kolmogoroff noemt zulk een systeem een experiment ('Versuch').

Indien $A_1 \dots A_n$ een kategorisch systeem vormen en X willekeurig is, dan is: $P(X)=\sum_1^n P(A_i).P_{A_i}(X)$ daar $X=\bigcup_1^n(A_i\cap X)$ en $(A_i\cap X)\cap(A_j\cap X)=0$ voor $i\neq j$.
Hieruit volgt de z.g. stelling van Bayes:

Indien $A_1 \dots A_n$ een kategorisch systeem vormen en X willekeurig is, dan is:
$$P_X(A_i)=\frac{P(A_i).P_{A_i}(X)}{\sum_j P(A_j).P_{A_j}(X)}$$
Men noemt gewoonlijk $\{A_i\}$ een systeem van hypothesen, en beschouwt het linkerlid als de wh, dat de i^e hypothese juist zal zijn, indien de eventualiteit X gebeurd is. Deze hangt dus af van:
1) de whn $P(A_i)$ (de z.g. a priori-whn der hypothese) en
2) de whn $P_{A_i}(X)$, dat zijn dus de whn van X onder voorwaarde, dat de i^e hypothese juist is. De meeste toepassingen, die van de stelling van Bayes gegeven worden, zijn van zeer geringe waarde, doordat zij berusten op een vaak zeer willekeurige veronderstelling omtrent de doorgaans onbekende a priori whn. Hierop komen wij later terug.

We noemen de eventualiteiten A en B onafhankelijk, als geldt:
$$P(A\cap B)=P(A).P(B).$$
Voor $P(A)>0$, $P(\bar{A})>0$, resp. $P(B)>0$, $P(\bar{B})>0$ geldt dan tevens:
$$P_A(B)=P_{\bar{A}}(B)=P(B) \quad \text{en} \quad P_B(A)=P_{\bar{B}}(A)=P(A)$$
want: $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)$, voorts is: $P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(B)$
of: $P(A).P(B)+P(\bar{A}\cap B)=P(B)$ dus: $P(\bar{A}\cap B)=P(B)(1-P(A))=P(B).P(\bar{A})$
d.w.z. als A en B onafhankelijk zijn, dan ook $\bar{A}$ en B (en evenzo A en $\bar{B}$ benevens $\bar{A}$ en $\bar{B}$). De afleiding geldt ook in omgekeerde richting.

De tot dusverre gegeven axiomas van Kolmogoroff zijn voldoende om de theorie van de eindige wh-velden op te bouwen. Indien men oneindige beschouwt, is het wenselijk het 5^{e} axioma als volgt te verscherpen.

Indien $A_n \epsilon K$ voor iedere n en $(\overset{\infty}{\underset{i}{\cup}} A_i) \epsilon K$ is en indien $A_m \cap A_n = 0$ is voor alle m≠n, dan is. $P(\overset{\infty}{\underset{i}{\cup}} A_i) = \sum_i^{\infty} P(A_i)$

Een verzamelingsfunctie, waarvan de additiviteit ook voor alle aftelbaar oneindige sommen geldt heet absoluut additief.

Dit axioma is onafhankelijk van de voorafgaande, zoals uit het volgend voorbeeld blijkt:

E zij een aftelbare verzameling van elementen $x_1, x_2, \ldots$

Zij K het verzamelingslichaam bestaande uit:

1) alle eindige deelverzamelingen van E

2) alle deelverzamelingen met eindig complement. (Verifieer, dat dit een verzamelingslichaam is).

Zij $P_1, P_2, \ldots$ een rij van niet negatieve getallen met convergerende som $= 1-q < 1$. We definiëren nu voor de tot K behorende deelverzameling A: als A eindig is: $P(A) = \sum_{x_i \epsilon A} P_i$ en als A eindig complement heeft: $P(A) = \sum_{x_i \epsilon A} P_i + q$. (verifieer, dat deze verzamelingsfunctie additief, maar niet absoluut additief is.)

Op de algemene theorie der absoluut additieve verzamelingsfuncties komen we nog uitvoerig terug, maar we willen thans alleen nog nagaan welke bijdragen de axiomatiek van Kolmogoroff geeft tot het probleem van de fundering van de whr. Deze bijdragen zijn:

1) Een doelmatige formalisering van het begrip eventualiteit of gebeurtenis.

2) Een zeer eenvoudige en uiterst fraaie mathematische theorie, waardoor het zuiver mathematisch gedeelte van de whr herleid wordt tot een deel van de theorie der absoluut additieve verzamelingsfunties.

Dit is vergelijkbaar met de theorie van Hamilton in de mechanika, waardoor het mathematische deel daarvan herleid wordt tot de theorie van stelsels differentiaalvergelijkingen van een bepaald type (kanonische vergelijkingen). Bij Kolmogoroff moet het wh-veld gegeven zijn en zijn theorie geeft geen enkele bijdrage tot de vraag welke waarden men in een concreet geval aan de wh der elementaire eventualiteiten zal toekennen. In dit opzicht is zij dus te vergelijken met de theorie van de Finetti, waarmee zij ook de eigenschap gemeen heeft, dat alleen de additiviteit der wh in de axiomatiek wordt opgenomen. Het verschil tussen Kolmogoroff en de Finetti ligt daarin, dat Kolmogoroff opgemerkt heeft, dat het mathematische deel der whr gefundeerd kan worden onafhankelijk van de vraag, hoe de uitgangswhn worden vastgesteld, zodat hij het in het bijzonder ook niet meer nodig vindt om t.o.v. de vraag, of deze subjectieve of objectieve betekenis hebben, een standpunt in te nemen.

Men kan het als een voordeel of ook als een nadeel beschouwen, dat hierdoor het probleem van de fundering van de whr uiteenvalt in: 1) het geven van een logisch onaanvechtbare mathematische theorie,
2) een afzonderlijk probleem, hoe deze theorie op praktische gevallen toe te passen. (Toepassingsprobleem).

Het eerste kan als door Kolmogoroff volledig opgelost worden beschouwd (mits men geen intuïtionistische kritiek toepast), voor het tweede levert zijn theorie niets op.

12. Logistische theorieën. I. Reichenbach.

Reeds in de 19^{e} eeuw heeft men herhaaldelijk getracht de whr als een deel der logika te beschouwen, met dien verstande, dat de klassieke logika de regels aangeeft volgens welke men uit gegeven praemissen met zekerheid bepaalde conclusies kan trekken, terwijl de whr dergelijke regels aangeeft met betrekking tot conclusies, die niet geheel zeker zijn.

Van deze gedachtegang uitgaande hebben JOHN MAYNARD KEYNES (Treatise on Prob. 1931) en HANS REICHENBACH (Wh-lehre, 1935) getracht de formele methoden der logistiek tot de whr uit te breiden. We bespreken eerst de theorie van Reichenbach, maar vermelden voordien in het kort de belangrijkste regels der formele klassieke logika:

Normale verdeling $P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$

$\frac{x}{\sigma}$	P	$\Delta^1(-)$	$\Delta^2(+)$	$\frac{x}{\sigma}$	P	$\Delta^1(-)$	$\Delta^2(+)$
0.0	0.50000	3983	40	2.5	.00621	155	36
0.1	.46017	3943	78	2.6	.00466	119	28
0.2	.42074	3865	114	2.7	.00347	91	22
0.3	.38209	3751	149	2.8	.00256	69	17
0.4	.34458	3604	176	2.9	.00187	52	14
0.5	.30854	3428	199	3.0	.00135	38	10
0.6	.27426	3229	218	3.1	.00097	28	8
0.7	.24197	3011	231	3.2	.00069	20	5
0.8	.21186	2780	240	3.3	.00049	15	5
0.9	.18406	2540	241	3.4	.00034	10	2
1.0	.15866	2299	239	3.5	.00024	8	3
1.1	.13567	2060	233	3.6	.00016	5	1
1.2	.11507	1827	223	3.7	.00011	4	2
1.3	.09680	1604	209	3.8	.00007	2	-
1.4	.08076	1395	194	3.9	.00005	2	-
1.5	.06681	1201	178	4.0	.00003	1	-
1.6	.05480	1023	159	4.1	.00002	05	-
1.7	.04457	864	143	4.2	.000015	05	-
1.8	.03593	721	124	4.3	.00001	05	-
1.9	.02872	597	109	4.4	.000005	-	-
2.0	.02275	488	92	4.5	.000005	-	-
2.1	.01787	396	78				
2.2	.01391	318	65				
2.3	.01073	253	54				
2.4	.00820	199	44				

P bereikt de waarde 0.000005 tussen 4.41 en 4.42.
Enkelvoudige interpolatie kan leiden tot fouten van 5 of 6 in de 4e decimaal, als de tweede verschillen groot zijn
Bij gebruik van eerste en tweede verschillen is de fout niet meer dan 5 in de 5e decimaal, in het begin van de tabel.

In de formele logika worden proposities (statements, Aussagen) door afzonderlijke letters of tekens aangegeven. Op dergelijke proposities worden bepaalde bewerkingen toegepast en wel de volgende.

1) negatie van A: ${}_{|}\neg A_{|}$ (lees: non A)
2) conjunctie van A en B. ${}_{|}A\wedge B_{|}$ (lees: A en B; =AC, latijn voor "en")
3) disjunctie van A en B: ${}_{|}A\vee B_{|}$ (lees: A of B; =VEL, latijn voor "of")
4) implicatie van B door A: ${}_{|}A\supset B_{|}$ (lees: uit A volgt B, of: A dus B).

Voorts wordt als afkorting gebruikt het aequivalentieteken $\equiv$:

${}_{|}A\equiv B_{|}$ voor ${}_{||}A\supset B_{|}\wedge{}_{|}B\supset A_{||}$ en voor: ${}_{||}A\wedge B_{|}\vee{}_{|}\neg A\wedge\neg B_{||}$

(In plaats van haakjes gebruiken we kleine verticale streepjes onder de lijn. Desgewenst kan men openende en sluitende streepjes onderscheiden door de streepjes te vervangen, b.v. door omgekeerde en gewone komma's, dus b.v. ‛A∧B,. Nodig is dit echter niet (ook het onderscheiden van openende en sluitende haakjes is eigenlijk overbodig); het zou het lezen vergemakkelijken, maar het schrijven bemoeilijken. Doordat we negatie, conjunctie, disjunctie en implicatie steeds noteren inclusief de streepjes zijn afspraken omtrent sterkere of zwakkere scheiding of volgorde van bewerkingen, zoals deze in de elementaire rekenkunde en in de formalistische systemen van G.PEANO, WHITEHEAD en RUSSELL en A.HEYTING voorkomen, overbodig: substitutie geschiedt zuiver formeel door b.v. in ${}_{|}A\wedge B_{|}$ A door ${}_{|}B\supset C_{|}$ e.d. (inclusief de streepjes) te vervangen. In de beschrijving van het formalisme, die we hier geven (niet in het formalisme zelf) kunnen streepjes somtijds weggelaten worden.)

O.a. gelden de volgende grondformules, die we in aansluiting aan Reichenbach's boek formuleren:

voor de negatie: ${}_{|}\neg{}_{|}\neg A_{||}\equiv A$

voor de conjunctie: 1) ${}_{|}A\wedge A_{|}\equiv A$
2) ${}_{|}A\wedge B_{|}\equiv{}_{|}B\wedge A_{|}$
3) ${}_{||}A\wedge B_{|}\wedge C_{|}\equiv{}_{|}A\wedge{}_{|}B\wedge C_{||}$

voor de disjunctie: 1) ${}_{|}A\vee A_{|}\equiv A$
2) ${}_{|}A\vee B_{|}\equiv{}_{|}B\vee A_{|}$
3) ${}_{||}A\vee B_{|}\vee C_{|}\equiv{}_{|}A\vee{}_{|}B\vee C_{||}$

voor conjunctie en disjunctie: ${}_{||}A\wedge B_{|}\vee C_{|}\equiv{}_{||}A\vee C_{|}\wedge{}_{|}B\vee C_{||}$
${}_{||}A\vee B_{|}\wedge C_{|}\equiv{}_{||}A\wedge C_{|}\vee{}_{|}B\wedge C_{||}$
${}_{|}A\wedge{}_{|}A\vee C_{||}\equiv{}_{|}A\vee{}_{|}A\wedge C_{||}\equiv A$ (overbodigheid van C)

dualiteit door negatie: ${}_{|}\neg{}_{|}A\wedge B_{||}\equiv{}_{||}\neg A_{|}\vee{}_{|}\neg B_{||}$
${}_{|}\neg{}_{|}A\vee B_{||}\equiv{}_{||}\neg A_{|}\wedge{}_{|}\neg B_{||}$

Een altijd ware of altijd onware term kan in een conjunctie resp. disjunctie weggelaten resp. toegevoegd worden:

${}_{||}A\wedge{}_{|}B\vee\neg B_{||}\equiv A\equiv{}_{||}A\vee{}_{|}B\wedge\neg B_{||}$

voor implicatie: ${}_{|}A\supset B_{|}\equiv{}_{|}\neg A\vee B_{|}\equiv{}_{||}\neg{}_{|}A\wedge\neg B_{||}\equiv{}_{|}\neg B\supset\neg A_{|}$
${}_{|}A\supset\neg A_{|}\equiv\neg A$ (reductio ad absurdum)
${}_{||}A\supset{}_{|}B\supset C_{||}\equiv{}_{||}A\wedge B_{|}\supset C_{|}\equiv{}_{||}B\supset{}_{|}A\supset C_{||}$ (symmetrie van de praemissen)

De volgende proposities zijn in de klassieke logika altijd geldig:

${}_{|}\neg{}_{|}A\wedge\neg A_{||}$ (principium contradictionis)
${}_{|}A\vee\neg A_{|}$ (tertium non datur)
${}_{|||}A\supset B_{|}\wedge{}_{|}B\supset C_{||}\supset{}_{|}A\supset C_{||}$ (transitiviteit van de implicatie)

tenslotte: ${}_{|}A\supset{}_{|}A\vee B_{||}$
${}_{||}A\wedge B_{|}\supset A_{|}$
${}_{||}A\supset{}_{|}B\supset A_{||}$
${}_{||}\neg A_{|}\supset{}_{|}A\supset B_{||}$

Om uit deze formules andere af te leiden gebruiken we:
1) substitutie (vervanging van letters door andere proposities)
2) deductieschemas, waarvan het belangrijkste is: $\dfrac{A \qquad A\supset B}{B}$

Een propositie A, die afhangt van een variabele x, wordt aangegeven door A[x]. Daarbij laten we in het midden, welke verzameling x doorloopt, met die beperking, dat A[x] zinvol is voor alle x uit de verzameling. De propositie: A[x] geldt voor alle (in aanmerking komende) x, zal aangeduid worden door: ${}_{|}\forall_x{}_{|}A[x]_{||}$.

en de propositie: $A[x]$ geldt voor minstens één x door: $,\exists A[x]''$.
De rekenregels voor deze twee symbolen zullen we achterwege laten.

De logistische theorie der whr berust op de opvatting, dat een wh-uitspraak niet betrekking heeft op eventualiteiten, maar op proposities, d.w.z. als men de whr als een deel van de logika beschouwt, dus aanneemt, dat zij bepaalde eigenschappen van het menselijk denken tot uitdrukking brengt, moet men een wh-uitspraak zien als een uitspraak gedaan met een geringere mate van pertinentie dan een propositie uit de klassieke logika. De wh-uitspraak wordt slechts met een beperkte zekerheid geponeerd. Men zou, bij wijze van spreken, kunnen zeggen, dat men volgens de klassieke opvatting van de whr met zekerheid beweert, dat een eventualiteit wellicht (met een bepaalde wh) zal gebeuren, terwijl volgens de logistische opvatting slechts met beperkte zekerheid (met een bepaalde wh) beweerd wordt, dat een gebeurtenis zal plaatsvinden. Korter gezegd. de beperkte zekerheid is volgens de klassieken een eigenschap van de eventualiteit zelf, volgens de logistici een eigenschap der bewering daaromtrent. In zekere zin staat daardoor de logistische opvatting tegenover de objectivistische der frequentielimestheorie, die in de whn approximatief meetbare natuurconstanten ziet. Toch is de logistische opvatting niet ondubbelzinnig met de subjectivistische te vereenzelvigen, daar zij zeer wel gepaard kan gaan met de (vooral bij vroegere logistici veel voorkomende) mening, dat de logika (in tegenstelling tot de psychologie) "objectieve" betekenis heeft, doordat zij algemeen en onbeperkt geldende wetten van "het" denken tot uitdrukking zou brengen, onafhankelijk van de vraag, of in concreto door mensen in overeenstemming daarmede gedacht wordt. Van de beide belangrijkste vertegenwoordigers der logistische richting kan men zeggen, dat Reichenbach (hoewel geenszins de bovengenoemde "absolutistische" opvatting huldigende) meer aan de objectivistische richting van von Mises, en Keynes meer aan de subjectivistische richting van de Finetti verwant is.

In overeenstemming met deze opvatting wordt door Reichenbach en Keynes een wh-uitspraak steeds op bepaalde praemissen (bij Keynes. hypothesen) betrokken. Reichenbach vervangt de propositie $,A \supset B,$ door $,A \underset{p}{\ni} B,$,d.w.z. A impliceert B met een wh p (wh-implicatie). Hij denkt daarbij, dat zowel A als B functies zijn van een variabele, die een aftelbare verzameling doorloopt en dat deze twee verzamelingen 1 aan 1 aan elkaar toegevoegd zijn. Noemen we de variabelen van A: x_i en van B: y_i, dan is $,A \underset{p}{\ni} B,$ bedoeld als afkorting van:

$$,\forall_i, A[x_i] \underset{p}{\ni} B[y_i]''$$

De waarde p der wh-implicatie wordt dus niet (zoals bij von Mises) aan de gehele rij van paren (x_i, y_i), maar aan elk paar afzonderlijk toegekend.

Een andere notatie, die Reichenbach voor dezelfde propositie gebruikt, is: $W(A,B)=p$. Reichenbach onderwerpt nu de wh-implicatie aan een aantal axiomas, waaraan hij de volgende existentieregel laat voorafgaan:

Als uit de onderstelling, dat een wh-implicatie $,A \underset{p}{\ni} B,$ zou bestaan, zou volgen, dat de getallenwaarde van p volgens de regels der wh-logika op grond van andere geldende wh-implicaties een bepaalde waarde zou moeten hebben, dan geldt ook de wh-implicatie $,A \underset{p}{\ni} B,$, waarin p die bepaalde waarde heeft. Dus.

$$''' \exists_p, A \underset{p}{\ni} B'' \supset , \forall_q, A \underset{q}{\ni} B, \supset, q=p_0 ''' \supset , A \underset{p_0}{\ni} B''$$

Volgens Reichenbach is dit echter geen axioma (d.w.z. een formule van de wh-logika), maar een redeneerregel, die bij het hanteren der formules wordt toegepast, overeenkomende met de deductie- en substitutieregels van de klassieke logika. Dus:

$$\frac{''\exists_p, A \underset{p}{\ni} B, \supset \forall_q, A \underset{q}{\ni} B, \supset, q=p_0''}{,A \underset{p_0}{\ni} B,}$$

Men kan echter betwijfelen, of deze existentieregel niet tot contradicties kan leiden.

De axioma's zijn:

I) ${}_{,,}p\neq q_{,}\supset_{,,,}A\underset{p}{\ni}B_{,}\wedge{}_{,}A\underset{q}{\ni}B_{,,}\equiv{}_{,}\neg A_{,,,}$ (eenduidigheidsaxioma)

II 1) ${}_{,,}A\supset B_{,}\supset_{,,}A\underset{p}{\ni}B_{,}\wedge{}_{,}p=1_{,,,}$
   2) ${}_{,,}A\underset{p}{\ni}B_{,}\supset_{,}p\geq 0_{,,}$ (normeringsaxioma's)

Reichenbach merkt op, dat men geneigd zou zijn het eenduidigheidsaxioma als volgt te formuleren:

$${}_{,}\neg_{,,}A\underset{p}{\ni}B_{,}\wedge{}_{,}A\underset{q}{\ni}B_{,}\wedge{}_{,}p\neq q_{,,,}$$

maar dat dit tot contradicties leidt in verband met het feit, dat, reeds in de klassieke logika, een onware praemisse iedere conclusie impliceert zodat bovenstaande formule, toegepast op een eindig wh-veld, met $p=1$ en $q=0$, een tegenstrijdigheid zou opleveren met ${}_{,}\neg A_{,}$.

III) ${}_{,,,}A\underset{p}{\ni}B_{,}\wedge{}_{,}A\underset{q}{\ni}C_{,}\wedge{}_{,,}A\wedge B_{,}\supset_{,}\neg C_{,,,}\supset_{,,}A\underset{r}{\ni}B\vee C_{,,}\wedge{}_{,}r=p+q_{,,,}$ (additieaxioma)

In de andere notatie wordt dit: $W(A,{}_{,}B\vee C_{,})=W(A,B)+W(A,C)$ mits ${}_{,}A\supset_{,}\neg_{,}B\wedge C_{,,,}$.

Hieruit volgt: $W(A,C)=W(A,B\vee C)-W(A,B)$ zodat, als we het bestaan van de wh-implicatie ${}_{,}A\ni C_{,}$ veronderstellen, met behulp van de existentieregel de volgende vorm van het additieaxioma geldig blijkt te zijn:

$${}_{,,,}A\underset{p}{\ni}B_{,}\wedge{}_{,}A\underset{r}{\ni}{}_{,}B\vee C_{,}\wedge{}_{,,}A\wedge B_{,}\supset_{,}\neg C_{,,,}\supset_{,,}A\underset{q}{\ni}C_{,}\wedge{}_{,}q=r-p_{,,,}$$

Met behulp van het vorige volgt nu:
Uit het tertium non datur: ${}_{,}A\supset{}_{,}B\vee{}_{,}\neg B_{,,,}$
volgens axioma II 1): ${}_{,}A\underset{1}{\ni}{}_{,}B\vee{}_{,}\neg B_{,,,}$
Vullen we dit in in axioma III, dan volgt met behulp van het eenduidigheidsaxioma : ${}_{,,,}A\underset{p}{\ni}B_{,}\vee{}_{,}A\underset{q}{\ni}{}_{,}\neg B_{,,,}\supset_{,}p+q=1_{,,}$
Uit de existentieregel volgt dan: ${}_{,,}A\underset{p}{\ni}B_{,}\supset_{,}A\underset{1-p}{\ni}{}_{,}\neg B_{,,,}$
en met behulp van axioma II 2): alle whn zijn ≤ 1.

Tenslotte voert Reichenbach het multiplicatieaxioma in:

IV) ${}_{,,,}A\underset{p}{\ni}B_{,}\wedge{}_{,,}A\wedge B_{,}\underset{u}{\ni}C_{,,}\supset{}_{,}A\underset{p.u}{\ni}B\wedge C_{,,,}$

Dit multiplicatieaxioma correspondeert met de definitie, die Kolmogoroff van voorwaardelijke wh geeft. In de andere notatie is het:

$$W(A,{}_{,}B\wedge C_{,})=W(A,B).W({}_{,}A\wedge B_{,}C).$$

Reichenbach bewijst, dat zijn axioma's contradictievrij zijn door zijn whn te interpreteren als limieten van fqn volgens von Mises, waarbij hij echter van het onregelmatigheidsaxioma geen gebruik maakt. Later voert hij afzonderlijk gebeurtenissenrijen in, die hij normale rijen noemt en waarvoor het onregelmatigheidsaxioma met betrekking tot arithmetische deelrijen ("rekenkundige reeksen", dus als n_k een lineaire functie van k is) moet gelden. Op het hiertoe dienende vijfde axioma en de verdere uitwerking van zijn theorie, in het bijzonder op de uitbreiding tot continue wh-verdelingen, gaan we niet in. We komen later nog terug op Reichenbachs beschouwingen over het inductieprincipe.

Met betrekking tot de betekenis van de theorie van Reichenbach voor de fundering van de whr willen we slechts twee opmerkingen maken:
1e: met betrekking tot de toepassingen geeft deze theorie, voor zoverre tot dusver hier uiteengezet evenmin als die van de Finetti of Kolmogoroff een bijdrage tot het effectief bepalen van in een concreet geval aan te nemen whn. Voor de toepassing accepteert Reichenbach in hoofdzaak de theorie van von Mises, zij het zonder het volledige onregelmatigheidsaxioma. Reichenbachs inductietheorie echter is een ernstige poging, dit verband tussen het logische formalisme en de empirische gegevens te leggen. Hoewel deze poging niet als volledig geslaagd beschouwd kan worden, is zij belangrijk genoeg om er uitvoerig op in te gaan, hetgeen echter eerst op een later tijdstip zal geschieden.
2e: Een ander bezwaar bestaat daarin, dat Reichenbach bij de discussie van de formules der wh-logika zelf de klassieke logika toepast. Een propositie als ${}_{,}A\ni B_{,}$ zelf wordt dus geacht met onbeperkte zekerheid te gelden. Dit is vooral van belang in verband met axioma I, waarin

dus geeist wordt, dat de whn als reële getallen met onbeperkte graad van nauwkeurigheid bepaald zijn. Vooral waar overigens bij Reichenbach de neiging bestaat om de gehele gewone logika door wh-logika te vervangen, zou een formalisering in dit opzicht de voorkeur verdienen, waarin de wh-proposities zèlf ook slechts met beperkte wh en bovendien met beperkte nauwkeurigheid zouden worden geponeerd.

Ondanks deze beswaren heeft de theorie toch ook met betrekking tot het vraagstuk van de fundering van whr zeer verhelderend gewerkt en bevat Reichenbachs werknog talrijke belangrijke beschouwingen over de grondslagen, die in dit overzicht niet ter sprake zijn gekomen.

13. Logistische theorieen. A. Keynes.

Ruim 10 jaar vóór Reichenbach heeft JOHN MAYNARD KEYNES reeds een logistische theorie van de whr gegeven in een lijvig boek, waarin vele fundamentele problemen over de grondslagen der whr uitvoerig besproken worden. Van zijn uitvoerige kritische beschouwingen vermelden we slechts enkele punten: T.o.v. het indifferentieprincipe neemt Keynes aanvankelijk een kritisch standpunt in, o.a. citeert hij met instemming een uitspraak van BOOLE, waarin deze zegt, dat de toestand van verwachting, die volledige onwetendheid begeleidt niet moet worden uitgedrukt door de breuk $1/2$, maar door de onbepaalde vorm $0/0$. Ook vermeldt hij als tegenvoorbeeld tegen het indifferentieprincipe het geval, dat een vaas gevuld is met n ballen, waarvan een onbekend aantal wit is en de overigen zwart zijn. Vraagt men dan naar de "a priori" whn van de verschillende mogelijk fqn, dan kan men enerzijds uit het indifferentieprincipe afleiden, dat alle fqn $\frac{0}{n}\ \frac{1}{n}\ \ldots\ \frac{n}{n}$ (voor wit b.v.) kunnen voorkomen en dus op grond van het principe gelijkelijk mogelijk zijn. Anderzijds kan men alle mogelijke samenstellingen van de vaasinhoud beschouwen, waarbij iedere bal even grote kans heeft om wit of zwart te zijn, hetgeen daarop neerkomt, dat alle gerangschikte rijen van n elementen, waarvan elk wit of zwart is, gelijkelijk mogelijk, dus even waarschijnlijk zijn. In dat geval zijn de whn van de bovengenoemde verhoudingen niet onderling gelijk, maar successievelijk gelijk aan:

$$\frac{\binom{n}{0}}{2^n},\ \frac{\binom{n}{1}}{2^n},\ \ldots\ldots\ldots,\ \frac{\binom{n}{n}}{2^n},$$ zoals uit de stelling van Bernoulli volgt. Dergelijke voorbeelden zijn reeds door von Kries en Boole vermeld. Echter aanvaardt Keynes tenslotte toch een verzwakte vorm van het indifferentieprincipe, doordat hij dit alleen toepast op wat hij noemt ondeelbare alternatieven, dat zijn alternatieven, die niet zelf geschreven kunnen worden als een disjunctie van alternatieven van de zelfde vorm. (Men kan de analoge eis stellen voor willekeurige kategorische systemen). De toelichting, die hij geeft bij de uitdrukking "van dezelfde vorm", nl. dat de subalternatieven kunnen worden uitgedrukt door de zelfde propositionele functie (propositie beschouwd als functie van een variabele) als het oorspronkelijk alternatief, is echter niet scherp genoeg, om tot de existentie van ondeelbare alternatieven te komen. B.v. is in het alternatief "kruis of munt" de eventualiteit "kruis" te beschouwen als disjunctie van: "kruis ligt boven en een vast punt van de rand wijst naar het Noorden" of: "kruis ligt boven en dat vaste punt wijst niet naar het Noorden." Wil men dit voorbeeld niet toelaten, omdat men dit niet als de zelfde propositionele functie beschouwt, dan is niet duidelijk waarom in het voorbeeld van de onbekende samenstelling van de vaasinhoud het geval, dat één bal wit is en (n-1) zwart zijn wèl als disjunctie beschouwd mag worden van de gevallen, waarbij telkens een andere bal de witte is. Het is moeilijk in te zien, hoe hier een precieze formulering gevonden kan worden, die uitsluit, dat ieder alternatief deelbaar is.

Een tweede opmerking bij Keyens houdt in, dat whn wel in vele gevallen, maar lang niet altijd met betrekking tot hun grootte vergelijkbaar zijn. We zouden, bij gebruik maken van andere terminologie, zeggen, dat de whn niet een geordende, maar een slechts gedeeltelijk geordende verzameling vormen. Keynes meent, dat tussen de onmogelijkheid 0 en de zekerheid 1 niet slechts één maar vele (of zelfs oneindig vele) monotone rijen van whn liggen, die onderling niet vergelijkbaar behoeven te zijn. Zo kunnen ook tussen 2 vergelijkbare whn a en b ($a < b$) meerdere monotoon toenemende rijen van whn liggen. Vandaar dat Keynes aanneemt, dat niet alle whn door getallen kunnen worden uitgedrukt, maar dat dit alleen voor een speciale klasse (de numerieke whn) mogelijk is. Keynes ligt dit toe met onderstaande figuur, waarin de lijnen van links naar rechts toenemende whn zijn. Hier zijn v, w, x, y en z niet-numerieke whn, a een wel numerieke. O.a. gelden de volgende ongelijkheden. $v < a$; $v < w$; $w < x$; $w < y$. Maar b.v. zijn x en y noch onderling, noch met a vergelijkbaar.

De hierop betrekking hebbende beschouwingen van Keynes hebben niet de pretentie exact te zijn. Een mathematische precisering van zijn gedachtegang is onlangs (1940) gegeven door B.O.KOOPMAN.

Voorts vermelden we nog, dat Keynes afwijzend staat tegenover een frequentie-interpretatie van de wh in de vorm, waarin deze o.a. door VENN was verdedigd (Keynes' boek verscheen 10 jaar voor dat van von Mises). Hij bestrijdt b.v. de opvatting van Venn, dat men, als geconstateerd is, dat in een zeker tijdsverloop gemiddeld 3 uit 10 kinderen in hun eerste 4 levensjaren gestorven zijn, de sterftekans van een kind in zijn eerste 4 jaren gelijk aan 3/10 zou mogen stellen, en hij zegt hiervan: "We can say no more than that it is probable (in my sense) that there is such a probability (in his sense)".

We beschrijven nu in het kort de eigenlijke wh-logika van Keynes.

Proposities noteert hij met kleine letters en relaties ertussen met hoofdletters. De disjunctie wordt als een som en de conjunctie als een product geschreven. De negatie wordt door overstreping aangeduid. Een wh P wordt beschouwd als een relatie tussen een propositie a en een praemisse (hypothese) h. Notatie: $a/h=P$.

Voor de relaties "zekerheid" en "onmogelijkheid" wordt bij definitie P=1 resp.=0 gesteld, d.w.z.: als $h \supset a$ dan is $a/h=1$; als $h \supset \neg a$ dan is $a/h=0$ en omgekeerd.

Voor de wh-relaties, die geen zekerheid of onmogelijkheid zijn, is per definitie. $0 < P < 1$.

Aequivalentie is gedefinieerd door:

als $b/ah=1$ en $a/bh=1$ dan $(a \equiv b)/h=1$.

Thans volgen de axioma s:

I) (éénduidigheidsaxioma) Indien a en h proposities of conjuncties of disjuncties van proposities zijn en indien h geen inconsistente conjunctie is *), dan is er één en slechts één wh-rel. P tussen a als conclusie en h als praemisse

II) (aequivalentie-axioma)

Indien $(a \equiv b)/h=1$ is, dan is $x/ah=x/bh$ voor iedere propositie x.

III) $(\overline{a+b} \equiv \bar{a}\bar{b})/h=1$; $(aa \equiv a)/h=1$; $(ab+\bar{a}b \equiv b)/h=1$.

Som en product van wh-relaties worden alleen in bijzondere gevallen als volgt gedefinieerd.

$$\left.\begin{array}{l} ab/h + a\bar{b}/h = a/h \\ \text{en} \quad ab/h = a/bh \,.\, b/h = b/ah \,.\, a/h \end{array}\right\}$$

Hieruit volgt dat de som van 2 wh-relaties altijd gedefinieerd is, als zij gelijke hypothesen en elkaar uitsluitende conclusies hebben. Zijn de gegeven relaties: x/h en y/h stel dan: $a=x+y$ en $b=\bar{y}$ dan is.

$ab \equiv (x+y).\bar{y} \equiv x$ en $a\bar{b} \equiv (x+y).y \equiv y$, dus $x/h + y/h = a/h = (x+y)/h$ (dit geldt ook nog als x/h en y/h elkaar niet uitsluiten. Om dit te bewijzen moet echter het verband tussen het formalisme van Keynes en dan de gewone logika nauwkeuriger omschreven worden.)

Quotient en verschil worden gedefinieerd als inverse operaties van som en product.

*) een conjunctie $h_1 h_2$ heet inconsistent als $h_1/h_2=0$ of $h_2/h_1=0$ is.

Axioma IV) a) Zijn P en Q wh-relaties dan is $PQ=QP$, waarbij de existentie van één van de twee leden die van het andere insluit. Evenzo bij $P+Q=Q+P$.

b) $PQ < P$ tenzij $Q=1$ of $P=0$ en $PQ=P$ als wel $Q=1$ of $P=0$

$P+Q > P$ tenzij $Q=0$ en $P+Q=P$ als $Q=0$

(steeds in de onderstelling, dat deze sommen of producten bestaan.)

c) als $PQ \gtreqless PR$ dan is $Q \gtreqless R$ tenzij $P=0$

als $P+Q \gtreqless P+R$ dan is $Q \gtreqless R$ en omgekeerd.

We merken op, dat sommen en producten van wh-relaties in het algemeen niet behoeven te bestaan en dat in het bijzonder voor de sommen $P+Q=R$ en $Q=S+T$ nog niet volgt: $P+S+T=R$, daar het linkerlid nog niet gedefinieerd is. Een vijfde en zesde axioma dienen om de associativiteit bij sommen en verschillen en de distributiviteit van de vermenigvuldiging t.o.v. optelling en aftrekking vast te leggen.

De onafhankelijkheid wordt als volgt gedefinieerd.
als $a/bh=a/h$ en $b/ah=b/h$ dan zijn a/h en b/h onafhankelijk.

De kritiek op Keynes' opvattingen over de grondslagen van de whr is reeds gegeven bij het bespreken van deze opvattingen. Men dient echter niet te vergeten, dat Keynes' boek reeds in 1921 is uitgekomen. Keynes was bovendien geen wiskundige maar econoom, hetgeen het schrijven van een zeer interessant boek van 500 bladzijden over dit onderwerp tot een niet geringe prestatie maakt. Het boek bevat een zeer uitvoerige litteratuurlijst, waarin ook veel van de oudste werken over whr vermeld staan. Ondanks de niet altijd voldoende exactheid van uitdrukking en van axiomatiek bevat het veelal zeer juiste kritische opmerkingen en geeft het op verschillende plaatsen blijk van zeer juist inzicht, al wordt dit soms niet consequent volgehouden.

14) Het Petersburger probleem. We bespreken thans een serie van vragen, die weliswaar niet op de algemene grondslagen der whr betrekking hebben, maar toch in de loop van de tijd tot velerlei discussies aanleiding hebben gegeven en ten opzichte waarvan veelal een onvoldoend kritische houding is aangenomen.

In de eerste plaats noemen we het Petersburger Probleem, dat door DANIEL BERNOULLI (1700-1782) behandeld is. (Petersburger Academie 1738). Het is ook reeds door HIERONIMO CARDANO vermeld (1539).

Peter en Paul spelen kruis of munt onder de volgende voorwaarden. als eerst n maal kruis gevallen is en daarna munt, dan zal Paul Peter 2^n gulden geven, waarna het spel beeindigd is. Gevraagd wordt, hoeveel geld Peter aan Paul zal moeten geven, om dit spel te mogen spelen, d.i. dus hoeveel de mathematische verwachting van Peter bedraagt. Er zijn oneindig veel mogelijkheden. De kans, dat er n maal kruis en daarna munt valt, is 2^{-n-1} en de winst is dan 2^n, dus volgens de regel van Huygens is de mathematische verwachting: $\sum_0^{\infty} 2^{-n-1} \cdot 2^n = +\infty$

Dit is in strijd met het intuitieve gevoel, dat zelfs een matig hoge inzet van Peter te veel zou zijn. Voor deze paradox zijn verschillende oplossingen gegeven. Daniel Bernoulli was van mening, dat de oplossing gezocht moest worden in het prijsgeven van het begrip mathematische verwachting en de vervanging daarvan door de zogenaamde morele verwachting (deze term is later door Laplace ingevoerd). Daniel Bernoulli merkt op, dat het voordeel van het verkrijgen van een bepaalde som voor iemand afhankelijk is van wat hij reeds van tevoren bezit. Hij neemt aan, dat het daarmee omgekeerd evenredig is, zodat dus het voordeel van een bepaalde bezitsvermeerdering niet gemeten wordt door het verschil der beide bedragen, maar door hun verhouding, of, wat op hetzelfde neerkomt, door het verschil van hun logarithmen. Dienovereenkomstig definieert Bernoulli als de morele verwachting voor het verkrijgen van een aantal bedragen $B_1, B_2, \ldots$ met kansen: $P_1, P_2, \ldots$ voor iemand, die vooraf een bedrag A bezat, als:

$$\prod_i (A+B_i)^{P_i} - A .$$

Preciezer: het voordeel dy van een winst dx bij bezit x, stelt hij:

$$dy = k.\frac{dx}{x}$$

Integreren levert: $y=k.\log x - c$ $\quad$ $x=$ fortune physique (Laplace)
$y=$ fortune morale (")

Dit is dus een aequivalentieformule voor 'feitelijk" en 'moreel' bezit. Heeft men nu een fortune physique x en winstkansen p_i $(\Sigma p_i=1)$ op bedragen x_i $(i=1,2,3,\ldots)$ dan is het fortune morale, dat hiermee overeenkomt:

$$Y = \Sigma\left[k.p_i \log(x+x_i) - p_i c\right] = \Sigma\, k.p_i \log(x+x_i) - c.$$

Hiermee correspondeert een fortune physique X, te vinden uit.

$$Y = k\log X - c \quad \text{dus} \quad X = \prod_i (x+x_i)^{p_i}$$

en X-x is dus de stijging van het fortune physique, die overeenkomt met de verwachting van de stijging van het fortune morale. Dit bedrag komt dus in de plaats van de mathematische verwachting. (Bernoulli, die een andere terminologie gebruikt, noemt X-x: lucrum legitime expectandum).

Past men dit op het Petersburger Probleem toe, dan komt er:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (A+2^n)^{\frac{1}{2^n}} - A$$

en deze uitdrukking is eindig voor eindige A. A=0 geeft. 2 en Bernoulli geeft op voor A=10, 100 en 1000. de (benaderd) waarden. 3, $4\frac{1}{3}$, 6. Deze 'oplossing' van het probleem is in iets andere vorm overgenomen door LAPLACE.

J.F.FRIES (1773-1843) heeft hiertegenover terecht een kritische houding aangenomen, die tegenwoordig vrijwel algemeen aanvaard wordt. (Versuch einer Kritiek der Prinzipien der Whr. 1842). Dit werk bevat in verschillende opzichten gerechtvaardigde kritiek op de werken van Laplace en Poisson; in andere opzichten, zoals b.v. t.a.v. het indifferentieprincipe is hij onvoldoende kritisch, waarbij men echter in aanmerking moet nemen, dat zijn boek reeds meer dan 100 jaar oud is.

De mening van JOSEPH LOUIS BERTRAND (1822-1900, Calcul des Probabilités 1888) over de morele verwachting blijkt voldoende duidelijk uit het volgende citaat. "Supposons en présence deux disciples de Bernoulli. Si je gagne, dirait Pierre, qui est pauvre, en proposant à Paul une partie d'écarté, votre enjeu de trois francs payera mon diner. Repas pour repas, répondrait Paul, vous me devriez vingt francs en cas de perte, car tel sera prix de mon souper. Si je perdais vingt francs, s'écrierait Pierre effrayé, je ne dinerait pas demain. Vous pouvez sans en venir là, perdre dix milles francs : déposez les contre mes vingt francs. L'avantage, Daniel Bernoulli l'affirme, restera de votre côté. Ils ne s'entendront pas."

Fries merkt op, zoals ook G.L.L. de BUFFON (1707-1788) reeds in zijn 'Essai d'Arithmétique morale' van 1777 deed, dat de mathematische verwachting van Peter begrensd wordt door het feit, dat Paul slechts een eindig bedrag bezit, zodat de gevallen, die met lange reeksen kruis corresponderen, ten gevolge zouden hebben, dat Paul niet aan zijn verplichtingen zou kunnen voldoen. Buffon vindt, dat als munt 29 maal niet zou vallen, meer geld vereist zou zijn om Peter te betalen dan het hele Franse koninkrijk kon verschaffen. Deze verklaring van de Petersburger paradox wordt, zoals gezegd, tegenwoordig algemeen aanvaard.

Indien Paul echter b v. 2^{20} gulden (dus ruim f 1.000.000,-) bezit, zou de mathematische verwachting f10,50 zijn, als afgesproken wordt, dat Peter na 21 maal kruis niets krijgt en f11,- als hij in dat geval het gehele bezit van Paul (dus 2^{20} gulden) krijgt. Menigeen, die voldoende geld bezit, zal geneigd zijn een bedrag van f11,- te wagen voor deze kans van f1.000.000,-. Indien men echter vraagt of iemand nogmaals f10,- wil storten, indien daarmee de maximaal mogelijke winst tot 2^{40} gulden verhoogd wordt, dan zal vrijwel ieder dit weigeren, omdat de voorstelling van het bezit van een billioen gulden niet merkbaar aanlokkelijker is dan die van een millioen. Dit wijst er dus op, dat de gedachtegang van Bernoulli een juiste kern bevat, al kan men aan de mathematische precisering ervan, bestaande in het vervangen van rekenkundig door meetkundig gemiddelde, generlei waarde hechten.

Onder de nieuwe auteurs vermelden we, dat von MISES de theorie van de morele verwachting verwerpt, maar dat hij, evenals Bertrand, aan de finiete oplossing onbeperkte geldigheid toeschrijft, zonder rekening te houden met een grens voor al te hoge bedragen.

15) Stelling van J.Bernoulli. Jacob Bernoulli heeft in het vierde gedeelte van de ars coniectandi de stelling uitgesproken en bewezen, dat bij n-voudige herhaling van een alternatief met constante kansen p en 1-p de kans, dat het aantal successen hoogstens cn van de mathematische verwachting pn zal afwijken, bij constante c voor n naar oneindig tot 1 nadert.

Men heeft deze stelling vaak beschouwd als het verbindingsstuk tussen de subjectivistische en de objectivistische opvatting (o.a. Bernoulli zelf, Laplace, Poisson).

De door Poisson (SIMEON DENIS POISSON, 1781-1840, Recherches sur la Probabilité des jugements en matière civil et en matière criminelle; 1837) gegeven uitbreiding van de stelling, die daarin bestaat, dat de afzonderlijke eventualiteiten verschillende kansen p_i $(i=1,\ldots,n)$ hebben en dat het te verwachten aantal successen pn bedraagt met $p=\frac{\sum p_i}{n}$, waarbij de voorwaarde gesteld moet worden, dat $\sum p_i.(1-p_i) \geq c{:}n$ is voor constante c', wordt gewoonlijk (Poisson) de wet der grote getallen genoemd, een naam, die ook wel voor het bijzondere door Bernoulli behandelde geval van deze stelling van Bernoulli-Poisson gebruikt wordt. Echter wordt dezelfde uitdrukking door Poisson ook gebruikt voor het empirisch verschijnsel, dat vele fqn onder gelijkblijvende omstandigheden bij lange waarnemingsreeksen slechts weinig veranderen. Men heeft vaak gemeend, dat dit laatste een gevolg was van de stelling van Bernoulli. Von Mises heeft er de aandacht op gevestigd, dat dit niet het geval is en dat er bij aanvaarding van de subjectivistische opvatting van het wh-begrip geen enkel logisch verband bestaat tussen de wh van het optreden van een gegeven aantal successen in een waarnemingsreeks en de [illegible] waarmee dit de facto plaats vindt. Hetzelfde is het geval, wanneer men aan het wh-begrip i.p.v een subjectivistische een objectivistische, maar niet statistische betekenis tracht te geven, b.v. met behulp van een gelijkmogelijkheidsdefinitie, die, zoals bij von Kries besproken is, mechanisch gedefinieerd is. Als men b.v. van een dobbelsteen door mechanische metingen heeft bepaald, dat deze met sterke benadering symmetrisch is en men weet, dat met die dobbelsteen een zeer groot aantal worpen gedaan is, dan kan men uit de stelling van Bernoulli nog geen enkele conclusie trekken omtrent de fqn waarmee de verschillende kenmerken zijn opgetreden, zoals Bernoulli, Laplace, Poisson e.a. dachten, dat wel het geval was. Zelfs als men mathematisch de beweging van de dobbelsteen volledig zou kunnen volgen en als men zou kunnen bewijzen, op de manier zoals dit in de ergodentheorie ten behoeve van de statistische mechanika gedaan wordt, dat "bijna alle" banen (d.w.z. alle op een verzameling van de maat 0 na) gelijkelijk over de 6 mogelijkheden verdeeld zijn, dan zou dit nog geen enkele conclusie toelaten met betrekking tot wat er wezenlijk gebeuren zou. Dit resultaat ware b.v. logisch zeer wel te verenigen met de mogelijkheid, dat alle worpresultaten =1 waren.

Men heeft onder alle omstandigheden een extra "hypothese" nodig, die van de mechanische of andere symmetrie leidt tot gelijkheid van statistische frequenties. De logische fout, waarop de overgang van de stelling van Bernoulli-Poisson tot de (empirische) wet van Poisson berust, is een betekenisverglijding, die via het woord "wh" plaatsvindt. Dit woord wordt aanvankelijk in niet-statistische zin (b.v. als mechanische "gelijkmogelijkheid") in het formalisme geïntroduceerd en achteraf in de zin van statistische gelijkmogelijkheid uit het formalisme geworpen.

16) Stelling van Bayes. (Rev THOMAS BAYES, † 1763; An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances, posthuum gepubliceerd in 1763-64 door R.Price).
Deze luidt, zoals reeds onder punt 11 is uiteengezet:

Vormen $A_1 \ldots A_k$ een kategorisch systeem van eventualiteiten en is X een willekeurige eventualiteit, dan is:

$$P_X(A_i) = \frac{P_{A_i}(X).P(A_i)}{\sum_j P_{A_j}(X).P(A_j)}$$

De $P(A_i)$ worden de a priori-whn van de eventualiteiten A_i (hypothesen) genoemd, de $P_X(A_i)$ de a posteriori-whn op grond van het experiment X. De meeste toepassingen komen nu daarop neer, dat $A_1 \ldots A_k$ betekenen, dat één of andere onbekende wh p aan zekere voorwaarden voldoet, b.v. een waarde tussen $\frac{i-1}{k}$ en $\frac{i}{k}$ heeft. We duiden dit interval aan met I_i. Dan is dus A_i aequivalent met. $\,_1 p \in I_{i,1}$ en $P(A_i)$ is de kans, dat $\,_1 p \in I_{i,1}$ ligt. Nu wordt b.v. het experiment genomen, bestaande uit n onafhankelijke proeven $\,_1 Y \vee_1 \neg Y_n$, een alternatief, waarbij een met de kans p overeenkomend variabel fq f bepaald wordt en waarbij hiervoor een bepaalde waarde f_0 gevonden wordt.

X is nu aequivalent met $f = f_0$

$P_X(A_i)$ is de kans, dat $\,_1 p \in I_{i,1}$ ligt, als $f = f_0$ waargenomen is.

$P_{A_i}(X)$ is de kans, dat $f = f_0$ is, als $\,_1 p \in I_{i,1}$ ligt.

Gewoonlijk gaat men dan tot de limiet over, doordat men de intervallen I_i willekeurig klein laat worden $(k \to \infty)$.

We schrijven dan:
$$P(p_1 \leq p < p_1 + dp_1) = dP(p_1)$$
$$P_{f_0}(p_1 \leq p < p_1 + dp_1) = dP_{f_0}(p_1)$$

En $P_{A_i}(X)$ wordt: $P_{p_1}(f_0)$, d.w.z. de wh dat $f = f_0$ is als p de preciese waarde p_1 heeft. De stelling van Bayes wordt dan onder weglating van de indices:
$$dP_f(p) = \frac{dP(p).P_p(f)}{\int P_q(f).dP(q)}$$

Zoals reeds gezegd, bestaat X uit n onafhankelijke experimenten met het alternatief $\,_1 Y \vee_1 \neg Y_n$, terwijl f het met p overeenkomende fq is. Dus kunnen wij hier voor $P_p(f)$ de verdeling van Bernoulli toepassen.
$$P_p(f) = \binom{n}{nf}.p^{nf}(1-p)^{n-nf}$$

en we krijgen, daar de numerieke factor in teller en noemer dezelfde is:
$$dP_f(p) = \frac{p^{nf}(1-p)^{n-nf}.dP(p)}{\int_0 q^{nf}(1-q)^{n-nf}.dP(q)}$$

De moeilijkheid ligt nu daarin, dat men de a prioristische wh dP(p) niet kent. Gewoonlijk neemt men aan, dat de functie: $P(p) = \int_{q=0}^{q=p} dP(q)$ continu differentieerbaar is, dus b.v.: $dP(p) = \varphi(p).dp.$

Dan volgt:
$$dP_f(p) = \frac{p^{nf}(1-p)^{n-nf}\varphi(p).dp}{\int q^{nf}(1-q)^{n-nf}\varphi(q).dq}$$

dus ook $dP_f(p)$ is dan van de vorm: $dP_f(p) = \varphi_f(p).dp$, met:
$$\varphi_f(p) = \frac{p^{nf}(1-p)^{n-nf}\varphi(p)}{\int_0 q^{nf}(1-q)^{n-nf}\varphi(q).dq}$$

waarin $\varphi(p)$ nog onbekend is.

Nu heeft echter de vorm $q^{nf}(1-q)^{n-nf}$ een maximum voor q=f, zoals gemakkelijk te bewijzen is, en dit gaat steeds meer overwegen op de overige waarden, naarmate n groter wordt, zodat onder zekere zeer algemene voorwaarden voor (o.a. $\varphi(f) = 0$ en $\varphi'(f)$ eindig) de integraal in de noemer, als n voldoende groot is, zijn volledige waarde al bijna bereikt, indien men de integratiegrenzen vernauwt tot $f - \varepsilon$ en $f + \varepsilon$. In de teller treedt het maximum op dezelfde wijze op voor p=f, zodat voor voldoende grote n geldt: $\int_{f_1}^{f_2} \varphi_f(p)dp \approx 0$ als f niet in het interval f_1 tot f_2 ligt (doordat de teller klein wordt) en: $\int_{f-\varepsilon}^{f+\varepsilon} \varphi_f(p)dp \approx 1$ voor $f_1 \leq f \leq f_2$ (doordat $\varphi(f)$ uit teller en noemer wegvalt).

(Voor een preciesere uitwerking van deze limietovergangen raadplege men b.v. von Mises, hoofdstuk II).

Dit betekent dus: $dP_f(f) \approx 1$ voor n voldoende groot, zodat de kans, dat p ligt tussen $f + \varepsilon$ en $f - \varepsilon$ tot 1 nadert voor $n \to \infty$.

Aan dit veelbelovend resultaat kleven echter twee bezwaren.

1) Er is, wanneer omtrent $\varphi(p)$ in het geheel niets bekend is, óók geen zekerheid, dat aan de voorwaarden, hoe zwak ook, voldaan is.

2) Bij het praktisch gebruik hebben we steeds te maken met eindige en heel vaak zelfs met tamelijk kleine waarden van n. In dat geval

treedt weliswaar in de plaats van de exacte onafhankelijkheid van $\varphi(p)$, die na limietovergang ontstaat, een approximatieve onafhankelijkheid, maar de voorwaarden, waaraan $\varphi(p)$ daartoe moet voldoen, worden dien- overeenkomstig rigoureuser (b.v. moeten grootheden, waarvan voor de limietstelling de eis van eindigheid voldoende is, nu klein t.o.v. n zijn). De onbekendheid van $\varphi(p)$ wordt dus bij eindige (resp. kleine) steekproeven zeer veel ernstiger. Gewoonlijk redt men zich uit deze moeilijkheid door eenvoudig aan te nemen, dat $\varphi(p)$=constant, dus =1 is. We zullen dit de hypothese van Bayes noemen. Bayes zelf heeft een dergelijke hypothese alleen voor een heel speciaal geval gemaakt; zijn onderzoek had betrekking op een vraagstuk over billardballen, die willekeurig over het billard rollen; hij meent te bewijzen, dat de "a - priori- whn" (beter: onvoorwaardelijke whn), dat de bal in een strook tussen l_1 en l_2 (gemeten in de lengterichting) blijft liggen $= \frac{l_1 - l_2}{a}$ is, als a de totale lengte is. Hoewel dit niet, zoals Bayes meende, een bewijsbare stelling, maar een hypothese is, kan men deze in het door Bayes behandelde speciale geval niet onredelijk noemen. Bayes stelt en beantwoordt nu de volgende vraag: men laat een eerste bal over het billard rollen. Deze komt op een afstand x van één der korte zijden tot rust. Een tweede bal, die men (k+p) maal over het billard laat rollen, komt k maal in de rechthoek, bepaald door x en genoemde korte zijde en p maal buiten die rechthoek terecht. Gevraagd wordt de kans, dat x tussen twee gegeven waarden b en c ligt. Het antwoord, dat Bayes vindt, luidt in moderne notatie, als men q=x/a (a is lengte van het billard), n=k+p en f=k/n stelt. $\dfrac{\int_{b/a}^{c/a} q^{nf}(1-q)^{n-nf}\,df}{\int_0^1 q^{nf}(1-q)^{n-nf}\,df}$ overeenkomend met het door ons afgeleide resultaat voor $\varphi(p)=1$.

Indien aan de onderstelling $\varphi(p)=1$ voldaan is, wordt de noemer van $\varphi_f(p)$ dus: $\int_0^1 q^{nf}(1-q)^{n-nf}dq$. Nu is de Bèta-functie of eerste integraal van Euler:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

Deze wordt gewoonlijk uitgedrukt in de Gamma-functie of tweede integraal van Euler:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

Voor gehele s is deze laatste $=(s-1)!$ een notatie, die wij ook zullen gebruiken voor niet gehele s. We definieren dus.

$$\alpha! = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha}dt = \Gamma(\alpha-1)$$

Deze definitie is geldig voor $\Re(\alpha) > -1$, aangezien dan de integraal convergent is. De functie kan analytisch voortgezet worden over het gehele complexe α-vlak en blijkt enkelvoudige polen te hebben in alle gehele negatieve waarden van α.
B(p,q) convergeert, indien $\Re(p) > 0$ en $\Re(q) > 0$ is en in dat geval geldt:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

dus voor $\alpha > -1$ en $\beta > -1$ geldt:

$$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}dx = \frac{\alpha!\,\beta!}{(\alpha+\beta+1)}$$

Deze laatste betrekking wordt aldus bewezen.

$$\alpha!\beta! = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha}dx.\int_0^\infty e^{-y}y^{\beta}dy = \iint_0^\infty dxdy(e^{-x-y}x^{\alpha}y^{\beta})$$

substitueer x+y=t, x/(x+y)=u, (functionaaldeterminant = t), dan komt er:

$$\alpha!\beta! = \int_0^\infty dt\int_0^1 du.e^{-t}(ut)^{\alpha}\{(1-u)t\}^{\beta}t = (\alpha+\beta+1)!\int_0^1 u^{\alpha}(1-u)^{\beta}du$$

De geldigheid van de omzetting van het integraalproduct in een dubbele integraal en haar transformatie is voor $\Re(\alpha)>-1, \Re(\beta)>-1$ gemakkelijk te bewijzen. Met behulp hiervan wordt:

$$\varphi_f(p) = \frac{(n+1)!}{(nf)!(n-nf)!}\,p^{nf}(1-p)^{n-nf} \text{(onder voorwaarde } \varphi(p)=1)$$

Waaruit nu gemakkelijk volgt:

het gemiddelde: $\bar{p} = \int_0^1 p\cdot\varphi_f(p)dp = \dfrac{(n+1)!}{(nf)!(n-nf)!}\cdot\dfrac{(nf+1)!(n-nf)!}{(n+2)!} = \dfrac{nf+1}{n+2}$

wat voor grote n niet veel afwijkt van de modus, die =f was.

en:
$$\overline{1-p} = \frac{n(1-f)+1}{n+2}$$

Verder willen we ook de spreiding kennen (σ), die gedefinieerd is door:
$$\sigma^2 = \overline{(p-\bar{p})^2} = \overline{p^2} - \bar{p}^2$$
waarin.
$$\overline{p^2} = \int_0^1 p^2 \varphi_f(p)dp = \frac{(nf+1)(nf+2)}{(n+2)(n+3)} \text{ is,}$$
dus:
$$\sigma^2 = \frac{nf+1}{n+2}\left\{\frac{nf+2}{n+3} - \frac{nf+1}{n+2}\right\} = \frac{(nf+1)(n-nf+1)}{(n+2)(n+3)} = \frac{(f+\frac{1}{n})(1-f+\frac{1}{n})}{n+3} \cdot \frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2}$$
Deze uitdrukking voor het kwadraat van de spreiding is, wat de vorm betreft, te vergelijken met de bij de verdeling van Bernoulli optredende, te weten $\frac{p(1-p)}{n}$, waarin zij voor $n \gg 1$ en $f=p$ overgaat.

Op deze wijze wordt het vraagstuk gewoonlijk (voor eindige n) aangepakt. Vraagt men nog naar de kans, dat bij een nieuwe, dus $(n+1)^e$ proef, weer een succes zal optreden, dan is deze p_1 indien $p_1 \leq p < p_1 + dp_1$ is en de kans, dat aan deze voorwaarde voldaan is, is $\approx \varphi_f(p_1)dp_1$, dus de totale kans is. $\bar{p} = \int p\varphi_f(p)dp = \frac{nf+1}{n+2}$.

Waren alle vorige resultaten successen (dus $f=1$), dan is deze kans dus $\frac{n+1}{n+2}$. Deze uitdrukking wordt "loi de succession" genoemd. Laplace geeft de volgende toepassing: gedurende de hele geschiedenis, b.v. 5000 jaar of 1.826.213 dagen is waargenomen, dat iedere dag de zon opging. Men kan dus 1.826.214 tegen 1 wedden, dat de zon ook morgen op zal gaan. Deze loi de succession wordt natuurlijk door alle moderne schrijvers als zinledig beschouwd, ook als zij de hypothese van Bayes gerechtvaardigd achten, o.a. daar de onderstelde onafhankelijkheid der "experimenten" nergens op gebaseerd is.

Het voor de toepassing van de stelling van Bayes karakteristieke probleem heeft betrekking op een vaas, gevuld met N ballen, waarvan een onbekend aantal, Np, wit en de overige zwart zijn. Bij n trekkingen met teruglegging worden nf witte en (n-nf) zwarte getrokken. Wat kan men zeggen over de wh-verdeling van p? (onder verwaarlozing van 1/N). Het antwoord, dat gewoonlijk gegeven wordt, luidt: over p is a priori niets bekend, de a priori wh-verdeling is dus de homogene verdeling. We hebben echter gezien, dat men van een ander standpunt beschouwd ook als wh-verdeling kan nemen de Bernoulli-verdeling met $p=\frac{1}{2}$, indien men nl. aanneemt, dat ieder van de N ballen evenveel kans heeft een witte of een zwarte te zijn. Om een duidelijk beeld te krijgen van de richting, waarin de oplossing van de moeilijkheid gezocht moet worden, trachten we het wh-begrip bij de $\varphi(p)$ te elimineren en te vervangen door finiete fqn. Daartoe nemen we aan, dat er i.p.v. een groot aantal trekkingen uit één vaas een groot aantal, b v. M, van deze vazen zijn, waaronder $M.\varphi(p).\Delta p$, die minsten pN en hoogstens $(p+\Delta p)N$ witte ballen bevatten. De vraag welke functie $\varphi(p)$ hier genomen moet worden, hangt af van de vraag, op welke wijze de vulling der vazen tot stand is gekomen. Is dit gebeurd doordat men een grote hoop witte en zwarte ballen had, waarin de witte met een fq P vertegenwoordigd waren en waaruit men door blindelingse trekkingen de vazen gevuld heeft, dan zal $\varphi(p)$ ongeveer met de Bernoulli-verdeling voor P overeenstemmen, dus:
$$\varphi(p).\frac{1}{N} \approx \binom{N}{Np} P^{Np}(1-P)^{N-Np} .$$
De homogene verdeling kan echter ook zeer goed (natuurlijk bij benadering optreden, b.v. wanneer in elke vaas zoveel witte ballen gedaan worden als aangegeven wordt door een daartoe gedane worp met een (N+1)-zijdige dobbelsteen met 0,1,...,N ogen.

Uit dit voorbeeld is het duidelijk, dat de keuze van een bepaalde functie φ goed of fout kan zijn en dat b.v. het toepassen van de hypothese van Bayes, wanneer er geen nadere gegevens zijn, niet het karakter heeft van een wh-theoretische onderstelling, maar van een pure gissing zonder de minste wetenschappelijke fundering, die alleen daardoor in vele gevallen geen al te ernstige consequenties heeft, doordat de verandering van de functie $\varphi(p)$ in het resultaat doorgaans slechts tot relatieve verschillen van de orde 1/n leidt; maar indien de juiste $\varphi(p)$ in de buurt van (maar niet precies bij f) afgeleiden van de orde n bezit kunnen de fouten aanzienlijk groter worden.

Slechts weinig schrijvers hebben t.a.v. de hypothese van Bayes een kritische houding aangenomen. We vermelden daaronder J.FRIES (reeds in 1842!) en J.BERTRAND (1888) en vooral de Engelse statisticus R.A.FISHER (1922). Ook tegenwoordig worden nog vaak onvoldoend kritische beschouwingen over Bayes gegeven, b.v. J.P.v.ROOIJEN (De whr en het theorema van Bayes, openbare les, 1941). B.L.v.d.WAERDEN heeft, na eerst enige publicaties op de hypothese van Bayes gebaseerd te hebben, deze later prijsgegeven en vervangen door de theorie der Maximum Likelihood van R.A.Fisher, waarop we later uitvoerig ingaan. De geofysicus H.JEFFREYS maakt in zijn Theory of Probability (1939) eveneens een herhaald ongerechtvaardigd gebruik van de hypothese van Bayes en zelfs van het indifferentieprincipe.

17) Geometrische whn. Terwijl de oorspronkelijke elementaire wh-problemen betrekking hadden op eindige wh-velden, traden al spoedig problemen op, waarbij het wh-veld een één- of meerdimensionaal continuum is. Deze worden "geometrische" wh-velden genoemd, al zijn de ouste daarvan niet aan geometrische, maar aan statistische problemen ontleend (Johan de Witt, 1771, sterftekansen; vraagstukken over inenting tegen pokken bij de Moivre, D.Bernoulli e.a.). Het bekendste der geometrische wh-problemen in engere zin is het naaldprobleem van de beroemde bioloog Buffon (G.L.L.de BUFFON, 1707-1788, Essai d'arithmétique morale, 1777, verschenen in het 4e deel van het Supplément à l'Histoire naturelle). Wanneer men een naald van de lengte 2a laat vallen op een plat vlak, waarin een stelsel aequidistante evenwijdige lijnen (afstand van twee opeenvolgende lijnen =2b) getrokken is, hoe groot is dan de wh, dat de naald een lijn zal snijden? We beschouwen alleen het eenvoudigste geval $a \leq b$. De kans, dat de coördinaten van het midden van de naald (y-as langs één van de lijnen) gelegen zijn tussen x en x+dx, resp. y en y+dy en de hellingshoek t.o.v. de x-as in het interval θ, $\theta + d\theta$ bevat is, is evenredig met $dx.d\theta$ en onafhankelijk van y. Een rechte zal gesneden worden als voor een geheel getal n $|x-nb| \leq a|\cos\theta|$. Men kan zonder beperking $0 \leq x < 2b$ en $0 \leq \theta < \pi$ onderstellen. Dan is de gezochte wh.

$$P \approx \frac{2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a\cos\theta} dx}{\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2a} dx} = \frac{2a\int_0^{\pi}\cos\theta\, d\theta}{2\pi b} = \frac{2a}{\pi b}\text{ , dus b.v. voor } a=b \quad P=\frac{2}{\pi}\text{ .}$$

M.FRÉCHET heeft betoogd, dat men door het met deze wh overeenkomende fq experimenteel te bepalen, de waarde van π even nauwkeurig kan benaderen als met zuiver geometrische experimentele methoden. Buffon heeft nog enige soortgelijke problemen behandeld, waarvoor hij echter foutieve oplossingen gaf. Later is het probleem uitgebreid tot willekeurige figuren i.p.v. naalden.

We merken op, dat de integratie over y niet kan worden uitgevoerd, doordat de teller en noemer oneindig groot zouden worden.
Een ander probleem van geometrische whn is door J.BERTRAND gesteld. In een cirkel met straal R wordt een koorde willekeurig getrokken. Hoe groot is de wh dat deze met de concentrische cirkel met straal $\frac{1}{2}R$ een punt gemeen heeft?

1e Opl. Zij θ de kleinste door de koorde opgespannen boog ($0 \leq \theta \leq \pi$). De wh is onafhankelijk van de keuze van één eindpunt, en hangt dus alleen van θ af. De kans, dat deze boog tussen θ en $\theta+d\theta$ ligt is evenredig met $d\theta$. Aan de voorwaarde is voldaan als $\theta \geq \frac{2}{3}\pi$, dus is $P=\frac{\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} d\theta}{\int_0^{\pi} d\theta} = \frac{1}{3}$

2e Opl. Zij a de afstand van het midden der koorde tot het middelpunt van de cirkel en φ de hoek, die de verbindingslijn dezer punten met een vaste rechte maakt. De gezochte wh is onafhankelijk van φ en evenredig met a. Nu is $0 \leq a \leq R$, terwijl aan de voorwaarde voldaan is voor $0 \leq a \leq \frac{1}{2}R$.
Dus is: $P = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}R} dx}{\int_0^{R} dx} = \frac{1}{2}$

3e Opl. De kans, dat het midden van de koorde in een oppervlakte-element ter grootte $r.dr.d\theta$ ligt is hiermede evenredig. Daarbij is $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq R$, terwijl de voorwaarde luidt: $0 \leq r \leq \frac{1}{2}R$

Dus is: $$P = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}R} r dr}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R} r dr} = \tfrac{1}{4}.$$

4e Opl. De lengte a der koorde kan alle waarden ≥ 0 en $\leq 2R$ aannemen. Aan de voorwaarde is voldaan als $a \leq R\sqrt{3}$ is. Dus is $P = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$.

De oplossing van deze "paradox van Bertrand" wordt gemakkelijk verkregen door generalisatie. Zij een figuur bepaald door k parameters $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, die tezamen een gebied G doorlopen, en zij de wh gevraagd dat het beeldpunt der figuur in een gebied $A \subset G$ ligt. Indien de wh, dat het beeldpunt in een element $d\lambda_1 \ldots d\lambda_k$ ligt op een constante factor na gelijk aan de grootte van dit element is, is:

$$P = \frac{\int_A d\lambda_1 \ldots d\lambda_k}{\int_G d\lambda_1 \ldots d\lambda_k} = \frac{I_A}{I_G}.$$

Voert men echter k andere coördinaten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ in, dan is,

$$d\lambda_1 \ldots d\lambda_k = \frac{\partial(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)}{\partial(\mu_1, \ldots, \mu_k)} d\mu_1 \ldots d\mu_k,$$

dus (als de transformatie niet lineair is) <u>niet</u> op een constante factor na gelijk aan $d\mu_1 \ldots d\mu_k$, terwijl uit de onderstelling, dat dit wel zo ware zou volgen:

$$P = \frac{\int_{A'} d\mu_1 \ldots d\mu_k}{\int_{G'} d\mu_1 \ldots d\mu_k} = \frac{I_{A'}}{I_{G'}},$$

wanneer A' en G' de beelden van A en G in de ruimte der μ_i zijn. De "paradox" is dus het gevolg van onderling strijdige aequiprobabiliteitsonderstellingen.

De vraag, <u>welke</u> aequiprobabiliteits- (of andere) onderstelling dan de juiste is, daar toch in bovengenoemd voorbeeld alle drie even plausibel zijn, is voor zover ik weet alleen impliciet beantwoord in Fréchet's beschouwingen over de "catégorie d'épreuves": <u>de juistheid van zulk een onderstelling hangt af van de wijze, waarop het experiment genomen wordt</u>. B.v. is het duidelijk, dat de oplossing van Buffon's naaldprobleem niet experimenteel gerealiseerd kan worden, doordat de wh niet onafhankelijk van y kan zijn, daar de naald niet onbepaald ver weg kan vallen.

Opgave: op welke wijze moet het experiment genomen worden, opdat elk der vier genoemde oplossingen van het vraagstuk van Bertrand (natuurlijk bij benadering) gerealiseerd wordt?

18) <u>Inductieprincipe</u>. De vraag naar de gerechtvaardigdheid van het inductieprincipe, dus de vraag, of het logisch of in andere zin rationeel verantwoord is, toekomstige handelingen naar vroegere ervaringen te richten, is herhaaldelijk opgeworpen, speciaal binnen het verband van de whr. Dat dit principe zomin op logische basis als op de ervaring steunt is reeds door DAVID HUME betoogd.

REICHENBACH tracht het inductieprincipe wh-logisch te funderen. Uit een eindige waarnemingsreeks kan niet met zekerheid geconcludeerd worden tot het bestaan van een limiet. Hij vervangt nu het <u>inductieprincipe</u> door de <u>inductieregel</u>: Indien een eindige waarnemingsreeks is waargenomen en indien niets bekend is over de wh van het optreden van een bepaalde limiet p van de oneindig voortgezette reeks, dan <u>stellen</u> wij ("setzen wir"), dat het fq der verlengde reeks tot een bepaalde limiet nadert, gelegen binnen een interval $f-\delta \leq p \leq f+\delta$, dat het waargenomen fq f bevat.

Reichenbach is zich volkomen bewust.

1) dat deze regel (met $\delta \to 0$) niet bewijsbaar is,

2) dat in het mathematisch model der whr bewijsbaar is, dat zij niet in alle gevallen met tot nul naderende δ kan gelden, en

3) dat haar juistheid of onjuistheid (met $\delta \to 0$) niet verifieerbaar is en dat het geen zin heeft, niet alleen van de waarheid, maar zelfs van de wh van deze regel te spreken. Doordat hij de "Setzung" bij empirische verlenging van de reeks voortdurend aanpast aan het fq van de gehele tot dan waargenomen reeks, zodat we dus voortdurend onze waarnemingen

corrigeren, meent hij te kunnen zeggen, dat, àls de limiet bestaat, we die ook "tenslotte" zullen benaderen. Op grond daarvan betoogt hij, dat het aanvaarden van de inductieregel toch in ieder geval het verstandigste is, wat men kan doen en in ieder geval verstandiger, dan het volgen van profetieën van een waarzegger of een orakel. De vraag, of het geloof, dat de inductieregel werkelijk tot het doel zal voeren, dat wij allen volgens hem bezitten, te rechtvaardigen is, beantwoordt hij ondubbelzinnig ontkennend, maar volgens hem hindert dat niet, omdat wij ook volgens de inductieregel moeten handelen, wanneer we er niet aan geloven. "Die Induktionsregel ist die günstigste Setzung, weil sie die einzige Setzung ist, von der wir wissen: wenn es überhaupt möglich ist Zukunftsaussagen zu machen, so werden wir sie durch diese Setzung finden."

Afgezien nog van het (overigens zwaarwegende) feit, dat Reichenbach's inductieregel zinledig blijft doordat hij niet aangeeft, hoe groot δ in een bepaald geval gekozen moet worden, is bovendien de vraag die hij behandelt een schijnvraag. Immers wat betekent: "redelijk" of "verstandig"? Men zegt gewoonlijk, dat iemand "onverstandig" gehandeld heeft, indien hij geen rekening heeft gehouden met vroegere ervaringen van hemzelf of soms ook van anderen (die hem bekend zijn of althans konden zijn), d.w.z. met het inductieprincipe. Het heeft daarom ook geen zin van een inductieprincipe te spreken, maar alleen van een inductiemethode (of, zoals Reichenbach doet, van een inductieregel): "Mensen handelen gewoonlijk zo".De volgende passage is ontleend aan mijn symposiumvoordracht over "Mathematische en Empirische Grondslagen der Waarschijnlijkheidsrekening" (Ned.Tijdschr.v.Natuurkunde, 1940/41).

"Ik herinner me eens een beschrijving van een experiment gelezen te hebben, waarbij een bioloog een kikker een vlieg voorhield. De kikker bevond zich binnen een gesloten glazen terrarium, de vlieg erbuiten. Natuurlijk hapte de kikker. Het experiment werd 80 keer herhaald en telkens hapte de kikker. Hij handelde dus niet volgens het inductieprincipe. Het inductieprobleem behelst de vraag: had hij ongelijk? Ik ben er niet zeker van: ik vermoed, dat de bioloog na afloop tòch hem de vlieg wel gegeven zal hebben, als beloning voor de moeite. Maar dan berust het antwoord: "Kikkers hebben gelijk het inductieprincipe niet te volgen, want waarschijnlijk krijgen zij ten langen leste de vlieg toch", zelf tòch weer op het inductieprincipe. In dit geval kan men tot niets anders concluderen dan: mensen handelen doorgaans anders dan kikkers.

G.NEYMAN (Actualités Scientifiques et Industrielles no 739, 1938) formuleerde zeer duidelijk dit standpunt aangaande het inductieprobleem: "Il me semble, que nous ne pouvons savoir ou connaitre que.

1) les résultats des expériences déjà effectuées, et:

2) les conséquences de quelques définitions et postulats...

Notre attitude à toute affirmation de caractère autre que 1) et 2) ne peut être décrite que par les termes "croyance" ou "doute".....
Mais se décider à "affirmer" ne veut pas dire "savoir" ni même "croire". C'est un acte de volonté précédé par quelques expériences et quelques raisonnements déductifs... Par conséquent il me semble, que le terme "raisonnement inductif" ne correspond pas à la nature du procédé... Plus généralement je doute qu'il existe des cas où l'application de ce terme à une méthode statistique soit plus justifiée que dans le cas présent. Si l'on veut un terme spécial pour décrire ces méthodes... on pourrait peut-être proposer: "comportement inductif"."

Tenslotte verwijzen wij in dit verband nog naar de "loi de succession", genoemd in een vorig punt, die één van de vormen is, die het inductieprincipe aanneemt, als slechts "successen" zijn geconstateerd. Hoewel het daar aangehaalde voorbeeld van Laplace tegenwoordig enigszins belachelijk aandoet, is het geenszins overbodig er op te wijzen, dat er ook tussen de "natuurwetten" en de ervaring slechts een inductief verband bestaat. Het is geenszins in strijd met de logika, dat b.v. de richting van de zwaartekracht plotseling zou veranderen. Wanneer men het "onmogelijk" noemt, dat b.v. de zon in het Westen zou opkomen, heeft dit alleen de psychologische betekenis, dat men zich hoegenaamd niet kan voorstellen, dat dit zou gebeuren en dienovereenkomstig in zijn "inductief handelen" met deze mogelijkheid in het geheel geen rekening houdt.

19) Logisch empiristen en significi. Ons overzicht van de belangrijkste theorieën, die met betrekking tot de grondslagen der whr gegeven zijn, leidde tot een tamelijk negatief resultaat. Geen enkele der theorieën bleek in staat, op bevredigende wijze een verband te leggen tussen het wh-begrip en de bij empirische problemen waargenomen fqn, terwijl voorts de subjectivistische en objectivistische opvattingen doorgaans scherp tegenover elkaar gesteld worden, zonder dat men nagaat of ze wellicht beide een element van juistheid bevatten. De voornaamste oorzaak van dit falen der bestaande theorieën bestaat daarin, dat men van een verkeerde probleemstelling uitgaat. Men kiest tot uitgangspunt een bepaald formalisme, in casu de klassieke mathematische theorie der whr, bemerkt dat de daarin voorkomende grootheden onvoldoende gedefinieerd zijn en tracht nu alsnog een interpretatie daarvoor te geven. Men vraagt: "heeft dit begrip subjectieve of objectieve betekenis; beschrijft het een graad van zekerheid of van veelvuldigheid?"

Deze laatste probleemstelling is in overeenstemming met de opvattingen van de filosofische richting, die zich de logisch empiristische noemt, en die voortgekomen is uit de Wiener Kreis (+1930). Oorspronkelijk was de centrale figuur de filosoof MORITZ SCHLICK, gestorven 1938. Voorts behoorden er o.a. toe de wiskundige HANS HAHN, gest. +1934, de socioloog OTTO NEURATH, gest. 1945, de logicus RUDOLF CARNAP en de fysicus PHILIP FRANK. Omstreeks 1938 heeft deze groep zich onder leiding van Otto Neurath met enige min of meer verwante groepen verenigd tot de Unity-ofScience-movement. De hier in het bijzonder bedoelde opvatting is vooral door Carnap verdedigd.

De facto is deze richting, in het bijzonder Carnap, meer logisch-formalistisch dan empiristisch georiënteerd. Zij beschouwt als de voornaamste taak der wetenschap de opbouw van een zuiver formeel systeem van beschrijvingen van waarnemingsresultaten en van de onderlinge relaties dier beschrijvingen, waarbij overigens aan de formele zuiverheid bij hen vaak vrij veel ontbreekt. We doelen hier speciaal op een opmerking, die enkele malen bij Carnap voorkomt, b.v. in de vorm:

"The development of Physics ... has more and more led to that method in the construction, testing and application(!!) of physical theories, which we call formalisation, i.e. the construction of a calculus, supplemented by an interpretation". "... as a system of "knowledge", in our terminology: as an interpreted system".(R.Carnap: The foundations of logic and mathematics. International Encyclopaedia of Unified Science, Vol.1 nr 3, pag. 67 and 50).

Carnap beschouwt dus "wetenschap" of "kennis" als een systeem van woorden en symbolen, begrensd door zekere tamelijk a-prioristische en willekeurig aandoende voorwaarden met betrekking tot "verifieerbaarheid" en "toetsbaarheid". (Verg. zijn "Testability and Meaning", "Philosophy of Science 3, 1936 en 4, 1937). Carnpa's omschrijving van kennis als een formeel systeem, aangevuld met een interpretatie, kan echter nauwelijks au sérieux genomen worden. Zij is analoog met een definitie van "kunst" als: een katalogus, aangevuld met een museum (waarin schilderijen opgehangen kunnen worden).

In plaats daarvan beschouwen wij wetenschap veeleer als een systeem van menselijke handelingen, afgebakend door zorgvuldige waarneming van de gevallen, waarin de term "wetenschap" de facto wordt toegepast. Deze opvatting sluit meer aan bij die van de Nederlandse significi. De term significa is ingevoerd door lady VICTORIA WELBY voor een vorm van taalwetenschap, die niet, zoals de grammatika, woordvorming, of, zoals de syntaxis, zinsbouw, of, zoals de etymologie, woordafleiding, maar woordbetekenis onderzoekt. ("Sense, meaning and interpretation", tijdschrift "Mind" 1896; "What is meaning? Studies in the development of significanca",1911). Zij ziet ons taalgebruik als "a hotbed of confusion, a prism of senseless formalism, and therefore of barren controversy". Enigszins verwante, nog sterker kritische en negativistische, opvattingen vindt men bij FRITZ MAUTNER ("Beiträge zu einer Kritik der Sprache" 3 dln. 1901-1902; Wörterbuch der Philosophie, 1910).

De denkbeelden van Lady Welby werden in Nederland geïntroduceerd door FREDERIK VAN EEDEN (1860-1932) ("Redekunstige grondslag van verstandhouding" 1897, opgenomen in Studieën, derde reeks), die bij

L.E.J.BROUWER, evenals bij G.MANNOURY, verwante denkbeelden vond. (L.E.J. Brouwer. "Over de grondslagen der wiskunde", 1907;G.Mannoury: "Methodologisches und Philosophisches zur Elementarmathematik",1909).

In 1917 werd het Internationale instituut voor wijsbegeerte opgericht, waartoe, behalve Mannoury, Brouwer en van Eeden o.a. ook HENRI BOREL (1869-1933) en JACOB ISRAEL de HAAN (1881-1924) behoorden. Later werd dit omgezet in de significische kring, waartoe ook J.van GINNEKEN (1877-1945; Principes de linguistique psychologique, 1907), toetrad. Enige der in deze kring gevoerde discussies zijn later door den voorzitter G.MANNOURY uitgegeven. (Significsche dialogen, 1937). Terwijl Van Ginneken's werk sterk linguistisch en dat van De Haan ("Rechtskundige Significa en hare toepassing op de begrippen:verantwoordelijk, aansprakelijk en toerekeningsvatbaar", 1916; "Rechtskundige Significa", 1919) nog vrij sterk etymologisch georiënteerd was, is de significa later, vooral onder invloed van Mannoury er meer toe overgegaan, de menselijke handelingen, die met de taal in verband staan (taaldaden), b.v het uitspreken, opschrijven, aanhoren, lezen enz. van woorden, te bestuderen. Nog later werd het gebied verruimd tot het algemenere onderzoek van handelingen, waardoor mensen (of dieren) het gedrag van anderen trachten te beïnvloeden, en daardoor gaat de significa van taalwetenschap over tot sociologie en massapsychologie. Van de werken van MANNOURY vermelden we nog: "Mathesis en Mystiek" 1925; Woord en gedachte (inleiding tot de significa, inzonderheid met het oog op het onderwijs in de wiskunde) 1931; Die signifischen Grundlagen der Mathematik.(Erkenntniss 4, 1934; Relativisme en Dialectiek, 1946; Van "Nu en Morgen; signifische varia" zijn fragmenten verschenen in Synthese 1939. Van zijn handboek der significa zijn 2 van de 3 delen voltooid, maar nog niet verschenen. Een "inleiding in de sigifica", bestemd voor de Servire-reeks, is grotendeels voltooid.

20) Modelvorming en formalistisch systeem. Onze probleemstelling neemt het feit tot uitgangspunt, dat elk wetenschappelijk onderzoek met een bepaald doel verricht wordt, b.v. bepaalde objecten te maken of te wijzigen of bepaalde situaties tot stand te brengen of te veranderen, waaronder zich ook psychologische situaties kunnen voordoen (het overtuigen van anderen of zichzelf, dus ook het "willen bewijzen", e.d.). Wij hebben daarbij minder het individuële doel van de afzonderlijke onderzoeker op het oog, dat van meer verschillende aard kan zijn, dan wel het maatschappelijk doel, dat zich in de bevordering van zulk onderzoek door maatschappelijk organen uit, evenals in de door den onderzoeker verwachte aanmoediging, waardering, goedkeuring, beloning, enz.

We stellen dan de vraag, welke metingen of andere waarnemingen en welke berekeningen of andere redeneringen er nodig of doelmatig zijn, om het beschouwde doel te bereiken.

In de door ons bedoelde gevallen hebben we te maken met berekeningen van wh-theoretische aard, toe te passen op de resultaten van statistische waarnemingen. We vragen dus niet, zoals Carnap: gegeven is een formalisme, hoe kunnen we het interpreteren? Maar: gegeven is een verzameling van waarnemingsresultaten en een wil tot bereiken van een bepaald doel, welk formalisme is daarvoor doelmatig? Daarnaast zullen we ons ook hebben af te vragen in welke gevallen en op welke wijze de doorgaans in de levende taal voorkomende en dus als gegeven te beschouwen wh-terminologie gebruikt wordt.

Bij alle kritische beschouwingen over ervaringswetenschappelijke theorieën ligt één van de grootste moeilijkheden daarin, dat zo een theorie een min of meer formalistisch systeem is, dat als tussenschakel wordt gebruikt tussen ervaring en handelingen. Door BROUWER is opgemerkt, dat het een eigenschap van de menselijke wijze van handelen is, om:

1) op te merken, dat bepaalde herkenbare en van andere onderscheidbare reeksen van gebeurtenissen veelvuldig en telkens weer voorkomen (causale reeksen)

2) bij het waarnemen van het "begin" van een dergelijke herhaaldelijk opgemerkte reeks te verwachten, dat ook het verdere verloop zal zijn zoals vroeger,

3) wanneer het "einde" van de reeks sterke gevoelens van lust of onlust (affecten) wekt, handelingen niet rechtstreeks op het bereiken of

of vermijden van dat einde te richten, maar op het "begin" of een tussenschakel (sprong van doel op middel). Wij citeren dienaangaande de eerste bladzijden van het tweede hoofdstuk van. "over de grondslagen der Wiskunde" (L.E.J.Brouwer, 1907):

"Den menschen is een vermogen eigen, dat al hun wisselwerkingen met de natuur begeleidt, het vermogen nl. tot wiskundig bekijken van hun leven, tot het zien in de wereld van herhalingen van volgreeksen, van causale systemen in de tijd. Het oer-phenomeen is daarbij de tijdsintuïtie zonder meer, waarin herhaling als "ding in den tijd en nog eens ding" mogelijk is, en op grond waarvan levensmomenten uiteenvallen als volgreeksen van qualitatief verschillende dingen; die vervolgens zich in het intellect concentreeren tot niet gevoelde, doch waargenomen wiskundige volgreeksen. En het levensgedrag der menschen zoekt zoveel mogelijk van die wiskundige volgreeksen te kunnen waarnemen, om telkens, waar in de werkelijkheid bij een vroeger element van zulk een reeks met meer succes schijnt te kunnen worden ingegrepen dan bij een later, ook dan, wanneer alleen bij dat latere het instinct wordt aangedaan, het eerste te kiezen als richting voor hun daden (vervanging van het doel door het middel)."

Deze sprong komt ongetwijfeld ook in het dierenrijk voor, b.v. bij het hamsteren door hamsters en mieren, nestbouwen, het dammenbouwen van bevers e.d., maar anderzijds is het wel zeker, dat deze sprong in het leven der dieren bij lange na niet zo'n grote plaats inneemt als bij de mens. We kunnen hieraan nog toevoegen, dat de ontwikkelingsgeschiedenis van de mens steeds meer en vooral ook steeds grotere dergelijke sprongen vertoont. Vergelijk b.v. een aap, die bananen van een boom plukt, een primitieve mens, die van gevonden koren brood bakt, één, die gevonden koren zaait, om het volgend jaar te kunnen oogsten, en een staatsman, die een plan maakt voor de oprichting van een landbouwkundige hogeschool, om de toekomstige geslachten van studenten te laten leren, hoe te onderzoeken of het mogelijk is toekomstige oogsten te vergroten.

Een enigszins hiermee verwante gedachte is de z.g. hergroeperingswet van Mannoury, die zegt, dat onze verwachtingen beschouwd kunnen worden, als te zijn opgebouwd uit de elementen, die in onze herinnering voorkomen, en daarvan alleen te verschillen, doordat ze anders gegroepeerd zijn.

Tot de sprong van doel op middel behoort ook de invoering van een formalistisch systeem of algemener van een geregulariseerd model van onze ervaringen. (verg. College (1946): Wiskunde, Logika en Ervaringswetenschappen, gehouden in Delft, syllabus in de bibliotheek aanwezig; Voordracht over "General Procedures of Empirical Science", gehouden voor de Signifische zomerconferentie te Naarden (1946), die in Synthese 1947 verschijnt. "Then a regularisation-process is applied, consisting of the neglecting of small deviations and rare exceptions from the regularities. Hence part of the actual recollections of previous observations is replaced by fictitious observations, fitting in with the regularities. The system consisting of these fictitious observations, together with those actual recollections which also fit in, and therefore did not need to be altered, will be called a model of the original observations."). Dit maken van een geregulariseerd model geschiedt gedeeltelijk onderbewust, gedeeltelijk bewust. Onderbewust in zoverre:

1) niet alle gebeurtenissen, die een indruk op ons gemaakt hebben volledig tot ons bewustzijn zijn doorgedrongen, en

2) een groot deel van de bewuste ervaringen achteraf weer vergeten wordt. Een verdergaande vereenvoudiging treedt op bij de beschrijving in woorden van de overige ervaringen, daar door één enkel woord soms een groot complex van herinneringen en gewaarwordingen wordt weergegeven. Vervolgens worden regelmatigheden in de woordbeschrijvingen van onze ervaringen opgemerkt en deze worden weergegeven in een min of meer geformaliseerd systeem, onverschillig of dit een mathematisch, logisch, synthetisch, semantisch of ander formalistisch systeem is.

Bij elk dezer meer of minder ver doorgevoerde modelvormingen is het van belang, dat het model aan 2 tegenstrijdige eisen voldoet:

1) zo nauw mogelijk aan de ervaring aan te sluiten,

2) zo eenvoudig mogelijk te zijn, om zo groot mogelijke ervaringscomplexen overzichtelijk weer te geven.

Verdergaande formalisering betekent meestal een toegeven aan de 2e eis. De begripskritische moeilijkheden liggen nu doorgaans bij wat Mannoury noemt de in- en uitschakeling van het formalistisch systeem. Soms worden deze moeilijkheden geheel buiten beschouwing gelaten doordat men vergeet, dat het formalistisch systeem slechts een model is en erover spreekt, alsof men over de ervaringen zelf spreekt. Dit is de fout, die b.v. door A.S.EDDINGTON gemaakt wordt, wanneer hij, in "The Nature of the Physical World", zegt, dat de fysika alleen met pointer-readings te maken heeft, en door JEANS, die in "The Mysterious Universe" zegt, dat de wereld uit differentiaalvergelijkingen is opgebouwd en dat God een mathematicus is. Evenzo echter door hun antipode Carnap in een vroeger reeds geciteerde uitspraak.

We willen in dit verband ook wijzen op de absolutiserende werking, die van modelvorming uitgaat en een gevolg van de regularisering is. B.v. bestaat deze daarin,dat regelmatigheden, die veelvuldig waargenomen zijn, algemeen geldig ondersteld worden. Zelfs wanneer de regelmatigheden in alle waargenomen gevallen golden, dan had dit "alle" toch nog betrekking op een bepaald aantal gevallen, terwijl in het geformaliseerd systeem het begrip "alle" in een schijnbaar absolute zin gebruikt wordt, b.v.: "In alle gevallen, waarin A gold, gold ook B" wordt: „$\forall_x A[x] \supset B[x]$" Dit is de typische inductiestap.

Een ander voorbeeld bestaat daarin, dat empirische gelijksoortigheidsrelaties vervangen worden door mathematische aequivalentierelaties, die zich door hun onbeperkte transitiviteit van de empirische relaties onderscheiden en daardoor weer een absoluut karakter schijnen te hebben. Vgl. G.MANNOURY, Mathesis en Mystiek, bl.17:

"... "is gelijk" en "volgt op" zijn elkaar uitsluitende predikaten, het eerste kommutatief, het tweede niet-kommutatief, want als a=7, is 7=a, maar als y volgt op x, volgt x niet op y. Wie er zich niet aan stoort is een Chinees. Leve de goede vormen en de mathesis! Ja, de mathesis vooral, want dat is welbeschouwd het summum van fatsoen. 'n Mathematicus is nl. nòg een netter mens dan een landmeter. Die zegt: als a=b, en b=c, en c=d, is a=d, al stond het hele alfabet ertussen en noemt dat de "kontractieve wet van 't gelijkheidsteken". Maar zóver durft toch de landmeter niet gaan. Die wil de z nog wel eens eerst met de a vergelijken, eer hij zeker is van de zaak. ... En de rest van het mensdom? Och, het hele alfabet komt in het dageliks leven zo niet voor, maar gelijkheidspredikaten als "even oud", "even goed" of "even slecht",..., zijn toch zeker niet onbeperkt kontraktief. Niet eens zo kontraktief als het "even lang" van de landmeter. Zodat ik maar zeggen wil, dat er ook graden zijn in 't fatsoen, "even goed" als op de meetcirkel."

En op pag.32: "'t Is eigenlijk heel makkelik, een volmaakt wiskundeboek te schrijven. Hier heb je er een:

$$a=a=a=a$$

Daar mankeert niets aan, en het kunstje leert gauw genoeg. De onvolmaakte zijn lastiger, voor schrijver en lezer beide."

Op de absolutiserende werking van modelvorming berust ook het schijnbaar absolute karakter van de wiskunde.

21) Isomorfie van formalismen. Van de vier belangrijkste pogingen tot fundering der whr, die we hebben leren kennen, zijn zowel de notaties als de aard der objecten, waaraan whn worden toegekend, verschillend. En wel:

Kolmogoroff	$P(B)$	B en E vzn ¹), $B \subset E$;
Reichenbach	$B \underset{p}{\Rightarrow} C$	B en C proposities;
Keynes	a/h	a en h proposities;
von Mises	$f_{\Gamma}(K)$	Γ collectief, K kenmerk.

De bij von Mises aangegeven notatie wordt door hem niet gebruikt.

Met betrekking tot de eerste drie merken we vooreerst op, dat het van weinig belang is, of men whn toevoegt aan vzn, dan wel aan proposities.

¹) vz(n) = afkorting voor verzameling(en).

Immers is A een vz, dan is ,$x \in A$, een propositie. Is echter a een propositie, die van een variabele x afhangt, die een <u>bepaalde</u> vz E doorloopt, dus $a = a[x]$, dan is de vz van alle x waarvoor $a[x]$ geldt een vz. Bij Reichenbach wordt inderdaad ondersteld, dat B en C van een variabele afhangen, die de rij der natuurlijke getallen doorloopt. Bij Keynes komt weliswaar een dergelijke onderstelling niet voor, maar wanneer men de propositie-logika preciseert door een exact formalistisch systeem tot uitgangspunt te kiezen, dan wordt het voordien onbepaalde begrip "alle proposities" tot dat van "met bepaalde formalistische hulpmiddelen formuleerbare proposities" gereduceerd, waardoor het verschil tussen de beide theorieën aanzienlijk verminderd wordt. Zonder thans na te gaan, of van een <u>exacte</u> isomorfie gesproken kan worden, kunnen we in ieder geval zeggen, dat eventueel overblijvende verschillen in omvang slechts van geringe betekenis kunnen zijn. Afgezien van de éénduidigheid wordt de isomorfie, naar bekend is, verkregen door de toevoegingen:

propositics:		verzamelingen:	
conjunctie	,$a \wedge b$,	doorsnede	$A \cap B$
disjunctie	,$a \vee b$,	vereniging	$A \cup B$
negatie	,$\neg a$,	complement	$C(A)$
implicatie	,$a \supset b$,	subsumptie	$A \subset B$

waarbij we moeten opmerken, dat de subsumptie zelf niet weer een vz is, maar een propositie en dat de complementvorming relatief tot een uitgangsvz, maar de negatie schijnbaar absoluut is ("uitsluitingsnegatie").
Een doelmatige notatie is nu, in aansluiting aan die van Keynes: $P\left[\frac{A}{B}\right]$, waarbij we in het midden laten of A en B vzn dan wel proposities voorstellen, en waarbij ondersteld is, dat (in het laatst genoemde geval) ,$A \supset B$, (rep. in het eerstgenoemde geval, dat we verder niet expliciet vermelden, $A \subset B$) is. Hierin correspondeert dus B met Kolmogoroff's wh-veld E, met Reichenbach's praemisse (B), met Keynes' hypothese h en met von Mises' collectief Γ. De twee fundamentale regels luiden dan: (in de propositie-notatie):

$$\text{I.} \quad P\left[\frac{A}{E}\right] + P\left[\frac{B}{E}\right] = P\left[\frac{,A \vee B,}{E}\right]$$

$$\text{II.} \quad P\left[\frac{A}{B}\right] P\left[\frac{B}{C}\right] = P\left[\frac{A}{C}\right]$$

in de onderstellingen: ,,$A \supset E$, $\wedge$,$B \supset E$, $\wedge$,$\neg A \wedge B$,, resp. ,,$A \supset B$, $\wedge$,$B \supset C$,, ,
of algemeen:

$$P\left[\frac{E \wedge C \wedge D}{E}\right] + P\left[\frac{E \wedge C \wedge ,\neg D,}{E}\right] = P\left[\frac{E \wedge C}{E}\right]$$

$$P\left[\frac{A \wedge B \wedge C}{B \wedge C}\right] P\left[\frac{B \wedge C}{C}\right] = P\left[\frac{A \wedge B \wedge C}{C}\right] .$$

In vele gevallen zal de praemisse de conjunctie zijn van een algemene onderstelling, die in de <u>keuze</u> van een bepaald wh-veld tot uitdrukking wordt gebracht, en een <u>speciale</u> onderstelling; in dit geval is het doelmatig, de <u>algemene</u> praemisse vóór de haken als een index te schrijven, of soms ook geheel weg te laten. We hebben dan b.v.:

$$P_E[,x > 0,] + P_E[,x < 0,] = P_E[,x \neq 0,]$$

$$P\left[\frac{,x > 1,}{,x > 0,}\right] . P\left[\frac{,x > 2,}{,x > 1,}\right] = P\left[\frac{,x > 2,}{,x > 0,}\right] ,$$

waarbij E de <u>algemene</u> onderstelling aangeeft, die b.v. door de keuze van een bepaalde verdelingsfunctie tot uitdrukking gebracht wordt. Klaarblijkelijk komt het op hetzelfde neer, of we b.v. de propositie ,$x > 0$, vervangen door de klasse $\{,x > 0,\}$ van alle positieve getallen.
De overige verschillen tussen de drie eerstgenoemde formalistische systemen zijn van ondergeschikt belang, en komen neer op verschillende keuzen van de <u>axiomastelsels</u>, waaraan de formalismen worden onderworpen. De vraag of men b.v. volgens Kolmogoroff de "relatieve" whn met behulp van een gegeven wh-veld <u>definieert</u> en II <u>bewijst</u>, dan wel volgens Reichenbach uitsluitend deze van de aanvang af invoert en II <u>postuleert</u> is van weinig belang.

Het belangrijkste verschil levert wel de door B.O.Koopman uitgewerkte generalisatie van Keynes, waarbij het symbool: $P\left[\frac{A}{B}\right]$ niet noodzakelijk een reëel getal, maar een element ener gedeeltelijk gerangschikte vz voorstelt. We gaan hierop thans niet in, temeer daar de generalisatie van Keynes-Koopman niet zeer vruchtbaar schijnt te zijn en wellicht beter, met volledig prijsgeven der rangschikkingsmogelijkheid, te vervangen ware door één, waarbij de whn zelf reeds als verdelingen van getallen tussen 0 en 1 worden opgevat.

22) <u>Inschakeling van het formalistisch systeem</u>. We hebben gezien, dat de inschakeling van het formalisme, dus de keuze van een bepaald mathematisch model, neerkomt op het toekennen van gelijke whn aan een aantal gevallen (<u>Laplace</u>) of op de bepaling van de whn in een wh-veld (<u>Kolmogoroff</u>). Nu is echter de methode van Kolmogoroff tot die van Laplace terug te brengen. Immers de grotere algemeenheid van het wh-veld bestaat daarin, dat:

1. Het wh-veld oneindig veel elementen kan bevatten,
2. De elementaire whn irrationale getallen kunnen zijn,
3. Deze niet aan elkaar gelijk behoeven te zijn.

Hiervan ontstaan 1. en 2. door regularisering, waarbij een finiet mathematisch model in een eenvoudiger, infiniet model wordt omgezet door de reciproke waarde van de uitgebreidheid te verwaarlozen, 3. berust daarop, dat men aan de eindig vele elementaire whn van een eindig wh-veld waarden toekent, die zich als gehele getallen verhouden. Men kan dan echter deze elementaire whn opvatten als niet- elementaire whn van een ander wh-veld, waarvan de elementaire whn wel aan elkaar gelijk zijn en als men in een bepaald geval wil <u>betogen</u>, dat whn bepaalde waarden moeten hebben, zal men dat doorgaans ook op grond van een dergelijk ruimer wh-veld doen. Hiermee zijn wij dus weer teruggekomen op het oude probleem van Laplace, te weten de definitie van gelijke whn bij een finiet wh-veld.

Een dergelijke situatie is aanwezig met betrekking tot von Mises' theorie.
Hier is de wh $P\left[\frac{K}{\Gamma}\right]$ (preciezer: $P\left[\frac{K \wedge \Gamma}{\Gamma}\right]$) van een kenmerk K met betrekking tot een collectief Γ gedefinieerd als: $\lim_{n \to \infty} P_n\left[\frac{K}{\Gamma_n}\right]$, waarbij Γ_n het beginsegment van n elementen van Γ is, terwijl P_n eenvoudig het <u>frequentiequotient</u> van K met betrekking tot Γ_n is, d.w.z. de "wh" volgens het model van Laplace.

Naar aanleiding daarvan merken we op, dat de overgang van de "eigenlijke" (finiete) modellen tot een "oneigenlijk" (infiniet) model bij von Mises aan enige onnodige en de facto ook veelal niet vervulde beperkende voorwaarden gebonden is, t.w.:

1. Elk finiet model Γ_n is bij von Mises gerangschikt (in de toepassingen is b.v. een steekproef veelal in het geheel niet, een collectie waarnemingen niet altijd ééndimensionaal gerangschikt);
2. Het n^e finiete model Γ_n heeft de uitgebreidheid n;
3. $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$

Van deze beperkingen is de eerste de belangrijkste. Zij zijn ontstaan doordat von Mises oorspronkelijk de elementen van de collectie als in de tijd gerangschikte reële gebeurtenissen zag, een opvatting, die hij later ten aanzien van de meest voorkomende statistische toepassingen min of meer heeft moeten prijsgeven. Deze te rigoureuze beperkingen voor de eigenlijke modellen treden dus naast het vroeger genoemde bezwaar van te weinig rigoureuze behandeling van het oneigenlijk model. We herinneren er aan, dat dit bestond uit een drievoudig gebruik van uitsluitingsnegaties, t.w.

1. De overgang van eindige naar oneindige modellen;
2. De niet-affirmatieve en zelfs niet-intuïtionistische <u>aard</u> van de limietovergang;
3. Het onregelmatigehidsaxioma.

In plaats daarvan treedt bij ons het wh-theoretisch model zèlf alleen als finiet model op, en wordt daarvoor zuiver binnen het kader der <u>mathematische</u> behandeling ter vereenvoudiging tot een infiniet model overgegaan, waarbij in het algemeen de <u>eerstgenoemde</u> uitsluitingsnegatie gebruikt wordt, die hier geïnterpreteerd wordt als een verwaarlozen van de reciproke uitgebreidheid. Hoewel in de algemene theorie der wh-velden en der Stieltjes-Lebesgue-integralen ook vooralsnog onvermijdbare uitsluitingsnegaties van het tweede type optreden, is dit niet essentieel, daar deze theorie alleen dient om stellingen in zeer algemene vorm en op zeer eenvoudige wijze te bewijzen, maar voor de toepassingen vermeden kan worden.

Vgl. hiertoe: 'Mathematische en empiristische grondslagen der whr', Ned.T.v.Natuurk. 8, 70-93, 1941, pag.87:

'Een empiristisch bruikbare whr kunnen we dus alleen krijgen, door ons tot frequentiebepalingen bij finiete collectieven (in den zin waarin dit woord is ingevoerd) te beperken. Oneindige collectieven (b.v. de distributie van Gauss) worden alleen als mathematische simplificaties gebruikt (evenals b.v. de dichtheden naast de gemiddelde dichtheden). Zoo'n oneindig collectief (geïnterpreteerd als een werkelijke verdeeling) is dus een geregulariseerd model voor een eindig collectief, zoals een continue voor een atomistische massaverdeeling. (Ook een volgens Church intuïtionistisch gemaakt collectief van von Mises kan dan als een geregulariseerd (niet: geïrregulariseerd!!) model van een (gerangschikt) eindig collectief beschouwd worden. O.a. tengevolge van de willekeur van de volgorde waarin alle door volledige inductie definieerbare deelrijen worden afgeteld is het echter de vraag of dit model groote praktische diensten zal kunnen bewijzen.) Vandaar dan ook, dat de relatie tusschen een eindig collectief, b.v. de verdeeling van Bernoulli en een door haar geapproximeerde oneindige verdeeling (b.v. die van Laplace) door een expliciet bekende n(ε)-relatie verbonden is, zoodat de approximatie met vooraf te schatten fout plaats vindt, d.w.z. aan de eischen der intuïtionistische wiskunde voldoet. Zooals ook in andere gevallen blijkt dus de intuïtionistische wiskunde (mits ontdaan van zekere ontbeerlijke bestanddeelen) nauwer dan de klassieke aan de empirische wetenschappen aan te sluiten. (Dit karakter der intuïtionistische wiskunde is door Carnap ten eenenmale miskend, door von Mises echter duidelijk ingezien. Vgl. R.VON MISES, Kleines Lehrbuch des Positivismus, 's-Gravenhage, W.P.van Stockum, 1939, p.135 seq.)"

En op pag. 89: "In de plaats van het mathematische onregelmatigheidsaxioma van von Mises, dat nòch mathematisch, nòch empirisch werkelijk gebruikt wordt, treedt dus een physische regelmatigheidshypothese, die zoowel bij de mathematische berekeningen (aldaar natuurlijk als conventie of "gegeven") als ook bij de empirische vraagstukken essentieel wordt toegepast."

Men heeft dus nu een eindige vz van als elementair beschouwde eventualiteiten en kent gelijke whn toe aan het gebeuren dezer eventualiteiten. Stelt men de eventualiteiten voor door $E_1 \ldots E_n$, dan kan men het gebeuren van de eventualiteit E_i zo opvatten, dat deze eventualiteit een nieuw kenmerk krijgt, hetgeen we kunnen formaliseren door E_i in E'_i te veranderen. Het verschil tussen onze opvatting en de oorspronkelijke van Laplace is daarin gelegen, dat we niet betogen, dat de elementaire gebeurtenissen gelijke whn hebben (zelfs niet, dat deze uitspraak een bepaalde zin zou hebben), maar dat we (ten dele in overeenstemming met de subjectivistische opvatting) aan deze eventualiteiten gelijke whn toekennen. En wel moeten we dit "toekennen" beschouwen als de keuze van een bepaald mathematisch model. Dit model is een formalisering van een eindig aantal denkbeeldige gebeurtenissen, die we aan een transitieve permutatiegroep onderworpen denken.(Dit hoeft niet noodzakelijk de volledige symmetrische groep te zijn, zoals reeds blijkt uit het voorbeeld van een gewone dobbelsteen, die , wanneer de richtingen der hoofdassen gegeven zijn, onderworpen is aan een groep van de orde 24, terwijl de orde der symmetrische groep van 6 elementen 6!=120 is. Een prismatische dobbelsteen is zelfs maar aan een cyclische groep onderworpen, als spiegelingen en draaiingen van de hoofdas niet voorkomen). We stellen ons dus, op grond van onze ervaring met betrekking tot de causale samenhang van gebeurtenissen in het algemeen, voor, dat de individualiserende kenmerken, b.v. i en j, waardoor 2 eventualiteiten E_i en E_j van elkaar onderscheiden kunnen worden, op het al of niet gebeuren dezer eventualiteiten geen invloed hebben, zodat dus, wanneer in een bepaald geval b.v. E_i gebeurt, wij ons voorstellen dat, als vooraf een permutatie van $E_1 \ldots E_n$ zou zijn uitgevoerd, waarbij E_j in de plaats van E_i gekomen zou zijn, i.p.v. E_i dan E_j gebeurd zou zijn. Kort gezegd: dat E_j "even goed" "had kunnen" gebeuren als E_i. Deze uitspraak heeft natuurlijk geen empirische betekenis, maar houdt alleen in, dat in onze voorstelling de "werkelijke" gebeurtenis met een aantal "denkbeeldige" gebeurtenissen vergeleken wordt. Van het indifferentieprincipe in zijn primitieve vorm onderscheidt deze opvatting zich daardoor, dat de voorstelling van deze permutabiliteit inderdaad aanwezig moet zijn. Vgl. Math. en emp. grondslagen der whr, pag.88:

"Men dient echter wel te bedenken, dat het tellen van de frequenties der verschillende kenmerken in een eindig collectief vooronderstelt, dat alle elementen van het collectief (natuurlijk slechts met betrekking tot het probleem in casu) als gelijkwaardig ("gelijkelijk mogelijk") worden ondersteld, zodat men in zekeren zin toch weer tot Laplace terugkeert. Deze aequiprobabiliteit is een invariantie t.o.v. alle permutaties der elementaire gebeurtenissen van het collectief, en heeft niet het karakter van een hypothese, maar van een conventie. Als hypothese ware zij op grond van de bovenstaande beschouwingen te bevestigen noch te weerleggen, dus overbodig. Het hypothetische element ligt in de generalisatie, d.w.z. in het vermoeden, dat de invariantie behouden blijft in een ruimer collectief, dat behalve de reeds waargenomen nog een eindig aantal alsnog waar te nemen gebeurtenissen betreft. Bij alle vraagstukken der whr treden dergelijke invariantie-conventies op, die, zo zij niet generaliseerbaar blijken te zijn, door andere worden vervangen. In dezen zin kunnen wij dus den subjectivisten toestemmen, dat de whn geen physisch meetbare grootheden zijn; alleen de relaties tusschen verschillende collectieven corresponderen met relaties tusschen empirische gegevens."

Met de subjectivistische opvatting is het verschil, dat deze permutabiliteit niet zomaar door ons aangenomen wordt, maar op grond van onze ervaringen, eventueel ervaringen van andere aard, wordt verwacht. Echter kan men in een uitspraak als: "J'entends par contre que l'on a considéré attentivement les événements particulières envisagées, et toutes les raisons et circonstances particulières, qui pourraient nous pousser à évaluer la probabilité de certains cas plus ou moins grandes que les autres" (uit een brief van de Finetti; 17 Aug. 41) toch ook een aanwijzing in deze richting zien. Het blijkt ook wel, dat het verschil tussen onze opvattingen en die van de Finetti aanzienlijk minder groot is, dan zich oorspronkelijk liet aanzien (vgl. een discussie tussen de Finetti en D.van Dantzig onder de titel: "Punti di Vista", vermoedelijk verschenen in het Italiaansche tijdschrift Statistica in 1941). Het verschil ligt juist meer daarin, dat de Finetti de "objectiviteit" van andere ervaringsgebieden, b.v. de mechanika, als te absoluut ziet. Eén element van het Prinzip des unzureichenden Grundes blijft in onze opvatting behouden, nl. het feit, dat de permutatiegroep weliswaar gekozen wordt op grond van vroegere waarnemingen, maar dat de resultaten dezer waarnemingen in zoverre een negatief karakter hebben, dat ze ons niet in staat stellen uit de verschillende beschouwde eventualiteiten een keuze te doen. We gaan uit van een uitsluitingsnegatie, die een emotioneel karakter draagt, van de aard van:

"Ik zie geen verschil '), het lukt me niet een verschil te vinden, ik geef het maar op een verschil te zoeken."

We citeren hier n.a.v. het begrip uitsluitingsnegatie een passage uit: G.MANNOURY, Die signifischen Grundlagen der Mathematik, Erkenntnis 4 (1934) pag.332:

"...zweitens treten in der lebenden Sprache beim Gebrauch von Negationspartikeln emotionelle Bedeutungselemente in der Vordergrund, die wir einen Augenblick näher in Betracht ziehen wollen, dabei auf die Unterscheidung von Opposition und Kontradiktion (Gegensatz und Widerspruch) achtend.

Beim Gegensatz nämlich (nicht grosz, nicht erlaubt, nicht schmutzig)

') Bedoeld is een verschil, waarvan een "invloed" op de eventuele gebeurtenis verwacht wordt; de elementen der collectie zullen in het algemeen wel van elkaar onderscheiden zijn.

treten zwei, durch den Sprachgebrauch der Disjunktion miteinander verbundene, mehr oder weniger bestimmte, hauptsächlich indikative Bedeutungselemente auf (grosz oder klein, erlaubt oder verboten, schmutzig oder sauber), und der affektive (bzw. volitionelle) Wert der in negativer Form zum Ausdruck gebrachten Sprachakte ist von den korrespondierenden in positiver Form eingekleideten oft nur wenig verschieden, weil das Gegenstück der Disjunktion (klein, verboten, sauber) in beiden Fällen im Zentrum der Aufmerksamkeit steht. Bei der Figur des (nicht formalen) Widerspruchs dagegen ("das ist unmöglich","das besteht nicht", "es ist nichts vorgefallen", usw.) tritt entweder keine bestimmte Disjunktion auf, oder fällt doch wenigstens die Hauptaufmerksamkeit nicht auf das Gegenstück. Es treten dabei deutlich wahrnehmbare emotionelle Bedeutungselemente in der Vordergrund, die den Charakter einer Hemmung oder Abweisung tragen: man wehrt sich gegen eine bestimmte Vorstellung ("repassives Element"). Weil wir, wie schon bemerkt, den auch in der Verkehrssprache vorkommenden formalen Widerspruch (oder: Selbstwiderspruch), vorläufig auszer Betracht lassen wollen, sei die letztumschriebene Negationsfigur im folgenden als Ausschlieszungs-, die erstere als Wahlnegation bezeichnet und zu gleicher Zeit ein wichtiger formaler Unterschied beider Negationsformen hervorgehoben.

Und zwar dieser, dasz bei der Ausschlieszungsnegation die als "principium tertii exclusi" (Regel vom ausgeschlossenen Dritten) bekannte Formel meistens sehr konsequent befolgt wird, während dies bei der Wahlnegation nicht oder in viel geringerem Masze der Fall ist. Um in einem vorliegenden Falle zu prüfen, ob das p.t.e. befolgt wird oder nicht, ist es meistens das einfachste Verfahren, die doppelte Negation anzuwenden und zu untersuchen, ob diese (wie aus dem p.t.e. auf formaler Weise abzuleiten ist) mit der ursprünglichen Bejahung als gleichbedeutend empfunden wird oder nicht. Lassen wir die viele Zwischen- und Zweifelsfälle auszer acht, so können wir sagen, dasz in den äuszersten Fällen der Sprachgebrauch sich nach folgendem Schema richtet:

a) verdoppelte Wahlnegation = Bejahung;
b) Ausschlieszung der Wahlnegation = Bejahung oder "tertium";
c) Wahlnegation der Ausschlieszung: kommt nicht vor;
d) verdoppelte Aausschlieszungsnegation = Bejahung.

Beispiele (bezüglich des Gegensatzes Groszstadt-Kleinstadt).

a) "Der Gegensatz von Groszstadt ist Kleinstadt und umgekehrt";
b) "Was keine Kleinstadt ist, kann eine Groszstadt sein, aber auch wohl ganz etwas anderes";
d) "Falls es ausgeschlossen ist, dasz keine Groszstadt gemeint war, so musz eine Groszstadt wirklich gemeint gewesen sein",

wobei wir sofort daran erinnern wollen, dasz dieser formale Unterschied nicht ins Bewusztsein des Sprechenden tritt und selten in aller Konsequenz Anwendung findet. Dasz er nichtsdestoweniger von Grundlegender Bedeutung für die signifische Untersuchung der Mathematischen Denkform ist, rührt daher, dasz sich in unseren Kultursprachen aus der Ausschlieszungsnegation eine ganze Gruppe Ausdrücke und Sprachformen entwickelt hat, welche als die Sprachform der Allgemeinheit angedeutet sein mag, und die mit der Ausschlieszungsnegation durch die Formel "a oder nicht-a = alles" (principium tertii exclusi) und "a und (zu gleicher Zeit) nicht-a = nichts" (principium Kontradiktionis) verbunden ist, wobei die weiteren zu dieser Sprachform gehörigen Begriffe (wie "unendlich", "ewig". "niemals", "gewisz", "Wirklichkeit","Tod", "Stoff", "Ich", "leer" usw.) mehr oder weniger direkt auf diese beiden zurückzuführen sind."

De inschakeling van het formalisme bestaat nu in het omzetten van deze emotionele uitsluitingsnegatie in een affirmatieve bewering van modelkarakter, nl. de permutabiliteit der eventualiteiten.

3) Terminologische transformatie. Met de inschakeling van het formalisme gaat een terminologische transformatie gepaard. De inschakeling geschiedt, zoals we zagen door middel van een bepaalde *) eindige vz,

*) Dat de verzameling in vele toepassingen niet volledig bepaald is, hetgeen zich uit in slechts approximatieve bepaaldheid der fqn is hier van minder belang.

die onderworpen wordt aan een permutatiegroep (groep van (1,1)-transformaties dezer vz in zichzelf); deze groep moet over de vz transitief zijn. Zulk een aan een transitieve permutatiegroep onderworpen eindige vz, welker elementen van bepaalde kenmerken voorzien zijn, noemen we een (eigenlijke) collectie (het geven van een kenmerk is equivalent met het geven van een deelvz). De door ons bedoelde terminologische transformatie bestaat nu daarin, dat eigenschappen van de collectie (zgn. collectieve eigenschappen) terminologisch geformuleerd worden, alsof zij eigenschappen van een enkel element (individuële eigenschappen) waren.

In het bijzonder geldt dit ten aanzien van de eigenschap een collectie te zijn zelve. De eigenschappen, dat een vz 1) door een bepaalden onderzoeker (of groep van onderzoekers) aan een permutabiliteitseis onderworpen wordt en 2) uit n elementen bestaat, zijn typisch collectieve eigenschappen. Zij kunnen alleen in individuële eigenschappen der elementen worden omgezet met behulp van een existentiepostulaat: een element heeft de eigenschap, dat er een vz met de eigenschappen 1) en 2) bestaat, waartoe het element behoort.

De wh-theoretische terminologie bestaat nu juist daarin, dat deze collectieve eigenschap geformuleerd wordt, alsof zij een individuële ware. Men zegt nl. dat het bedoelde element de wh 1/n bezit. In deze uitspraak wordt over de collectie niet meer gesproken. Dat echter aan elke wh-uitspraak een dergelijke collectie ten grondslag ligt is (afgezien van de eindigheidsconditie) in de laatste decenniën door verschillende onderzoekers ingezien, en wel vooral door von Mises ("Kollektiv") en voort o.a. door Kolmogoroff ("wh-veld") en door M.FRÉCHET ("catégorie d'épreuves").

Dat inderdaad ook aan wh-uitspraken uit het dagelijks leven, in zoverre ze een numeriek karakter, dus een model-karakter, hebben, zulk een collectie ten grondslag ligt, illustreren we met een tweetal voorbeelden. Zegt men b.v. dat iemand, die op een bepaald tijdstip van een bepaalde plaats vertrekt 90% kans heeft de trein te halen, t.w. 80% kans, dat de brug gesloten is, in welk geval hij zeker de trein haalt, en 20% kans, dat de brug open is, in welk geval hij nog 50% kans heeft de trein te halen, dan houdt dit in, dat men als model een collectie gekozen heeft, hetzij van gevallen, die zich empirisch hebben voorgedaan, hetzij van fictieve gevallen, van personen die juist zoveel tijd vóór het vertrek van de eerstvolgende trein van de bedoelde plaats vertrokken, die allen even snel lopen, geen ongeluk krijgen onderweg en niet door vrienden worden aangesproken, e.d., en waarvan 20% de brug open vindt enz.enz. Als tweede voorbeeld kiezen we een karakteristiek geval van niet-herhaalbare gebeurtenissen, dat dus geheel ligt in de lijn der subjectivisten,die dit als een tegenvoorbeeld tegen de opvattingen der empiristen en der aanhangers van de fq-theorie zouden willen gebruiken. Indien iemand zegt, dat Hitler op een bepaalde datum in 1943 b.v. 20% kans had, de oorlog te winnen, dan houdt dit in, dat hij de reële oorlogssituatie op die datum beschouwt als een element van een collectie van situaties, die "evenzeer mogelijk" waren, dus in zijn voorstelling aan een permutabiliteitseis onderworpen, en waarvan 20% tot een overwinning van Duitsland gevoerd zouden hebben. Het is duidelijk, dat deze collectie slechts zeer vagelijk in de gedachten van den spreker aanwezig zal zijn, en dat dienovereenkomstig de taxatie van de wh zeer onzeker zal zijn. Vraagt men b.v., verdergaand, naar de kans dat deze taxatie van 20% behoudens b.v. 5% "juist" is, dan houdt dit (afgezien van de definitie van "juistheid", die hier moeilijkheden veroorzaakt) in, dat men een collectie van dergelijke taxaties in gedachten heeft (alweer: vagelijk), b.v. door verschillende historici en statistici opgemaakt, waarvan een bepaalde fractie binnen de bedoelde grenzen ligt. In ieder geval is het wel duidelijk, dat aan dergelijke numerieke waarden voor whn, die niet uit expliciet opgesomde collecties getaxeerd zijn,nauwelijks enige wetenschappelijke betekenis te hechten is. Men zal n.l. slechts zelden de zekerheid hebben, dat:1) de collectie (althans bijna) volledig in aanmerking genomen is, 2) de elementen permutabel zijn, 3) de waarden der frequenties juist geschat zijn. Het belangrijkste bezwaar tegen de subjectivistische theorie is dan ook wel, dat zij dergelijke onzekere en onnauwkeurige waarden tot uitgangspunt neemt. Tenslotte vermelden we een door H.JEFFREYS (Theory of probability, 1939) vermelde tegenwerping van wijlen Jannina Hosiasson (later mevr. Lindenbaum) tegen de definitie van Laplace (p.301). Zijn er twee gelijke dozen, waarvan één één witte en één zwarte bal en de andere één witte en twee zwarte ballen bevat, dan zou men volgens Laplace geneigd zijn de kans, een witte bal te trekken =2/5 aan te nemen. De juiste kans $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$ kan niet verkregen worden als een vijftal gunstige onder een twaalftal gelijkelijk mogelijke gevallen. Toch wordt deze waarde wel uit een model-collectie in onze zin verkregen, b.v. analoog met het boven behandelde voorbeeld van de trein en de brug. Dit is nog op een andere wijze mogelijk, n.l. door de bedoelde trekking te doen volgen door een "dummy"-trekking uit de tweede doos. Men krijgt dan inderdaad twaalf "aequiprobabele" gevallen, waaronder vijf gunstige. Het toevoegen van deze "extra-trekking" is nodig om de permutabiliteit te handhaven. Dit geldt algemeen, wanneer uit verschillende collecties een enkele wordt opgebouwd, in het bijzonder dus bij het gecombineerde additie- en multiplicatietheorema.

Met betrekking tot de topologische transformatie merken we nog op, dat deze via een betekenisverschuiving van het woord "wh" de overgang van het model tot de ("subjectivistische") verwachtingsinterpretatie tot stand brengt, die wèl een eigenschap van een enkel element (met betrekking tot den beoordelaar) inhoudt, en daardoor leidt tot de uitschakeling van het model. Men kan deze betekenisverschuiving vermijden door binnen het formalisme de term "wh" te vermijden, door deze te vervangen door "fq met betrekking tot een bepaalde collectie". De term "wh" ware dan alleen te gebruiken in de subjectivistische interpretatie. De consequentie hiervan is echter, dat er geen wh-rekening, doch alleen een fq-rekening bestaat, daar whn volgens deze interpretatie niet berekenbaar, en zelfs niet meetbaar zijn.

24) Uitschakeling van het formalisme. Bij de uitschakeling van het wh-theoretisch model zijn twee gevallen te onderscheiden. Liggen de in het formalisme voortgebrachte fqn zeer dicht bij 0 of 1, dan stemmen onze verwachtingen hiermee doorgaans overeen, zodat we inderdaad uit het gevonden resultaat een richtlijn tot handelen kunnen trekken. De vraag, welke whn als "dicht bij" 0 of 1 beschouwd worden hangt geheel af van het doel van het onderzoek en van de emotionele structuur van de beoordelende persoon. We bedoelen hier uitsluitend whn, die zó dicht bij 0 of 1 gelegen zijn, dat de mogelijkheid van de eventualiteit resp. haar alternatief, ook wanneer men zich van deze mogelijkheid bewust is, bij de uitschakeling in het geheel niet in aanmerking genomen wordt. In het geval van een aantal vrijwel gelijke fqn van de eventualiteiten van een kategorisch systeem blijven ook onze verwachtingen in de regel zeer onbepaald. Dit is in dit geval als uitschakeling van het formalisme te beschouwen, daar immers het formalisme met deze onbepaaldheid van de verwachtingen overeenstemt. Een richtlijn is dan nauwelijks mogelijk, het is vrijwel om het even welke keuze men doet. De handeling zal dan doorgaans door een sterk gevoel van onzekerheid begeleid worden, en men zal veelal trachten, het doen van een bepaalde keuze zoveel mogelijk te vermijden of uit te stellen, of althans uit het bewustzijn te verdringen (niet-handelen is ook een wijze van handelen, niet-beslissen is ook beslissen). We beschouwen dit echter als een "oneigenlijke" uitschakeling, en laten deze verder buiten beschouwing.

De uitschakeling kan echter niet op zo directe wijze geschieden, als de fqn, die in het formalisme voortgebracht worden b.v. 0,3;0,6; 0,7 of 0,8 zijn, dus niet zeer dicht bij 0 of 1 liggen. Het lukt nl. niet goed aan dergelijke fqn merkbaar verschillende verwachtingsgraden te koppelen. Uitschakeling vindt nu slechts plaats, als het gelukt, om met behulp van de stelling van Bernoulli-Poisson de fqn terug te brengen tot fqn in de buurt van 0 of 1, b.v. als men bij een grote collectie van gelijksoortige handelingen als richtlijn kiest, om deze handelingen uit te voeren, indien het fq minstens 0,8 blijkt te zijn en anders niet. Een dergelijk geval heeft men b.v. als er een wettelijke bepaling gemaakt wordt, dat de wh dat een verzekeringsmaatschappij van een bepaalde soort haar reserves zal overschrijden, hoogstens 0,002 per jaar mag zijn. Dit houdt dan, volgens de stelling van Bernoulli-Poisson in, dat er een wh zeer nabij 1 is en dat men dienovereenkomstig de stellige verwachting koestert, dat zulk een maatschappij gemiddeld hoogstens één maal in de 500 jaar een deficit zal vertonen. Het houdt echter ook in (en dat wordt dikwijls over het hoofd gezien),dat dit onder 250 gelijksoortige maatschappijen gemiddeld hoogstens één maal in de 2 jaar zal voorkomen.

Iets lastiger wordt de uitschakeling door terugbrengen van fqn $\not\approx$ 0;1 tot fqn in de buurt van 0 of 1 als men niet te maken heeft met een grote collectie gelijksoortige handelingen, maar als men een keuze uit een groot aantal mogelijke handelingen moet doen, b.v. als men bepalen wil, hoeveel geld men in een onderneming wil steken, of hoe men een bepaalde som zal beleggen. Hoe een individu in een dergelijk geval zal handelen, hangt nl. in sterke mate van zijn emoties af. "Goklust" en "angst" (als 2 uitersten) kunnen b.v. leiden tot handelingen, die niet in overeenstemming zijn met de mathematische verwachting. Een goklustige zal een kleine kans op een grote winst hoger waarderen dan de mathematische verwachting, terwijl een angstige een kleine kans op een groot verlies ernstiger rekent dan met de mathematische verwachting overeenstemt. In deze gevallen worden de handelingen dus sterker beïnvloed door de positieve of negatieve winst-eventualiteiten dan door de whn daarvan. Wil men zich van deze emotionele overwegingen vrij maken, dan moet men gevallen beschouwen, waarin deze emoties geen noemenswaardige invloed hebben, doordat:

1. het onderzoek niet op handelingen van een enkel individu maar op die van een groep betrekking heeft (commissie, vereniging, N.V., staat)
2. de grootste verliezen, die kunnen voorkomen, gedragen kunnen worden zonder ernstig nadeel. ¹)

In dit geval heeft het zin een op het formalisme gebaseerd advies uit te brengen. Waar komt een dergelijk advies nu op neer? In eenvoudige gevallen althans vindt de uitschakeling nu net zo plaats als in het vorige geval: een alternatief met een fq $\not\approx$ 0 of 1 wordt vervangen door de ermee overeenkomende Bernoulliverdeling, en dan wordt met een zeer dicht bij 0 of 1 gelegen wh voorspeld (b.v. behoudens een kans van 1‰), dat het aantal successen tussen 2 gegeven grenzen zal liggen. Dit heeft echter slechts zin, als men b.v. de te beleggen geldsom in een voldoend groot aantal porties kan verdelen en deze op verschillende wijzen kan beleggen, namelijk in de verhouding der in het formalisme voorkomende whn.

We komen daarom in dit verband nog eens terug op de vraag, òf, en zo ja welke, betekenis te hechten is aan de toekenning van een wh aan één enkele gebeurtenis. De verdedigers van de empiristische fq-theorieën ontkennen, dat dit enige zin heeft, immers, zeggen zij, een wh heeft altijd betrekking op een uitgebreide collectie; gaat men over tot deelcollecties, dan worden de whn des te onbepaalder, naarmate de deelcollecties kleiner worden. De subjectivisten daarentegen zijn van mening, dat een wh nooit anders dan aan één enkele gebeurtenis wordt toegekend, dat dus b.v. bij een reeks worpen met een munt bij iedere worp afzonderlijk beoordeeld wordt, hoe groot de wh is, dat bij die worp kruis zal vallen en dat dit niet (althans niet rechtstreeks en niet uitsluitend) met de waargenomen fqn te maken heeft. Deze tegenstelling wordt eerst voor oplossing vatbaar door de tweeledige betekenis van de term "wh", nl. als fq (in het model) en als graad van verwachtingssterkte (bij de uitschakeling) te onderscheiden. We zagen reeds in het vorige punt, dat ook binnen een model de mogelijkheid aanwezig is, aan één enkele gebeurtenis een "wh" toe te schrijven, maar dat daarmee geen eigenschap van de gebeurtenis wordt uitgedrukt, doch alleen een eigenschap van de (min of meer) bepaalde collectie van denkbeeldige eventualiteiten, die de beoordelaar in gedachten heeft, die alleen terminologisch als een eigenschap der afzonderlijke gebeurtenis geformuleerd wordt. Vandaar dat het, in het algemeen gesproken, niet mogelijk is de wh (preciezer: het fq) van één enkele gebeurtenis uit te schakelen. Ook de "uitschakeling" door weddenschappen (de Finetti trachtte deze als inschakeling te gebruiken) kan niet als zodanig gelden: als men een fq van b.v. 0,6 in een handeling omzet door hierop

¹) Een met 2. overeenkomende voorwaarde met betrekking tot zeer grote winsten is doorgaans van minder betekenis.

een weddenschap 6 tegen 4 af te sluiten, dan krijgt dit pas wetenschappelijke betekenis (eigenlijk: doelmatigheid), als men dit als algemene methode doet; voor één enkel geval heeft het geen andere betekenis dan een pure gok.

Anderzijds geschiedt de uitschakeling steeds door een groot aantal gebeurtenissen tot één enkele samengestelde gebeurtenis met een fq ≈ 0 of ≈ 1 samen te vatten, b.v. volgens Bernoulli, en dan komt men wèl tot uitschakeling van één enkele (zij het zeer samengestelde) gebeurtenis.

Het resultaat van onze beschouwingen komt dus daarop neer, dat:

1) een formalisme t.a.v. wh-uitspraken in de zin van de Finetti niet uitgeschakeld kan worden, tenzij de whn dicht bij 0 of 1 liggen; d.w.z., dat het verschil tussen de uitspraken: "bij deze worp zal een 6 vallen met de wh 0,14" en "idem met een wh 0,18" niet anders dan met behulp van een conventionele richtlijn of van frequentie-uitspraken in voorspellingen, handelingen of adviezen kan worden omgezet. Anderzijds echter is dit wel mogelijk bij whn, die dicht bij 0 of 1 liggen, echter met dien verstande, dat de mate, waarin deze whn van 0 of 1 verschillen mogen hetzij conventioneel is, hetzij afhankelijk van de emoties van degene, die handelen moet.

2) T.a.v. de objectivisten hebben we gezien, dat het uitschakelen van hun formalisme daardoor plaats vindt, dat zij frequentie-uitspraken omzetten in een vlak bij 0 of 1 gelegen frequentie-uitspraak over waarneembare fqn. Deze frequentie-uitspraak wordt vervolgens geïnterpreteerd in de zin van de Finetti als een wh-uitspraak over één enkele eventualiteit (die een groot aantal van kenmerken voorziene elementaire eventualiteiten kan omvatten en dan als element van een steekproefcollectie beschouwd wordt) en dienovereenkomstig in een handeling of advies omgezet.

Ter demonstratie: de frequentie-uitspraak:

"deze vaas bevat 2 witte en 3 zwarte ballen", wordt omgezet in:

"onder alle mogelijke series van 100 trekkingen met teruglegging zijn er minstens 99%, waarbij het aantal ballen tussen 25 en 55 ligt".

Deze weer in:

"het trekken van een tussen 25 en 55 liggend aantal ballen bij 100 onafhankelijke trekkingen komt op hetzelfde neer als het trekken in één trekking van één witte bal uit een vaas met minstens 99% witte ballen".

en deze wordt omgezet in de verwachtingsuitspraak:

"het is even zeker, dat bij de serie van 100 trekkingen een fq tussen 0,25 en 0,55 zal optreden, als, dat bij deze éne trekking een witte bal getrokken zal worden uit een vaas met minstens 99% witte ballen".

"Zijt gij bereid dit risico te nemen, handel dan als volgt..."

Een ander voorbeeld wordt geleverd door de frequentie-uitspraak:

"Gedurende de laatste n jaren was het fq der mannen van 45 jaar, die binnen een jaar overleden = ε_1, (b.v. 0,003)". Terminologisch getransformeerd:

"de sterftekans van een man van 45 jaar (binnen een jaar) is ε_1."

De uitspraak: "de kans, dat deze bepaalde man van 45 jaar binnen een jaar zal sterven, is ε_2 (b.v. 0,0027)" laat zich alleen conventioneel (b.v. als bereidheid om ε_2 tegen $1-\varepsilon_2$ te wedden, dat dit gebeuren zal, omdat men gewoon is op deze wijze te wedden) uitschakelen; emotioneel (als graad van verwachtingssterkte) is dat met deze precisie niet mogelijk, maar hoogstens met ε_2 =" zeer klein". Berekent men echter op grond van een sterftestatistiek, met behulp van de daaruit afgelezen variabiliteit van de sterftekansen en de daaruit voortvloeiende verdelingsfunctie (waarin men bepaalde parameters als onafhankelijk van de tijd aanneemt), de wh ε_3, dat de (samengestelde) eventualiteit, bestaande uit het overlijden binnen één bepaald jaar van alle mannen van 45 jaar (in een bepaalde stad b.v.), zal optreden, dan blijkt deze zo buitensporig klein, dat uitschakeling eenvoudig is; geen verzekeringsmaatschappij zal met deze mogelijkheid rekening houden.

De uitschakeling van het formalistisch systeem bestaat in de omzetting van een wh-theoretische uitspraak omtrent een zeer dicht bij 1 gelegen fq in een zeer sterke verwachting met betrekking tot het gebeuren ener daarmede overeenkomende eventualiteit.

25) Keuze van het model en permutabiliteitsvoorwaarden.

Tenslotte willen we nog nagaan, hoe in bepaalde gevallen de keuze van een bepaald model tot stand komt in verband met de op bl. 32 en 33 genoemde transitieve permutatiegroep en op welke overwegingen deze keuze berust.

I) Eén enkele trekking uit een vaas met N ballen, waarbij aan het trekken van alle ballen gelijke whn worden toegekend. Dit model zal gebruikt worden, indien aan de volgende permutabiliteitsvoorwaarde is voldaan: als, uitgaande van een bepaalde begintoestand de bal A getrokken wordt, dan zou, indien vooraf een permutatie op de ballen was toegepast, waarbij bal B in bal A was overgegaan, bal B getrokken zijn. Deze eis legt dus aan de trekkingsmethode voorwaarden op, die voor één enkele trekking geen betekenis hebben, d.w.z. zij eist het bestaan van een collectieve eigenschap ener collectie van trekkingen, niet van individuele eigenschappen der afzonderlijke trekkingen. Aan deze voorwaarden zal b.v. niet voldaan zijn, indien de proefpersoon een bepaalde bal tracht te trekken en deze op het gevoel van de anderen kan onderscheiden. De permutatiegroep, waaraan we de ballen onderworpen denken, moet, daar aan alle ballen gelijke whn worden toegekend, transitief (niet noodzakelijk symmetrisch) zijn. Hierin bestaat dus de inschakeling van het model, dat we als volgt kunnen regulariseren: de ballen liggen boven elkaar en men trekt de bovenste. De permutatiegroep behoeft dan slechts de cyclische te zijn. De uitschakeling van dit model bestaat daarin, dat men, wanneer de ballen van kenmerken voorzien zijn, de mogelijkheid verwaarloost, dat een bal met een kenmerk met uiterst klein fq getrokken zal worden, waarbij men een conventionele grens hiervoor (b.v. 1/1.000.000) kan aannemen. Wordt dan toch een kenmerk met fq < 1/1.000.000 getroffen, dan zal men wijziging van het model gaan overwegen. Een ingewikkelder model is ook noodzakelijk, als men met meer dan één trekking te maken heeft. Dit laatste geval zullen we nu behandelen.

II) n onafhankelijke trekkingen met teruglegging ("steekproef") uit een vaas met N (permutabele) ballen, waaraan bij iedere trekking onderling gelijke whn worden toegekend. De empirisch vermoede invariantievoorwaarde neemt nu, zoals in verband met model I) blijkt, als permutabiliteitsvoorwaarde de vorm aan, dat vooraf en tussen ieder tweetal trekkingen de ballen aan een transitieve permutatiegroep worden onderworpen, hetgeen weer voorwaarden aan de trekkingsmethode oplegt. Hieraan is b.v. niet voldaan, indien men steeds dezelfde bal trekt (zonder deze bij het terugleggen los te laten) of indien men na elke trekking de bal kiest, die onder de vorige lag, zodat deze vorige nu zeker niet getrokken kan worden. Ook bij niet voldoende schudden is aan de voorwaarden niet voldaan. Is dit echter, naar men vermoedt, wel het geval, dan kan men het volgende geregulariseerde model gebruiken: men denkt zich de ballen genummerd en neemt een andere vaas met N^n ballen, waarop de N^n mogelijke trekkingsreeksen als kenmerken zijn aangebracht en men denkt zich in plaats van een serie van n trekkingen uit de eerste vaas, één bal uit deze tweede getrokken volgens model I) (cyclische permutatie in deze vaas, dus van alle mogelijke trekkingsreeksen, komen overeen met willekeurige permutaties tussen 2 trekkingen in de oorspronkelijke vaas). Dit zelfde model zal men b.v. ook gebruiken bij een serie worpen met een als zuiver aangenomen munt of dobbelsteen.

Algemener zal men doorgaans de N ballen niet individueel blijven onderscheiden, maar alleen een klein aantal k verschillende kenmerken, die tezamen een kategorisch systeem vormen. Is N het aantal ballen, dat het i^e kenmerk draagt, dan is $p_i = \frac{N_i}{N}$ de wh, bij één trekking het i^e kenmerk te trekken.

Een voorbeeld levert de erfelijkheidstheorie van G.MENDEL. Heeft een biologisch individu gelijke whn, om van elk der ouders de complementaire eigenschappen A of a te verwerven (dus symbolisch $\frac{A+a}{2}$), en zijn deze whn onafhankelijk van elkaar, dan zijn de whn, dat het genotypisch (d.w.z. als eigenschap van de kiemcel) de kenmerken AA, Aa=aA of aa verwerft resp. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$ (dus symbolisch: $\left\{\frac{A+a}{2}\right\}^2 = \frac{1}{4}AA+\frac{1}{2}Aa+\frac{1}{4}aa$).

Is het kenmerk A dominant, dan leiden AA en Aa tot hetzelfde phaenotype (d.w.z. dezelfde uiterlijke verschijningsvorm) A, en aa tot het phaenotype a. Voor het phaenotype is dus de kans op A: $\frac{3}{4}$ en die op a: $\frac{1}{4}$. Dit volgt reeds uit model I , maar is niet uitschakelbaar. We kiezen nu als uitgangscollectie alle $N=M_1M_2$ mogelijke bevruchtingen, die uit M_1 mannelijke en M_2 vrouwelijke kiemcellen zouden kunnen tot stand komen, en de werkelijk tot stand gekomen bevruchtingen als een steekproef hieruit. Weliswaar is dit een steekproef "zonder teruglegging", maar deze afwijking van de onderstelling is bij de hier optredende zeer grote N te verwaarlozen. De dan uit de stelling van Bernoulli volgende uitspraak, dat b.v. van 4800 (uit een zuivere lijn door kruisbestuiving) gekweekte individuen het aantal met phaenotype a met een wh $\geq 0,99997$ hoogstens 120 ($=4\sigma$) van 1200 zal afwijken, kan wegens de exorbitant grote wh volgens model II als "zekerheid" uitgeschakeld worden.

De polynomiale, in het bijzonder (bij een alternatief) de binomiale verdeling (verdeling van Bernoulli), waarvan het bovenstaande een voorbeeld is, ontstaat, wanneer men uitsluitend kenmerken beschouwt, die niet van de volgorde der trekkingsresultaten afhangen (in tegenstelling tot b.v. het probleem van de "run of events" van de Moivre). Dit houdt in, dat ook de afzonderlijke trekkingen, onafhankelijk van de trekkingsresultaten, aan een permutabiliteitseis worden onderworpen. Hierdoor gaan de oorspronkelijke geordende trekkingsreeksen (korter. reeksen) over in ongeordende vzn ("gepermuteerde series"), en wel telkens

$d_{n_1,\ldots,n_k} = \dfrac{(n_1+\ldots+n_k)!}{n_1!\ldots n_k!}$ in eenzelfde vz.

De uitschakeling vindt dan plaats met behulp van de stelling van Bernoulli, al dan niet na voorafgaande verdergaande regularisering, bestaande in overgang tot een infiniet model (b.v. normale verdeling, verdeling van Poisson e.d.), als bij model I. Hierbij treedt echter één moeilijkheid op: blijft men als kenmerken van de ballen in de tweede vaas (dus die van de steekproeven) hun verschillende samenstellingen beschouwen, dan krijgt voor $n\to\infty$ elke samenstelling een tot nul naderend fq, zodat dus voor voldoend grote n iedere steekproef verworpen zou moeten worden. Men verenigt daarom een groot aantal verschillende samenstellingen tot één enkel kenmerk, welks fq niet naar nul gaat. En wel kiest men als kategorisch systeem de verschillende waarden (precieser: kleine intervallen, waarin deze gelegen zijn), die de op een bepaalde wijze gemeten "afstand" van de waargenomen samenstelling tot de samenstelling der uitgangscollectie kan aannemen.

Dit gebeurt met het χ^2-kriterium voor "Goodness of fit" van KARL PEARSON (1900; de verdelingsfunctie voor χ^2 was reeds in 1876 door F.R.HELMERT ingevoerd, maar daarna weer vergeten). Is n de uitgebreidheid der steekproef, en zijn p_i resp. f_i de fqn der K kenmerken in modelcollectie en steekproef, dan wordt χ^2 gedefinieerd door:

$$\chi^2 = n\sum_1^k \frac{(f_i - p_i)^2}{p_i}$$

Practische toepassing vindt veeleer de uitdrukking:

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum \frac{n_i^2}{np_i} - 1 \quad ; \quad n_i = nf_i \ .$$

χ^2 heeft het karakter van een gegeneraliseerde "afstand": $\chi^2 > 0$, tenzij $n_i = np_i$ is. De functie hangt echter niet symmetrisch van collectie en steekproef af.

Men kan nu de verdelingsfunctie van χ^2 over de collectie van alle (permutabele) steekproeven van de uitgebreidheid n in limes voor $n\to\infty$ bepalen, en vindt dan (zoals elders aangetoond zal worden):

$$P = P[\chi^2 \geq \chi_0^2] = \Gamma(\tfrac{\nu}{2})^{-1}\int_{\frac{1}{2}\chi_0^2}^{\infty} e^{-t}\, t^{\frac{\nu-2}{2}}\, dt, \text{ waarin } \nu = k-1 \text{ is,}$$

d.w.z. $\frac{1}{2}\chi^2$ bezit (voor $n\to\infty$) de z.g. "onvolledige $\Gamma(\frac{\nu}{2})$ - verdeling". Meestal schrijft men:

$$dP = -2^{-\frac{\nu}{2}+1}\,\Gamma(\tfrac{\nu}{2})^{-1}\, e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\,\chi^{\nu-1}d\chi .$$

Het getal $\nu = k-1$ heet het <u>aantal graden van vrijheid</u>, daar de k onbekende frequenties np_i gebonden zijn aan één lineaire betrekking: $\sum np_i = n$ met aan de waarneming ontleende n.

KARL PEARSON heeft de onvolledige Γ-functie (d.i. $P.\Gamma(\frac{\nu}{2})$ als functie van $\frac{1}{2}\chi^2$ en ν) getabelleerd (Tables of the incomplete Gamma-function), ELDERTON P als functie van χ^2 en ν (opgenomen in K.Pearson, Tables for Statisticians and Biometricians I, 1914, 3rd ed. 1930). Voor andere tabellenlitteratuur zie M.G.KENDALL, The advanced theory of Statistics I, 1943 (2nd ed. 1945) p.293. Daarin is ook een (χ^2,ν)-diagram voor curven P = constant opgenomen. Beter is een in het nieuwe Nederlandse tijdschrift Statistica (1946) opgenomen (χ^2,P)-diagram van curven ν = constant.

We vermelden nog de vraag, waarom de "afstand" van collectie en steekproef niet door een andere positief definiete quadratische functie der getallen $(f_i - p_i)$ gemeten wordt, b.v. $\sum (f_i - p_i)^2$, maar juist door χ^2. Deze vraag is door von Mises opgeworpen (Whr. p.310), die $\chi^2 = \sum \lambda_i (f_i - p_i)^2$ kiest met onbepaalde coëfficienten λ_i en daarvan gemiddelde en spreiding (over de collectie van alle steekproeven) bepaalt. De reden, waarom de "gewichten" λ_i juist $:: \frac{1}{p_i}$ gekozen worden, heeft von Mises (die Pearson's gehele probleemstelling niet begrepen heeft) niet bemerkt, o.a. doordat hij alleen de twee eerste momenten, maar niet de verdelingsfunctie van de verdeling van χ^2 berekend heeft: voor zover bekend bezit alleen χ^2 een verdelingsfunctie, die (approximatief voor grote n) <u>onafhankelijk van de waarden der p_i is</u>. Zo kan men voor k = 2 niet de kans, dat $|f - p| \leq \lambda\sqrt{n}$ is, maar wel $P\left[|f - p| \leq \lambda\sqrt{pqn}\right]$ (approximatief) door een <u>van p onafhankelijke</u> functie van λ (nl. $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\lambda e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$) voorstellen.

We zouden ook kunnen beschouwen de uitdrukking:

$$\chi'^2 = n \sum \frac{(f_i - p_i)^2}{f_i}$$, een kwadratische vorm in de onbekende p_i.

Een bezwaar is dan, dat ook deze functie niet symmetrisch van f_i en p_i afhangt, terwijl bovendien de verdelingsfunctie van de gewone χ^2 gemakkelijker te bepalen is. Ook zouden de f's in de noemer wel eens niet allen = 0 kunnen zijn, wat echter geen onoverkomelijke moeilijkheid zou opleveren (correctietermen).

Om nu tot uitschakeling over te gaan, wordt het kategorisch systeem van alle mogelijke χ^2 (resp. χ'^2)-waarden (-intervallen) vervangen door een <u>alternatief</u>: $\chi^2 < \chi_0^2$, resp. $\chi^2 \geq \chi_0^2$, waarbij χ_0 zo groot gekozen wordt, dat $P\left[\chi^2 \geq \chi_0^2\right] = \varepsilon$ van zo kleine (doorgaans conventioneel gekozen) waarde is, dat de mogelijkheid van realisering dezer eventualiteit niet in aanmerking genomen wordt. (Uitschakeling volgens model I). Indien dus toch $\chi^2 \geq \chi_0^2$ gevonden wordt, zal tot modelwijziging worden overgegaan. In de practijk berekent men doorgaans bij waargenomen χ_1^2 $P\left[\chi^2 \geq \chi_1^2\right] = \varepsilon_1$ en verwerpt het model indien $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ is. We vestigen er echter met nadruk de aandacht op, dat deze uitschakeling met het

χ^2-kriterium, toegepast op $P \leq \varepsilon$ (of $\chi^2 \geq \chi_0^2$) alleen correct is, indien de waarden der p_i vooraf bekend zijn.

III) Onderstellen we dus, dat tot modelwijziging wordt overgegaan, en wel in die zin, dat de permutabiliteit der afzonderlijke trekkingen (dus hun onafhankelijkheid) gehandhaafd wordt, maar dat de permutabiliteit der ballen bij één enkele trekking wordt prijsgegeven. Dit houdt dus in, dat de collectie van ballen vervangen wordt door een collectie van mogelijke trekkingsresultaten (bij één trekking), waarbij elke bal met een zeker aantal elementen dezer collectie overeenkomt (b.v bal 1 kan op a_1 manieren, bal 2 op a_2 manieren, enz, verkregen worden). Dit wordt uitgedrukt door te zeggen, dat de kansen, dat de afzonderlijke ballen bij één trekking getrokken worden weliswaar constant, maar niet alle = 1/N zijn. Worden omtrent deze whn bepaalde onderstellingen gemaakt, dan geschiedt de behandeling als in het vorige geval. De situatie is echter anders, indien zulke onderstellingen niet vooraf gemaakt worden, maar juist uit de resultaten der steekproef afgelezen moeten worden. De eenvoudigste methode is dan wel, om de collectie van waarnemingsresultaten zelf als uitgangscollectie voor verwachtingen in de toekomst te nemen.

Men heeft b.v. waargenomen, dat onder alle mannen, die, gedurende een bepaalde periode, de leeftijd van x jaar hebben bereikt, (m_x in aantal) er m_{x+1} waren, die ook hun (x+1)e verjaardag bereikten en noemt

$$q_x = \frac{m_{x+1} - m_x}{m_x}$$

de sterftekans voor mannen van x jaar (in hun (x+1)e jaar).

Voor premieberekening van een levensverzekering gaat men niet alleen van de onderstelling uit, dat dit fq gedurende een aantal jaren constant blijft, maar ook, dat dit voor de verzekerden bij een bepaalde maatschappij dezelfde waarde heeft, althans zo deze bij geneeskundig onderzoek goedgekeurd zijn. Hoogstens wordt nog rekening gehouden met het feit, dat de verzekerden bij maatschappijen van een bepaald type in het algemeen een geselecteerde bevolkingsgroep vormen, welker sterfte van die der gehele bevolking afwijkt. Men kiest daarom veelal een sterftetafel getrokken uit de waarnemingen van een aantal verzekeringsmaatschappijen gezamenlijk. Met het feit, dat de verzekerden bij één enkele maatschappij als een steekproef uit de als collectie beschouwde vz van alle verzekerden (met gegeven waarneembare gezondheidstoestand) moet worden beschouwd en dus aan een steekproefafwijking onderworpen is, wordt echter bij de premieberekening geen rekening gehouden (de hierbij behorende steekproefafwijking wordt doorgaans door winst- en kostenmarges wel opgevangen). Op grond hiervan heeft men vaak, ten onrechte, betoogd, dat de levensverzekeringswiskunde niet op de whr gebaseerd behoeft te worden.

Wil men echter wel rekening houden met de steekproefafwijking, dan dient men het risico en de risicoreserve te berekenen. De beschouwingen die men dan opstelt (of in het algemeen als men wh-theoretische beschouwingen baseert op een wh-veld, dat, zonder wijziging, aan statistisch materiaal is ontleend), berusten op het volgens model:

Zij gegeven een collectie ballen (vaas) met kenmerken A_i met onbekende fqn p_i. De gedane waarnemingen komen overeen met trekkingen (met teruglegging) uit deze vaas. Iedere keer als een bal met kenmerk A_i getrokken wordt, wordt een andere bal met overeenkomstig kenmerk in een tweede vaas gedaan. De vulling van deze tweede vaas komt dus precies overeen met het gegeven waarnemingsmateriaal. Het model III bestaat nu daarin, dat verdere trekkingen niet uit de oorspronkelijke, maar uit deze tweede vaas gedaan worden, d.w.z. de tweede vaas als model voor de eerste gebruikt wordt. De onbekende fqn p_i worden dus eenvoudig door de waargenomen fqn f_i vervangen.

Wat de uitschakeling betreft komt dat dus hierop neer, dat men veronderstelt, dat de waarnemingen van de steekproef permutabel zijn, d.w.z. dat de verschillen tussen de omstandigheden, waaronder de waarnemingen hebben plaatsgevonden van te verwaarlozen invloed zijn (in ons voorbeeld dus van de mannen van x jaar, wat dus neerkomt op het verwaarlozen van de verschillen in de omstandigheden, die tot het overlijden van bepaalde van deze mannen leiden en vroeger geleid hebben). Het risico wordt meestal weer onder verwaarlozing van 1/n berekend.

De uitschakeling van een op deze wijze verkregen model kan met betrekking tot een tweede waarnemingsreeks met behulp van het χ^2-kriterium als onder voorbeeld II plaatsvinden.

Men kan nu het χ^2-kriterium op 2 manieren gebruiken. Gewoonlijk wordt het onkritische standpunt ingenomen, een model ("hypothese") niet te verwerpen, tenzij P zeer klein is. Dit berust op de overweging, dat men slechts een kleine kans wil lopen, de hypothese ten onrechte te verwerpen. In de (k-1)dimensionale p_i-ruimte stelt $\{n_i/n\}$ het middelpunt voor van oppervlakken χ^2 = constant en men verwerpt dan dus alleen waarden $\{p_i\}$ buiten een groot oppervlak $\chi^2 = \chi_\varepsilon^2$, met grote χ_ε^2. De voorwaarde, waaronder de hypothese dus niet als weerlegd wordt beschouwd is dus $P \geqq \varepsilon$. Tegenover dit zwakke kriterium staat de kritische methode, die van de gedachte uitgaat, dat men slechts een kleine kans wil lopen de hypothese ten onrechte te bevestigen, waaraan voldaan is, als $P \geqq 1 - \varepsilon$ is, dus $1 - P \leqq \varepsilon$, d.w.z. de kans, dat een kleinere "afstand" tussen model en steekproef zal optreden dan de waargenomene, klein is. Men acht dan dus de hypothese slechts bevestigd, als zij binnen een oppervlak $\chi^2 = \chi_0^2$ met kleine χ_0^2 om het punt $\{n_i/n\}$ ligt, zodat in dit geval de gevonden χ^2 klein moet zijn, terwijl hij in het eerste geval groot mag zijn.

Op grond van het uitschakelingsprincipe moet gezegd worden, dat waarden als P = 0,5 of 0,2 e.d., die gewoonlijk geacht worden een "bevredigende" overeenstemming tussen "theorie en practijk" (beter: model en waarneming) te geven, feitelijk noch een weerlegging noch een bevestiging van de hypothese inhouden. Allerlei andere waarden van p_i (de hypothese) zouden even goed mogelijk zijn. Men kan dan verder slechts betrouwbare conclusies trekken, voor zover deze onafhankelijk zijn van de speciale keuze der p_i uit dit gebied van mogelijke keuzen. Men dient dan dus, als men niet door modelwijziging een betere overeenstemming tracht te verkrijgen, de éénduidige bepaaldheid van het model op te geven in die zin, dat alle modellen, die niet minder goed overeenstemmen gelijkelijk in aanmerking genomen worden.

IV. In vele gevallen is het derde model door te grote vereenvoudiging te ver van de ervaring verwijderd. Doorgaans zal nl. het gegeven waarnemingsmateriaal zèlf als een steekproef Σ_n uit een zeer grote collectie Γ beschouwd moeten worden, waaruit ook verder getrokken wordt. Onderstellen we Γ oneigenlijk en van onveranderlijke samenstelling, dan wordt Σ_n dus zelf als element van de collectie Γ^n van alle mogelijke steekproeven van de uitgebreidheid n beschouwd. Behalve de vroegere treedt dus thans bij de inschakeling de permutabiliteit van alle steekproeven inclusief de gegevene ("het had "even goed" een andere "kunnen" zijn".) Het model Γ moet nu gepreciseerd worden, doordat zijn fqn p_i onbekend zijn

Voor de oplossing van dit probleem (een inschakelingsprobleem) zijn drie methoden gegeven: 1.de theorie a posteriori volgens BAYES, 2. de theorie der "maximum likelihood" van R.A.FISHER, en 3. de theorie der betrouwbaarheidsgrenzen ("confidence intervals") van E.S.PEARSON, niet te verwarren met de "fiducial intervals" van R.A.Fisher's theorie van "fiducial inference".

De theorie der whn a posteriori is reeds uitvoerig besproken. Zij kan worden samengevat in het Model van Bayes:

De collectie Γ (waaruit Σ_n als een Bernoulliaanse steekproef beschouwd wordt, dus als een deelcollectie met 1º permutabiliteit van de afzonderlijke trekkingen - waarnemingen -, 2º permutabiliteit van alle steekrpoeven) wordt zèlf als een element van een collectie Λ van collecties beschouwd, die verschillende samenstellingen hebben; deze verschillende samenstellingen zijn de kenmerken der elementen Γ van Λ. Over de samenstelling van Λ, dus de verdeling der verschillende samenstellingen der Γ over Λ, wordt een a priori-onderstelling gemaakt (b.v. de hypothese van Bayes). Daaruit volgt met behulp van de stelling van Bayes een wh-resultaat ("a posteriori") voor de samenstelling van Γ, dat op de bekende manier uitgeschakeld wordt.

We zagen reeds, dat dit model het bezwaar heeft, dat de a priori-whn (dus de verdeling in Λ) doorgaans op grond van een indifferentie-principe gekozen worden, zonder statistische (dus empirische) basis, dus ook zonder voorafgaande expliciete overweging van de bijbehorende permutabiliteitseis, terwijl deze samenstelling onafhankelijk is van de "voorgeschiedenis" van het tot stand komen der collectie Γ.

De theorie der "maximum likelihood", door Fisher in 1922 opgesteld om de theorie van Bayes te vervangen, voert geen whn a priori in, onderwerpt Γ dus niet aan een wh-verdeling, maar onderstelt alleen, dat er een verzameling V (niet een collectie) van mogelijke (onveranderlijke) samenstellingen van Γ is, beschreven door één of meer parameters θ. (b.v. een verdeling van Poisson met onbekende α, een normale verdeling met onbekende α en/of σ^2, e.d.)

Voor iedere waarde (algemener: ieder waardenstelsel) van θ kan men nu de wh $P\left[\frac{\Sigma}{\Gamma(\theta)}\right]$ van het optreden de steekproef Σ berekenen. In plaats van de bij Bayes optredende "probability" van $\Gamma(\theta)$ (of ook van θ), met betrekking tot Σ, beschouwt Fisher nu alleen de "likelihood" $L\left[\frac{\Gamma(\theta)}{\Sigma}\right]$ van $\Gamma(\theta)$ met betrekking tot Σ, gedefinieerd door genoemde wh: $L(\theta) = L\left[\frac{\Gamma(\theta)}{\Sigma}\right] = P\left[\frac{\Sigma}{\Gamma(\theta)}\right]$.

Deze behoeft natuurlijk niet aan het additie- en multiplicatietheorema t.o.v. θ te voldoen, maar is, in tegenstelling tot Bayes' a priori-, dus ook a posteriori whn, volledig door Σ bepaald. In de dagelijkse taal zijn de termen "probable" en "likely" synoniem. Het vervangen van de term "probability of Σ" door "likelihood of $\Gamma(\theta)$" is weer als een terminologische transformatie (verwisseling van "van" en "met betrekking tot") te beschouwen.

$\hat{\theta}$, waarvoor L maximaal is, is dan "de beste".
Beschouwen we b.v. een continue wh-verdeling van één variabele: f(x), die dus van θ afhankelijk is en daaruit één steekproef van de uitgebreidheid n, die de waarden $x_1 \ldots x_n$ oplevert. De vraag naar de wh van precies deze steekproef is dan een nutteloze, daar deze wh steeds =0 is. Verdelen we echter de x-as in een aantal kleine intervallen van de lengte Δx, dan is de wh, dat één van deze intervalletjes een x_i van de steekproef zal bevatten $\approx f(\xi).\Delta x$, met ξ in het betrokken intervalletje, dus $\approx f(x_i).\Delta x_i$. De wh van de hele steekproef is dus:

$$\approx f(x_1)\ldots\ldots f(x_n).\Delta x_1 \ldots \Delta x_n,$$

wat voor $\Delta x_i \to 0$ overgaat in:

$$f(x_1)\ldots\ldots f(x_n).dx_1\ldots dx_n.$$

Hierbij is dan nog een bepaalde volgorde der n waarden in acht genomen. Laat men deze buiten beschouwing, dan komt er nog de factor n! bij.
Dus is. $L :: f(x_1)\ldots\ldots f(x_n)$. Dit is een functie van θ, daar f(x) dit is. Van deze functie moet dan dus het maximum bepaald worden. Hier gaan we niet nader op in. We merken nog slechts het volgende op: hebben we te doen met een kategorisch systeem met whn $p_1, \ldots, p_k$, $\sum p_i = 1$, $p_i \geq 0$, waarbij de p_i te beschouwen zijn als (k-1) onafhankelijke parameters θ, dan wordt de likelihood voor n>>1 asymptotisch een functie van χ^2 en maximum likelihood is dan approximatief aequivalent met minimum χ^2.

Nu is $\chi^2 = \sum \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ minimaal voor $n_i = np_i$, zodat er weer uitkomt: whn = waargenomen fqn, dus de primitieve oplossing van model III. Ook met de theorie der maximum likelihood worden waarden van de θ's ondubbelzinnig als "de beste" vastgelegd en blijft er geen speling in de samenstelling van de modelcollectie over. Willen wij dit wel bereiken, dan zullen we, evenals dit bij het χ^2-kriterium besproken is, niet $L(\theta)$ = maximaal moeten beschouwen, maar b.v. alle θ's met $L(\theta) \geq \varepsilon$ als mogelijke waarden moeten behandelen. Daar dus de methode van Bayes algemeen verworpen is, en de maximum-likelihood methode van Fisher niet boven model III uitgaat, blijft voor model IV alleen nog de methode van E.S.PEARSON over.

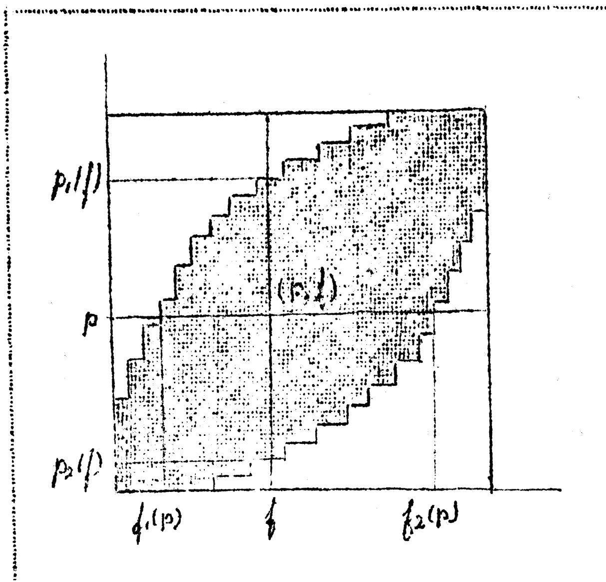
Deze theorie der betrouwbaarheidsgrenzen dient wèl onderscheiden te worden van R.A.Fisher's theorie der "fiducial limits", algemener "fiducial inference", die op een gedachtegang analoog aan de hypothese van Bayes berust, en waaraan, voor zover thans te zien is, geen empirische zin te hechten is. De theorie van E.S.Pearson berust op het volgende principe:

We beschouwen een alternatief met kenmerken A en B en resp. whn p en q (ondersteld), waarvan een steekproef van de uitgebreidheid n een fq f opgeleverd heeft. Dan zijn $f_1(p)$ en $f_2(p)$ (feitelijk ook afhankelijk van n, maar de steekproef, dus ook n, is gegeven) zo te bepalen, dat:

$$P\left[\frac{f \leq f_2(p)}{p,n}\right] \geq 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{en} \quad P\left[\frac{f \geq f_1(p)}{p,n}\right] \geq 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{zijn}$$

De kans, dat f buiten dit interval ligt is dus $\leq \varepsilon$:

$$P\left[\frac{f_1(p) \leq f \leq f_2(p)}{p,n}\right] \geq 1 - \varepsilon \qquad (1)$$



($1-\varepsilon$ heet hierin de betrouwbaarheidsgrens, "level of significance"). Berekent men bij vaste n en ε de f_1 en f_2 voor alle p tussen 0 en 1, en zet men de verkregen waarden op een p- en f-as uit, dan ontstaat een figuur als getekend. De eis, dat f bij gegeven p in het gehar̨ceerde gebied moet liggen, is aequivalent met de eis, dat p hierin moet liggen, als f gegeven is; het punt (p,f) moet in dit gebied liggen.

Dus is de voorwaarde:

$$f_1(p) \leq f \leq f_2(p)$$

om te zetten in:

$$p_1(f) \leq p \leq p_2(f).$$

In de figuur hebben we tot nu toe alleen op iedere horizontale lijn een massaverdeling aangebracht; Bayes brengt bovendien op de p-as een massaverdeling aan en krijgt dan een totale massaverdeling in het vierkant. Dit kunnen wij ook doen, als we b.v. van alle p's, die we in de loop der tijden gebruiken, een verdeling opmaken, waarin $d\varphi(p)$ het fq is van p in een klein intervalletje (ε en n vasthouden). Dan wordt de totale massa van het geharceerde gebied, dit is dus de kans, dat bij gegeven n het punt (p,f) daarin zal liggen:

$$\int d\varphi(p).\ P\left[\frac{f_1(p) \leq f \leq f_2(p)}{p,n}\right] \geq (1-\varepsilon).\int d\varphi(p) = 1 - \varepsilon.$$

Dit resultaat is dus onafhankelijk van de voor de p-as gekozen verdeling. Echter kunnen wij niet beweren, dat op iedere verticale lijn een relatieve massa $\geq 1-\varepsilon$ in het geharceerde gebied zou liggen, een bewering, die overeen zou komen met:

$$P\left[\frac{p_1(f) \leq p \leq p_2(f)}{f,n}\right] \geq 1 - \varepsilon\ ,$$

wat bij Bayes wèl gepretendeerd wordt.

Men kan dus alleen verwachten, dat b.v. bij n=100 en ε=0,05, wanneer men altijd ondersteit, dat p tussen de grenzen $p_1(f)$ en $p_2(f)$ zal liggen, deze onderstelling in ongeveer 95% van de gevallen bevestigd zal worden, maar niet, dat dit het geval zal zijn in 95% van de bij één f behorende gevallen.

Nog veel minder wordt natuurlijk beweerd, dat de uit (1) door verwisseling van de letters p en f volgende ongelijkheid:

$$P\left[\frac{f_1(f) \leq p \leq f_2(f)}{f,n}\right] \geq 1 - \varepsilon ,$$

(die derhalve geldt, als thans f het fq in de uitgangscollectie en p het fq in de steekproef is) ook gelden zou, indien als tevoren p het fq in de uitgangscollectie en f dat in de steekproef is, zoals in de theorie van "fiducial inference" van den (anders ten aanzien van Bayes-achtige onderstellingen zo kritische) R.A.Fisher aangenomen wordt. Deze bewering is niet alleen volkomen ongefundeerd, maar, daar zij een bewering inhoudt omtrent de whn, dus de fqn van bepaalde uitgangscollecties, in bepaalde gevallen in strijd met de werkelijkheid. Logisch bestaat de fout daarin, dat uit „$A[x] \wedge B[y]$, $\supset C[x,y]$,

geconcludeerd wordt tot: „$A[x] \wedge B[y]$, $\supset C[y,x]$, .

Desondanks wordt de theorie der "fiducial inference" door den geofysicus HAROLD JEFFREYS, die ook overigens een weinig kritisch standpunt inneemt, aanvaard (Theory of Probability, 1939; Scientific Inference, 1931), en zelfs door M.G.KENDALL (The advanced theory of statistics II, 1946) niet ondubbelzinnig verworpen. Een kritisch standpunt ten aanzien van deze theorie is door J.NEYMAN (biometrica 32) ingenomen.

E.S.Pearson heeft de theorie der betrouwbaarheidsgrenzen verder, gedeeltelijk tezamen met J.Neyman, doorgerekend. De kans, dat de hypothese ten onrechte verworpen wordt, is $\leq \varepsilon$. (J.NEYMAN en E.S.PEARSON, Statistical Research Memoirs 1, 2, 1936, '38; overzicht in M.G.Kendall, The advanced theory of statistics II, 1946). Op deze nadere uitwerking en op de gebreken van de theorie gaan we niet in, we maken tenslotte nog slechts enige opmerkingen van algemene aard:

1. De theorie is onafhankelijk van de hypothese van Bayes.

2. De complementaire waarde ε van de betrouwbaarheidscoëfficient kan als risicokans geïnterpreteerd worden: zij is de wh, dat een hypothese ten onrechte verworpen zal worden.

3. Hierdoor geeft zij een middel, om van een gegeven waarnemingsreeks met betrekking tot een gegeven risicokans ε een omgeving expliciet aan te geven, waarbinnen de whn p_i aangenomen worden, b.v. voor $n \gg 1$ approximatief met behulp van het χ^2-kriterium:

$$P\left[n\sum\frac{(f_i - p_i)^2}{p_i} \geq \chi^2\right] \leq \varepsilon \quad , \text{ waarin } P_{\Gamma(\frac{k-1}{2})}(\tfrac{1}{2}\chi^2) = \varepsilon \text{ is.}$$

Hier treedt b.v. $\chi/\sqrt{n}$ in de plaats van de in Reichenbach's theorie der inductie optredende δ, die Reichenbach niet nader kon preciseren.

4. Voor uitschakeling komen alleen die conclisies in aanmerking, die voor alle toegelaten p_i gelden, dus niet diegenen, die b.v. op een maximum-likelihood-onderstelling gebaseerd zijn (tenzij χ zo klein is, dat dit geen verschil van betekenis maakt).

5. Het toetsen van hypothesen is eigenlijk alleen een ontbeerlijk tussenstadium, daar men alleen met verdere conclusies uit de hypothesen te maken heeft. B.v. is niet zozeer de vraag van belang, welke waarden de (doorgaans toch niet waarneembare) p_i hebben, als wel, welke waarden der fqn in een andere steekproef te verwachten zijn.

6. Behalve het feit, dat de onbekende whn p_i optreden, heeft de uitdrukking $\chi^2 = n\sum\frac{(f_i - p_i)^2}{p_i}$ het bezwaar, dat zij niet symmetrisch met betrekking tot de p_i en de f_i is. In verband met het vorige punt kan men tot een symmetrische definitie komen voor de "afstand" χ_2 tussen twee steekproeven uit een zelfde collectie met de uitgebreidheden n' en n" en de fqn f_i' resp. f_i'', waarin de p_i niet optreden, te weten:

$\chi_2^2 = n'n''\sum\frac{(f_i'-f_i'')}{n'f_i'+n''f_i''}$. Voor $n'' \to \infty$ en $f_i' \to p_i$ gaat deze over in χ^2. Deze uitdrukking behoeft nog een correctie, indien er kenmerken zijn, welker fqn in beide steekproeven =0 zijn. We komen later op deze grootheid terug.

ERRATA I

bl;	regel	Staat:	Moet staan:
1.	7 v.b.	Chr.Huygens (1629-1645)	1629-1695
	22 v.b.	encyclopedist	encyclopédiste
	13 v.o.	Kränelung	Kräuelung
2.	2 v.b.	PIERRE LOUIS DE L.	PIERRE SIMON DE L.
3.	1 v.b.	om er vol-	om er een vol-
	17 v.b.	de q kunnen	de q_i kunnen
	25-26 v.b.	continue φ functie	continue functie φ
5.	24 v.b.	gtote	grote

6. toevoegen: voetnoot ') fq(n) = frequentiequotient(en).

bl;	regel	Staat:	Moet staan:
11.	5 v.b.	m=n	$m \neq n$
	28 v.b.	funties	functies
	34 en 37 v.b.	wh	whn
	4 v.o.	1931	1921
14.	22 v.b.	$\vee$	$\wedge$
15.	29 v.o.	verhouding	verhoudingen
	27 v.o.	van Kries	von Kries
16.	8 v.b.	ligt	licht
	10 v.b.	whn zijn	whn verbinden
	6 v.o.	(dit geldt...	dit geldt ook nog als x en y elkaar niet uitsluiten, maar x, y en h wel.
	4 v.o.	dan	-
17.	7 v.o.	daar	door
18.	30 v.o.	sera prix	sera le prix
	2 v.o.	nieuwe	nieuwere
19.	12 v.b.	SIMEON	SIMON
20.	18 v.b.	P(...)=	$P_x(\ldots) =$
	17 v.o.	$\varphi(f) = 0$	$\varphi(f) \neq 0$
21.	24 v.b.	(a is	(a is de
	12 v.o.	$\frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+1)}$	$\frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}$
23.	17 v.b.	ouste	oudste
	27 v.o.	$0 \leqq \theta < \pi$	$-\frac{1}{2}\pi < \theta \leqq \frac{1}{2}\pi$.

26 v.o. P... moet geheel weg. Dit moet worden:

$$P = \frac{\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int_{-a\cos\theta}^{a\cos\theta} dx}{\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int_{-b}^{+b} dx} = \frac{4a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\theta \, d\theta}{2\pi b} = \frac{2a}{b}$$

bl;	regel	Staat:	Moet staan:
	6 v.o.	evenredig met a	alleen afhankelijk van a.
24.	35 v.o.	drie	vier
25.	28 v.o.	G.Neyman	J.Neyman
26.	22 v.o.	Carnpa	Carnap
	8 v.o.	significanca	significance
	5 v.o.	MAUTNER	MAUTHNER

bl.;regel	Staat:	Moet staan.
27. 27 v.b.	sigifica	significa
31 v.o.	bewijzen	begrijpen
28. 6 v.o.	synthetisch	syntaktisch
29. 8 v.o.	P(B)	P_{ξ}(B)
30. 27 v.b.	rep.	resp.
30 v.b.	fundamentale	fundamentele
31. 5 v.o.	onregelmatigehidsaxioma	onregelmatigheidsaxioma
34. 13 v.b.	der	den
35. 26 v.b.	voort	voorts
36. 18 v.b.	topologische	terminologische
37. 7 v.b.	0;1	0,1
38. 33 v.o.	aantal ballen	aantal witte ballen
31 v.o.	" "	" " "
39. 15 v.o.	permutatie	permutaties
41. 12 v.o.	allen =0	allen ≠0
42. 8 v.o.	uitschakeling	inschakeling
verschillende keren:	m_χ, $m_{\chi+1}$	l_λ, $l_{\chi+1}$
43. 16 v.o.	E.S.Pearson	J.Neyman
45. 5 en 10 v.b.	idem	idem

Aanvulling.

43. 3 v.o.	steekrpoeven	steekproeven
46. 19 v.o.	conclisies	conclusies

1 tot en met 5 en 6 tot en met "in de steekproef is" - moet weg

11 vanaf "Logisch be-" tot en met 15 $\supset C[y,x]$" - moet weg.

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhavestraat 49
AMSTERDAM.

Statistische Afdeling

Capita Selecta

Caput II Theorie der waarschijnlijkheidsvelden

Prof.Dr.D. van Dantzig

S, (C,)

pag. 51-118

CAPUT II. Theorie der waarschijnlijkheidsvelden.

§1. Absoluut additieve verzamelingsfuncties.

1. Gegeven:
   1. Een verzameling ("wh-veld") Γ
   2. Een "afgesloten" lichaam L van deelvzn ') van Γ, d.w.z.:
      a) $\Gamma \in L$
      b) als $\Lambda \in L$, dan $\Lambda \subset \Gamma$
      c) als $\Lambda \in L$, dan $(\Gamma -- \Lambda) \in L$ '')
      d) als voor iedere natuurlijke n $\Lambda_n \in L$, dan $(\bigcup \Lambda_n) \in L$
      e) als Λ slechts één el van Γ bevat is $\Lambda \in L$.

      Gevolg: $o \in L$; als voor iedere natuurlijke n $\Lambda_n \in L$, dan $(\bigcap \Lambda_n) \in L$.
   3. Een reële absoluut additieve vz-fct ') V op L, d.w.z.:
      α) als $\Lambda \in L$, dan is $V(\Lambda)$ gedefinieerd en reëel
      β) als voor alle natuurlijke m en n $\Lambda_n \in L$ en $\Lambda_m \cap \Lambda_n = o$, dan is
      $$V(\bigcup \Lambda_n) = \sum_n V(\Lambda_n).$$

      Gevolg: γ) $V(o) = 0$. Waarom?

Karakteristiek voorbeeld: Γ is elektrisch geladen; $V(\Lambda)$ is de totale in Λ bevatte lading.

N.B.: De definities en bewijzen voldoen niet aan de eisen der intuïtionistische wiskunde. De theorie der absoluut additieve vz-fcts stamt grotendeels van J.Radon (Sitzungsber. Wien, 122, 1913), met toevoegingen van H.Hahn, S.Besicovitch, de la Valée Poussin, e.a. en met gebruik maken van vroegere resultaten van F.Riesz, H.Lebesgue, T.J.Stieltjes, e.a.

2. STELLING 1. Iedere absoluut-additieve vz-fct is begrensd.

Bewijs uit het ongerijmde. V heet onbegrensd op $\Lambda \in L$ als bij iedere $x > 0$ een $M \subset \Lambda$ bestaat met $|V(M)| \geq x$.

a) Is V onbegrensd op Λ, en x reëel, dan is er een $\Lambda_1 \subset \Lambda$ waarop V eveneens onbegrensd is, met $|V(\Lambda_1)| \geq x$. Kies nl. $\Lambda' \subset \Lambda$ met $|V(\Lambda')| \geq x + |V(\Lambda)|$, dan voldoet $\Lambda_1 = \Lambda'$ of $\Lambda = \Lambda -- \Lambda'$.

b) Is V onbegrensd op $\Lambda_0 = \Gamma$, dan is er voor iedere $n \geq 1$ een $\Lambda_n \subset \Lambda_{n-1}$ waarop V onbegrensd is met $|V(\Lambda_n)| \geq |V(\Lambda_{n-1})| + 1$. Neem deelrij van Λ waarvoor $V(\Lambda_n)$ steeds zelfde teken heeft. Laat rest weg.

c) Zij $M = \bigcup (\Lambda_n -- \Lambda_{n+1})$. Wat is $V(M)$?

Gevolg. V is begrensd op iedere deelvz van Γ

3. Definitie. $V^+(\Lambda) = \lim\limits_{M \subset \Lambda} \sup V(M)$; $V^-(\Lambda) = \lim\limits_{M \subset \Lambda} \inf V(M)$

Opmerking $V^+(\Lambda) \geq 0$; $V^-(\Lambda) \leq 0$. Waarom?

STELLING 2. $V(\Lambda) = V^+(\Lambda) + V^-(\Lambda)$

Bewijs. Kies M zo dat $V(M) \geq V^+(\Lambda) - \varepsilon$. Dit leidt tot $V^+(\Lambda) + V^-(\Lambda) \leq V(\Lambda) + \varepsilon$

Analoog $\geq V(\Lambda) - \varepsilon$, enz.

STELLING 3. $V^+(\Lambda)$ en $V^-(\Lambda)$ zijn absoluut additief op L.

Bewijs. Zij $\Lambda = \bigcup \Lambda_n$, $\Lambda_m \cap \Lambda_n = o$ voor $m \neq n$.

a) Zij $M \subset \Lambda$, $M_n = M \cap \Lambda_n$. Dan: $V(M) = \sum V(M_n) \leq \sum V^+(\Lambda_n)$, dus
$V^+(\Lambda) = \lim \sup V(M) \leq \sum V^+(\Lambda_n)$.

b) Zij $M_n \subset \Lambda_n$, $\varepsilon > 0$, $V(M_n) \geq V^+(\Lambda_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$, $M = \bigcup M_n$. Dan is
$V^+(\Lambda) \geq V(M) \geq \sum V^+(\Lambda_n) - \varepsilon$.

c) Analoog voor $V^-(\Lambda)$.

') vz=vz van ..; fct(s)=functie(s), el(n)=element(en)
'') A--B = complement van $B \cap A$ in A ; o = lege vz.

4. __Definitie__. Een __kategorie__ $\{K\}$ op Γ is een aftelbare vz van deelvzn K_i van Γ, met: 1) $i \neq j \longrightarrow K_i \cap K_j = 0$
2) $\cup K_i = \Gamma$.

De __doorsnede__ $\{K'\} \cap \{K''\}$ van twee kategorieën op Γ is de vz van alle doorsneden $K'_i \cap K''_j$. Deze vormen zelf een kategorie op Γ (Bewijs dit).

De __doorsnede__ $\{K\} \cap \Lambda$ van een kategorie $\{K\}$ op Γ en een deelvz Λ van Γ is de vz van alle doorsneden $K_i \cap \Lambda$. Deze vormen een kategorie op Λ.

Een kategorie is __eindig__ als het aantal deelvzn waaruit zij bestaat eindig is.

$|V|(\Lambda) \overset{\text{df}}{=} \lim\sup \sum_i |V(K_i \cap \Lambda)|$ over alle __eindige__ kategorieën.

STELLING 3. __$|V|(\Lambda) = V^+(\Lambda) - V^-(\Lambda)$__

__Bewijs__. 1) $\sum|V(K_i \cap \Lambda)| = V(\Lambda') - V(\Lambda'') \leq V^+ - V^-$ (argument Λ weggelaten)
Hieruit volgt ook, dat $|V|(\Lambda)$ steeds bestaat en $\leq V^+ - V^-$ is.
2) a. Is $V^- = 0$, dan is $V = V^+$, $V(M) \geq 0$ voor alle M,
dus $\sum|V(K_i \cap \Lambda)| = \sum V(K_i \cap \Lambda) = V$, dus $|V| = V^+ - V^-$.
b. Is $V^+ = 0$, dan ook.
c. Is $V^+V^- \neq 0$, dan $\exists \varepsilon > 0$, $V^+ \geq \frac{1}{2}\varepsilon > 0 > -\frac{1}{2}\varepsilon \geq V^-$.
Zij $M \subset \Lambda$, $V(M) \geq V^+ - \frac{1}{2}\varepsilon > 0$. Dan $V(\Lambda -- M) = V - V(M) \leq$
$\leq V^- + \frac{1}{2}\varepsilon < 0$, dus $|V(M)| + |V(\Lambda -- M)| = V(M) - V(\Lambda -- M) \geq$
$\geq V^+ - V^- - \varepsilon$, dus $|V| \geq V^+ - V^-$.

__Opmerking__. Constante veelvouden en eindige sommen van absoluut additieve vz-fcts zijn ook absoluut additief (definitie?)

__Gevolg__. $|V|(\Lambda)$ is absoluut additief.

__Résumé__ Iedere absoluut additieve vz-fct V is het verschil van twee niet-negatieve; $|V|$ is hun som.

5. __Definitie__. V heet __continu__ als $V(\Lambda) = 0$ is zodra Λ slechts één el van Γ bevat.
V heet __discreet__ als er een __aftelbare__ vz $\Delta \subset \Gamma$ bestaat met $|V|(\Gamma - \Delta) = 0$.

__Opmerking__. Is $|V|(\Lambda) = 0$ voor een vz $\Lambda \subset \Gamma$, dan is $V(M) = 0$ voor iedere $M \subset \Lambda$ en omgekeerd. Bewijs?

STELLING 4. __Iedere absoluut additieve vz-fct V is som van een continue en een discrete. Deze zijn door V ondubbelzinnig bepaald.__

__Bewijs__. a) Voldoende het bewijs te leveren voor $V(\Lambda) \geq 0$ voor iedere Λ. (Waarom?)
b) Zij $\varepsilon_n > 0$, $\lim \varepsilon_n = 0$. Er zijn hoogstens eindig veel eln $\lambda_{n1}, \ldots, \lambda_{nk_n}$ met $V(\lambda_{ni}) \geq \varepsilon_n$ $(i=1,\ldots,k_n)$ (Waarom?). Tezamen eindige vz Δ_n. Zij $\Delta = \overset{n}{\cup} \Delta_n$, $U(\Lambda) = V(\Lambda \cap \Delta)$. Dan is U absoluut additief en discreet (Waarom?). En $V - U$ is continu. Waarom?
c) Is U' discreet en $V - U'$ continu, dan is $U' = U$. Waarom?

__Opmerking__. $U(\Lambda) = \sum_{\lambda_m \in \Lambda} p_m$ als λ_m de doorgenummerde λ_{ni} (elk één keer) en $p_m = V(\lambda_m)$ zijn.

__INTEGRALEN__.

6. __Gegeven__: Zij $f(\lambda)$, $(\lambda \in \Gamma)$, een reëele fct op Γ. Van alle voorkomende fcts $f(\lambda)$ wordt ondersteld, resp. is bewijsbaar, dat ze L-__meetbaar__ zijn. D.w.z.: is $\Lambda_f(x)$ de vz van alle λ met $f(\lambda) \leq x$, dan is $\Lambda_f(x) \in L$ voor alle reëele x.

Opmerkingen. 1. Voldoende is reeds, dat een aftelbare overal dichte vz Ξ van reëele getallen bestaat met $\overline{\Lambda}_f(x) \in L$ als $x \in \Xi$ is. Bewijs. Zij x willekeurig reëel, $x = \lim x_n$, $x_n \in \Xi$, $x_{n+1} \leq x_n$, $\Lambda_n = \overline{\Lambda}_f(x_n)$, $\Lambda_0 = \Gamma$, $\Lambda = ⋒ \Lambda_n$. Dan is $\Lambda_n \in L$, $\therefore \Lambda \in L$, $\lambda \in \Lambda_n \rightleftarrows f(\lambda) \leq x_n$, $\Lambda_n \subset \Lambda_{n-1}$, $\Lambda = \overline{\Lambda}_f(x)$.

2. Ook de vz $\Lambda_f(x)$ van alle λ met $f(\lambda) < x$, evenzo die met $f(\lambda) \geq x$, $f(\lambda) > x$, $f(\lambda) = x$, $x \leq f(\lambda) < y$, $x \leq f(\lambda) \leq y$, enz. behoren tot L.

7. Zij $f(\lambda)$ bovendien begrensd: $|f(\lambda)| \leq c$.

Definitie. De variatie van f op een vz Λ is lim sup $|f(\lambda) - f(\mu)|$ voor alle $\lambda \in \Lambda$, $\mu \in \Lambda$. De variatie van f op een kategorie $\{K\}$ is de lim sup der variaties van f op alle tot de kategorie behorende vzn.

Notatie: $\mathrm{Var}_f \{K\}$.

Lemma 1. Voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een eindige kategorie $\{K\}$, waarop f een variatie $\leq \varepsilon$ heeft.

Bewijs. Er zijn reëele getallen $x_0 = -c$, $x_n = +c$, $x_i < x_{i+1} \leq x_i + \varepsilon$ $(i=0,\dots,n-1)$ als $n \geq \frac{2c}{\varepsilon}$ is. Kies $K_i = \overline{\Lambda}_f(x_i) -\!\!- \overline{\Lambda}_f(x_{i-1})$ $(i=1,\dots,n)$, $K_0 = \overline{\Lambda}_f(-c)$. Deze vormen een kategorie, die aan de eisen voldoet. Bewijs?

Opmerking. Is $\mathrm{Var}_f \{K\} \leq \varepsilon$, $\mathrm{Var}_f \{K'\} \leq \varepsilon$, dan ook $\mathrm{Var}_f \{K\}\{K'\} \leq \varepsilon$.

STELLING 5. Als de K_i een eindige kategorie vormen, $k_i \in K_i$ is en $\mathrm{Var}_f \{K\}$ naar nul gaat, bestaat $\lim \sum_i f(k_i)V(K_i)$; zij is onafhankelijk van de keuze der kategorieën en der k_i in K_i.

Bewijs. Volgt onmiddelijk uit lemma 2.

Lemma 2. Zijn $\{K\}$ en $\{K'\}$ eindige kategorieën, $\mathrm{Var}_f \{K\} \leq \varepsilon$, $\mathrm{Var}_f \{K'\} \leq \varepsilon$, $k_i \in K_i$, $k'_j \in K'_j$, $(i=1,\dots,k; j=1,\dots,k')$, $S = \sum_i^k f(k_i)V(K_i)$, $S' = \sum_j^{k'} f(k'_j)V(K'_j)$, dan is $|S - S'| \leq 2\varepsilon |V|(\Gamma)$.

Bewijs. a) Zij $k'_{ij} \in K_i \frown K'_j$, $S'' = \sum_i \sum_j f(k'_{ij})V(K_i \frown K'_j)$. Het is voldoende te bewijzen dat $|S'' - S| \leq \varepsilon |V|(\Gamma)$ is.

b) $|S'' - S| = |\sum_i \sum_j f(k'_{ij})V(K_i \frown K'_j) - \sum_i f(k_i)V(K_i)| =$
$= |\sum_i \sum_j f(k'_{ij})V(K_i \frown K'_j) - \sum_i f(x_i) \sum_j V(K_i \frown K'_j)| = |\sum_i \sum_j \{f(k''_{ij}) - f(k_i)\} V(K_i \frown K'_j)| \leq$
$\leq \sum_i \sum_j |f(k'_{ij}) - f(k_i)| \, |V(K_i \frown K'_j)| \leq \varepsilon \sum_i \sum_j |V(K_i \frown K'_j)| \leq \varepsilon |V|(\Gamma)$.

Notatie. De limiet wordt aangeduid met $\int_\Gamma V(dk)f(k)$ of korter met (fV) en heet de integraal van f met betrekking tot V. (Integraaldefinitie van Stieltjes-Lebesgue-Radon). Zij bestaat dus zeker als f L-meetbaar en begrensd en V absoluut additief is.

Opmerking. Daar deze eigenschappen behouden blijven als men van Γ op Λ overgaat, bestaat evenzo $(fV)(\Lambda) = \int_\Lambda V(dk)f(k)$ voor $\Lambda \subset \Gamma$.

Eigenschappen. 1. Is a een reëel getal, dan is.

$$((af)V)(\Lambda) = (f(aV))(\Lambda) = a.(fV)(\Lambda)$$

2. Zijn f_i $(i=1,\dots,k)$ L-meetbaar en begrensd, V_j $(j=1,\dots,m)$ absoluut additief, dan is:

$$(\sum_i f_i . \sum_j V_j)(\Lambda) = \sum_i \sum_j (f_i V_j)(\Lambda).$$

3. Is $|f|_\Lambda = \lim \sup_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|$, dan is:

$$|(fV)(\Lambda)| \leq |f|_\Lambda . |V|(\Lambda).$$

Bewijs. Zijn K_i kategorisch op Λ, $k_i \in K_i$, dan is:

$$|f(k_i)V(K_i)| \leq \sum |f(k_i)| \, |V(K_i)| \leq |f|_\Lambda \sum |V(K_i)| \leq |f|_\Lambda . |V|(\Lambda).$$

8. STELLING 6. $(fV)(\Lambda)$ is absoluut additief op L.

Bewijs. a) $(fV)(\Lambda)$ is additief. Zijn Λ_n $(n \leq N)$ een eindige kategorie op Λ, $\varepsilon > 0$, Λ_{ni} $(i \leq k_n)$ eindige kategorieën op Λ_n, $\lambda_{ni} \in \Lambda_{ni}$, $\mathrm{Var}_f(\Lambda_{ni}) \leq \varepsilon$.
Dan is voor iedere n: $|(fV)(\Lambda_n) - \sum^i f(\lambda_{ni})V(\Lambda_{ni})| \leq \varepsilon |V|(\Lambda_n)$,
dus $|\sum^n (fV)(\Lambda_n) - \sum^n \sum^i f(\lambda_{ni})V(\Lambda_{ni})| \leq \sum^n \varepsilon |V|(\Lambda_n) = \varepsilon |V|(\Lambda)$.
Ook is $|(fV)(\Lambda_n) - \sum^{ni} f(\lambda_{ni})V(\Lambda_{ni})| \leq \varepsilon |V|(\Lambda)$, daar alle Λ_{ni} tezamen een eindige kategorie op Λ vormen. Dus is $|(fV)(\Lambda) - \sum^n (fV)(\Lambda_n)| \leq 2\varepsilon |V|(\Lambda)$ voor iedere $\varepsilon > 0$, dus $= 0$.

b) Zij nu Λ_n een (niet noodzakelijk eindige) kategorie op Λ, en $\varepsilon > 0$. Dan is $|V|(\Lambda) = \sum |V|(\Lambda_n)$. Kies N zo groot dat:
$|V|(\Lambda -- \bigcup_1^N \Lambda_n) = |V|(\Lambda) - \sum_1^N |V|(\Lambda_n) \leq \varepsilon$. Dan is $|(fV)(\Lambda) - \sum_1^N (fV)(\Lambda_n)| =$
$= |(fV)(\Lambda) - (fV)(\bigcup_1^N \Lambda_n)| \overset{!}{=} |(fV)(\Lambda -- \bigcup_1^N \Lambda_n)| \leq |f|_\Lambda \cdot |V|(\Lambda -- \bigcup_1^N \Lambda_n) \leq \varepsilon |f|_\Lambda$.
Dus $(fV)(\Lambda) = \lim \sum_1^N (fV)(\Lambda_n) = \sum^n (fV)(\Lambda_n)$.

9. Andere notatie. $f_\lambda = f(\lambda)$; $V^\Lambda = V(\Lambda)$; $\int_\Lambda V^{d\lambda} f_\lambda = \int_\Lambda V(d\lambda) f(\lambda) = (fV)^\Lambda = (fV)(\Lambda)$,
$(fV)^\Gamma = (fV)$. Evenzo $V^{+\Lambda}$, $V^{-\Lambda}$, $|V|^\Lambda$.

Definitie. Is $\Lambda \in \Gamma$, $k \in \Gamma$, dan is $\iota_k^\Lambda = \begin{cases} 1 & \text{als } k \in \Lambda \\ 0 & \text{als } \neg\, k \in \Lambda, \end{cases}$ $(\iota = \text{iota})$

Opmerking. ι_k^Λ is voor constante k absoluut additief en voor constante $\Lambda \in L$ begrensd en L-meetbaar. Waarom?

Gevolg. Voor iedere L-meetbare begrensde f en iedere absoluut additieve V, iedere $\lambda \in \Gamma$ en $\Lambda \subset \Gamma$ bestaan $(V\iota^\Lambda) = \int_\Gamma V^{dk} \iota_k^\Lambda$
en $(\iota_k f) = \int_\Gamma \iota_k^{d\lambda} f_\lambda$.

STELLING 7. $(V\iota^\Lambda) = V^\Lambda$, $(\iota_k f) = f_k$ voor iedere $k \in \Gamma$, $\Lambda \subset \Gamma$.
Bewijs dit. Hoe moeten de kategorieën gekozen worden?
Aanwijzing voor 2e: Is $\mathrm{Var}_f\{K\} \leq \varepsilon$, $k \in K_h$, $k_i \in K_i$, dan is $\iota_k^{K_i} = \delta_{ih} = \begin{cases} 1 & i = h \\ 0 & i \neq h \end{cases}$
en $|f_k - f_{k_i}| \leq \varepsilon$.

10. <u>Definitie</u>. Een O-vz ener absoluut additieve vz-fct V is een vz Λ met $V^M = 0$ voor <u>iedere</u> $M \subset \Lambda$.

<u>Opmerking</u>. Nodig en voldoende hiertoe is $|V|^\Lambda = 0$.
De vereniging van <u>aftelbaar</u> veel O-vzn is een O-vz. Er is in het algemeen geen O-vz, die alle andere omvat. Waarom niet

<u>Notatie</u>. $\Lambda \underset{V}{\subset} M$ als $\Lambda \subset M \cup \Lambda_0$, $|V|^{\Lambda_0} = 0$ (Λ is behoudens een O-vz van V in M bevat)

$\Lambda \underset{V}{\approx} M$ als $\Lambda \cup M_0 = M \cup \Lambda_0$, $|V|^{\Lambda_0} = |V|^{M_0} = 0$ (Λ en M zijn behoudens een O-vz gelijk; wij noemen ze dan ook <u>aequivalent</u> met betrekking tot V).

<u>Definitie</u>. Twee (niet noodzakelijk overal gedefinieerde, maar L-meetbare) fcts f en g op Γ zijn <u>aequivalent</u> t.o.v. V als de vz van alle λ waar $f_\lambda = g_\lambda$ is, aequivalent met Γ t.o.v. V is, d.w.z. is Λ de vz van alle λ waarop hetzij f_λ hetzij g_λ niet gedefinieerd, hetzij f_λ en g_λ gedefinieerd maar $f_\lambda \neq g_\lambda$ is, dan is $|V|^\Lambda = 0$. Notatie $f \underset{V}{\approx} g$. Dus $f \underset{V}{\approx} f$ betekent, dat f overal op Γ behoudens op een O-vz gedefinieerd is. Is Λ_0 de vz waarop f niet gedefinieerd is, dan zijn de vzn $\Gamma[a \le f \le b]$, $\Gamma[a < f \le b]$, enz alle $\subset \Gamma -- \Lambda_0$; $\Gamma -- \Lambda_0 = \Gamma[f < +\infty] = \Gamma[f > -\infty]$.

<u>Algemene integraaldefinitie</u>. De fct $f(\lambda)$ heet integreerbaar t.o.v. V op Γ als:

a) $f(\lambda)$ gedefinieerd (dus eindig) is op een vz $\Lambda_0 \in L$.

b) $\Gamma[f < x] \in L$ en $\subset \Lambda_0$ voor iedere reële x.

c) $V^{\Gamma -- \Lambda_0} = 0$.

d) er bestaat een (oneindige) kategorie $\{K'\}$ op Λ_0, waarop $Var_f\{K'\}$ begrensd ($\le \alpha$) is, en voor iedere n een $k'_n \in K'_n$ zodanig, dat

$$\sum |V|^{K'_n}|f_{k'_n}| \quad \text{convergeert.}$$

STELLING 9. $\sum_{n=1}^{\infty} |V|^{K_n} |f_{k_n}|$ is, onder voorwaarden a)...d), convergent voor <u>iedere</u> kategorie $\{K\}$ op Λ_0 met $Var_f\{K\} \le \alpha$ en:

$\sum_{n=1}^{\infty} V^{K_n \cap \Lambda} f_{k_n}$ heeft voor iedere $\Lambda \in L$, als $\lim Var_f\{K\} = 0$ is, een limiet $(Vf)^\Lambda$ onafhankelijk van de keuze der kategorieën $\{K\}$ op Λ_0 en der punten k_n in K_n. $(Vf)^\Lambda$ is absoluut additief op L.

<u>Bewijs</u>. 1. $\sum_{m=1}^{M} |V|^{K_m} |f_{k_m}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M} |V|^{K'_n \cap K_m} |f_{k_m}| \le$

$\le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M} |V|^{K'_n \cap K_m} |f_{k'_n} - f_{k_m}| + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M} |V|^{K'_n \cap K_m} |f_{k'_n}| \le 2\alpha |V|^\Gamma + \sum_{n=1}^{\infty} |V|^{K'_n} |f_{k'_n}|$;

begrensd, dus convergent. Dus ook de minorant $\sum_{n=1}^{\infty} V^{K_n} f_{k_n}$ convergeert.

2. Is $Var_f\{K\} \le \varepsilon$ en $Var_f\{K'\} \le \varepsilon$, dan is:

$|\sum^n V^{K_n \cap \Lambda} f_{k_n} - \sum^m V^{K'_m \cap \Lambda} f_{k'_m}| = |\sum^m \sum^n V^{K_n \cap K'_m \cap \Lambda}(f_{k_n} - f_{k'_m})| \le 2\varepsilon |V|^\Lambda$;

Dus bestaat $\lim\limits_{Var_f\{k\} \to 0} \sum^n V^{K_n \cap \Lambda} f_{k_n}$. Deze heet de integraal van f met betrekking tot V over Λ en wordt aangeduid met $\int_\Lambda V^{d\lambda} f_\lambda = (Vf)^\Lambda$.

3. Absolute additiviteit van $(Vf)^\Lambda$.

Zij $\Lambda = \cup \Lambda_n$ en zij $\{K\}$ een kategorie op Γ met $Var_f\{K\} \le \varepsilon$

a. $\sum_{n=1}^{\infty} |V|^{K_n \cap \Lambda} |f_{k_n}| = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |V|^{K_n \cap \Lambda_m} |f_{k_n}|$ is convergent, dus voor voldoend grote M:

$$\Big|\sum_{m=M+1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V^{K_n \cap \Lambda_m} f_{k_n}\Big| \le \sum_{m=M+1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |V|^{K_n \cap \Lambda_m} |f_{k_n}| \le \varepsilon .$$

b. $\left|(Vf)^{\Lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} V^{K_n \cap \Lambda} f_{K_n}\right| \leq \varepsilon |V|^{\Lambda}$. Evenzo:

$$\left|(Vf)^{\Lambda_m} - \sum_{n=1}^{\infty} V^{K_n \cap \Lambda_m} f_{K_{nm}}\right| \leq \varepsilon |V|^{\Lambda_m}\ ; \quad \sum |V|^{\Lambda_m} = |V|^{\Lambda} .$$

$$\left|(Vf)^{\Lambda} - \sum_{m=1}^{M}(Vf)^{\Lambda_m}\right| = \left|\lim_{Var_f\{K'\}\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} V^{K'_n \cap \Lambda} f_{K'_n} - \sum_{m=1}^{M} \lim_{Var_f\{K''\}\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} V^{K''_n \cap \Lambda_m} f_{K''_{nm}}\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} V^{K_n \cap \Lambda} f_{K_n} - \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{\infty} V^{K_n \cap \Lambda_m} f_{K_{nm}}\right| + 2\varepsilon |V|^{\Lambda} \leq$$

$$\leq \left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M} V^{K_n \cap \Lambda_m}(f_{K_n} - f_{K_{nm}})\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=M+1}^{\infty} V^{K_n \cap \Lambda_m} f_{K_n}\right| + 2\varepsilon |V|^{\Lambda} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M} |V|^{K_n \cap \Lambda_m} \left|f_{K_n} - f_{K_{nm}}\right| + \varepsilon_1 + 2\varepsilon |V|^{\Lambda} \leq \varepsilon |V|^{\Lambda} + \varepsilon_1 + 2\varepsilon |V|^{\Lambda}$$

Dus $(Vf)^{\Lambda} = \sum_{1}^{\infty} (Vf)^{\Lambda_m}$

Opmerking. Voor deze integraal gelden de eigenschappen.

a. $(Vf)^{\Lambda} = 0$ als $\Lambda \cap \Lambda_0 = 0$ is.

b. Eigenschappen 1 - 3 van punt 7 gelden, als f_i aan de voorwaarden a)...d) van punt 10 voldoet voor iedere i.

11. Zij Γ de vz van alle reële getallen, L het lichaam bestaande uit alle vzn van Borel [1], Γ_a de vz van alle reële getallen $\leq a$, V absoluut additief op Γ,

$\varphi(x) = V(\Gamma_x)$, dus.

$\varphi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$

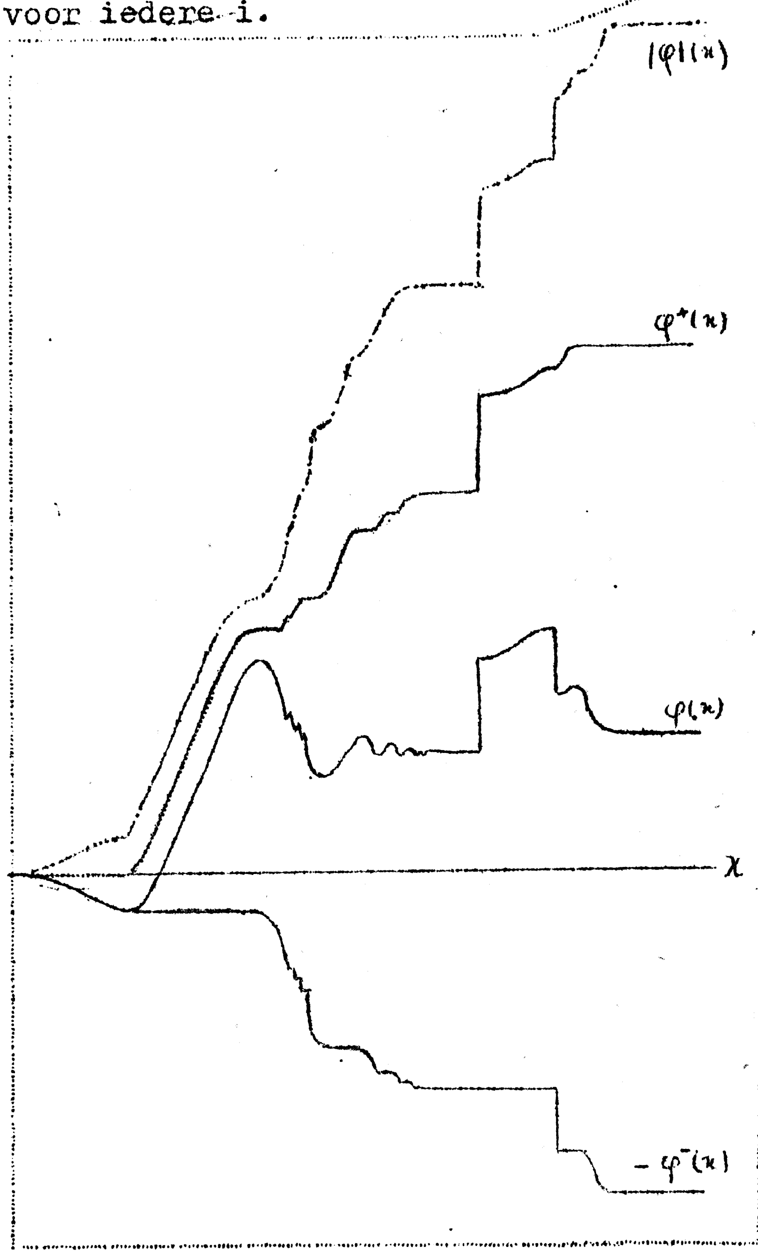
$\varphi(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = V(\Gamma)$ (eindig),

Dan is: $\varphi(x) = \varphi^{+}(x) - \varphi^{-}(x)$,

$\varphi^{\pm}(x) = V^{\pm}(\Gamma_x)$; $\varphi^{+}(x)$ en $\varphi^{-}(x)$ zijn monotoon niet dalend, $\varphi^{\pm}(\infty) = V^{\pm}(\Gamma)$.

Voorts zijn $\varphi(x), \varphi^{+}(x), \varphi^{-}(x)$ alle continu naar rechts:

$\lim_{x \searrow a} \varphi(x) = \varphi(a)$ [2], enz. Waarom?



[1] L bestaat uit alle vzn, die kunnen worden verkregen door, uitgaande van open intervallen (in algemeen topologische ruimten: open vzn), aftelbaar vaak de bewerkingen uit te voeren: 1. het vormen van het complement ener reeds gevonden vz, 2. het vormen van de vereniging ener aftelbare vz van reeds gevonden vzn. Alle bekende puntvzn, voor zover zonder gebruikmaken van het welordeningsaxioma, behoren hiertoe.

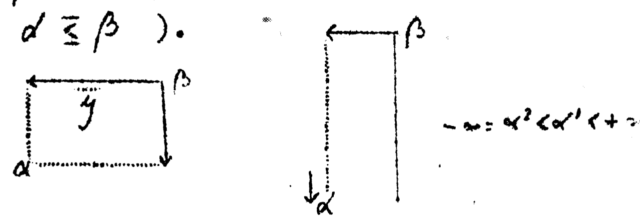
[2] $x \nearrow a$, $x \searrow a$ betekent: x nadert stijgend resp. dalend tot a.

$\varphi^+(x)$ volgt alleen de stijgingen, $\varphi^-(x)$ alleen de dalingen van $\varphi(x)$.
Zij (a,b) het interval $a<x<b$; $(a,b]$: $a<x\leqq b$ en $[a,b]$: $a\leqq x\leqq b$, dan is:

Definitie: $\varphi(a,b] \stackrel{df}{=} V(a,b]$ (=afkorting voor $V((a,b]))$) $= \varphi(b)-\varphi(a)$.
$\varphi(a,b) \stackrel{df}{=} V(a,b) = \lim_{x\nearrow b}\varphi(a,x] = \lim_{x\nearrow b}\varphi(x) - \varphi(a)$ en:
$\varphi[a,b] \stackrel{df}{=} V[a,b] = \lim_{x\nearrow a}\varphi(x,b] = \varphi(b) - \lim_{x\nearrow a}\varphi(x)$.
$|\varphi|(a,b] \stackrel{df}{=} \sup \sum_1^n |\varphi(x_{i-1},x_i]|$ voor alle n en alle x_i met $x_0 = a \leqq x_{i-1} \lneqq x_i \leqq x_n = b$. Dit is de <u>totale variatie</u> van φ op $(a,b]$. Is $\sup|\varphi|(a,b]$ voor alle reëele a en $b\geqq a$ eindig, dan heet φ een fct van <u>begrensde variatie</u>.

Opmerking: in plaats van $\sup\sum_1^N$ voor alle n enz, kan men ook nemen: $\sup\sum_1^\infty$.

<u>Uitbreiding tot meer dimensies</u>: Zijn α,β,λ,μ enz punten ener r-dimensionale Cartesische ruimte R_r, α^i de i^e coördinaat van α enz, dan is $\alpha<\beta$ resp. $\alpha\leqq\beta$ als $\alpha^i<\beta^i$ resp. $\alpha^i\leqq\beta^i$ voor <u>iedere</u> i.
(N.B.: ook $(\alpha^1,\alpha^2) \longrightarrow (\beta^1,\alpha^2)$ valt dus onder $\alpha\leqq\beta$).



Is $\mathfrak{J}$ het open "interval" $\alpha<\lambda<\beta$ dan zij $\dot{\mathfrak{J}}$ het halfopen int. $\alpha<\lambda\leqq\beta$ en $\bar{\mathfrak{J}}$ het gesloten interval $\alpha\leqq\lambda\leqq\beta$.
Voor $\neg_1\alpha<\beta_1$ stellen $(\alpha,\beta]$ en (α,β) de lege vz voor, evenzo $[\alpha,\beta]$ voor $\neg_1\alpha\leqq\beta_1$ terwijl $[\alpha,\alpha]=\alpha$ is en $[\alpha,\beta]$= =afgesloten interval van lagere dimensie is voor $\underbrace{\alpha\leqq\beta}_{\text{en } \neg_1\alpha\leqq\beta_1}$. We definiëren nog: $|\beta-\alpha| = \max_i |\beta^i-\alpha^i|$.

Bij een in de gehele R_r gedefinieerde fct $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda^1,\ldots,\lambda^r)$ met $\lim\varphi = 0$, als minstens één $\lambda^i\to-\infty$, bepalen wij een (half-open) intervalfct

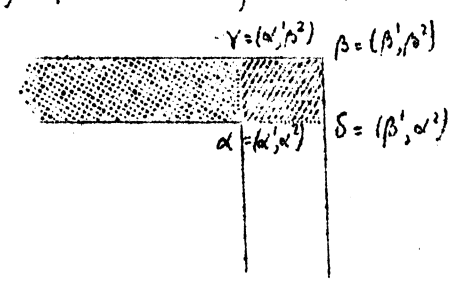
$$\varphi(\dot{\mathfrak{J}}) = \varphi(\alpha_1,\alpha_0] = \sum(-1)^{h_1+\ldots+h_r}\varphi(\alpha^1_{h_1},\ldots,\alpha^r_{h_r}) \text{ voor } \alpha_1<\alpha_0,$$

waarbij de sommatie zich uitstrekt over $h_1,\ldots,h_r$, die onafhankelijk van elkaar de waarden 0 en 1 doorlopen, en:

$$\varphi(\dot{\mathfrak{J}}) = \varphi(\alpha_1,\alpha_0] = 0 \text{ voor } \neg_1\alpha_1<\alpha_{0_1}.$$

<u>Opmerking</u>: Op analoge wijze kan ieder half-open interval $\dot{\mathfrak{J}}$ beschouwd worden als een (r-1)-voudig geïtereerd verschil van 2^r oneindige half-open intervallen.

<u>Voorbeeld</u>: r=2 ; $\varphi(\alpha,\beta] = \varphi(\beta^1,\beta^2) - \varphi(\beta^1,\alpha^2) - \varphi(\alpha^1,\beta^2) + \varphi(\alpha^1,\alpha^2)$
en: $(\alpha,\beta] = (-\infty,\beta] -- (-\infty,\delta] --$
$-- \{(-\infty,\gamma] -- (-\infty,\alpha]\}$,
waarin $(-\infty,\lambda]$ = vz van alle punten $\mu\leqq\lambda$ is, $\varphi(-\infty,\beta] = \varphi(\beta^1,\beta^2)$ enz.
We veronderstellen bovendien, dat φ van <u>begrensde variatie</u> is.

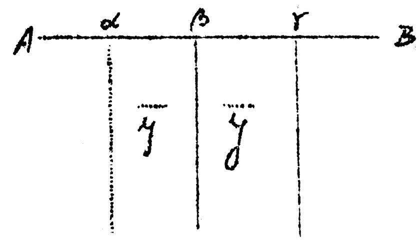


<u>Definitie</u>: Een fct $\varphi(\lambda)$, gedefinieerd voor alle λ in R_r, heet van <u>begrensde variatie</u> als $C = \sup\sum_1^\infty|\varphi(\mathfrak{J}_m)|$ bestaat voor alle rijen <u>disjuncte</u> intervallen en als φ op ieder (r-1) dimensionaal hypervlak // één der coördinaatvlakken van begrensde variatie is.

Opmerking: a) rij disjuncte intervallen betekent: $\bar{\mathfrak{J}}_m \frown \bar{\mathfrak{J}}_n = 0$ voor $m \neq n$.

b) Bovenstaande definitie is, voor $r=2$ afkomstig van G.N.HARDY (1906) en KRAUSE (1903); H.W.YOUNG (1913) heeft, ook voor $r=2$ bewezen, dat het, wat de 2^e voorwaarde betreft, voldoende is te onderstellen, dat $\varphi(x^1, x^2)$ voor één constante x^1 als fct van x^2 en voor één constante x^2 als fct van x^1 van begrensde variatie is; zie Hobson: Theory of Functions of a real variable, Cambridge 1927, dl I bl 345.

c) in plaats van deze voorwaarde stellen wij de randvoorwaarde voor φ : $\lim \varphi = 0$ als minstens één van de coördinaten naar 0 gaat.



Deze is minder scherp dan de bovenstaande. Nl. is als aan de randvoorwaarde voldaan is:

$\varphi(\bar{\mathfrak{J}}) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$ en

$\varphi(\bar{\mathfrak{J}}) = \varphi(\gamma) - \varphi(\delta)$ enz,

zodat φ op de hele lijn AB, dus op iedere horizontale en verticale lijn van begrensde variatie is. Het omgekeerde geldt niet.

STELLING 10: De functie φ is te schrijven als de som van een monotoon niet dalende en een monotoon niet stijgende functie van begrensde variatie.

Opmerking: monotoon niet dalend is: $\varphi(\bar{\mathfrak{J}}) \geq 0$ voor alle $\bar{\mathfrak{J}}$. Dit is een scherpere voorwaarde, dan de gewone in punt 7 van deze stelling bewezene.

Bewijs: Voor de eenvoud $r=2$. φ is van begrensde variatie in R_t, dus à fortiori in een willekeurig interval $\bar{\mathfrak{J}}$; dus is er een rij disjuncte intervallen $\{\bar{\mathfrak{J}}_n\}$ in $\bar{\mathfrak{J}}$ met $\sum |\varphi(\bar{\mathfrak{J}}_n)| \geq C_{\mathfrak{J}} - \varepsilon$. Dus is er een eindig beginsegment van deze rij met: $\sum_1^N |\varphi(\bar{\mathfrak{J}}_n)| \geq C_{\mathfrak{J}} - 2\varepsilon$. Het sup is dus, genomen over alle eindige disjuncte rijen, hetzelfde als voor àlle (ook oneindige):

$\sum_1^N \varphi(\bar{\mathfrak{J}}_n) = \sum_1 \varphi(\bar{\mathfrak{J}}_n) + \sum_2 \varphi(\bar{\mathfrak{J}}_n)$, waarin $\sum_1$ alle termen ≥ 0 en $\sum_2$ alle termen < 0 bevat. $\sum_1 - \sum_2 \leq C_{\mathfrak{J}}$, dus $\sum_1$ en $-\sum_2$ beiden $\leq C_{\mathfrak{J}}$, dus bestaan ook: $\varphi^+(\bar{\mathfrak{J}}) = \sup \sum_1$ en $\varphi^-(\bar{\mathfrak{J}}) = -\inf \sum_2$, genomen over alle eindige rijen van disjuncte intervallen in $\bar{\mathfrak{J}}$. Zoek een eidige rij $\{\bar{\mathfrak{J}}_n\}$ waarvoor $\sum_1 \geq \varphi^+(\bar{\mathfrak{J}}) - \varepsilon$ is. Deze rij vullen we met een eindig aantal intervallen (waarvan dus een gedeelte niet-begrensde intervallen zijn) aan tot een eindige kategorie $\{\bar{K}_n\}$. Hierdoor kan $\sum_1$ niet dalen. Van deze kategorie maken we een eindig netwerk $\{\bar{N}_n\}$ door alle ribben tot aan de grenzen van $\bar{\mathfrak{J}}$ te verlengen (voorzover nodig). Ook nu kan $\sum_1$ niet dalen: is nl. $\varphi(\bar{K}_p) = +a$ en $\bar{K}_p$ in twee stukken $\bar{N}_q$ en $\bar{N}_s$ verdeeld, waarvan $\varphi(\bar{N}_q) = b$, dan is $\varphi(\bar{N}_s) = a-b$ (waarom?); één van beiden is $\geq a$. Construeer evenzo een eindig netwerk $\{\bar{M}_n\}$ in $\bar{\mathfrak{J}}$ met $-\sum_2 \geq \varphi^-(\bar{\mathfrak{J}}) - \varepsilon$ en vorm $\{\bar{N}_n\} \frown \{\bar{M}_n\}$, dan is voor dit eindig netwerk $\sum_1 \geq \varphi^+(\bar{\mathfrak{J}}) - \varepsilon$ en $\sum_2 \leq -\varphi^-(\bar{\mathfrak{J}}) + \varepsilon$. Bovendien is de intervalfct voor een dergelijk netwerk additief, dus

$$\sum_1 + \sum_2 = \varphi(\bar{\mathfrak{J}}).$$

$\varphi^+(\overline{\mathfrak{J}})$ en $\varphi^-(\overline{\mathfrak{J}})$ hebben nu de volgende eigenschappen:

1) $\varphi^+(\overline{\mathfrak{J}}) \geqq 0$; $\varphi^-(\overline{\mathfrak{J}}) \leqq 0$.

2) $\varphi^+(\overline{\mathfrak{J}}) + \varphi^-(\overline{\mathfrak{J}}) \leqq C$, dus begrensd.

3) $\varphi^+(\overline{\mathfrak{J}}) - \varphi^-(\overline{\mathfrak{J}}) = \varphi(\overline{\mathfrak{J}})$, want:

$\sum_1 \geqq \varphi^+(\overline{\mathfrak{J}}) - \varepsilon$; $\sum_2 \geqq -\varphi^-(\overline{\mathfrak{J}})$ dus $\sum_1 + \sum_2 = \varphi(\overline{\mathfrak{J}}) \geqq \varphi^+(\overline{\mathfrak{J}}) - \varphi^-(\overline{\mathfrak{J}}) - \varepsilon$

$\sum_2 \leqq -\varphi^-(\overline{\mathfrak{J}}) + \varepsilon$; $\sum_1 \leqq \varphi^+(\overline{\mathfrak{J}})$ dus $\sum_1 + \sum_2 = \varphi(\overline{\mathfrak{J}}) \leqq \varphi^+(\overline{\mathfrak{J}}) - \varphi^-(\overline{\mathfrak{J}}) + \varepsilon$

4) $\varphi^+(\overline{\mathfrak{J}})$ en $\varphi^-(\overline{\mathfrak{J}})$ zijn additief op eindige of oneindige intervallen, d.w.z. vormen $\overline{\mathfrak{J}}_k$ een eindige kategorie op $\overline{\mathfrak{J}}$, dan is:

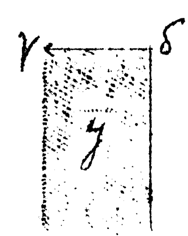
$$\varphi^{\pm}(\overline{\mathfrak{J}}) = \sum_1^N{}^k \varphi^{\pm}(\overline{\mathfrak{J}}_k).$$

Bewijs. $\varphi^+(\overline{\mathfrak{J}}) \geqq \sum^k \varphi^+(\overline{\mathfrak{J}}_k)$ (waarom?). Er is een eindig netwerk op $\overline{\mathfrak{J}}$ met $\sum_{1,\overline{\mathfrak{J}}} \geqq \varphi^+(\overline{\mathfrak{J}}) - \varepsilon$. Vorm de doorsnijding van dit netwerk met $\{\overline{\mathfrak{J}}_k\}$, dan blijft dit geldig, en tevens is: $\sum \varphi^+(\overline{\mathfrak{J}}_k) \geqq \sum'_{1,\overline{\mathfrak{J}}} \geqq \varphi^+(\overline{\mathfrak{J}}) - \varepsilon$ ($\sum'_1$ is $\sum_1$ na de doorsnijding). Evenzo voor φ^-.

5) Definieer nu $\varphi^{\pm}(\alpha) = \varphi^{\pm}(-\infty,\alpha]$, dan volgt uit 4), dat het verband tussen $\varphi^{\pm}(\lambda)$ en $\varphi^{\pm}(\overline{\mathfrak{J}})$ hetzelfde is als tussen $\varphi(\lambda)$ en $\varphi(\overline{\mathfrak{J}})$, dus: $\varphi^{\pm}(\alpha_1,\alpha_0] = \sum (-1)^{h_1+\dots+h_2} \varphi^{\pm}(\alpha^1_{h_1},\dots,\alpha^2_{h_2})$ voor $\alpha_1 < \alpha_0$.

6) $\varphi^+(\lambda)$ en $\varphi^-(\lambda)$ zijn van begrensde variatie (waarom?)

7) $\varphi^{\pm}(\beta) \geqq \varphi^{\pm}(\alpha)$ voor iedere $\beta \geqq \alpha$.



want (zie tekening):

$0 \leqq \varphi^+(\overline{\mathfrak{J}}) = \varphi^+(\delta) - \varphi^+(\gamma)$ (waarom?)

dus $\varphi^+(\delta) \geqq \varphi^+(\gamma)$ hetzelfde voor een horizontaal gelegen naar links onbegrensde strook.

Opmerking: Uit het bewijs volgt tevens, dat, als $\bigcup_1^N \overline{\mathfrak{J}}_n \supset \overline{\mathfrak{J}}$ is, geldt: $\sum_1^N \varphi(\overline{\mathfrak{J}}_n) \geqq \varphi(\overline{\mathfrak{J}})$.

STELLING 11. Iedere abs add vz-fct V op een vz $\Gamma \subset R_2$ bepaalt een fct van begrensde variatie $\varphi(\lambda)$ in R_2, waarvoor $\varphi(\overline{\mathfrak{J}}) = V^{\overline{\mathfrak{J}}}$ is voor iedere $\overline{\mathfrak{J}}$; $\lim \varphi(\lambda) = 0$ als minstens één $\lambda^i \to -\infty$ en die continu van rechts is ').

Bewijs: a) Breidt V uit tot een fct in R_2 door voor iedere $\Lambda \subset R_2$ te definiëren $V^\Lambda = V^{\Lambda \cap \Gamma}$(dus $|V|^{R_2 - \Gamma} = 0$). Definieert men nu $\varphi(\beta) = V^{(-\infty,\beta]}$ en $\varphi(\overline{\mathfrak{J}})$ op de boven beschreven wijze, dan volgt uit de additiviteit van V: $\varphi(\overline{\mathfrak{J}}) = V^{\overline{\mathfrak{J}}}$ voor iedere $\overline{\mathfrak{J}}$.

b) $\sum_1^\infty |\varphi(\overline{\mathfrak{J}}_n)| = \sum_1^\infty |V^{\overline{\mathfrak{J}}_n}| \leqq \sum |V|^{\overline{\mathfrak{J}}_n} = |V|^{\cup \overline{\mathfrak{J}}_n} \leqq |V|^\Gamma$, dus φ heeft begrensde variatie.

') "van" rechts is duidelijker dan de gebruikelijke term: "naar" rechts.

c) Als $\lambda' \to -\infty$, dan $V^{(-\infty,\lambda]} \to 0$ (waarom?) dus $\varphi(\lambda) \to 0$.
d) Als $\lambda_\nu \searrow a$, dan $\varphi(\lambda_\nu) \to \varphi(a)$. (Bewijs?)

Aanwijzing voor c) en d): Is Λ_n een rij vzn $\in$ L met $\Lambda_{n+1} \subset \Lambda_n$ voor alle n en $\bigcap_n^\infty \Lambda_n = \Lambda$, dan is $V^\Lambda = \lim\limits_n V^{\Lambda_n}$.

Bewijs: Zij $\Lambda_0 = \Gamma$, dan is $\Gamma -- \Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Lambda_{n-1} -- \Lambda_n)$;

$$V^{\Gamma -- \Lambda} = \sum_1^\infty V^{\Lambda_{n-1} -- \Lambda_n} = \lim_{N\to\infty} \sum_1^N V^{\Lambda_{n-1} -- \Lambda_n} = \lim_{N\to\infty} V^{\Gamma -- \Lambda_N}$$

$$V^\Lambda = \lim_{N\to\infty}(V^\Gamma - V^{\Gamma -- \Lambda_N}) = \lim_{N\to\infty} V^{\Lambda_N}.$$

Opmerking: de overeenkomstige eigenschap geldt voor $\Lambda = \bigcup \Lambda_n$ met $\Lambda_n \subset \Lambda_n$ voor alle n.

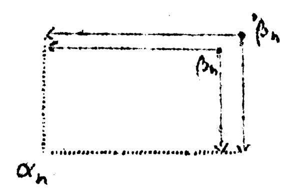
STELLING 12: Indien een overal in R_ν gedefinieerde functie $\varphi(\lambda)$
1) van begrensde variatie is,
2) continu van rechts is;
3) tot 0 nadert als minstens één van de coördinaten van λ naar $-\infty$ gaat;

dan bepaalt $\varphi(\lambda)$ ondubbelzinnig een abs add vz-fct V^Λ, gedefinieerd (minstens) voor alle vzn van Borel van R_ν, zodanig, dat $V^{\mathfrak{J}} = \varphi(\mathfrak{J})$ voor iedere $\mathfrak{J} \subset R_\nu$.

Bewijs: I. Zij $\varphi(\mathfrak{J}) \geqq 0$ voor iedere $\mathfrak{J}$.
a) $\varphi(\mathfrak{J})$ is abs add voor een in intervallen onderverdeeld interval. Bewijs:

Zij $\mathfrak{J} = \bigcup_1^\infty \mathfrak{J}_n$ ($\mathfrak{J}_n$ disjunct). Zij $\mathfrak{J} = (\alpha,\beta]$, $\mathfrak{J}_n = (\alpha_n,\beta_n]$ (waarin α en α_n oneigenlijk mogen zijn; $\alpha < \beta$, $\alpha_n < \beta_n$, dan is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een eigenlijk punt $'\alpha$ met $'\alpha > \alpha$ en $0 \leqq \varphi(\alpha,\beta] - \varphi('\alpha,\beta] \leqq \varepsilon$ (waarom?)

Eveneens $'\beta_n > \beta_n$ met:
$0 \leqq \varphi(\alpha_n,'\beta_n] - \varphi(\alpha_n,\beta_n] \leqq \frac{\varepsilon}{2^n}$
(Bewijs met behulp van de continuïteit van rechts).



$['\alpha,\beta] \subset \bigcup_1^\infty (\alpha_n,'\beta_n)$, dus volgens de overdekkingsstelling van Borel: $['\alpha,\beta] \subset \bigcup_1^N (\alpha_n,'\beta_n)$,

a fortiori: $('\alpha,\beta] \subset \bigcup_1^N (\alpha_n,'\beta_n]$, dus is (wegens het eindig aantal):

$\varphi('\alpha,\beta] \leqq \sum_1^N \varphi(\alpha_n,'\beta_n]$ (volgens de opmerking bij stelling 10 onderaan)

$\varphi(\alpha,\beta] \leqq \varphi('\alpha,\beta] + \varepsilon \leqq \sum_1^N \varphi(\alpha_n,'\beta_n] + \varepsilon \leqq$

$\leqq \sum_1^\infty \varphi(\alpha_n,'\beta_n] + \varepsilon \leqq \sum_1^\infty \varphi(\alpha_n,\beta_n] + 2\varepsilon$ voor iedere $\varepsilon > 0$, dus ook voor $\varepsilon = 0$.

Anderzijds is: $\varphi(\alpha,\beta] \geqq \sum_1^N \varphi(\alpha_n,\beta_n]$ (waarom?)
voor iedere N, dus ook voor $N \to \infty$, dus $\varphi(\alpha,\beta] = \sum_1^\infty \varphi(\alpha_n,\beta_n]$.

Opmerkingen: 1) Zij $\varphi = \varphi(R_\nu) = \varphi(-\infty,+\infty] = \lim \varphi(\alpha,\beta]$, als alle coördinaten van α naar $-\infty$ en alle coördinaten van β naar $+\infty$ gaan.

dan is $\varphi(R_1) = \sum_1^\infty \varphi(\mathfrak{J}_m)$ = C (totale variatie), met $\bigcup_1^\infty \mathfrak{J}_n = R_1$ en $\mathfrak{J}_m \cap \mathfrak{J}_n = 0$. (waarom?)

2) Uit het bewezene volgt, dat de eigenschap van de opmerking bij stelling 10 ook voor aftelbare rijen intervallen geldt. (Waarom? Aanwijzing: zij $\mathfrak{J} \subset \bigcup_1^\infty \mathfrak{J}_n$, verdeel $(\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}_n) - - \bigcup_1^{n-1} \mathfrak{J}_m$ in eindig veel disjuncte intervallen

b) Zij Λ in R_1 willekeurig, $\bar{\varphi}(\Lambda) = \inf \sum \varphi(\mathfrak{J}_n)$ voor <u>alle</u> rijen $\mathfrak{J}_n$ met $\bigcup_1^\infty \mathfrak{J}_n \supset \Lambda$; $\bar{\varphi}(\Lambda)$ bestaat voor iedere Λ en is ≥ 0.

Zij $\underline{\varphi}(\Lambda) = \varphi - \bar{\varphi}(R_1 - - \Lambda)$, $(\varphi = \varphi(R_1))$, dan is: $\bar{\varphi}(\cup \Lambda_n) \leq \sum \bar{\varphi}(\Lambda_n)$ (waarom?) en voor $\Lambda \subset M$: $\bar{\varphi}(\Lambda) \leq \bar{\varphi}(M)$ en $\underline{\varphi}(\Lambda) \leq \underline{\varphi}(M)$ (waarom?)

Voorts is $\bar{\varphi}(\Lambda) \geq \underline{\varphi}(\Lambda)$, want: zij $\Lambda \subset \bigcup \mathfrak{J}_n$ zo, dat $\sum \varphi(\mathfrak{J}_n) - \bar{\varphi}(\Lambda) \leq \varepsilon$ en $R_1 - - \Lambda \subset \bigcup \mathfrak{J}_n$ zo, dat $\sum \varphi(\mathfrak{J}_n) - \bar{\varphi}(R_1 - - \Lambda) \leq \varepsilon$, dan is:

$\varphi \leq \sum \varphi(\mathfrak{J}_n) + \sum \varphi(\mathfrak{J}_n) \leq \bar{\varphi}(\Lambda) + \bar{\varphi}(R_1 - - \Lambda) + 2\varepsilon$ voor iedere ε, dus ook voor $\varepsilon = 0$.

c) Zij L de klasse van alle vzn Λ met $\bar{\varphi}(\Lambda) = \underline{\varphi}(\Lambda)$ (notatie hiervoor: $V(\Lambda)$). Is $\Lambda \in L$, dan ook $R_1 - - \Lambda \in L$ (waarom?). Tot L behoren alle $\mathfrak{J}$ en verenigingen van eindig vele $\mathfrak{J}$ en hun complementen (waarom?). Bewezen moet worden, dat alle vzn van Borel tot L behoren en dat V op L abs add is.

d) Is $M = \bigcup_1^\infty \mathfrak{J}_n$, $\mathfrak{J}_n$ disjunct, dan is $M \in L$ en $V(M) = \sum_1^\infty \varphi(\mathfrak{J}_n) = \sum_1^\infty V(\mathfrak{J}_n)$.

<u>Bewijs</u>: $\bar{\varphi}(M) \leq \sum_1^\infty \varphi(\mathfrak{J}_n)$ triviaal; rechterlid convergent, dus

$\exists_K \sum_{K+1}^\infty \varphi(\mathfrak{J}_n) \leq \varepsilon$. Zij $\Lambda_K = \bigcup_1^K \mathfrak{J}_n$, $N_K = R_1 - - \Lambda_K$ = vereniging van <u>eindig</u> veel disjuncte $\mathfrak{J}_m$, dus $\varphi(N_K) = \sum \varphi(\mathfrak{J}_m)$ en $\varphi = \sum \varphi(\mathfrak{J}_m) + \sum_1^K \varphi(\mathfrak{J}_n)$.

Verder is: $R_1 - - M \subset N_K$, dus: $\underline{\varphi}(M) \geq \varphi - \varphi(N_K) = \sum_1^K \varphi(\mathfrak{J}_n) \geq$

$\geq \sum_1^\infty \varphi(\mathfrak{J}_n) - \varepsilon \geq \bar{\varphi}(M) - \varepsilon$ voor iedere ε , dus ook voor $\varepsilon = 0$.

Dus is $\underline{\varphi}(M) = \bar{\varphi}(M) = \sum_1^\infty \varphi(\mathfrak{J}_n)$.

<u>Gevolg</u>: 1. Is M open, dan $M \in L$ en $V(M) = \sum V(\mathfrak{J}_n)$ als $M = \bigcup \mathfrak{J}_n$ is, $\mathfrak{J}_n$ disjunct. (Open vz is door halfopen intervallen uit te putten).

2. V is abs add op open vzn.

3. Is M afgesloten, dan is $M \in L$.

e) Bij iedere $\varepsilon > 0$ en iedere Λ is een open vz $M \supset \Lambda$ met $V(M) \leq \bar{\varphi}(\Lambda) + \varepsilon$

<u>Bewijs</u>: Er is een $\bigcup \mathfrak{J}_n \supset \Lambda$ met $\sum V(\mathfrak{J}_n) \leq \bar{\varphi}(\Lambda) + \frac{1}{2}\varepsilon$. Bij iedere $\mathfrak{J}_n$ is een (open) $\mathfrak{J}_n' \supset \mathfrak{J}_n$ met $V(\mathfrak{J}_n') - V(\mathfrak{J}_n) \leq 2^{-n-1} \cdot \varepsilon$. Dan is $M = \bigcup \mathfrak{J}_n' \supset \Lambda$ en open en $V(M) \leq \sum V(\mathfrak{J}_n') \leq \sum V(\mathfrak{J}_n) + \frac{1}{2}\varepsilon \leq \bar{\varphi}(\Lambda) + \varepsilon$.

<u>Gevolg</u>: Bij iedere Λ is een <u>afgesloten</u> $N \subset \Lambda$ met $V(N) \geq \underline{\varphi}(\Lambda) - \varepsilon$.

f) Is $\Lambda \in L, M \in L$, $\Lambda \cap M = o$, dan is $\Lambda \cup M \in L$ en $V(\Lambda \cup M) = V(\Lambda) + V(M)$.

<u>Bewijs</u>: Er zijn afgesloten Λ' en M' met $V(\Lambda') \geq V(\Lambda) - \frac{\varepsilon}{3}$, $V(M') \geq V(M) - \frac{\varepsilon}{3}$

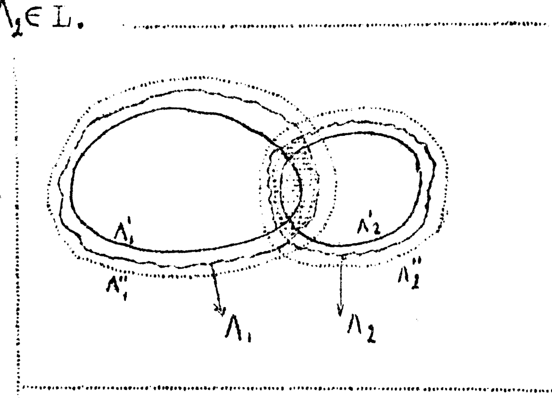
$\Lambda' \subset \Lambda$, $M' \subset M$. Dus $\Lambda' \cap M' = o$. Er zijn dus <u>open</u> Λ'' en M'' met $\Lambda'' \supset \Lambda'$, $M'' \supset M'$, $\Lambda'' \cap M'' = o$. Er is ook een open vz $N \supset (\Lambda' \cup M')$ met

$V(N) \leq V(\Lambda' \cup M') + \frac{\varepsilon}{3}$; $\Lambda''' = \Lambda'' \cap N$ en $M''' = M'' \cap N$ voldoen aan dezelfde voorwaarden als Λ'' en M''. Dan is:

$V(\Lambda) + V(M) \leqq V(\Lambda') + V(M') + 2/3\,\varepsilon \leqq V(\Lambda''') + V(M''') + 2/3\,\varepsilon =$
$= V(\Lambda''' \cup M''') + 2/3\,\varepsilon \leqq V(N) + 2/3\,\varepsilon \leqq V(\Lambda' \cup M') + \varepsilon \leqq \underline{\varphi}(\Lambda \cup M) + \varepsilon \leqq$
$\leqq \overline{\varphi}(\Lambda \cup M) + \varepsilon \leqq V(\Lambda) + V(M) + \varepsilon$. Dus $\underline{\varphi}(\Lambda \cup M) = \overline{\varphi}(\Lambda \cup M) = V(\Lambda)+V(M)$.

Gevolg: Is $\{K\}$ een eindige kategorie op Λ en $K_i \in L$ voor iedere i, dan is $\Lambda \in L$ en $V(\Lambda) = \sum V(K_i)$.

g) Is $\Lambda_1 \in L$, $\Lambda_2 \in L$, dan is $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \in L$.



Bewijs: Er is voor iedere $\varepsilon > 0$ en i=1 of 2 een afgesloten Λ'_i en een open Λ''_i met $\Lambda'_i \subset \Lambda_i \subset \Lambda''_i$ en $V(\Lambda'_i) + \frac{\varepsilon}{4} \geqq V(\Lambda_i) \geqq V(\Lambda''_i) - \frac{\varepsilon}{4}$.

$\Lambda''_i -- \Lambda'_i$ is open, dus $\in L$. Dus $V(\Lambda''_i -- \Lambda'_i) + V(\Lambda'_i) = V(\Lambda''_i)$,

$V(\Lambda''_i -- \Lambda'_i) \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$.

$(\Lambda'_1 \cap \Lambda'_2) \subset (\Lambda_1 \cap \Lambda_2) \subset (\Lambda''_1 \cap \Lambda''_2)$, dus $V(\Lambda'_1 \cap \Lambda'_2) \leqq \underline{\varphi}(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) \leqq \overline{\varphi}(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) \leqq$
$\leqq V(\Lambda''_1 \cap \Lambda''_2) = V(\Lambda'_1 \cap \Lambda'_2) + V((\Lambda''_1 \cap \Lambda''_2) -- (\Lambda'_1 \cap \Lambda'_2)) \leqq$
$\leqq V(\Lambda'_1 \cap \Lambda'_2) + V(\Lambda''_1 -- \Lambda'_1) + V(\Lambda''_2 -- \Lambda'_2) \leqq V(\Lambda'_1 \cap \Lambda'_2) + \varepsilon$.

Dus $\underline{\varphi}(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = \overline{\varphi}(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$.

Gevolg: Is $\Lambda \in L$, $M \in L$, dan ook $\Lambda -- M$ en $M -- \Lambda$ en $\Lambda \cup M$; zijn $\Lambda_i \in L$ $(i \leqq n)$, dan ook $\cap \Lambda_i$ en $\cup \Lambda_i$; $V(\Lambda)$ is additief.

h) Is $\Lambda = \bigcup_1^\infty \Lambda_n$, $\Lambda_m \cap \Lambda_n = 0$ voor $m \neq n$, $\Lambda_n \in L$ voor alle n, dan is $\Lambda \in L$ en $V(\Lambda) = \sum_1^\infty V(\Lambda_n)$.

Bewijs: $M_N = \bigcup_1^N \Lambda_n \in L$, $\sum_1^N V(\Lambda_n) = V(M_N) \leqq \underline{\varphi}(\Lambda)$ begrensd, dus $\sum_1^\infty V(\Lambda_n)$ is convergent. Kies N zo, dat $\sum_{N+1}^\infty V(\Lambda_n) \leqq \varepsilon$.

$\underline{\varphi}(\Lambda) \leqq \overline{\varphi}(\Lambda) \leqq \sum_1^\infty V(\Lambda_n)$ (waarom?) $\leqq \sum_1^N V(\Lambda_n) + \varepsilon = V(M_N) + \varepsilon =$
$= V(R_\eta) - V(R_\eta -- M_N) + \varepsilon \leqq V(R_\eta) - \overline{\varphi}(R_\eta -- \Lambda) + \varepsilon = \underline{\varphi}(\Lambda) + \varepsilon$.

Dus $\underline{\varphi}(\Lambda) = \overline{\varphi}(\Lambda) = \sum_1^\infty V(\Lambda_n)$. Dus V is abs add op L.

Gevolg: 1. Is $\Lambda_n \in L$, dan is $\Lambda = \bigcup \Lambda_n \in L$. Want is $M_N = \bigcup_1^N \Lambda_n$, $M_0 = 0$, dan is $\Lambda = \bigcup M_N = \bigcup (M_N -- M_{N-1}) \in L$.

2. L bevat alle intervallen, alle complementen van zijn vzn, en alle verenigingen van aftelbaar veel van zijn vzn, dus alle vzn van Borel.

3. Bovendien is voor iedere $\varepsilon > 0$ in iedere vz Λ van Borel een afgesloten vz Λ' en een open vz Λ'' te vinden met $\Lambda' \subset \Lambda \subset \Lambda''$ en $V(\Lambda') + \varepsilon \geqq V(\Lambda) \geqq V(\Lambda'') - \varepsilon$. (Zie punt e).

II. Is niet $\varphi(\overline{\mathcal{I}}) \geqq 0$, dan zijn volgens stelling 10 twee monotone functies van begrensde variatie te vinden met $\varphi(\lambda) = \varphi^+(\lambda) - \varphi^-(\lambda)$, waarop I toegepast kan worden. Dit geeft een $V^+(\Lambda)$, $V^-(\Lambda)$; en

$V(\Lambda) = V^+(\Lambda) - V^-(\Lambda)$, per definitie. Gevolg 3 van I h) gaat over in:
$|V(\Lambda') - V(\Lambda)| \leqq \varepsilon$, $|V(\Lambda'') - V(\Lambda)| \leqq \varepsilon$.

III. Door de eis, dat V abs add is en dat $V(\overline{\mathcal{J}}) = \varphi(\overline{\mathcal{J}})$ voor iedere $\overline{\mathcal{J}}$ is V ondubbelzinnig bepaald op alle vzn van Borel (waarom?). Ook is φ door V ondubbelzinnig bepaald, indien φ aan de randvoorwaarde c van pagina 58 voldoet.

12. Indien V^Λ abs add is in R_λ en f_λ continu is in R_λ, kan $(Vf)^\Lambda = \int_\Lambda V^{d\lambda} f_\lambda$ voor iedere begrensde $\Lambda \in R_\lambda$, die de vereniging is van aftelbaar vele intervallen $\overline{\mathcal{J}}$, in het bijzonder dus voor ieder interval $\overline{\mathcal{J}}$ en voor iedere open vz Λ, rechtstreeks met behulp van de bij V behorende fct $\varphi(\lambda)$ van begrensde variatie worden bepaald, zonder tot de V^Λ voor willekeurige Λ over te gaan.

Bewijs. Is $\Lambda = \cup \overline{\mathcal{J}}_{on}$, dan kunnen deze disjunct aangenomen worden (waarom?) Λ is begrensd, dus is f op de afsluiting van Λ gelijkmatig continu; iedere $\overline{\mathcal{J}}_{on}$ kan dus voor iedere $\varepsilon > 0$ in disjuncte intervallen verdeeld worden, waarop $\text{var}_f \leqq \varepsilon$ is. Zijn $\overline{\mathcal{J}}_1, \overline{\mathcal{J}}_2, \ldots$ de intervallen, waarin Λ dan verdeeld wordt, $\Lambda = \cup \overline{\mathcal{J}}_n$, en is $\lambda_n \in \overline{\mathcal{J}}_n$ willekeurig, dan is:

$(Vf)^\Lambda = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sum^n f(\lambda_n) \cdot \varphi(\overline{\mathcal{J}}_n) = \lim\limits_{\delta \to 0} \sum^n f(\lambda_n) \cdot \varphi(\overline{\mathcal{J}}_n)$; bij deze laatste limiet behoeft wegens de gelijkmatige continuïteit alleen de eis gesteld te worden, dat iedere $\overline{\mathcal{J}}_n$ een "diameter" $|\beta - \alpha| \leqq \delta$ heeft, en dat $\lambda_n \in \overline{\mathcal{J}}_n$ is (en natuurlijk, dat de $\overline{\mathcal{J}}_n$ een kategorie op Λ vormen). De op deze wijze verkregen integraal heet de integraal van Stieltjes-Riemann van f_λ met betrekking tot de "fonction déterminante" $\varphi(\lambda)$.

Opmerkingen. 1. Klaarblijkelijk is reeds voldoende, dat f op Λ gelijkmatig continu is.

2. Met een geringe wijziging kan de definitie ook tot onbegrensde Λ uitgestrekt worden, indien f continu en $|f|$ integreerbaar (b.v. begrensd) is over Λ.

13. STELLING 13: Er is een $\Gamma^+ \in L$ en een $\Gamma^- \in L$ met $V^{\Gamma^+} = V^+(\Gamma)$ en $V^{\Gamma^-} = V^-(\Gamma)$.

Bewijs: We zoeken alle positieve ladingen bij elkaar en elimineren daarna de negatieve.

Zij $\varepsilon > 0$ en $V^{A_n} \geqq V^+ - \frac{\varepsilon}{2^n}$; $A_{n,0} = A_n$.

Als $\exists\, \Lambda_{n,m}: \Lambda_{n,m} \subset \Gamma -- A_{n,m}$ met $V^{\Lambda_{n,m}} \geqq \frac{\varepsilon}{2^{n+m+1}}$ $(m=0,1,2,\ldots)$, dan zij

$A_{n,m+1} = \Lambda_{n,m} \cup A_{n,m}$, anders $A_{n,m+1} = A_{n,m}$. Dan is $V^{A_{n,m+1}} \geqq V^{A_{n,m}}$.

Als $\exists\, \Lambda^{(1)}_{n,m}$ en als $\exists\, \Lambda^{(2)}_{n,m}$ met $V^{\Lambda^{(i)}_{n,m}} \geqq \frac{\varepsilon}{2^{n+m+1}}$ en $\Lambda^{(1)}_{n,m} \cap \Lambda^{(2)}_{n,m} = o$,

dan $\exists\, \Lambda_{n,m-1}$ met $V^{\Lambda_{n,m-1}} \geqq \frac{\varepsilon}{2^{n+m}}$.

Zij $B_n = \bigcup\limits^{(m)} A_{n,m}$, dan is $V^{B_n} \geqq V^{A_{n,m}} \geqq V^+ - \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Als $\Lambda \cap B_n = o$, dan is $V^\Lambda \leqq 0$, want als $V^\Lambda \geqq \frac{\varepsilon}{2^{n+m+1}}$ en $\Lambda \cap B_n = o$, dan $\exists \Lambda_{n,m} \subset \Gamma -- \Lambda_{n,m-1}$, $\Lambda_{n,m+1} \subset \Gamma -- \Lambda_{n,m}, \ldots$, met $V^{\Lambda_{n,m+h}} \geqq \frac{\varepsilon}{2^{n+m+h+1}}$ voor iedere h, dus.

$V^{B_n -- A_n} \geqq \sum_m^\infty V^{\Lambda_{n,i}} \geqq \frac{\varepsilon}{2^{n+m}}$, dus $V^{B_n} \geqq V^+$; contradictie

Derhalve is $\Gamma^+ \subset B_n$ voor iedere n.

Zij $\Gamma_n = \bigcap_0^n B_i$, dan is $\Gamma_{n+1} \subset \Gamma_n$; $\Lambda \subset \Gamma -- \Gamma_n \to V^\Lambda \geqq 0$; $V^{\Gamma_n} = V^{B_n} - V^{B_n -- \Gamma} \geqq$
$\geqq V^+ - \frac{\varepsilon}{2^n}$. Zij $\Gamma^+ = \bigcap_n \Gamma_n$, dan is $V^{\Gamma^+} = \lim_n V^{\Gamma_n} = V^+$.
Zij $\Gamma^- = \Gamma -- \Gamma^+$, dan is $V^{\Gamma^-} = V^-$.

Opmerking: 1. $\Lambda \subset \Gamma^+ \to V^\Lambda \geqq 0$; $\Lambda \subset \Gamma^- \to V^\Lambda \leqq 0$, niet andersom.
2. Γ^+ en Γ^- zijn behoudens vzn met $|V| = 0$ bepaald.
3. Is $\Lambda \in L$, dan voldoen $\Lambda^+ = \Gamma^+ \cap \Lambda$, $\Lambda^- = \Gamma^- \cap \Lambda$ aan de voorwaarden voor stelling 13 t.o.v. Λ (waarom?).
4. Is $V^M \geqq 0$ voor iedere $M \subset \Lambda$, dan is $\Lambda \subset \Gamma^+$ (waarom?) evenzo: is $V^M \leqq 0$ voor iedere $M \subset \Lambda$, dan is $\Lambda \subset \Gamma^-$.

14. Definitie: Zijn V en W abs add, dan is $V \equiv 0$ (W) als $|V|^\Lambda = 0$ voor iedere Λ met $|W|^\Lambda = 0$. (D.w.z. als iedere 0-vz van W een 0-vz van V is; gewoonlijk wordt V absoluut continu t.o.v. W genoemd; W heet een basis voor V). Voorbeeld: $V^\Lambda = (Wf)^\Lambda$. Ook: V^Λ is een ladings-, W^Λ een massaverdeling, en waar geen massa is, is ook geen lading.

Zij $V \equiv 0$ (W), $W \geqq 0$. We definiëren. $f_\Lambda = \sup_{\substack{M \subset \Lambda \\ W^M \neq 0}} \frac{V^M}{W^M}$ als $W^\Lambda \neq 0$ (dus > 0) is en als dit quotient begrensd is, $f_\Lambda = +\infty$, als $W^\Lambda \neq 0$ en het quotient onbegrensd is, en $f_\Lambda = -\infty$ als $W^\Lambda = 0$ (dus $V^\Lambda = 0$) is. [1]

Dan is $f_{\Lambda_1} \leqq f_{\Lambda_2}$ als $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ en zelfs als $\Lambda_1 \underset{\sim}{\subset} \Lambda_2$ (d.w.z. $\Lambda_1 \underset{W}{\subset} \Lambda_2$) is (waarom?) en $f_{\Lambda_1} = f_{\Lambda_2}$ als $\Lambda_1 \approx \Lambda_2$ (d.w.z. $\Lambda_1 \underset{W}{\approx} \Lambda_2$) is.

Zij a willekeurig reëel, Γ_a' een volgens stelling 13 bepaalde vz Γ^+_{aW-V}, zodat $aW^\Lambda - V^\Lambda \geqq 0$ op iedere $\Lambda \subset \Gamma_a'$ en $\leqq 0$ op iedere Λ buiten Γ_a' is. Is $aW^\Lambda = V^\Lambda$, dan kan Λ deels binnen deels buiten Γ_a' vallen. Γ_a' is niet ondubbelzinnig bepaald, maar zij voor iedere a op één der mogelijke wijzen gekozen. (Fysische interpretatie: f_Λ = maximale gemiddelde ladingsdichtheid - per eenheid van massa - binnen Λ). Dan geldt:

$f_\Lambda < a \to \Lambda \underset{\sim}{\subset} \Gamma_a' \to f_\Lambda \leqq a$. ($\underset{\sim}{\subset}$ is $\underset{W}{\subset}$). Is $a < b$, dan is $\Gamma_a' \underset{\sim}{\subset} \Gamma_b'$ (waarom niet noodzakelijk $\subset$?).

Zij $a_1, a_2, \ldots$ aftelbaar, overal dicht op de vz der reële getallen, $a_{-1} = -\infty$, $a_0 = +\infty$, $\Gamma_{a_{-1}} = 0$, $\Gamma_{a_0} = \Gamma$. Is Γ_{a_k} gedefinieerd voor alle $k < n$ ($k \geqq -1$), zodat $\Gamma_{a_k} \approx \Gamma_{a_k}'$ en dat $\Gamma_{a_k} \subset \Gamma_{a_l}$ voor $a_k < a_l$ ($k < n$, $l < n$) is, dan zij (a_l, a_m) het kleinste interval met $l < n$, $m < n$ (beide $\geqq -1$), dat a_n bevat (dus $a_l < a_n < a_m$). Dan zij $\Gamma_{a_n} = (\Gamma_{a_n}' \cap \Gamma_{a_m}) \cup \Gamma_{a_l}$.

---

[1]) I.p.v. voor f_Λ het sup te nemen kan de hele vz waarden van $\frac{V^M}{W^M}$ ($W^M \neq 0$) genomen worden. Voor vzn moet dan $J_1 < J_2$ gedefinieerd worden als: iedere element van J_1 < ieder element van J_2.

dan is $\Gamma_{a_h} \subset \Gamma_{a_n} \subset \Gamma_{a_j}$ als $a_h < a_n < a_j$ voor iedere $h < n$ en $j < n$ en
$\Gamma_{a_n} = (\Gamma'_{a_n} \cup (\Gamma_{a_l} -- \Gamma'_{a_n})) -- (\Gamma'_{a_n} -- \Gamma_{a_m}) \approx \Gamma'_{a_n}$. (waarom?)

Is nu a willekeurig reëel, dan definiëren we:
$\overline{\Gamma}_a = \bigcap \Gamma_{a_{m_n}}$ met $a_{m_n} \searrow a$ en $\underline{\Gamma}_a = \bigcup \overline{\Gamma}_{a-\varepsilon_n}$ met $\varepsilon_n \searrow 0$.
Analoog $\overline{\Gamma}_{-\infty}$ en $\underline{\Gamma}_{+\infty}$; $\overline{\Gamma}_{\infty} = \Gamma$, $\underline{\Gamma}_{-\infty} = 0$. Dan is:

1) $\overline{\Gamma}_a$ en $\underline{\Gamma}_a \in L$ voor iedere reële a en $a = \pm\infty$.
2) $a < b \rightarrow \underline{\Gamma}_a \subset \overline{\Gamma}_a \subset \underline{\Gamma}_b \subset \overline{\Gamma}_b$; $\underline{\Gamma}_a$ is éénduidig bepaald door de Γ'_{a_n}.
3) $\overline{\Gamma}_a = \bigcap \overline{\Gamma}_{a+\varepsilon_n}$; $\varepsilon_n \searrow 0$; $\overline{\Gamma}_a$ " " " " " ".
4) $\Lambda \underset{\sim}{\subset} \overline{\Gamma}_a \rightleftarrows f_\Lambda \leqq a$.
5) $\underline{\Gamma}_{+\infty} = \bigcup \overline{\Gamma}_n \approx \Gamma$; $\overline{\Gamma}_{-\infty} = \bigcap \overline{\Gamma}_n = \bigcap \underline{\Gamma}_n \approx 0$ (n geheel)

Bewijs: van de punten 1) en 3) worden aan de lezer overgelaten.

2) $a < b$; zij $a_{m_n} \searrow a$ en $a_{l_r} \searrow b$, dan is $a_{m_n} < a_{l_r}$ voor alle r en bijna alle n, dus $\overline{\Gamma}_a \subset \Gamma_{a_{m_n}} \subset \Gamma_{a_{l_r}}$, dus $\overline{\Gamma}_a \subset \overline{\Gamma}_b$. Dan is ook $\underline{\Gamma}_a \subset \overline{\Gamma}_a$ voor iedere a (waarom?). $\underline{\Gamma}_b = \bigcup \overline{\Gamma}_{b-\varepsilon_n}$, $b-\varepsilon_n > a$ (dus $\overline{\Gamma}_a \subset \overline{\Gamma}_{b-\varepsilon_n}$) voor bijna alle n, dus $\overline{\Gamma}_a \subset \underline{\Gamma}_b$. Hieruit volgt tevens, dat $\underline{\Gamma}_a$ onafhankelijk is van de voor de definitie gekozen rij ε_n . (waarom?).

4) a) $a_{m_n} \searrow a$; $\Lambda \underset{\sim}{\subset} \overline{\Gamma}_a \rightarrow \forall_n \Lambda \underset{\sim}{\subset} \Gamma'_{a_{m_n}} \rightarrow \forall_n f_\Lambda \leqq a_{m_n} \rightarrow f_\Lambda \leqq a$.

b) $a_{m_n} \searrow a$; $f_\Lambda \leqq a \rightarrow \forall_n f_\Lambda < a_{m_n} \rightarrow \forall_n \Lambda \underset{\sim}{\subset} \Gamma'_{a_{m_n}} \rightarrow \Lambda \underset{\sim}{\subset} \overline{\Gamma}_a$

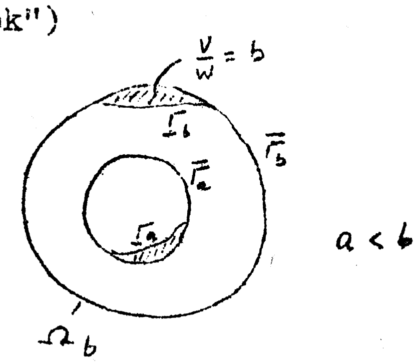
5) $M \underset{\sim}{\subset} \Gamma -- \bigcup \overline{\Gamma}_n \rightarrow \forall_n M \underset{\sim}{\subset} \Gamma -- \overline{\Gamma}_n \rightarrow \forall_n 0 \leqq W^M \leqq \frac{V^M}{n} \rightarrow W^M = 0$

evenzo voor het tweede gedeelte.

We definiëren nog: $\Omega_a = \overline{\Gamma}_a -- \underline{\Gamma}_a$ (een "rand")
en $\Omega_a^b = \overline{\Gamma}_b -- \overline{\Gamma}_a$ (een "strook")

Dan is:

$W^\Lambda \neq 0$ en $\Lambda \underset{\sim}{\subset} \Omega_a \rightleftarrows \forall_{\substack{M \underset{\sim}{\subset} \Lambda \\ W^M \neq 0}} \frac{V^M}{W^M} = a$.
$W^\Lambda \neq 0$ en $\Lambda \underset{\sim}{\subset} \Omega_a^b \rightleftarrows \forall_{\substack{M \underset{\sim}{\subset} \Lambda \\ W^M \neq 0}} a < \frac{V^M}{W^M} \leqq b$.



(Waarom? Aanwijzing: let op de definitie van $\overline{\Gamma}_a$: de "gebieden van constante ladingsdichtheid a", d.w.z. waarin voor iedere deelvz, die niet-0-vz is, $\frac{V}{W} = a$ is, zijn bij $\overline{\Gamma}_a$ ingelijfd.)

Definitie: Is $\lambda \in \underline{\Gamma}_\infty -- \overline{\Gamma}_{-\infty} = \Lambda_0$, dan is $q_\lambda = \inf_{\lambda \in \overline{\Gamma}_x} x$ eindig.

Deze definitie komt op hetzelfde neer als: $q_\lambda = \min_{\lambda \in \bar{\Gamma}_x} x$,
of ook: $q_\lambda = a$ voor $\lambda \in \Omega_a$. q is op een O-vz na op Γ gedefinieerd en L-meetbaar, want $\Gamma[q \leq a] = \bar{\Gamma}_a \in L$ voor iedere a. Ook is $\Gamma[a < q \leq b] = \Omega_a^b$

q is ook integreerbaar: een ε-kategorie op Λ_0 vormen we uit.
$\Omega_0 = \Gamma[q = 0]$, $K_{n+} = \Omega_{a_n}^{a_{n+1}}$ en $K_{n-} = \Omega_{-a_{n+1}}^{-a_n}$ (n geheel), met $a_n = (1+\varepsilon)^n$ voor $n \leq 0$ en $a = 1 + \varepsilon n$ voor $n \geq 0$. Dan is, als $k_n \in K_{n\pm}$ is:

$$\sum |W^{K_n}||q_{\kappa_n}| \leq \sum \frac{|V|^{K_{n+} \cup K_{n-}}}{a_n} a_{n+1} = \sum_{K_p \in \{K\}} |V|^{K_p}(1+\varepsilon) = |V|^{\Lambda_0}(1+\varepsilon)$$

dus begrensd. De integreerbaarheid is hiermee aangetoond en voor de integraal geldt: $(Wq)^\Lambda = V^\Lambda$. Is nl. $\{K\} \cap \Lambda = \{K'\}$, dan is:

$$\sum_m \frac{V^{K'_{m-}}}{a_{m+1}} a_m + \sum_n \frac{V^{K'_{n+}}}{a_{n+1}} a_n \leq \sum_{K_p \in \{K\}} W^{K'_p} q_{\kappa_p} \leq \sum_m \frac{V^{K'_{m-}}}{a_m} a_{m+1} + \sum_n \frac{V^{K'_n}}{a_n} a_{n+1}.$$

dus: $$\sum V^{K'_{m-}} + \sum \frac{V^{K'_{n+}}}{1+\varepsilon} \leq \sum W^{K'_p} q_{\kappa_p} \leq \sum V^{K'_{m-}} + \sum V^{K'_{n+}}(1+\varepsilon)$$

dus: $V^\Lambda - \varepsilon V^{+\Lambda} \leq -V^{-\Lambda} + (1-\varepsilon)V^{+\Lambda} \leq W^{K'_p} q_{\kappa_p} \leq -V^{-\Lambda} + (1+\varepsilon)V^{+\Lambda} \leq V^\Lambda + \varepsilon V^{+\Lambda}$
en $\varepsilon \searrow 0$ levert de gewenste uitkomst.

STELLING 14: Zijn V en W abs add vz-fcts op Γ en is $V \equiv 0$ (W), dan is er een L-meetbare punt-fct q_λ op $\Lambda_0 \approx \Gamma$ met: $(Wq)^\Lambda = V^\Lambda$. q_λ is behoudens aequivalentie bepaald.

Het bestaan van deze q_λ is in het bovenstaande bewezen voor $W \geq 0$. Is $W \leq 0$, dan bepalen we q'_λ met behulp van $W' = -W \geq 0$ en nemen $q_\lambda = -q'_\lambda$. Is W willekeurig, dan splitsen we Γ in Γ^+ en Γ^- en bepalen voor deze twee vzn de q_λ apart. Het is duidelijk, dat het steeds mogelijk zal zijn voor het algemene geval een dergelijke procedure te volgen en we zullen ook verder slechts het geval $W \geq 0$ beschouwen.

Dat q_λ op aequivalentie na bepaald is, ziet men aldus. was er een L-meetbare q'_λ met eveneens $(Wq)^\Lambda = V^\Lambda$ en was $q_\lambda \neq q'_\lambda$ op een niet-O-vz dan kan men $q_\lambda < q'_\lambda$ onderstellen op een niet-O-vz (waarom?) en zelfs $q_\lambda \leq x$ en $q'_\lambda \geq x + \eta$, $\eta > 0$ op een vz Λ met $W^\Lambda = W^{\pm\Lambda} \neq 0$ (waarom?)
Dit is echter in tegenspraak met: $(Wq)^\Lambda = (Wq')^\Lambda$.

Definitie: de fct q wordt hier het quotient van V en W genoemd.

Notatie: $q = \left(\frac{V}{W}\right)$. Gewoonlijk wordt q de afgeleide van V met betrekking tot W genoemd. Strikt genomen is $\left(\frac{V}{W}\right)$ een klasse van aequivalente fcts, zodat i.p.v. het =-teken eigenlijk een $\in$-teken zou moeten staan.

Zij $V_{\pm}^{\wedge} = \pm V^{\wedge \cap \Gamma_w^{\pm}}$, dan is $(\frac{V}{W}) = (\frac{V_+}{W^+}) - (\frac{V_-}{W^-})$. Dit is de splitsing, die in de opmerking na stelling 14 bedoeld is.

Voorbeelden. 1) Zij $W = |V|$ dan is b.v. $(\frac{V}{|V|}) = +1$ op Γ_V^+, en $= -1$ op Γ_V^-.

evenzo $(\frac{V^+}{|V|})_\lambda \approx |_\lambda^{\Gamma_V^+}$, $(\frac{V^-}{|V|})_\lambda \approx |_\lambda^{\Gamma_V^-}$.

2) Zij $V^\wedge = (Wf)^\wedge$, f_λ W-integreerbaar. Dan is $V \equiv O(W)$

en $(\frac{V}{W}) \underset{w}{\approx} f$.

Eigenschappen. 1) $(\frac{cV}{W}) \approx c.(\frac{V}{W})$ voor c reëel.

2) $V_1 \equiv O(W)$; $V_2 \equiv O(W)$ dan is $(\frac{V_1+V_2}{W}) \approx (\frac{V_1}{W}) + (\frac{V_2}{W})$.

Speciaal: $(\frac{V}{W}) = (\frac{V^+}{W}) - (\frac{V^-}{W})$.

3) $U \equiv O(V)$; $V \equiv O(W)$ dan is $(\frac{U}{W}) \approx (\frac{U}{V})(\frac{V}{W})$.

4) $W \geqq 0$ en $V = 0 \longrightarrow q \approx 0$

(dus $W \geqq 0$ en $(Wf) = 0 \longrightarrow f \approx 0$).

Bewijs. 1) Zij $(\frac{V}{W}) = q$, dan is cq evenals q L-meetbaar en bijna overal gedefinieerd en $(W.cq) = c(Wq) = cV$, dus $(\frac{cV}{W}) \approx cq$.

2) Zij $(\frac{V_1}{W}) = q_1$ en $(\frac{V_2}{W}) = q_2$, dan zijn q_1 en q_2 L-meetbaar en gedefinieerd resp. op $\Lambda_1 \approx \Gamma$ en $\Lambda_2 \approx \Gamma$. q_1+q_2 is dan gedefinieerd op $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \approx \Gamma$ en L-meetbaar, want:

$$\Gamma[q_1+q_2 < a] = \bigcup_{\varepsilon_m \searrow 0} \left[\bigcup_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \Gamma[q_1 \leq n\varepsilon_m] \cap \Gamma[q_2 < a - n\varepsilon_m] \right\} \right] \in L$$

voor iedere a (waarom?)

Uit $V_1 \equiv O(W)$ en $V_2 \equiv O(W)$ volgt $V_1 + V_2 \equiv O(W)$ en verder is.

$$V_1 + V_2 = (Wq_1) + (Wq_2) = (W.(q_1+q_2)).$$

3) Zij $(\frac{V}{W}) = q$ en $(\frac{U}{V}) = p$, dan zijn p en q L-meetbaar en gedefinieerd resp. op $\Lambda_0 \approx \Gamma$ en $M_0 \approx \Gamma$. pq is dan gedefinieerd op $\Lambda_0 \cap M_0 \approx \Gamma$. We vormen nu als volgt een ε-kategorie voor pq:

Zij $\Lambda_n^p = \Gamma[n < p \leqq n+1]$ en $\Lambda_m^q = \Gamma[m < q \leqq m+1]$ (n en m geheel),

Zij $\{K_n^q\}$ een $\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{|n|+1}$ -kategorie van q en $\{K_m^p\}$ een $\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{|m|+1}$ -kategorie van p,

($\varepsilon > 0$), dan vormen alle $[\Lambda_n^p \cap K_n^q] \cap [\Lambda_m^q \cap K_m^p] = K_\nu$ ($\nu = n,m$) een ε-kategorie van pq (bewijs?)(en tevens een $\frac{1}{2}\varepsilon$-kategorie van p en q afzonderlijk.) Deze bestaat dus voor iedere $\varepsilon > 0$, dus is pq L-meetbaar (bewijs?)

Uit $U \equiv O(V)$ en $V \equiv O(W)$ volgt $U \equiv O(W)$.

Daar $V = (Wq)$ en $U = (Vp) = ((Wq)p)$ is, is nog te bewijzen, dat $((Wq)p) = (W(qp))$ is. Zij $\Lambda \subset \Lambda_0 \cap M_0$, dan is

$$\left|(Wq)^{K_\nu \cap \Lambda} - W^{K_\nu \cap \Lambda} q_{\varkappa_\nu}\right| \leq \tfrac{1}{2} \varepsilon |W|^{K_\nu \cap \Lambda} \qquad (\varkappa_\nu \in K_\nu)$$

dus is: $\displaystyle\sum_{\varkappa_\nu \in K_\nu} (Wq)^{K_\nu \cap \Lambda} p_{\varkappa_\nu} = \sum_{\varkappa_\nu \in K_\nu} W^{K_\nu \cap \Lambda} q_{\varkappa_\nu} p_{\varkappa_\nu} + \tfrac{1}{2} \theta \varepsilon |W|^{\Lambda} \quad (|\theta| \leq 1)$

$\varepsilon \searrow 0$ levert het gevraagde.

15. STELLING 15. Zijn V en W abs add, dan is er steeds een (op aequivalentie t.o.v. W na bepaalde) q, een ondubbelzinnig bepaalde R en een op een simultane 0-vz van V en W na bepaalde $\Delta \subset \Gamma$, zodat $V = (Wq) + R$, $|W|^{\Delta} = 0$ en $|R|^{\Gamma - \Delta} = 0$ is.

Bewijs: Vorm door successieve absorptie, zoals bij het bewijs van stelling 13 (maar nu is absorptie voldoende en het eliminatieproces overbodig) een "grootste" vz Δ met $|V|^{\Delta} > 0$ en $|W|^{\Delta} = 0$, die de eigenschap heeft, dat, als $|W|^{\Lambda} = 0$ en $|V|^{\Lambda} \neq 0$ is, Λ op een 0-vz van V na in Δ ligt. Zij $R^{\Lambda} = V^{\Lambda \cap \Delta}$, dan is $|R|^{\Gamma - \Delta} = 0$, en $V = V_1 + R$ met $V_1 \equiv O(W)$, dus

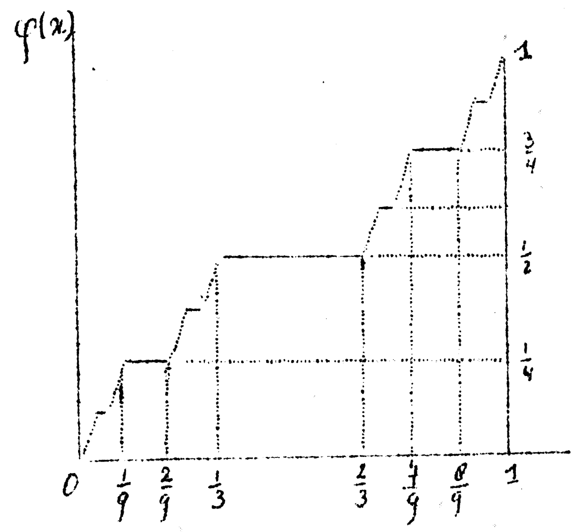
$$V = (Wq) + R.$$

Opmerking. is W continu, dan is (Wq) dit ook (waarom?) en R is te splitsen in een continu - (V_3) en een discreet gedeelte (V_2). Zo is iedere V met betrekking tot een continue W te splitsen in 3 vz-fcts. $V = V_1 + V_2 + V_3$, waarvan $V_1 = (Wq)$ is (V_1 zgn. "absoluut continu" t.o.v. W), V_2 discreet en V_3 een continue rest. Het is duidelijk, dat deze V_3 niet $= 0$ behoeft te zijn. Dit is zelfs niet noodzakelijk, als W b.v. de Lebesgue-maat van Γ voorstelt (en Γ b.v. de reëele as is).

Als voorbeeld hiervan geven we de volgende homogene massaverdeling op de vz van Cantor, die gegeven wordt door:

$$x = 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \qquad a_n = 0 \text{ of } 1$$

(zie figuur)



Is $x = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ ($a_n = 0$, 1 of 2),

dan is $\varphi(x) = \sum \frac{\alpha_n}{2^n}$, waarin

$\alpha_n = \left[\frac{a_n + 1}{2}\right]$ is, een continue monotoon niet dalende fct van x, want voor $0 \leq y - x \leq 3^{-n}$ is $0 \leq \varphi(y) - \varphi(x) \leq 2^{-n}$; φ levert ons volgens stelling 12 de gewenste vz-fct V en uit de continuïteit van φ volgt de continuïteit van V (waarom?). V is echter niet differentieerbaar, daar de Lebesgue-maat van de vz van Cantor $= 0$ is.

16. Zijn Γ^1 en Γ^2 vzn, zij L_a ($a=1,2$) een afgesloten vz-lichaam op Γ^a. De vz Γ van alle paren $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ met $\lambda_a \in \Gamma^a$ heet de <u>product-vz</u> van Γ^1 en Γ^2 ; notatie: $\Gamma = \Gamma^{12} = (\Gamma^1, \Gamma^2)$.

Zij P de klasse van alle <u>product-vzn</u> $\Pi = (\Pi^1, \Pi^2) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\}_{\lambda_a \in \Pi^a}$, $\Pi^a \in L_a$ (andere notatie: $\Pi = \Pi^1 \times \Pi^2$), dan is: $\bigcap_1^\infty \Pi_n = (\bigcap_1^\infty \Pi_n^1, \bigcap_1^\infty \Pi_n^2) \in P$; een eindige, resp. aftelbare vereniging van Π's is steeds als eindige resp. aftelbare vereniging van disjuncte Π's te schrijven (waarom?);

$\Gamma -- \Pi = (\Gamma^1 -- \Pi^1, \Gamma^2) \cup (\Gamma^1, \Gamma^2 -- \Pi^2) = \Pi_1 \cup \Pi_2$.

De vz $\bar{L}_a$ van alle verenigingen van $\Pi^a \in L_a$ en een deelvz van een O-vz in L_a van V_a is een afgesloten vz-lichaam, dat L_a bevat (waarom?). De definitie van V_a kan tot alle vzn van $\bar{L}_a$ worden uitgebreid. $\bar{L}_a$ heet <u>volledig</u> t.o.v. V_a.

STELLING 16: <u>Zijn V_1 en V_2 abs add vz-fcts op L_1 resp. L_2, dan is P uit te breiden tot een afgesloten vz-lichaam, waarop ondubbelzinnig een abs add vz-fct V gedefinieerd is, zo, dat $V^\Pi = V_1^{\Pi^1} . V_2^{\Pi^2}$ is voor iedere $\Pi = (\Pi^1, \Pi^2) \in P$.</u>

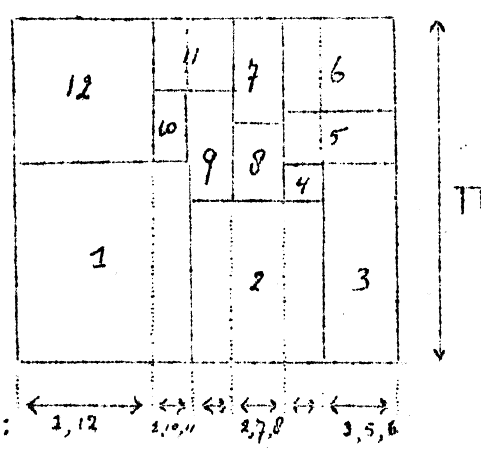
<u>Notatie</u>: $V = (V_1, V_2)$ of $V_1 \times V_2$.
(vgl. H.HAHN, Über die Multiplication total additiver Mengenfunktionen, Annali R.Scuola Normale Superiori di Pisa, (2) <u>2</u>, 1933, bl. 429-452.)

<u>Bewijs</u>: I. Zij $V_1 \geq 0$ en $V_2 \geq 0$.

1) Voor $\Pi \in P$ zij per definitie: $V^\Pi = V_1^{\Pi^1} . V_2^{\Pi^2}$, dan is V op P <u>additief</u>.
Bewijs: Zij $\Pi = (\Pi^1, \Pi^2) = \bigcup_1^N \Pi_n = \bigcup_1^N (\Pi_n^1, \Pi_n^2)$, Π_n disjunct; te bewijzen is: $V^\Pi = \sum_1^N V^{\Pi_n}$

a) is $\Pi_n^1 = \Pi^1$ voor alle n, dan volgt dit uit de absolute additiviteit van V_2; evenzo als $\forall_n$ $\Pi_n^2 = \Pi^2$ is.

b) Zij A een willekeurige deelvz der getallen 1,2,...,N en B de complementaire vz, en zij: $\Pi_A^2 = (\bigcap_{i \in A} \Pi_i^2) -- (\bigcup_{j \in B} \Pi_j^2)$
("exclusieve doorsnede": ieder punt van Π_A^2 ligt in iedere Π_i^2, maar in geen enkele Π_j^2 ; zie figuur.)



Dan is $\Pi_A^2 \cap \Pi_{A'}^2 = 0$ voor $A \neq A'$ (waarom?)

en $\Pi_i^2 = \bigcup_{i \in A} \Pi_A^2$ (waarom?), dus:

$$\Pi^2 = \bigcup_{(A)} \Pi_A^2 .$$

$\bigcup_{i \in A} \Pi_i^1 = \Pi^1$ voor iedere A met $\Pi_A^2 \neq 0$,
want is $\lambda_2 \in \Pi_A^2$, dus $\lambda_2 \in \Pi_i^2$ voor alle $i \in A$ en $\lambda_2 \notin \Pi_j^2$ voor $j \notin A$,
dan volgt uit: $(\Pi^1, \lambda_2) \subset (\Pi^1, \Pi^2) = \bigcup (\Pi_n^1, \Pi_n^2)$, dat:

$(\Pi^1, \lambda_1) \subset \bigcup_{i\in A}(\Pi^1_i, \Pi^2_i) \subset (\bigcup_{i\in A}\Pi^1_i, \bigcup_{i\in A}\Pi^2_i)$, zodat $\Pi^1 = \bigcup_{i\in A}\Pi^1_i$ (waarom?)
Bovendien zijn deze Π^1_i disjunct (waarom?) dus:

$$V^{\Pi_i} = V_1^{\Pi^1_i}.V_2^{\Pi^2_i} = \sum_{i\in A}^{A} V_1^{\Pi^1_i}.V_2^{\Pi^2_A} \text{ en } \sum^{i} V^{\Pi_i} = \sum^{i}\sum_{i\in A}^{A} V_1^{\Pi^1_i}.V^{\Pi^2_A} = \sum^{A}\sum_{i\in A}^{i} V_1^{\Pi^1_i}.V_2^{\Pi^2_A} =$$
$$\sum^{A} V_1^{\Pi^1}.V_2^{\Pi^2_A} = V_1^{\Pi^1}.V_2^{\Pi^2} = V^{\Pi}.$$

2) V is op P <u>absoluut additief</u>.

Bewijs: Zij $\Pi = (\Pi^1,\Pi^2) = \bigcup_1^\infty \Pi_n$, Π_n disjunct.

α) $\sum_1^N V^{\Pi_n} \leqq V^{\Pi}$ voor alle N volgt uit 1) (waarom?)

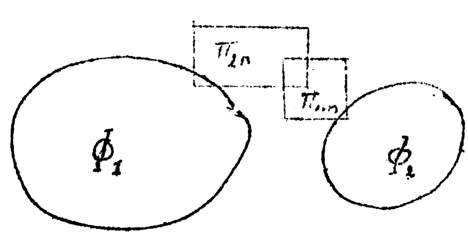
β) Zij $\Pi^1_{A_n}$ de exclusieve doorsnede (als in 1) voor A_n deelvz van de getallen 1,...,n en zij:

$\varphi_{A_n} = \sum_{i\in A_n}^{i} V_1^{\Pi^1_i}$, dan is $\varphi_{A_n} \leqq V_1^{\Pi_1}$ voor iedere n (N.B. deze Π^1_i zijn disjunct, zie 1)
Is $V_1^{\Pi^1} = 0$, dan is de stelling triviaal, is $V_1^{\Pi^1} > 0$, dan zij $0 < c < V_1^{\Pi^1}$
en $M^2_n = \bigcup_{\varphi_{A_n}\geqq c}^{A_n} \Pi^2_{A_n}$ (zodat $\sum_1^n V^{\Pi_i} \geqq c.V_2^{\Pi^2}$ is. Waarom?).
Dan is $M^2_n \subset M^2_{n+1}$ voor iedere n en $\bigcup_1^\infty M^2_n = \Pi^2$ (waarom?)
Dus bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een $n_0(\varepsilon)$ met $V_2^{M^2_n} \geqq V_2^{\Pi^2} - \varepsilon$ voor $n \geqq n_0(\varepsilon)$,
zodat: $\sum_1^\infty V^{\Pi_n} \geqq \sum_1^n V^{\Pi_n} \geqq c(V_2^{\Pi^2} - \varepsilon) \geqq cV_2^{\Pi^2} - \varepsilon V_1^{\Pi^1}$ voor iedere ε dus ook voor $\varepsilon = 0$ en voor iedere $c < V_1^{\Pi^1}$, dus ook voor $c = V_1^{\Pi^1}$.

3) Zij $\mathcal{O}$ de klasse van alle aftelbare verenigingen van productvzn en F de klasse van de complementen van deze verenigingen, dan is:
$\Omega_n \in \mathcal{O}$ voor iedere n $\longrightarrow \bigcup \Omega_n \in \mathcal{O}$; $\Pi \in P \longrightarrow \Gamma -- \Pi \in \mathcal{O}$;
$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \bigcup^{(n)} \Pi_{1n} \cap \bigcup^{(m)} \Pi_{2m} = \bigcup^{(n)} \bigcup^{(m)} (\Pi_{1n} \cap \Pi_{2m}) \in \mathcal{O}$, dus ook $\bigcap_1^N \Omega_n \in \mathcal{O}$
en $\bigcup_1^N \Phi_n \in F$ als $\Phi_n \in F$ voor iedere n. We bewijzen nu:
Is $\Phi_\alpha \in F$ ($\alpha = 1,2$) en $\Phi_1 \cap \Phi_2 = 0$, dan zijn er disjuncte $\Omega_1 \supset \Phi_1$ en $\Omega_2 \supset \Phi_2$
Bewijs: zij $\Phi_\alpha = \Gamma -- \bigcup \Pi_{\alpha n}$. We construeren 2 disjuncte rijen $\Pi'_{\alpha n}$ met $\Phi_\alpha = \Gamma -- \bigcup \Pi'_{\alpha n}$, die voldoen aan de eis: is $\Pi'_{1m} \cap \Phi_2 \neq 0$ en $\Pi'_{2n} \cap \Phi_1 \neq 0$, dan is $\Pi'_{1m} \cap \Pi'_{2n} = 0$ (1), zodat het in de figuur getekende geval niet voorkomt. Dan voldoen:

$\Omega_1 = \bigcup_{\Phi_1 \cap \Pi'_{2n} \neq 0}^{(n)} \Pi'_{2n}$ en $\Omega_2 = \bigcup_{\Phi_2 \cap \Pi'_{1m} \neq 0}^{(m)} \Pi'_{1m}$

aan de gestelde voorwaarden.



We kunnen $\{\Pi_{\alpha n}\}$ ($\alpha = 1,2$) disjunct onderstellen (waarom?). Zij $\Pi'_{\alpha 0} = 0$ en zij reeds geconstrueerd $\Pi'_{\alpha m}$ m = 0,1,...,k , met $\bigcup_1^{k_\alpha} \Pi'_{\alpha m} = \bigcup_1^{\ell - 1} \Pi_{\alpha n}$, terwijl aan de eis (1) voldaan is.

Is $\Pi_{1\ell} \cap \Phi_2 = 0$, dan zij $\Pi'_{1,k_1+1} = \Pi_{1\ell}$, anders doorsnijden we $\Pi_{1\ell}$ met de eindig vele reeds geconstrueerde Π'_{1i}, en nemen: $\Pi'_{1,k_1+1} = \Pi_{1\ell} \cap \Pi'_{1i}$.
$\Pi_{1\ell} - \bigcup_{1}^{k_1} \Pi'_{1i}$ verdelen we in eindig veel product-vzn, die we nemen als Π_{1j}, $j=k_1+k_2+1$, enz. Het procédé wordt nu herhaald om $\Pi_{2\ell}$ te splitsen met behulp van de reeds geconstrueerde $\Pi'_{1\ell}$.

4) De rest van het bewijs verloopt nu geheel als dat van stelling 12, wanneer we daarin $\mathcal{J}$ vervangen door Π, R_2 door Γ, φ door $V_1 . V_2$, $\bar{\varphi}$ door $\bar{V}$, open vzn door Ω's, afgesloten vzn door Φ's.

II. Is niet $V_1 \geqq 0$, $V_2 \geqq 0$, dan verdelen we Γ in $(\Gamma^{1+}, \Gamma^{2+})$, $(\Gamma^{1-}, \Gamma^{2-})$, $(\Gamma^{1+}, \Gamma^{2-})$ en $(\Gamma^{1-}, \Gamma^{2-})$.

Opmerking: 1) Bewezen is tevens de algemene stelling:
Is V een abs add vz-fct, gedefinieerd op een klasse P van deel-vzn van Γ, waarbij $\bigcap_1^\infty \Pi_n \in P$ en $\Gamma - \Pi =$ eindige vereniging van vzn van P is (Π_n en $\Pi \in P$), dan is P uit te breiden tot een afgesloten vz-lichaam en V tot een abs add vz-fct op dit afgesloten lichaam.

2) $|V| = |V_1| . |V_2|$ (waarom?)

3) L is volledig t.o.v. V. Want is $M \subset \Lambda$, $\Lambda \in L$ en $|V|^\Lambda = 0$, dan is $0 \leqq \overline{|V|}^M \leqq \overline{|V|}^\Lambda = 0$, dus $\underline{|V|}^M = \overline{|V|}^M = 0$, dus $M \in L$.

4) gaat men uit van de volledige vz-lichamen $\bar{L}_1$ en $\bar{L}_2$ en de daartoe uitgebreide V_1 en V_2, dan krijgt men dezelfde L en V. Immers de klasse P wordt slechts uitgebreid tot P' door het toevoegen of wegnemen van (nieuwe) productvzn met V = 0 uit iedere Π. Deze behoren echter alle reeds tot L (waarom?), zodat $P' \subset L$ is, terwijl bovendien gemakkelijk in te zien is, dat $\bar{V}$ voor een willekeurige vz niet verandert, zodat ook L en V onveranderd blijven.

17. Definitie. f is L-kategorisch op Λ_0 als bij iedere $\varepsilon > 0$ een (oneindige) ε-kategorie voor f op Λ_0 te vinden is, d.w.z. een kategorie $\{K\}$ op Λ_0 met $\text{var}_f \{K\} \leqq \varepsilon$, welker vzn $K_n \in L$ zijn.

De voorwaarde L-kategorisch te zijn is aequivalent met de L-meetbaarheid van f. Bewijs: 1) Is f L-meetbaar, dan vormen (voor n geheel, $-\infty < n < +\infty$) $\Gamma[n\varepsilon < f \leqq (n+1)\varepsilon]$ een ε-kategorie.

2) Is f L-kategorisch en vormen $K_n(\varepsilon_r)$ een ε-kategorie; zij $\Lambda_r = \bigcup_{(n)} K_n(\varepsilon_r)$, genomen over die vzn $K_n(\varepsilon_r)$, waarin

$f < a$ is; dan is $\Lambda_\gamma \in L$ voor alle γ en $\bigcup_\gamma \Lambda_\gamma = \Gamma[f < a]$ (waarom?), dus $\Gamma[f < a] \in L$; f is L-meetbaar.

LEMMA 1: Is voor iedere natuurlijke n f_n L-kategorisch op Λ_{on} en voor iedere $\lambda \in \Lambda'_o \in L$: $f_\lambda = \lim f_{n\lambda}$, dan is f L-kategorisch op $\Lambda_o = \Lambda'_o \cap \bigcap_n \Lambda_{on}$.

Bewijs: Zij $\{K_n(\varepsilon)\}$ een ε-kategorie van f_n op Λ_{on}, welker vzn tot L behoren, $\{K_{nN}(\varepsilon)\} = \bigcap_n^N \{K_m(\varepsilon)\}$ ($N \geqq n$). Bestaat deze uit de vzn $K_{nNh}(\varepsilon)$, dan behoren deze ook tot L. Zij $\alpha > 0$, $M_{nN}(\alpha, \varepsilon)$ de vereniging van alle $K_{nNh}(\varepsilon)$, die een λ bevatten met $|f_{n\lambda} - f_{n+k,\lambda}| > \alpha$ voor minstens één $0 \leqq k \leqq N-n$. Dan is $M_{nN}(\alpha, \varepsilon) \in L$. Voorts is:

voor iedere $\mu \in M_{nN}(\alpha, \varepsilon)$: $\exists_{k \leqq N-n} \quad |f_{n\mu} - f_{n+k,\mu}| > \alpha - 2\varepsilon$

voor iedere $\mu \in \Lambda_o -- M_{nN}(\alpha, \varepsilon)$: $\forall_{k \leqq N-n} \quad |f_{n\mu} - f_{n+k,\mu}| \leqq \alpha$

Zij $\Lambda_{nN}(\alpha) = \bigcup_r \{\Lambda_o -- M_{nN}(\alpha, 2^{-r})\}$, dan is $\Lambda_{nN}(\alpha) \in L$ en $\subset \Lambda_o$ en:

overal op $\Lambda_{nN}(\alpha)$: $\forall_{k \leqq N-n} \quad |f_n - f_{n+k}| \leqq \alpha$

overal op $\Lambda_o -- \Lambda_{nN}(\alpha)$: $\exists_{k \leqq N-n} \quad |f_n - f_{n+k}| \geqq \alpha$, daar k eindig veel en r oneindig veel waarden doorloopt.

Zij $\Lambda_n(\alpha) = \bigcap_n^\infty \Lambda_{nN}(\alpha)$, dan is $\Lambda_n(\alpha) \in L$ en $\subset \Lambda_o$ en:

overal op $\Lambda_n(\alpha)$: $\forall_{N \geqq n} \quad |f_n - f_N| \leqq \alpha$, dus $|f - f_n| \leqq \alpha$

overal op $\Lambda_o -- \Lambda_n(\alpha)$: $\exists_{N \geqq n} \quad |f_n - f_N| \geqq \alpha$, dus $\exists_{N \geqq n} \quad |f - f_N| \geqq \frac{1}{2}\alpha$.

Dus is $\Lambda_o -- \bigcup_1^\infty \Lambda_n(\alpha) = o$, daar overal op Λ_o $f_\lambda = \lim f_{n\lambda}$ is, dus $\Lambda_o = \bigcup_1^\infty \Lambda_n(\alpha) = \bigcup_1^\infty \Delta_n(\alpha)$ met $\Delta_n(\alpha) = \Lambda_n(\alpha) -- \Lambda_{n-1}(\alpha)$ $\quad (\Lambda_o(\alpha) = o)$.

De $\Delta_n(\alpha)$ vormen dus een kategorie op Λ_o, $\Delta_n(\alpha) \in L$.

Zij $\{K\}$ de kategorie op Λ_o, waarvoor geldt: $\forall_n \{K\} \cap \Delta_n(\frac{\varepsilon}{3}) = \{K_n(\frac{\varepsilon}{3})\} \cap \Delta_n(\frac{\varepsilon}{3})$.

Dan is: op $\Delta_n(\frac{\varepsilon}{3})$: $|f - f_n| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$, $\operatorname{var}_{f_n}\{K_n(\frac{\varepsilon}{3})\} \leqq \frac{\varepsilon}{3}$, dus $\operatorname{var}_f\{K\} \leqq \varepsilon$, terwijl alle vzn van K tot L behoren.

Gevolg: Is f_n L-meetbaar voor iedere natuurlijke n en op Λ_o: $f = \sum_1^\infty f_n$, dan is f L-meetbaar.

LEMMA 2: Is V abs add op Γ en $\geqq 0$, $\psi_{n\lambda}$ voor iedere natuurlijke n L-meetbaar en V-integreerbaar op $\Lambda_{on} \approx \Gamma$, $\leqq a$ en $\searrow 0$ voor alle λ behoudens een 0-vz Λ_o, dan is $\int_\Gamma V^{d\lambda} \psi_{n\lambda} \searrow 0$.

Opmerking: $\psi_{n\lambda} \to 0$ is in het algemeen niet voldoende; wel als de convergentie gelijkmatig is.

Bewijs: Zij $M_{n\varepsilon} = \{\lambda\}_{\lambda \in \Gamma -- \Lambda_0, \psi_{n\lambda} \geq \varepsilon} \in L$. Dan is $M_{n+1,\varepsilon} \subset M_{n,\varepsilon}$, $\bigcap\limits_n M_{n\varepsilon} = 0$ (waarom?)
Dus $V^{M_{n\varepsilon}} \leq \eta$ voor $n \geq n(\eta, \varepsilon)$ (waarom?)
Dus is $\int\limits_\Gamma V^{d\lambda} \psi_{n\lambda} = \int\limits_{\Gamma -- M_{n\varepsilon}} + \int\limits_{M_{n\varepsilon}} \leq \int\limits_{\Gamma -- M_{n\varepsilon}} V^{d\lambda}.\varepsilon + \int\limits_{M_{n\varepsilon}} V^{d\lambda}.a \leq \varepsilon . V^\Gamma + a.\eta \leq \varepsilon_1$
als $n \leq n(\frac{\varepsilon_1}{2a}, \frac{\varepsilon_1}{2V^\Gamma})$ is.

Opmerkingen: 1) Is niet $V \geq 0$, dan splitse men Γ in Γ^+ en Γ^-.

2) Is $\psi_{n\lambda} \searrow \psi$ en $\psi_n - \psi \leq a$ voor alle λ behoudens een 0-vz Λ_0, dan levert het lemma, toegepast op $\psi_n - \psi$: $\int V^{d\lambda} \psi_{n\lambda} \searrow \int V^{d\lambda} \psi_\lambda$. ψ is in dit geval integreerbaar daar $\psi_n - \psi$ dit is (want begrensd) en ψ_n ook. Analoog als $\psi_n \nearrow \psi$ en $\psi - \psi_n \leq a$ is.

Is $\psi_n \to \psi$ en $\sum\limits_1^\infty |\psi_{m+1} - \psi_m| \leq a$, dan is $\int V^{d\lambda} \psi_{n\lambda} \to \int V^{d\lambda} \psi_\lambda$. Het bewijs verloopt dan analoog; men neme in $M_{n\varepsilon}$ i.p.v. de voorwaarde $\psi_{n\lambda} \geq \varepsilon$: $\sum\limits_n^\infty |\psi_{m+1} - \psi_m| \geq \varepsilon$.

3) Is $\psi = \sum\limits_1^\infty \varphi_i$ absoluut convergent behoudens op een 0-vz Λ_0, en $\forall_{n,\lambda} |\sum\limits_n^\infty \varphi_{i\lambda}| \leq a$ (dit is b.v. het geval als $\sum \varphi_i$ op $\Gamma -- \Lambda_0$ absoluut en gelijkmatig convergent is), dan is $\int V^{d\lambda} \psi_\lambda = \sum\limits_1^\infty \int V^{d\lambda} \varphi_{i\lambda}$.

4) Het is voldoende als de gelijkmatige begrensdheid geldt voor bijna alle n i.p.v. voor alle n. De gelijkmatige begrensdheid is niet noodzakelijk, maar kan niet zonder vervanging weggelaten worden. Dit blijkt uit het volgende voorbeeld: $\Gamma = (0,1]$, V = Lebesgue-maat, $\psi_{nx} = x^n . \sqrt{n}$, $\sqrt{n} \int\limits_0^1 x^n dx = \frac{n}{n+1} \searrow 0$; neemt men echter $\psi_{nx} = n.x^n$, dan is $\int\limits_0^1 \psi_{nx} dx = \frac{n}{n+1} \nearrow 1$. Natuurlijk kan de voorwaarde wel op verschillende wijzen door zwakkere vervangen worden.

18. STELLING 18: Zij $V = V_1 V_2$ abs add op het afgesloten vz-lichaam L van deelvzn van $\Gamma = (\Gamma^1, \Gamma^2)$ zoals in stelling 16 gedefinieerd, waarbij L_1 en L_2 t.o.v. V_1 resp. V_2 volledig zijn, en zij f L-meetbaar op $\Lambda_0 \approx \Gamma$ en integreerbaar t.o.v. V (zie bl. 55), dan is er een $\Lambda_0^1 \in L_1$, $\Lambda_0^1 \approx \Gamma^1$ zo, dat voor iedere $\lambda_1 \in \Lambda_0^1$ $f(\lambda_1, \lambda_2)$ als functie van λ_2 L_2-meetbaar is, $g_{\lambda_1} = \int\limits_{\Gamma^2} V_2^{d\lambda_2} f(\lambda_1, \lambda_2)$ bestaat en L_1-meetbaar en V_1-integreerbaar is. Dan is: $\int\limits_{\Gamma^1} V_1^{d\lambda_1} g_{\lambda_1} = \int\limits_\Gamma V^{d\lambda} f_\lambda$.

Bewijs: I. Door verschil- en somvorming is het bewijs direct te herleiden tot het geval $V_1 \geq 0$, $V_2 \geq 0$, $f \geq 0$. Ook kan men $\Lambda_0 = \Gamma$ onderstellen. Dit zij verder ondersteld.

2) We bewijzen de stelling eerst voor het speciale geval:

$f_\lambda = |^\Lambda_\lambda = \begin{cases} 1 \text{ voor } \lambda \in \Lambda \\ 0 \text{ voor } \lambda \notin \Lambda \end{cases}$, $\Lambda \in L$ (H. HAHN, l.c.)

Daar $(V|^\Lambda)^\Gamma = V^\Lambda$ en $\varphi^{(\Lambda)}_{\lambda_1} = \int_{\Gamma^2} V_2^{d\lambda_2} |^\Lambda_{(\lambda_1,\lambda_2)} = V_2^{\Lambda^2_{\lambda_1}}$ is, waarin $(\lambda_1, \Lambda^2_{\lambda_1}) = \Lambda \cap (\lambda_1, \Gamma^2)$, $\Lambda^2_{\lambda_1}$ dus de "projectie" van de doorsnede van Λ met een vz "//" Γ^2 is, moet dus bewezen worden, dat $\Lambda^2_{\lambda_1} \in L_2$ is voor alle $\lambda_1 \in \Gamma^1$ behoudens een (van Λ afhankelijke) O-vz van V_1 : $N^1_\Lambda \subset \Gamma^1$; dat $\varphi^{(\Lambda)}_{\lambda_1}$ L_1-meetbaar is en dat

$$V^\Lambda = \int_{\Gamma^1} V_1^{d\lambda_1} \varphi^{(\Lambda)}_{\lambda_1} = \int_{\Gamma^1} V_1^{d\lambda_1} V_2^{\Lambda^2_{\lambda_1}} \text{ is.}$$

a) Voor $\Lambda = \Pi = (\Pi^1, \Pi^2) \in P$ is $\Lambda^2_{\lambda_1} = \Pi^2 \in L_2$, $\varphi^{(\Pi)}_{\lambda_1} = V_2^{\Pi^2}$ = constant, dus alles triviaal.

b) Is het gestelde bewezen voor $\Lambda \in L$, dan geldt het ook voor $M = \Gamma -- \Lambda$. Immers $M^2_{\lambda_1} = \Gamma^2 -- \Lambda^2_{\lambda_1} \in L_2$ als $\Lambda^2_{\lambda_1} \in L_2$, dus overal behalve op N^1_Λ geldt: $V_2^{M^2_{\lambda_1}} = V_2^{\Gamma^2 -- \Lambda^2_{\lambda_1}} = V_2^{\Gamma^2} -- V_2^{\Lambda^2_{\lambda_1}}$, dus:

$\int_{\Gamma^1} V_1^{d\lambda_1} \varphi^{(M)}_{\lambda_1} = V_2^{\Gamma^2} . V_1^{\Gamma^1} - \int_{\Gamma^1} V_1^{d\lambda_1} \varphi^{(\Lambda)}_{\lambda_1} = V^\Gamma - V^\Lambda = V^M$. Daarbij is $N^1_{\Gamma--\Lambda} = N^1_\Lambda$.

Opmerkingen. 1. Evenzo bewijst men de stelling voor $\Lambda -- M$, als $\Lambda \supset M$ en de stelling voor Λ en M reeds bewezen is.

2. Tevens geldt: is voor $a > 0$ $M^1(a)$ de vz van alle λ_1, waarvoor $\varphi^{(\Lambda)}_{\lambda_1} \geqq a$ is, dan is $V^\Lambda = V_1^{d\lambda_1} \varphi^{(\Lambda)}_{\lambda_1} \geqq \int_{M^1(a)} V_1^{d\lambda_1} . a$, dus $V_1^{M^1(a)} \leqq \frac{V^\Lambda}{a}$.
Men kan dus iedere Λ, waarvoor de stelling geldt verdelen in een vz $\Lambda \cap (\Gamma^1 -- M^1(\sqrt{V^\Lambda}), \Gamma^2)$ met $V_2^{\Lambda^2_{\lambda_1}} \leqq \sqrt{V^\Lambda}$ voor $\lambda_1 \in \Gamma^1 -- M^1(\sqrt{V^\Lambda})$ en $\Lambda \cap (M^1(\sqrt{V^\Lambda}), \Gamma^2)$ met $V_1^{M^1(\sqrt{V^\Lambda})} \leqq \sqrt{V^\Lambda}$.

Gevolg. Is Λ en O-vz van V, dan is voor iedere λ_1, met uitzondering van een O-vz vzn V_1 de „doorsnede" $\Lambda^2_{\lambda_1}$ van Λ met (λ_1, Γ^2) een O-vz van V_2.

c) Is $\Lambda = \bigcup_1^\infty \Lambda_i$, Λ_i disjunct, terwijl het gestelde voor alle Λ_i reeds bewezen is, dan geldt het ook voor Λ. Immers: $\Lambda^2_{i\lambda_1}$ zijn disjunct voor iedere λ_1 en alle $\in L_2$ behoudens voor λ_1 in een O-vz $\bigcup_{(i)} N^1_{\Lambda_i}$ van V_1.
Dus is voor $\lambda_1 \notin \bigcup_{(i)} N^1_{\Lambda_i}$: $\Lambda^2_{\lambda_1} = \bigcup_{(i)} \Lambda^2_{i\lambda_1} \in L_2$. Derhalve is:
$\varphi^{(\Lambda)}_{\lambda_1} = V_2^{\Lambda^2_{\lambda_1}} = \sum_{(i)} V_2^{\Lambda^2_{i\lambda_1}} \leqq V_2^{\Gamma^2}$ en daar ieder van deze termen L_1-meetbaar is, geldt dit (zie punt 17, lemma 1) ook voor de som. Volgens lemma 2 en het ondersteld is verder:

$V^\Lambda = \sum_{(i)} V^{\Lambda_i} = \sum_{(i)} \int_{\Gamma^1} V_1^{d\lambda_1} \varphi^{(\Lambda_i)}_{\lambda_1} = \int_{\Gamma^1} V_1^{d\lambda_1} \sum_{(i)} \varphi^{(\Lambda_i)}_{\lambda_1} = \int_{\Gamma^1} V_1^{d\lambda_1} \varphi^{(\Lambda)}_{\lambda_1}$. Daarbij is $N^1_\Lambda = \bigcup_{(i)} N^1_{\Lambda_i}$.

Gevolg: Daar iedere $\Omega \in \mathcal{O}$ te schrijven is als de vereniging van disjuncte Π's is de stelling volgens a) voor iedere Ω en volgens b) voor iedere $\phi \in F$ bewezen. In deze gevallen is N^1_Λ leeg.

d) Zij $\Lambda \in L$ willekeurig, dan is er bij iedere n een $\mathcal{O}_\delta$-vz $\Delta = \bigcap \Omega_n$, en een F_σ-vz $\Sigma = \bigcup \phi_n$ met $\Delta \supset \Lambda \supset \Sigma$ en $V^\Delta = V^\Lambda = V^\Sigma$. Immers er is voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\Omega_n \in \mathcal{O}$, $\Omega_n \supset \Lambda$ met $V^{\Omega_n} \leq V^\Lambda + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Zij $\Omega'_1 = \Omega_1$, $\Omega'_n = \Omega_n \cap \Omega'_{n-1}$ voor $n > 1$, dan is $\Omega'_n \supset \Omega'_{n+1} \supset \Lambda$ voor iedere n; $\Omega'_n \in \mathcal{O}$; $V^{\Omega'_n} \leq V^\Lambda + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Zij $\Delta = \bigcap \Omega'_n \in \mathcal{O}_\delta$, dan is $\Delta \supset \Lambda$, $\Delta = \Omega_1 -- \bigcup\limits_2^\infty \Omega'_n$, zodat de stelling voor Δ geldt, en $V^\Delta = V^\Lambda$ is. Analoog is te vinden $\Sigma = \bigcup \phi_n \in F$, waarvoor de stelling geldt en met $\Sigma \subset \Lambda$ en $V^\Sigma = V^\Lambda$. De stelling geldt dus ook voor $\Delta -- \Sigma$. Daar $V^{\Delta -- \Sigma} = 0$ is, is de vz, waar $V^{(\Delta -- \Sigma)^2_{\lambda_1}} \neq 0$ is volgens b) opm.2. een O-vz N^1_Λ van V_1. Overal elders is dus: $\Lambda^2_{\lambda_1} -- \Sigma^2_{\lambda_1} = (\Lambda -- \Sigma)^2_{\lambda_1}$ deelvz van een O-vz van V_2, dus $\in L_2$, dus ook $\Lambda^2_{\lambda_1} = \Sigma^2_{\lambda_1} \cup (\Lambda^2_{\lambda_1} -- \Sigma^2_{\lambda_1}) \in L_2$, $\varphi^{(\Lambda)}_{\lambda_1} = \varphi^{(\Sigma)}_{\lambda_1} = \varphi^{(\Delta)}_{\lambda_1}$. Derhalve is:

$$V^\Lambda = V^\Sigma = (V_1 \varphi^{(\Sigma)})^{\Gamma^1} = (V_1 \varphi^{(\Lambda)})^{\Gamma^1}.$$

3) a) Zij nu f willekeurig (≥ 0), $\{K\}$ een ε-kategorie van f, $k_n \in L$, dan is er volgens 2) voor iedere n een O-vz $M^1_n \subset \Gamma^1$ van V_1, waarbuiten $K^2_{n\lambda_1} = K_n \cap (\lambda_1, \Gamma^2) \in L_2$ is. Buiten de O-vz $M^1_\varepsilon = \bigcup M^1_n$ is dit voor alle n het geval. Iedere L-meetbare fct f op (Γ^1, Γ^2) is dus voor iedere λ_1 behalve op een O-vz $M^1 = \bigcup M^1_\varepsilon$ van V_1 op (λ_1, Γ^2) L_2-meetbaar. Voor $\lambda_1 \in \Gamma^1 -- M^1_\varepsilon$ is $\varphi^{(K_n)}_{\lambda_1} = V_2^{K^2_{n\lambda_1}}$ gedefinieerd, $\varphi^{(K_n)}$ is L_1-meetbaar en V_1-integreerbaar en $(V_1 \varphi^{(K_n)}) = V^{K_n}$.

b) Zij $\bar{f}_n = \sup\limits_{\lambda \in K_n} f_\lambda$, dan is $(Vf)^\Gamma \leq \sum V^{K_n} \bar{f}_n \leq C = (Vf)^\Gamma + \varepsilon V^\Gamma$. Zij $h^{(K_n)}_{\lambda_1} = \varphi^{(K_n)}_{\lambda_1} \cdot \bar{f}_n$, $\Lambda^1(a)$ = de vz van alle $\lambda_1 \in \Gamma^1 -- M^1$ waarvoor $\sum\limits_1^\infty h^{(K_n)}_{\lambda_1} > a$ en $\Lambda^1_N(a)$ = " " " " " " " $\sum\limits_1^N > a$ is, dan is $\Lambda^1_N(a) \subset \Lambda^1_{N+1}(a)$, $\Lambda^1(a) = \bigcup \Lambda^1_N(a)$ (waarom?) Voorts is met $\Lambda_N(a) = (\Lambda^1_N(a), \Gamma^2)$: $aV_1^{\Lambda^1_N(a)} \leq (V_1 \sum\limits_1^N h^{(K_n)})^{\Lambda^1_N(a)} = \sum\limits_1^N \bar{f}_n (V_1 \varphi^{(K_n)})^{\Lambda^1_N(a)} = \sum\limits_1^N \bar{f}_n V^{K_n \cap \Lambda_N(a)} \leq (Vf)^{\Lambda_N(a)} + \varepsilon . V^{\Lambda_N(a)} \leq C$, dus $V_1^{\Lambda^1_N(a)} \leq \frac{C}{a}$, dus ook $V_1^{\Lambda^1(a)} \leq \frac{C}{a}$ (waarom?), zodat $\Lambda^1 = \bigcap\limits_{a \to \infty} \Lambda^1(a)$ een O-vz van V_1 is. Derhalve is $\sum h^{(K_n)}_{\lambda_1}$, dus ook $g_{\lambda_1} = \int V_2^{d\lambda_2} f(\lambda_1, \lambda_2)$ voor alle $\lambda_1 \in \Gamma^1 -- (M^1 \cup \Lambda^1)$ eindig.

c) op $\Gamma^1 -- (M^1 \cup \Lambda^1)$ is iedere $\varphi^{(K_n)}$, dus ook $h^{(K_n)}$, dus ook $\sum\limits_1^N h^{(K_n)}$, dus ook $\sum\limits_1^\infty h^{(K_n)}$ (waarom?), dus ook g (waarom?) en ook $g^{(K_n)}$ L_1-meetbaar. Voorts is voor iedere n: $\varphi^{(K_n)}_{\lambda_1} . (\bar{f}_n - \varepsilon) \leq g^{(K_n)}_{\lambda_1} \leq \varphi^{(K_n)}_{\lambda_1} \bar{f}_n$, dus

$$V^{K_n}(\bar{f}_n - \varepsilon) \leqq (V_1\, g^{(K_n)})^{\Gamma^1} \leqq V^{K_n}\bar{f}_n \quad \text{en}$$

$$(Vf)^{\Gamma} - \varepsilon V^{\Gamma} \leqq \sum V^{K_n}(\bar{f}_n - \varepsilon) \leqq (V_1\, g)^{\Gamma^1} = \sum (V_1\, g^{(K_n)})^{\Gamma^1} \leqq \sum V^{K_n}\bar{f}_n \leqq (Vf)^{\Gamma} + \varepsilon V$$

voor iedere $\varepsilon > 0$, dus tenslotte $(Vf)^{\Gamma} = (V_1 g)^{\Gamma^1}$, hetgeen te bewijzen was.

<u>Uitbreiding</u>: Is $\Lambda \in L$ willekeurig, en vervangt men in het bovenstaande f_λ door $f_\lambda|_\lambda^\Lambda = \begin{cases} f & \lambda \in \Lambda \\ 0 & \lambda \notin \Lambda \end{cases}$, dan gaat $g_{\lambda_1}^{(k)}$ in

$$\int_{K^2_{\lambda_1}} V_2^{d\lambda_2} f(\lambda_1, \lambda_2)\,\Big|_{(\lambda_1,\lambda_2)}^{\Lambda} = \int_{K^2_{\lambda_1}\cap \Lambda^2_{\lambda_1}} V_2^{d\lambda_2} f(\lambda_1, \lambda_2) = g_{\lambda_1}^{(k \cap \Lambda)}$$

en g in $g^{(\Lambda)}$ over, terwijl $(Vf|^{\Lambda})^{\Gamma} = (Vf)^{\Lambda}$ is. Daar het behoud van de meetbaarheidseigenschappen triviaal is, heeft men dus:

$$(Vf)^{\Lambda} = (V_1 g^{(\Lambda)})^{\Gamma^1} = \int_{\Gamma^1} V_1^{d\lambda_1} \int_{\Lambda^2_{\lambda_1}} V_2^{d\lambda_2} f(\lambda_1, \lambda_2)$$

voor iedere L-meetbare fct f en iedere $\Lambda \in L$. De 0-vz waarop $g^{(\Lambda)}$ ongedefinieerd of oneindig is kan van Λ afhangen.

19. De volgende generalisatie van de theorie is nog niet volledig onderzocht. Een fct f_λ bepaalt een vz-fct van de 1e soort f_Λ', die aan iedere vz $\Lambda \subset \Gamma$ een vz X van reële getallen toevoegt, t.w. de vz van alle waarden van f op Λ. Zijn X en Y vzn van reële getallen, dan zij X + Y resp. X - Y resp. XY de vz van <u>alle</u> sommen x+y resp. verschillen x-y resp. producten xy met $x \in X$, $y \in Y$. Onder δX wordt verstaan de bovenste grens van alle $|x_1 - x_2|$ met $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, dus $\delta X = \sup(X-X)$; $\sup Y = \sup\limits_{y \in Y} y$.

Definieer algemeen: een vz-fct van de eerste soort f_Λ is een wet, die aan iedere vz $\Lambda \in L$ een vz X van reële getallen toevoegt, zodanig dat bij iedere $\varepsilon > 0$ een kategorie $\{K\}$ bestaat, zodanig dat voor iedere kategorie $\{K'\}$ geldt: $\sup \left\{ \bigcup_i \left| f_{K_i} - \bigcup_j f_{K_i \cap K'_j} \right| \right\} \leqq \varepsilon$.

Een vz-fct van de 2e soort V^{Λ} is een wet, die aan iedere vz $\Lambda \in L$ een vz X van reële getallen toevoegt, zodanig dat bij iedere $\varepsilon > 0$ een kategorie $\{K\}$ bestaat, zodanig dat voor iedere kategorie $\{K'\}$ geldt:

$$\sup \sum_i \left| V^{K_i} - \sum_j V^{K_i \cap K'_j} \right| \leqq \varepsilon \quad .$$

Is V^{Λ} absoluut additief, dan bestaat V^{Λ} voor iedere Λ uit slechts één getal ($\delta V^{\Lambda} = 0$) en het sup in het linkerlid is = 0.

Vermoedelijk kunnen dan vrij gemakkelijk stellingen van het volgente type bewezen worden:

I. Een fct van de le soort bepaalt een L-meetbare fct.

II. Een fct van de 2e soort bepaalt een abs add fct op L.

III. Het product van een fct van de le en een van de 2e soort is een fct van de 2e soort.

IV. Het quotient van twee fcts V en W van de 2e soort is een fct van de le soort, mits $0 \in W^{\wedge} \rightarrow V^{\wedge} \in W^{\wedge}$ (of een dergelijke voorwaarde) vervuld is.

Er zijn aanwijzingen, dat het langs deze weg ook mogelijk is, de theorie der abs add vz-fcts en de integratietheorie in een intuitionistisch correcte vorm te brengen.

T

ERRATA bij Caput II ∮ 1.

bl.	regel	staat	moet staan
51	13 v.b.	$\Lambda_m \cap \Lambda_n = o$, dan	$\Lambda_m \cap \Lambda_n = o$ voor $m \neq n$, dan
	21 v.b.	de la Valée Poussin	C.de la Vallée Poussin
	19 v.o.	$\Lambda =$	$\Lambda_1 =$
	14 v.o.	lim sup lim inf	sup -inf
	13 v.o.	$V^-(\Lambda) \leqq 0$	$V^-(\Lambda) \geqq 0$
	12 v.o.;11 v.o.	+	−
	6 v.o.	lim sup	sup
52	11 v.b.	lim sup	sup
	12 v.b.	STELLING 3	STELLING 4
	12,13,16,21 v.b.	$V^+ - V^-$	$V^+ + V^-$
	18 v.b.	$\geqq V^-$	$\geqq - V^-$
	20 v.b.	$\leqq V^-$	$\leqq - V^-$
	23 v.o.	toevoegen: en $= \sup \sum \lvert V(K_i \cap \Lambda)\rvert$ over <u>alle</u> kategorieën.	
	15 v.o.	STELLING 4	STELLING 5
	2 v.o.;1 v.o.	$\Lambda_f(x)$	$\Gamma[f(\lambda) \leqq x]$
53	2,3,4 v.b.	idem	idem
	5 v.b.	$\Lambda_f(x)$	$\Gamma[f(\lambda) < x]$
	tussen 6 en 7 v.b. invoegen:	Opm.3: Som, verschil, product en quotient van L-meetbare fcts zijn L-meetbaar. (Bewijs: zie bl. 67, <u>Bewijs</u> 2) en 3)).	
	8,9, v.b.;4 v.o.	lim sup	sup
	15 v.b.	$\Lambda(x_i) - \Lambda(x_{i-1})$	$\Gamma[x_{i-1} < f(\lambda) \leqq x_i]$
	17 v.b.	$\mathrm{Var}_f \{K'\} \leqq \Sigma$	vervalt
	18 v.b.	STELLING 5	STELLING 6
	17 v.o.	2^e term	$\sum f(k_i) \sum$ enz.
	tussen 3 en 2 v.o. invoegen:	4. $((Vf)g) = (V(fg))$	
	1 v.o.	$\lvert f(k_i)V(K_i)\rvert$	$\lvert \sum f(k_i)V(K_i)\rvert$
54	1 v.b.	STELLING 6	STELLING 7
	6 v.b.	(Λ_n)	(Λ)
	4 v.o.	STELLING 7	STELLING 8
55	21 v.b.	$\Lambda_0 \subset L$	$\Lambda_0 \in L$
	23 v.b.	$V^{\Gamma - - \Lambda_0}$	$\lvert V\rvert^{\Gamma - - \Lambda_0}$
	7 v.o.	$= \sum^m$ en $\leqq 2\alpha \lvert V\rvert^\wedge$.	$= \lvert \sum^m$ en $\leqq 2\varepsilon \lvert V\rvert^\wedge$
56	tussen regel 11 en 12 v.b. invoegen:	c. voor begrensde f's levert de integraaldefinitie met eindige kategorieën hetzelfde resultaat als die met aftelbare kategorieën. d. Is $V^\wedge = \lvert V\rvert^\wedge$, $f_\lambda \leqq g_\lambda$ voor iedere $\lambda \in \Lambda$, dan is $(Vf)^\wedge \leqq (Vg)^\wedge$ e. Is $V^\wedge = \lvert V\rvert^\wedge$, $f_\lambda \geqq 0$ op Λ en $(Vf)^\wedge = 0$, dan is $f_\lambda = 0$ op Λ behoudens op een 0-vz. Bew.: $V^{\Gamma[\lvert\,\geqq \varepsilon] \cap \Lambda} = o$ voor iedere $\varepsilon > 0$.	
	3 v.o.	ningsaxioma,	ningsaxioma gedefinieerd,

bl.	regel	staat	moet staan
59	Bij stelling 11.	Het vz-lichaam, waarop V gedefinieerd is moet $\Gamma \cap \Lambda$ bevatten als Λ een Borel-vz van R_r is.	
	3 v.o.	achter "b)" invoegen:	zijn de $\mathfrak{J}_n$ disjunct, dan is:
62	14 v.o.	$\leqq \sum_1^N V(\Lambda_n) + \varepsilon$ = enz.	$\leqq \varphi(\Lambda)$ (waarom?)
	13 v.o.	vervalt.	
64	5 v.b.	$V^{B_n} -- \Gamma$	$V^{B_n} -- \Gamma_n$
	8 v.b.	$\subset$ (twee maal)	$\underset{\sim}{\subseteq}$
	12, 13 v.b.	$\Lambda \subset \Gamma^+$	$\Lambda \underset{\sim}{\subseteq} \Gamma^+$
	tussen 13 en 14 v.b. invoegen:	5. Is $\Gamma^* \subset \Gamma$ met	$\Lambda \underset{\sim}{\subseteq} \Gamma^* \rightleftarrows \forall_{M \underset{\sim}{\subseteq} \Lambda} V^M \geqq 0$, dan is $\Gamma^* \approx \Gamma^+$ (waarom?)
		6. $W^{\pm\Lambda} = \pm W^{\Lambda \cap \Gamma^\pm}$	
	1 v.o.	iedere	ieder
66	7 v.b.	= (tussen tweede en derde lid)	$\leqq$
	10 v.b.	$V^{K'_n}$ (in laatste term)	$V^{K'_{n+}}$
	12 v.b.	$\leqq$ (tussen eerste en tweede en tussen vierde en vijfde lid)	=
		toevoegen voor derde lid:	$\sum$
	6 v.o.	$= W^{\pm\Lambda}$	$= \pm W^{+\Lambda}$
67	11,12 v.b.	$W \geqq 0$ en	vervalt
	5 v.o.	n en m (beide twee maal)	n' en m'
	4 v.o.	K_n^q, K_m^p, (ν =n,m)	$K_{n'}^q$, $K_{m'}^p$, (ν =n,m,n',m')
69	8 v.b.	toevoegen:	$(\Pi_1 \cap \Pi_2 = 0)$
72	4 v.o.	en V-integreerbaar	vervalt
	3 v.o.	Λ_0,	$\Lambda_0 \supset \bigcup_{(n)} \Lambda_{0n}$,
73	14 v.o.	$\frac{n}{n+1}$	$\frac{\sqrt{n}}{n+1}$
	12 v.o.	worden.	worden, b.v. door $\leqq \chi_\lambda$ met χ_λ V-integreerbaar.

- - -

Literatuuropgave (welwillend ter beschikking gesteld door Dr.J.Ridder)

Bij punt 11: Dr.H.Luikens, Riemann-Stieltjes integratie bij fcts van twee of meer veranderlijken, hfdst. 1 en 2 en § 14, 16 van hfdst. 4.

13: De stelling is afkomstig van H.Hahn, Theorie der reellen Funktionen,I, 1921, p. 404).

Zie ook: S.Saks, Theory of the integral, 2.ed.1937, p.32.
Théorie de l'intégrale, 1.ed.1933, p.249.

O.Haupt u. G.Aumann, Differential- u. Integralrechnung, 1938,III, p.101.

W.Sierpinsky, Fund.Math. 5(1924), p.262,264.

Stelling 14: S.Saks, Theory of the Integral, p.36, noemt deze stelling voor $W \geqq 0$ de stelling van Radon-Nikodym.

Pag.67, eig.3): vgl. S.Sachs, Theory, p.37.

Stelling 15: Voor $W > 0$ staat de hier gegeven splitsing bekend als de Lebesguē-splitsing in totaalcontinu en singulier bestanddeel.

Verdere literatuur bij stelling 14 en 15:

S.Saks, Théorie, p.255,257.

O.Haupt-G.Aumann III, p. 106,107.

H.Hahn, Theorie der reellen Funktionen I, p.422.

O.Nikodym, Fund.Math. 15(1930).

J.Radon, Sitzungsberichte Ak. Wiss. Wien, 122(1913).

P.J.Daniell, Bull.Am.Math.Soc. 26(1919).

A.J.Maria, Ann.of Math., Princeton Un. (2) 28 (1926/27).

H.Lebesgue, Ann. école norm. 27(1910).

Stelling 18: J.Ridder, Nieuw Archief 19, 1^o en 2^o stuk (1936) p.39.

C.de la Vallée Poussin, Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel. Actualités Scientifiques et Industr.578(1937) p.12-14.

S.Saks, Theory, p.81.

H.Luikens, l.c. p.124.

Overige literatuur:

P.Montel-A.Rosenthal, Encyclopaedieartikel.

R.de Possel, C.R. Paris 201,579-581 (1935).

B.Younovitch, C.R. U.R.S.S. 30, 112-114 (1941).

W.Nef, Festschrift Speiser 1945.

E.Frola, Atti Accad. Torino 78 (1943).

E.Sparre - Andersen en B.Jessen, Danske Vid.Selsk.Math-phys. Medd. 22 (1946).

- - -

§ 2. Momenten.

1. Gegeven is een vz Γ, daarop een klasse L van vzn en een abs add vz-fct P, die overal ≥ 0 is, terwijl $P^{\Gamma} = 1$ is (wh-veld). Een wh-veld heet eindig resp. aftelbaar als Γ eindig resp. aftelbaar veel elementen bevat. We beschouwen L-meetbare fcts $\underline{x}$, $\underline{y}$, enz. op Γ ("stochastische variabelen") met (doorgaans) reële fct-waarden x_λ, y_λ, enz., $\lambda \in \Gamma$. Alle integralen worden over geheel Γ uitgestrekt, tenzij het tegendeel vermeld is.

Indien $(P\underline{x}) = \int P^{d\lambda}\, x_\lambda$ bestaat, wordt deze grootheid de mathematische verwachting (of het gemiddelde) van $\underline{x}$ (met betrekking tot P) genoemd, en met $E\underline{x}$, soms ook korter met $\bar{\underline{x}}$, aangeduid. Men heeft: $E(\underline{x} + \underline{y}) = E\underline{x} + E\underline{y}$; $Ec\underline{x} = cE\underline{x}$; $E\,1 = 1$; $a \leq E\underline{x} \leq b$ als $a \leq x_\lambda \leq b$ is voor iedere $\lambda \in \Gamma$. Voorts definiëren we voor zover de integralen bestaan:

$$\mu_k = \mu_k(\underline{x}) = E\,\underline{x}^k = k^e \text{ moment van } \underline{x} \quad ')$$
$$\alpha_k = \alpha_k(\underline{x}) = E|\underline{x}|^k = k^e \text{ absolute moment van } \underline{x} = \mu_k(|\underline{x}|) \quad '')$$
$$\tilde{\mu}_k = \tilde{\mu}_k(\underline{x}) = E\,\tilde{\underline{x}}^k = k^e \text{ gereduceerde moment van } \underline{x} = \mu_k(\tilde{\underline{x}});\ \tilde{\underline{x}} = \underline{x} - \mu_1(\underline{x})$$
$$\tilde{\alpha}_k = \tilde{\alpha}_k(\underline{x}) = E|\tilde{\underline{x}}|^k = k^e \text{ absolute gereduceerde moment van } \underline{x} = \mu_k(|\tilde{\underline{x}}|)$$
$$\mu_{!k} = \mu_{!k}(\underline{x}) = E\,\underline{x}^{!k} = k^e \text{ factoriële moment van } \underline{x} \quad ''')\ x^{!k} = x(x-1)\ldots(x-k+1) \quad '''')$$

De voornaamste eigenschappen van het symbool $x^{!k}$ zijn (k en l geheel en ≥ 0, x willekeurig):

a) $k^{!k} = k!$

b) $x^{!k} = \dfrac{x!}{(x-k)!}$ ook als x niet geheel, maar $x! = \Gamma(x+1)$ is (dus voor $\Re\, x > -1$: $x! = \int_0^\infty e^{-t} t^x\, dt$).

c) $x^{!(k+l)} = x^{!k}(x-k)^{!l} = x^{!l}(x-l)^{!k}$

') Of moment van de orde k; $k \geq 0$ geheel, daar x ook negatieve waarden kan aannemen.

'') Hier is k niet noodzakelijk geheel, maar willekeurig reëel voorzover de integralen bestaan.

''') Ingevoerd door J.F.Steffensen, 1923.

'''') A.T.Vandermonde, 1772 met notatie $[x]^k$ voor $x^{!k}$. C.Kramp en L.Oettinger (Untersuchungen über die analytischen Fakultäten, Jn.f.r.u.a. Math. 33, 1846) gebruiken $x^{k|d}$ voor

$$x(x+d)\ldots(x+kd-d) = \begin{cases} x^k & \text{voor } d = 0 \\ (-d)^k \left(\dfrac{x}{-d}\right)^{!k} & \text{voor } d \neq 0 \end{cases}$$

A.L.Crelle (1780-1855) gebruikt $(x,+d)^k$ voor dit product.

d) $x^{!0} = 1$

e) $x^{!(-k)} = \dfrac{1}{(x+k)^{!k}} = \prod_{j=1}^{k} (x+j)^{-1}$. Speciaal: $x^{!(-1)} = \dfrac{1}{x+1}$

(d) en e) per definitie, of gevolgen van c) als geldigheid daarvan ook voor $k < 0$ geëist wordt.)

voor $k > 0$ is $0^{!k} = 0$; $0^{!(-k)} = 1/k!$; $0^{!0} = 1$.

De identiteiten $(xy)^p = x^p y^p$ en $(x^p)^q = x^{pq}$ hebben geen eenvoudig analogon voor factoriële machten. [1])

f) $(x+1)^{!k} = \dfrac{x+1}{(x+1-k)} x^{!k}$ behalve als $x=k-1$ is of x negatief geheel is en k niet.

Of met $\Delta f(x) = f(x+1)-f(x)$: $\Delta x^{!k} = \dfrac{k}{x+1-k} x^{!k} = kx^{!(k-1)}$ (vgl $\frac{d}{dx}x^k$).

g) Voor gehele $k \geqq 0$ is: $\sum_{u=0}^{x} u^{!k} = \dfrac{(x+1)^{!(k+1)}}{k+1}$ (vgl $\int_0^x u^k du$).

Is k een willekeurig reëel of complex getal $\neq -1$ en $x \geqq 0$ geheel, dan is:

$$\sum_{u=0}^{x} u^{!k} = \frac{(x+1)^{!(k+1)}}{k+1} - \frac{1}{(-k-1)!\,(k+1)} = \frac{(x+1)^{!(k+1)}}{k+1} + \frac{k!\sin \pi k}{\pi (k+1)},$$

zoals uit de eigenschappen van de gammafunctie volgt.

Indien de grootheid $\underline{x}$ een fysische "dimensie" (b.v. D) heeft, d.w.z. eerst <u>na</u> keuze van een bepaalde <u>eenheid</u> door een getal kan worden uitgedrukt (b.v. een graanopbrengst in kg/m² of t/ha, een exportgrootte in f 10^6/jaar, enz.), dan hebben de k^e al dan niet gereduceerde gewone of absolute momenten de dimensie D . Dus hebben b.v. $\sqrt[k]{\alpha_k}$, $\dfrac{\mu_{k+1}}{\mu_k}$ e.d. de dimensie D, d.w.z. zij worden in dezelfde eenheid uitgedrukt als $\underline{x}$. De factoriële momenten hebben geen fysische dimensie en dus ook geen empirische betekenis onafhankelijk van de maateenheid.

Een grootheid, die onafhankelijk is van de eenheid, waarin $\underline{x}$ is uitgedrukt, heet een <u>schaal-invariant</u>; een grootheid, die invariant is bij iedere transformatie $\underline{x} \to \underline{x}+a$ (dus onafhankelijk van de keuze van het nulpunt op de schaal) een <u>semi-invariant</u> (voorbeeld: de gereduceerde momenten) en een grootheid, die zowel schaal- als semi-invariant is, een <u>invariant</u> (bij willekeurige lineaire transformatie der variabele).

We zullen <u>in de onderstelling, dat de optredende momenten bestaan</u>, enige algebraïsche identiteiten afleiden. De voorwaarde is zeker vervuld als $\underline{x}$ op Γ <u>begrensd</u> is (dus b.v. als Γ eindig is), maar ook in algemenere gevallen.

2. A.O. $\tilde{\mu}_0 = 1$ $(= \mu_0)$ 1. $\tilde{\mu}_1 = 0$

2. $\tilde{\mu}_2 = \mu_2 - \mu_1^2$ $(= \sigma^2)$ 3. $\tilde{\mu}_3 = \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3$

4. $\tilde{\mu}_4 = \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 + 6\mu_2\mu_1^2 - 3\mu_1^4$ enz.

---

[1]) Oettinger geeft: $a^{rm|d} = (a^{r|md})^{m|d}$, hetgeen klaarblijkelijk in het algemeen fout is. Hij schrijft deze "identiteit" aan Crelle toe.

B. $\tilde{\mu}_k = \sum_{h=0}^{k} (-1)^h \binom{k}{h} \mu^h \mu_{k-h} \; (\mu = \mu_1)$. Voor $k \geq 2$ is:

$$\tilde{\mu}_k = \sum_{h=0}^{k-2} (-1)^h \binom{k}{h} \mu^h \mu_{k-h} + (-1)^{k-1}(k-1)\mu^k .$$

Bewijs. $\tilde{\mu}_k = E(\underline{x}-\mu)^k = \sum_{h=0}^{k} (-1)^h \binom{k}{h} \mu^h \, E\underline{x}^{k-h}$.

C. $\mu_k = E(\tilde{\underline{x}}+\mu)^k = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \mu^h \tilde{\mu}_{k-h}$; μ_k kan <u>niet</u> in de $\tilde{\mu}_i$ alleen worden uitgedrukt. Voor $k \geq 2$ is: $\mu_k = \sum_{h=0}^{k-2} \binom{k}{h} \mu^h \tilde{\mu}_{k-h} + \mu^k$.

3. A. $\mu_k = \sum_{m=0}^{k} a_{km} \mu_{!m}$ met $a_{km} = \frac{1}{m!} \sum_{h=0}^{m} (-1)^{m-h} \binom{m}{h} h^k$ = coëfficient van $\frac{y^k}{k!}$ in de Taylorontwikkeling van $(e^y-1)^m/m!$.

Bewijs: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k y^k}{k!} = e^{xy} = (1+e^y-1)^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{!m}}{m!} (e^y-1)^m$ als $|e^y-1| < 1$ is, dus b.v. voor y reëel < 0. Verder is:

$$(e^y-1)^m = \sum_{h=0}^{m} (-1)^{m-h} \binom{m}{h} e^{hy} = \sum_{h=0}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{m-h} \binom{m}{h} \frac{h^k y^k}{k!} .$$

Daar $(e^y-1)^m$ deelbaar is door y^m kan de sommering over k beperkt worden tot waarden $\geq m$, terwijl dus geldt: $\sum_{h=0}^{m} (-1)^{m-h} \binom{m}{h} h^k = 0$ voor $0 \leq k < m$.
Dus $x^k = \sum_{m=0}^{k} \sum_{h=0}^{m} \frac{x^{!m}}{m!} (-1)^{m-h} \binom{m}{h} h^k$, waaruit het gestelde volgt door x en y stochastisch variabel te nemen en tot de mathematische verwachting over te gaan.

B. $a_{km} = 0$ voor $0 \leq k < m$; $a_{k+1,m} = m a_{k,m} + a_{k,m-1}$; $a_{00} = 1$; $a_{k0} = 0$ $(k \geq 1)$; $a_{k1} = 1$ $(k \geq 1)$; $a_{k,2} = 2^{k-1}-1$ $(k \geq 1)$; $a_{kk} = 1$; $a_{k,k-1} = \binom{k}{2}$.

TABEL 1.

k \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	0	0									
1	0	1	0									
2	0	1	1									
3	0	1	3	1								
4	0	1	7	6	1							
5	0	1	15	25	10	1						
6	0	1	31	90	65	15	1					
7	0	1	63	301	350	140	21	1				
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1			
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1		
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1	
11	0	1	1023	28501	145750	246730	179487	63987	11880	1155	55	1

a_{km}

C. $\mu_{!p} = \sum_{k=0} (-1)^{p-k} b_{pk} \mu_k$, met $b_{p+1,k} = p b_{pk} + b_{p,k-1}$.

Bewijs: $\sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{p+1-k} b_{p+1,k} x^k = x^{!(p+1)} = x^{!p}(x-p) = \sum_{h=0}^{p} (-1)^{p-h} b_{ph} x^{h+1} + p \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p+1-k} b_{pk} x^k$
tevens volgt hieruit: $b_{p+1,p+1} = b_{pp}$.

D. $\frac{\ln^k(1+X)}{k!} = \sum_k^{\infty}{}_p\,(-1)^{p-k}\, b_{pk}\, \frac{X^p}{p!}$

Bewijs: $\sum_0^{\infty}{}_k\, \frac{x^k}{k!}\ln^k(1+X) = e^{x\ln(1+x)} = (1+X)^x = \sum_0^{\infty}{}_p\, \frac{x^{!p}}{p!}\, X^p = \sum_0^{\infty}{}_p \sum_0^{p}{}_k\, \frac{X^p}{p!}\,(-1)^{p-k}\, b_{pk}\, x^k =$

$= \sum_0^{\infty}{}_k\, x^k \sum_k^{\infty}{}_p\,(-1)^{p-k}\, b_{pk}\, \frac{X^p}{p!}$ (Vgl. I.J.Schwatt, An introd. to the operations with series, p. 110-115, (34),(44),(45), enz.)

E. b_{pk} is de elementaire symmetrische fct van de graad p-k in de p-1 "variabelen" 1,2,...,p-1.
Bewijs: $f(x) = \frac{x^{!p}}{x} = (x-1)\dots(x-p+1) = \sum_0^{p}{}_k\,(-1)^{p-k}\, b_{pk}\, x^{k-1} = \sum_1^{p}{}_k$ idem.

F. $b_{pk} = 0$ $(p<k)$; $b_{00} = 1$; $b_{p0} = 0$ $(p \geq 1)$; $b_{p1} = (p-1)!$; $b_{pp} = 1$;

TABEL 2 $b_{p,p-1} = \binom{p}{2}$

p \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1
7	0	720	1 764	1 624	735	175	21
8	0	5 040	13 068	13 132	6 769	1 960	322
9	0	40 320	109 584	118 124	67 284	22 449	4 536
10	0	362 880	1 026 576	1 172 700	723 680	269 325	63 273
11	0	3 628 800	10 628 640	12 753 576	8 409 500	3 416 930	902 055

	7	8	9	10	11	
7	1					
8	28	1				
9	546	36	1			
10	9 450	870	45	1		
11	157 773	18 150	1 320	55	1	

b

G. <u>Toepassing. Idempotente variabele.</u>

Zij $x_\lambda^2 = x_\lambda$ voor iedere λ ; Λ de vz van alle λ met $x_\lambda = 1$, dan is $\underline{x}$ de zgn. <u>karakteristieke fct</u> van Λ, $\mu_k = \mathrm{E}\underline{x}^k = \mathrm{E}\underline{x} = \mu$ voor $k \geq 1$. Voorts is voor gehele $k \geq 2$ het polynomium $x^{!k} \equiv 0\ (x^2-x)$, dus $\mu_{!k} = 0$ $(k \geq 2)$. Is anderzijds voor een variabele $\underline{x}$ $\mu_{!k} = 0$ voor $k \geq 2$, dan is $\underline{x}$ behoudens op een 0-vz idempotent, want dan is $\mu_k = \mu_{!1} = \mu$ voor $k \geq 1$. Dus is $\mathrm{E}\underline{x}^2(1-\underline{x})^2 = \mu_2 - 2\mu_3 + \mu_4 = 0$, dus $\underline{x}(1-\underline{x}) = 0$ behoudens op een 0-vz. (Waarom?) Voorts is:

$0 \leq \mathrm{E}\underline{x}^2 = \mu_2 = \mu$, $0 \leq \mathrm{E}(1-\underline{x})^2 = 1 - 2\mu_1 + \mu_2 = 1-\mu$, dus $0 \leq \mu \leq 1$.

H. <u>Toepassing. Momentenberekening door optelling</u>.

De berekening van de momenten bij een statistisch gegeven verdeling wordt vereenvoudigd door een "voorlopig gemiddelde" $\approx \mu_1$ als oorsprong te kiezen, maar blijft vooral als de orde hoger wordt, vrij omvangrijk. Voor het geval dat de variabele alleen aequidistante waarden aanneemt, en geen rekenmachine ter beschikking is, is een eenvoudige methode door G.H.HARDY aangegeven.

Zij gegeven, dat $\underline{x}$ de waarden $0,1,2,\ldots,m$ aanneemt met de frequenties (<u>niet</u> fqn) $f_1, f_2, \ldots, f_m$ '). Het is gewoonlijk het eenvoudigst te werken met de <u>extensieve momenten</u> $M_k = \sum_0^m \lambda f_\lambda x_\lambda^k = M_0 \mu_k$, waarin $M_0 = \sum f_\lambda = n$, de uitgebreidheid van de collectie is. Men berekent dan eerst de $M_{!k}$ en daaruit met behulp van 3A de M_k. Hardy berekent nu de $M_{!k}$ door successieve optellingen.

Zij $s^+_{0j} = \sum_j^m \lambda f_\lambda = \text{freq}[\underline{x} \geq j]$; $s^+_{r+1,j} = \sum_j^m \mu\, s^+_{r\mu}$ dan is:

$$s^+_{rj} = \frac{1}{r!} \sum_j^m i\, (i-j+r)^{!r} f_i \,.$$ <u>Bewijs</u> door volledige inductie.

$$s^+_{r+1,j} = \sum_j^m \mu\, s^+_{r\mu} = \sum_j^m \mu \frac{1}{r!} \sum_\mu^m i\, (i-\mu+r)^{!r} f_i = \frac{1}{r!} \sum_j^m i\, f_i \sum_j^i \mu\, (i-\mu+r)^{!r} = \frac{1}{r!} \sum_j^m f_i \sum_r^{i-j+r} u\, u^{!r} =$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_j^m i\, f_i \frac{(i-j+r+1)^{!(r+1)}}{r+1} = \frac{1}{(r+1)!} \sum_j^m i\, (i-j+r+1)^{!(r+1)} f_i$$

<u>Gevolg</u>: $k!\, s^+_{kk} = \sum_k^m i\, i^{!k} f_i = M^+_{!k}$.

<u>Opmerking</u>: voor de berekening van $M^+_{!k}$ is het voldoende de s^+_{rj} te bepalen voor $r \leq k-1$ en $k \leq j \leq m$: $\dfrac{M^+_{!k}}{k!} = \sum_k^m i\, s^+_{k-1,j}$

Uit de $M^+_{!k}$ zijn dan de M^+_k te berekenen met behulp van 3A en de gereduceerde momenten vervolgens met 2B.

Neemt de variabele ook de negatieve waarden $-m', \ldots, -1$ aan, dan worden deze apart behandeld:

$$s^-_{0,-j} = \sum_{-m'}^{-j} \lambda f_\lambda = \text{freq}[\underline{x} \leq -j] \; ; \quad s^-_{r+1,-j} = \sum_{-m'}^{-j} \lambda\, s^-_{r\lambda}$$

Men verkrijgt dan, als boven: $r!\, s^-_{r,-j} = \sum_{-m'}^{-j} \lambda\, (|\lambda| - j + r)^{!r} f_\lambda$ en

$$M^-_{!k} = \sum_{-m'}^{-1} \lambda\, \lambda^{!k} f_\lambda = \sum_1^{m'} \mu\, (-\mu)^{!k} f_{-\mu} = (-1)^k \sum_1^{m'} \mu\, (\mu+k-1)^{!k} f_{-\mu} =$$

$$= (-1)^k \sum_{-m'}^{-1} \lambda\, (|\lambda| + k - 1)^{!k} f_\lambda = (-1)^k s^-_{k,-1} \; ; \quad M_{!k} = M^+_{!k} + M^-_{!k} \,.$$

De $s^-_{r,-j}$ moet dus berekend worden voor $r \leq k$ en voor alle j van m' tot en met 1. Door een translatie $\underline{x} = \underline{y} + m_1$ van de variabele kan men steeds van het eerste geval op het tweede overgaan, wat het voordeel heeft, dat de waarden van de $s^{\pm}_{rj}$ kleiner worden. Men krijgt dan echter de momenten van $\underline{y}$ in plaats van die van $\underline{x}$, welk nadeel op de volgende wijze te

') Zijn de aangenomen waarden $x_1, \ldots, x_m$, dan werke men met $\underline{y} = \dfrac{\underline{x} - x_1}{h}$ waarin $h = x_2 - x_1 = x_{i+1} - x_i$ is.

vermijden is. Men berekene de s^{+}_{rj} als tevoren, beneden aan de kolom beginnende ($x=m,m-1,\ldots$) en werke tegelijkertijd van boven af ($x=0,1,2,\ldots$) met.

$$s^{-}_{0j} = \sum_{\lambda=0}^{j} f_\lambda = \text{freq}\,[\underline{x} \leq j]\ ; \quad s^{-}_{r+1,j} = \sum_{\lambda=0}^{j} s^{-}_{r\lambda}.$$

Men krijgt dan. $\displaystyle r!\,s^{-}_{rj} = \sum_{\lambda=0}^{j} (j+r-\lambda)^{!r} f_\lambda$.

Nu is. $\displaystyle \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r}\binom{n}{k-r} = \binom{m+n}{k}$ (bewijs? Aanwijzing. $\binom{\lambda}{k} = \binom{\lambda-1}{k} + \binom{\lambda-1}{k-1}$)

en $\displaystyle \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{m-r}{k-r}\binom{n}{r} = \binom{m-n}{k}$ (" ? " . $\binom{\lambda}{k} = \binom{\lambda+1}{k} - \binom{\lambda}{k-1}$)

dus. $\displaystyle \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{j-r}{k-r} s^{-}_{r,j-r} = \sum_{r=0}^{k} \sum_{\lambda=0}^{j-r} (-1)^r \binom{j-r}{k-r}\binom{j-\lambda}{r} f_\lambda =$

$$= \sum_{\lambda=0}^{j} f_\lambda \sum_{r=0}^{j-\lambda} (-1)^r \binom{j-r}{k-r}\binom{j-\lambda}{r} = \sum_{\lambda=0}^{j} \binom{\lambda}{k} f_\lambda$$

en. $\displaystyle \sum_{r=0}^{m-j-1} \binom{j+1}{k-r} s^{+}_{r,j+1+r} = \sum_{r=0}^{m-j-1} \sum_{j+1+r} \binom{j+1}{k-r}\binom{\lambda-j-1}{r} f_\lambda = \sum_{\lambda=j+1}^{m} f_\lambda \sum_{r=0}^{\lambda-j-1} \binom{j+1}{k-r}\binom{\lambda-j-1}{r} = \sum_{\lambda=j+1}^{m} \binom{\lambda}{k} f_\lambda .$

$$M_{!k} = \sum_{\lambda=0}^{m} \lambda^{!k} f_\lambda = k!\left\{\sum_{\lambda=0}^{j} + \sum_{\lambda=j+1}^{m}\right\}\binom{\lambda}{k} f_\lambda = k!\left\{\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{j-r}{k-r} s^{-}_{r,j-r} + \sum_{r=0}^{m-j-1} \binom{j+1}{k-r} s^{+}_{r,j+1+r}\right\}$$

Voor de toepassing kiezen we een geschikte waarde van j, b.v. $j=\frac{1}{2}m$ als m even is, en beginnen de sommering steeds zowel boven als onderaan de kolom.(Zie Tabel 3). In de kolom voor r=0 werken we van boven naar beneden tot x=j en van beneden naar boven tot x=j+1. In de volgende kolom (r=1) werken we van boven naar beneden tot x=j-1 en van onder naar boven tot x=j+2 enz. Deze methode is alleen handig als $k \ll m$ is, dus voor een lange tabel.Anders kan men eenvoudiger een "voorlopig gemiddelde" kiezen.

<u>Voorbeeld</u>. <u>sterfte door tuberculose</u>.

TABEL 3

x	f_x	r = 0	1	2	3	4
0	2	2	-2	2	-2	2
1	2	4	-6	8	-10	12
2	14	18	-24	32	-42	54
3	17	35	-59	91	-133	
4	27	62	-121	212		
5	31	93	-214			
6	38	131				
7	43	128				
8	30	85	+210			
9	21	55	+125	254		
10	14	34	+70	129	+220	
11	9	20	+36	59	+91	134
12	8	11	+16	23	+32	43
13	1	3	+5	7	+9	11
14	2	2	+2	2	+2	2

In deze tabel geeft f_x het aantal weken aan in de jaren 1930 t.e.m. 1934, waarin in Amsterdam x sterfgevallen ten gevolge van longtuberculose voorkwamen (Publicatie no 103 van het Gem.Bur. voor Statistiek, Amsterdam). We berekenen de eerste vier extensieve factoriële momenten.

Dus $0 \leqq k \leqq 4$, $m=14$, en we nemen $j=6$. Uit de in de tabel onderstreepte getallen volgen deze momenten aldus.

$M_{!0} = n = 131+128 = \underline{259}$ (=aantal weken in de 5 jaren 1930-1934)

$$M_{!1} = \left\{\binom{6}{1}s^-_{06} - \binom{5}{0}s^-_{15}\right\} + \left\{\binom{7}{1}s^+_{07} + \binom{7}{0}s^+_{18}\right\} = (6.131-214)+(7.128+210) = \underline{1678}$$

$$M_{!2} = 2\left[\left\{\binom{6}{2}s^-_{06} - \binom{5}{1}s^-_{15} + \binom{4}{0}s^-_{24}\right\} + \left\{\binom{7}{2}s^+_{07} + \binom{7}{1}s^+_{18} + \binom{7}{0}s^+_{29}\right\}\right] =$$

$$= 2\left[(15.131-5.214+212)+(21.128+7.210+254)\right] = \underline{11038}$$

$$M_{!3} = 6\left[(20.131-10.214+4.212-131)+(35.128+21.210+7.254+220)\right] = \underline{72498}$$

$$M_{!4} = 24\left[(15.131-10.124+6.212-3.131+154)+(35.128+35.210+21.254+7.220+134\right] = \underline{354744}.$$

4. Zij $\varphi(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$ een willekeurige machtreeks in x, die <u>gelijkmatig convergent</u> is voor alle door de variabele x aangenomen waarden. Dan is voor zover de integralen bestaan.

$$E\varphi(\underline{x}) = \int P^{d\lambda} \sum_0^\infty c_n x_\lambda^n = \sum_0^\infty c_n \int P^{d\lambda} x_\lambda^n = \sum_0^\infty c_n \mu_n(\underline{x}).$$

De voorwaarde is zeker vervuld als 1° $\varphi(x)$ geheel transcendent en 2° het wh-veld eindig is. Speciaal is:

$$Z_{\underline{x}}(X) = Ee^{\underline{x}X} = \sum_0^\infty \frac{X^n}{n!}\mu_n(\underline{x}) \quad \text{als de integralen bestaan.}$$

De fct heet wel "momentenvoortbrengende fct". Haar natuurlijke logarithme $z_{\underline{x}}(X)$ zal ook "entropische fct" genoemd worden, daar zij voor $\underline{x}$ = energie en $-X^{-1}$ = absolute temperatuur de entropie bepaalt. Het tweede lid bestaat voor iedere reële variabele op ieder wh-veld, ook als bovenstaande voorwaarden niet vervuld zijn, indien $X=i\xi$ <u>zuiver imaginair</u> is (waarom?). $Ee^{i\underline{x}\xi} = \varphi(\xi)$ heet de <u>karakteristieke fct</u> van de stochastische variabele $\underline{x}$. Het derde lid behoeft dan echter niet te bestaan, en <u>als</u> het bestaat, niet aan het tweede gelijk te zijn.

De betrekkingen tussen gewone en gereduceerde momenten volgen uit.

$Z_{\underline{\mathring{x}}}(X) = e^{-XE\underline{x}} Z_{\underline{x}}(X)$. Algemeen is voor constante a en b.

$Z_{a\underline{x}+b}(X) = e^{bX} Z_{\underline{x}}(aX)$. De voortbrengende fct der factoriële momenten is:

$$\sum_0^\infty \frac{X^n}{n!}\mu_{!n}(\underline{x}) = E\sum_0^\infty \frac{X^n \underline{x}^{!n}}{n!} = E\sum_0^\infty \binom{\underline{x}}{n}X^n = E(1+X)^{\underline{x}} = Z_{\underline{x}}(\ln(1+X))$$

5. A. De successieve afgeleiden voor $X=0$ van $\ln Z_{\underline{x}}(X)$ (als zij bestaan) van orden $\geqq 2$ heten de semi-invarianten van THIELE [1]), tegenwoordig wel <u>cumulanten</u>. (Bewijs, dat ze semi-invariant zijn). De eerste cumulant is niet semi-invariant maar $= \mu$. Onderstel vooreerst, dat zij alle bestaan. Notatie: $z_{\underline{x}}(X) = \ln Z_{\underline{x}}(X) = \sum_0^\infty \frac{X^k}{k!}\varkappa_k(\underline{x})$.

De voorwaarde is zeker vervuld als $\underline{x}$ begrensd is, $|\underline{x}| \leqq a$. Dan is $-1 < e^{Xx_\lambda} - 1 \leqq e^{|X|a} - 1$, dus $|e^{Xx_\lambda} - 1| < 1$ als $|X| < a^{-1}\ln 2$ is, dus

[1]) T.N. THIELE (1838-1910), Theory of observations, Londen 1903.

$|Z_{\underline{x}}(X) - 1| = |Ee^{X\underline{x}} - 1| \leqq E|e^{X\underline{x}} - 1| < 1$, dus $\ln Z_{\underline{x}}(X) = \ln\{1+(Z_{\underline{x}}(X)-1)\}$ is te ontwikkelen.

B. $\varkappa_k = \sum \frac{(-1)^{\ell-1} k!}{\ell k_1! \ldots k_\ell!} \mu_{k_1} \ldots \mu_{k_\ell}$, $\varkappa_0 = 0$, indien de sommatie uitgestrekt wordt over alle natuurlijke $\ell \geq 1, k_1, \ldots, k_\ell$ met 1^0: $k_i \geq 1$, 2^0: $\sum_1^\ell k_i = k$,

d.w.z. $\sum = \sum_1^k \ell \sum_1^{k-\ell+1} k_1 \sum_1^{k-k_1-\ell+2} k_2 \sum_1^{k-k_1-k_2-\ell+3} k_3 \ldots \sum_1^{k-k_1-\ldots k_{\ell-2}-1} k_{\ell-1}$

Bewijs: $\ln(1+z) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell} z^\ell$; $z(X) = \ln Z(X) = \ln(1+\sum_1^\infty \frac{\mu_k}{k!} X^k) =$

$= \sum_1^\infty \ell \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell} \left\{\sum_1^\infty k \frac{\mu_k}{k!} X^k\right\}^\ell = \sum_1^\infty \ell \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell} \sum_1^\infty k_1 \ldots \sum_1^\infty k_\ell \frac{\mu_{k_1} \ldots \mu_{k_\ell}}{k_1! \ldots k_\ell!} X^{k_1+\ldots+k_\ell}$

C. $\varkappa_0 = 0$

$\varkappa_1 = \mu$

$\varkappa_2 = \mu_2 - \mu_1^2 = \tilde{\mu}_2 = \sigma^2$

$\varkappa_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3 = \tilde{\mu}_3$

$\varkappa_4 = \mu_4 - 4\mu_1\mu_3 - 3\mu_2^2 + 12\mu_1^2\mu_2 - 6\mu_1^4 = \tilde{\mu}_4 - 3\tilde{\mu}_2^2$

$\varkappa_5 = \mu_5 - 5\mu_1\mu_4 - 10\mu_2\mu_3 + 20\mu_1^2\mu_3 + 30\mu_1\mu_2^2 - 60\mu_1^3\mu_2 + 24\mu_1^5 =$
$= \tilde{\mu}_5 - 10\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3$

$\varkappa_6 = \mu_6 - 6\mu_1\mu_5 - 15\mu_2\mu_4 - 10\mu_3^2 + 30\mu_1^2\mu_4 + 120\mu_1\mu_2\mu_3 + 30\mu_2^3 -$
$- 120\mu_1^3\mu_3 - 270\mu_1^2\mu_2^2 + 360\mu_1^4\mu_2 - 120\mu_1^6 =$
$= \tilde{\mu}_6 - 15\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 - 10\tilde{\mu}_3^2 + 30\tilde{\mu}_2^3$

D. $\mu_k = \sum \frac{k!}{\ell! k_1! \ldots k_\ell!} \varkappa_{k_1} \ldots \varkappa_{k_\ell}$; $(\ell \geq 1;\ k_i \geq 1;\ \sum k_i = k)$; $\mu_0 = 1$

Bewijs: $Z(X) = e^{z(X)} = \sum_0^\infty \ell \frac{1}{\ell!} \left\{\sum_1^\infty k \frac{\varkappa_k}{k!} X^k\right\}^\ell = \sum_0^\infty \ell \frac{1}{\ell!} \sum_1^\infty k_1 \ldots \sum_1^\infty k_\ell \frac{\varkappa_{k_1} \ldots \varkappa_{k_\ell}}{k_1! \ldots k_\ell!} X^{k_1+\ldots+k_\ell}$

(N.B. Vgl. formule D met B)

E. $\mu_0 = 1$

$\mu_1 = \varkappa_1$

$\mu_2 = \varkappa_2 + \varkappa_1^2$

$\mu_3 = \varkappa_3 + 3\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_1^3$

$\mu_4 = \varkappa_4 + 4\varkappa_1\varkappa_3 + 3\varkappa_2^2 + 6\varkappa_1^2\varkappa_2 + \varkappa_1^4$

$\mu_5 = \varkappa_5 + 5\varkappa_1\varkappa_4 + 10\varkappa_2\varkappa_3 + 10\varkappa_1^2\varkappa_3 + 15\varkappa_1\varkappa_2^2 + 10\varkappa_1^3\varkappa_2 + \varkappa_1^5$

$\mu_6 = \varkappa_6 + 6\varkappa_1\varkappa_5 + 15\varkappa_2\varkappa_4 + 10\varkappa_3^2 + 15\varkappa_1^2\varkappa_4 + 60\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 + 15\varkappa_2^3 +$
$+ 20\varkappa_1^3\varkappa_3 + 45\varkappa_1^2\varkappa_2^2 + 15\varkappa_1^4\varkappa_2 + \varkappa_1^6$

De $\tilde{\mu}_k$ worden gevonden door $\varkappa_1$ door 0 te vervangen:

$\tilde{\mu}_1 = 0$

$\tilde{\mu}_2 = \varkappa_2$

$\tilde{\mu}_3 = \varkappa_3$

$\tilde{\mu}_4 = \varkappa_4 + 3\varkappa_2^2$

$\tilde{\mu}_5 = \varkappa_5 + 10\varkappa_2\varkappa_3$

$\tilde{\mu}_6 = \varkappa_6 + 15\varkappa_2\varkappa_4 + 10\varkappa_3^2 + 15\varkappa_2^3$

F. De coëfficient van $\kappa_{f_1}^{\ell_1} \ldots \kappa_{f_h}^{\ell_h}$ in μ_k met $f_1 < \ldots < f_h$, $\sum_1^h f_i \ell_i = k$, en $\sum_1^h \ell_i = \ell$ is: $\dfrac{k!}{\prod_1^h \ell_i!(f_i!)^{\ell_i}}$ (Waarom?)

De coëfficient van $\mu_{f_1}^{\ell_1} \ldots \mu_{f_h}^{\ell_h}$ in κ_k onder dezelfde voorwaarden is: $(-1)^{\ell-1}(\ell-1)!$ maal de coëfficient van $\kappa_{f_1}^{\ell_1} \ldots \kappa_{f_h}^{\ell_h}$ in μ_k.

G. Men heeft $\frac{d}{dX} Z(X) = Z(X) \frac{d}{dX} z(X)$, dus

$$\sum_1^\infty \frac{\mu_k}{(k-1)!} X^{k-1} = \sum_0^\infty \frac{\mu_j}{j!} X^j \sum_1^\infty \frac{\kappa_h}{(h-1)!} X^{h-1} \quad \text{dus}$$

$$\mu_k = (k-1)! \sum_0^{k-1} \frac{\mu_j \kappa_{k-j}}{j!(k-j-1)!} = \sum_0^{k-1} \binom{k-1}{j} \mu_j \kappa_{k-j}$$

$$\kappa_k = \mu_k - \sum_1^{k-1} \binom{k-1}{j} \mu_j \kappa_{k-j}$$

Hieruit zijn de in C en E gegeven betrekkingen gemakkelijk te berekenen.

H. Is $\kappa_2 = 0$, dan is de variabele constant (bewijs dit). Sluiten we dit geval uit, dan is $\kappa_2 > 0$ en $I_k(\underline{x}) = \sigma^{-k} \kappa_k(\underline{x})$ is voor $k \geq 2$ een <u>invariant</u>. I_1 is alleen <u>schaal</u>-invariant en heet de <u>variabiliteitscoëfficient</u>; $I_2 = 1$; notatie (von Mises): $I_3 = \rho$ ("scheefheid"); $I_4 = \varepsilon$ ("exces"), (Pearson): $I_3^2 = \beta_1$, $I_4 = \beta_2 - 3$. Deze laatste heeft het bezwaar, dat het teken van $I_3 = \sqrt{\beta_1}$ apart vastgelegd moet worden; de notatie van von Mises heeft het bezwaar, dat ρ vaak voor de correlatiecoëfficient gebruikt wordt. Beter is b.v. $\gamma_k = I_{k+1}$, dus scheef/heid $= \gamma_1$ exces $= \gamma_2$, enz. Voor practische berekening is het eenvoudiger

$$\gamma_2 + 6 = \frac{\tilde{\mu}_4}{\sigma^4} + 3 = \frac{\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 3\mu_2^2}{(\mu_2 - \mu_1^2)^2}$$

te berekenen. Is n de uitgebreidheid van een gegeven collectie, $M_k = n\mu_k$ het "uitgebreide moment", dan is $\gamma_2 + 6 = \dfrac{(nM_4 - 4M_1M_3 + 3M_2^2)n^2}{(nM_2 - M_1^2)^2}$.

I. De variabele $\underline{x}$ heet <u>normaal</u>, als $F(x) = P[\underline{x} < x] = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\frac{(u-\mu)^2}{\sigma^2}} du$

dus als $P\left[\dfrac{\underline{x}-\mu}{\sigma} < t\right] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$ is.

Voor een normale variabele zijn alle cumulanten van een orde ≥ 3 <u>nul</u>.

<u>Bewijs</u>: Het is voldoende het geval $\mu = 0$, $\sigma = 1$ te beschouwen. Dan is:

$$Z(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2 + xX} dx = e^{\frac{1}{2}X^2}, \text{ dus algemeen: } Z(X) = e^{\mu X + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2}$$

voor een normale variabele.

Het bewijs, dat omgekeerd een variabele, waarvan alle cumulanten voor $k \geq 3$ verdwijnen aequivalent is met een normale, berust op de oplossing van het <u>momentenprobleem van Stieltjes</u>, waarin gevraagd wordt, de voorwaarden na te gaan, waaronder een stochastische variabele door zijn momenten bepaald is. Dit blijft voorlopig onbesproken.

5. <u>Toepassing</u>. <u>Tweewaardige variabele</u>. (alternatief).

A. Zij gegeven, dat $\underline{x}$ de twee waarden x_1 en $x_2 \neq x_1$ aanneemt met whn p en $q = 1-p$. Stelt men $\underline{x} = x_1 + (x_2 - x_1)\underline{u}$, dan neemt $\underline{u}$ de waarden 0 en 1 met deze whn aan.

Daar $Z_{\underline{x}}(X) = e^{x_1 X} Z_{\underline{u}}((x_2-x_1)X)$ is, is het voldoende alleen $\underline{u}$ te beschouwen. Men heeft: $\tilde{\mu}_k(\underline{x}) = (x_2 - x_1)^k \tilde{\mu}_k(\underline{u})$

evenzo voor K_k, en $\mu_1(\underline{x}) = x_1 + (x_2 - x_1)\mu_1(\underline{u})$.

B. Daar $\underline{u}$ <u>idempotent</u> is, d.w.z. $\underline{u}^k = \underline{u}$ voor $k \geq 1$, is

$\mu_k(\underline{u}) = \mu_1(\underline{u}) = q \quad (k \geq 1)$; $\mu_{1k}(\underline{u}) = 0 \quad (k \geq 2)$. Voorts is:

$Z_{\tilde{u}}(X) = e^{-qX}(p+qe^X) = pe^{-qX} + qe^{pX}$ dus $\tilde{\mu}_k(\underline{u}) = pq\{p^{k-1} - (-q)^{k-1}\}$ $(k \geq 0)$

C. Noemen we de semi-invarianten van deze speciale stochastische variabele $\underline{u}$ D_k of $D_k(q)$, dan is:

$$\sum_1^\infty \frac{D_k}{k!} X^k = z_u(X) = \ln Ee^{uX} = \ln(p+qe^X) = \ln(1+q(e^X-1)) =$$

$$= \sum_1^\infty \frac{(-1)^{h-1}}{h} q^h (e^X-1)^h = q(X + \tfrac{1}{2}X^2 + \tfrac{1}{6}X^3 + \tfrac{1}{24}X^4 + \dots) - \tfrac{1}{2}q^2(X + \tfrac{1}{2}X^2 + \tfrac{1}{6}X^3 + \dots)^2 +$$

$$+ \tfrac{1}{3}q^3(X + \tfrac{1}{2}X^2 + \dots)^3 - \tfrac{1}{4}q^4(X + \dots)^4 + \dots = q(X + \tfrac{1}{2}X^2 + \tfrac{1}{6}X^3 + \tfrac{1}{24}X^4 + \dots) -$$

$$- \tfrac{1}{2}q^2(X^2 + X^3 + \tfrac{7}{12}X^4 + \dots) + \tfrac{1}{3}q^3(X^3 + \tfrac{3}{2}X^4 + \dots) - \tfrac{1}{4}q^4(X^4 + \dots) + \dots =$$

$$= Xq + \tfrac{1}{2}X^2(q - q^2) + \tfrac{1}{6}X^3(q - 3q^2 + 2q^3) + \tfrac{1}{24}X^4(q - 7q^2 + 12q^3 - 6q^4) + \dots$$

Dus: $D_1 = q$; $D_2 = q - q^2 = pq$; $D_3 = q(1-3q+2q^2) = pq(1-2q) = pq(p-q)$;

$D_4 = q(1-7q+12q^2-6q^3) = pq(1-6q+6q^2) = pq(1-6pq) = pq(p^2-4pq+q^2)$.

D. TABEL 4 $(k \leq 6)$

k	$\tilde{\mu}_k(\underline{u})$	$D_k(q) = K_k(\underline{u})$	$I_k(\underline{u})$
1	0	q	-
2	$pq = p^2q + pq^2$	$q - q^2 = pq$	1
3	$pq(p-q) =$ $= p^3q - pq^3$	$q - 3q^2 + 2q^3 = pq(p-q)$	$\frac{p-q}{\sqrt{pq}}$
4	$pq - 3p^2q^2 =$ $= p^4q + pq^4$	$q - 7q^2 + 12q^3 - 6q^4 =$ $= pq(1-6pq)$	$\frac{1}{pq} - 6$

TABEL 4 (vervolg)

k	$\tilde{\mu}_k(\underline{u})$	$D_k(q) = \varkappa_k(\underline{u})$	$I_k(\underline{u})$
5	$(p-q)(pq-2p^2q^2) = p^5q-pq^5$	$q-15q^2+50q^3-60q^4+24q^5 = pq(p-q)(1-12pq)$	$\frac{(p-q)}{\sqrt{pq}}\left(\frac{1}{pq}-12\right)$
6	$pq-5p^2q^2+5p^3q^3 = p^6q+pq^6$	$q-31q^2+180q^3-390q^4+360q^5-120q^6 = pq-30p^2q^2+120p^3q^3$	$\frac{1}{p^2q^2} - \frac{30}{pq} + 120$

E. Met gebruikmaken van de in 3A bepaalde getallen a_{km}:

$\frac{(e^X-1)^m}{m!} = \sum_m^k a_{km}\frac{X^k}{k!}$ krijgen we algemeen:

$$\ln(p+qe^X) = \sum_1^\infty m \frac{(-1)^{m-1}}{m} q^m(e^X-1)^m = \sum_1^\infty m \sum_m^\infty k \frac{(-1)^{m-1}}{m} q^m a_{km}\frac{X^k}{k!}\, m! \quad \text{dus:}$$

$$D_k = \sum_1^k m\,(-1)^{m-1}(m-1)!\,q^m a_{km}.$$

De in de 3^o kolom van tabel 4 optredende coëfficiënten stemmen dus op factoren $(m-1)!$ na met de in 3B berekende a_{km} overeen.

F. $D_{k+1} = pq.D_k'$ als $D_k = D_k(q)$, $p=1-q$ is.

Bewijs: $\sum_0^\infty k\, D_{k+1}\frac{X^k}{k!} = \sum_1^\infty D_k\frac{kX^{k-1}}{k!} = \frac{\partial}{\partial X}\ln(p+qe^X) = \frac{qe^X}{p+qe^X} = 1 - \frac{p}{p+qe^X} =$

$$q + pq\frac{e^X-1}{p+qe^X} = q + pq\frac{\partial}{\partial q}\ln(p+qe^X) = q + pq\sum_1^\infty k\frac{dD_k}{dq}\frac{X^k}{k!}.$$

Deze relatie bewijst, dat alle D_k polynomen zijn en geeft de gemakkelijkste wijze van berekening aan. Zij volgt ook uit de in 3B aangegeven recurrente betrekking.

6. Twee stochastische variabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ (op eenzelfde wh-veld Γ) heten onafhankelijk, indien voor twee willekeurige intervallen $\mathfrak{J}$ en $\mathfrak{Y}$

$$P[_{\shortparallel}\underline{x}\in\mathfrak{J}_{,}\wedge_{,}\underline{y}\in\mathfrak{Y}_{\shortparallel}] = [P\ \underline{x}\in\mathfrak{J}]\,P[\underline{y}\in\mathfrak{Y}] \text{ is.}$$

Hiertoe is nodig en voldoende:

$$P[_{\shortparallel}\underline{x}<a_{,}\wedge_{,}\underline{y}<b_{\shortparallel}] = F_{\underline{x}}(a).F_{\underline{y}}(b).$$

Aanwijzing bewijs: Dan is ook:

$$P[_{\shortparallel}\underline{x}\geq a_{,}\wedge_{,}\underline{y}<b_{\shortparallel}] = P[\underline{y}<b] - P[_{\shortparallel}\underline{x}<a_{,}\wedge_{,}\underline{y}<b_{\shortparallel}] = (1-F_{\underline{x}}(a)).F_{\underline{y}}(b).$$

STELLING: De entropische fct (dus ook de $k^{\underline{e}}$ cumulant) van de som van twee onafhankelijke stochastische variabelen is gelijk aan de som van de entropische fcts (resp. de $k^{\underline{e}}$ cumulanten) van die variabelen.

Bewijs: $Z_{\underline{x}+\underline{y}}(X) = \int e^{(x_\lambda+y_\lambda)X}\,P^{d\lambda} = \int e^{xX+yX}\,P[_{\shortparallel}x<\underline{x}\leq x+dx_{,}\wedge_{,}y<\underline{y}\leq y+dy_{\shortparallel}] =$

$$= \int e^{xX+yX}\,dF_{\underline{x}}(x).dF_{\underline{y}}(y) = \int e^{xX}\,dF_{\underline{x}}(x).\int e^{yX}\,dF_{\underline{y}}(y) =$$

$$= Z_{\underline{x}}(X).Z_{\underline{y}}(X).$$

dus. $z_{\underline{x}+\underline{y}}(X) = z_{\underline{x}}(X) + z_{\underline{y}}(X)$ en $\varkappa_k(\underline{x}+\underline{y}) = \varkappa_k(\underline{x}) + \varkappa_k(\underline{y})$

De eerste bewering geldt voor zuiver imaginaire X <u>zonder enige beperking</u> voor de variabelen (behalve natuurlijk de L-meetbaarheid); de tweede uiteraard alleen als de bedoelde cumulanten bestaan.

<u>Gevolg</u>. 1. De cumulanten ener verdeling van Bernoulli zijn de n-vouden der overeenkomstige cumulanten van het alternatief. De <u>invariant</u> van de orde k ontstaat uit die van het alternatief door deling door $n^{\frac{1}{2}k-1}$ (waarom?). De successieve invarianten van de verdeling van Bernoulli zijn dus: $\gamma_0 = I_2 = 1$, $\gamma_1 = I_3 = \frac{p-q}{\sqrt{pqn}}$, $\gamma_2 = I_4' = \frac{1}{n}(\frac{1}{pq} - 6)$, enz.

2. Neemt men in plaats van een verdeling van Bernoulli de verdeling van de som van n onafhankelijke variabelen, die allen dezelfde verdelingsfct hebben (n onafhankelijke trekkingen uit een collectie), dan is de entropische fct hiervan: $n.z_{\underline{x}}(X)$, dus haar cumulanten zijn de n-vouden van die der gegeven verdeling.

Voor het <u>gemiddelde</u> der n variabelen is de entropische fct $n.z_{\underline{x}}(\frac{X}{n})$, dus de k^e^ cumulant wordt uit die van de oorspronkelijke verdeling verkregen door vermenigvuldiging met n^{1-k}. De verwachting van dit gemiddelde van n trekkingen is dus = de verwachting van één enkele trekking, de spreiding van het gemiddelde = $1/\sqrt{n}$ maal de spreiding van de gegeven verdeling, enz. Algemeen geldt, dat de invariant van de k^e^ orde van dit gemiddelde = $n^{1-\frac{1}{2}k}$ maal de bijbehorende invariant van de oorspronkelijke verdeling is. In de onderstelling, dat al deze invarianten eindig zijn is dus: $\lim_{n} I_k = 0$ voor $k \geq 3$ en de limiet van de <u>t.o.v. het gemiddelde genomen</u> entropische fct $= \frac{1}{2}\varkappa_2 X^2$. Dit laatste is een <u>aanwijzing</u>, dat het gemiddelde van n trekkingen uit een collectie, wanneer alle cumulanten eindig zijn tot een normaal verdeelde variabele nadert. We komen hier later op terug.

\- - -

7. Is $\varphi(x) \geqq 0$, dan is $E\varphi(x) \geqq 0$. Met behulp van deze eigenschap kunnen ongelijkheden voor de momenten (gewone en gereduceerde) op de volgende wijze worden afgeleid:

Zij $\Pi(x) = \sum_0^n a_i x^i$ en $\underline{x}$ een stochastische variabele, dan is

$$0 \leqq E\,\Pi^2(\underline{x}) = E \sum_0^n \sum_0^n a_i a_j \underline{x}^{i+j} = \sum_0^n \sum_0^n a_i a_j \mu_{i+j}.$$

Het rechterlid is dus een niet-negatieve kwadratische vorm in de a's (die slechts = 0 kan zijn als $\Pi(\underline{x}) \approx 0$ is), waarvan de coëfficiëntenmatrix is:

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & & & \\ \mu_n & & \cdots & \mu_{2n} \end{pmatrix}$$

Hiervan moeten dus alle hoofdonderdeterminanten $\geqq 0$ zijn, zodat we direct de volgende ongelijkheden eruit kunnen aflezen (die zowel voor gewone als voor gereduceerde momenten gelden):

$$\mu_1^2 \leqq \mu_0 \mu_2 \qquad (\text{of } \mu^2 \leqq \mu_2 = \mu^2 + \sigma^2)$$

$$\mu_2^2 \leqq \mu_0 . \mu_4 \qquad \text{dus } \mu_4 \geqq \mu_2^2$$

$$\mu_2 \mu_4 \geqq \mu_3^2 \qquad \text{Voor de gereduceerde momenten is dus:}$$

$$\tilde{\mu}_4 \geqq \tilde{\mu}_2^2 = \sigma^4 \quad \text{en} \quad \tilde{\mu}_4 \sigma^4 \geqq \tilde{\mu}_3^2, \text{ dus (vgl.bl. 89, punt H):}$$

$$\gamma_2 + 3 \geqq 1 \quad \text{en} \quad \gamma_2 + 3 \geqq \gamma_1^2$$

Verder b.v. de hoofdonderdeterminant gevormd uit de eerste drie rijen en de eerste drie kolommen (voor gereduceerde momenten):

$$0 \leqq \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sigma^2 \\ 0 & \sigma^2 & \sigma^3\gamma_1 \\ \sigma^2 & \sigma^3\gamma_1 & \sigma^4(\gamma_2+3) \end{vmatrix} \quad \text{dus } \gamma_2 - \gamma_1^2 + 2 \geqq 0.$$

Op deze wijze kan men voortgaan met het berekenen van ongelijkheden van deze aard.

§ 3. Absolute momenten.

1. Het k^e absolute moment $\alpha_k(\underline{x}) = E|\underline{x}|^k$ is een integraal met positieve integrand, die dus convergent kan zijn of eigenlijk divergent, maar niet oneigenlijk divergent. Laten we de waarde $+\infty$ toe, dan is α_k dus gedefinieerd voor iedere reële k.

$\alpha_k \geqq 0$ en $\alpha_k > 0$ voor alle k tenzij $\underline{x}$ slechts de waarde 0 met een wh >0 aanneemt, terwijl $P^{\wedge} = 0$ is voor iedere deelvz, waarin $\underline{x}$ niet de waarde 0 aanneemt (zie bl.67, eigenschap 4). In dit bijzondere geval neemt $\underline{x}$ dus de waarde 0 met wh $= 1$ aan. We zullen dit aangeven door de uitdrukking: $\underline{x}$ is <u>bijna zeker</u> 0 (daar wh $= 0$ niet onmogelijkheid betekent) en overeenkomstig de wh $= 0$ van een kenmerk op een oneindig wh-veld door: het optreden van dit kenmerk is <u>bijna onmogelijk</u>. <u>Notatie</u> voor "$\underline{x}$ is bijna zeker y": $\underline{x} \approx y$, of ook $\underline{x} \approx E\underline{x}$ als de waarde, die bijna zeker aangenomen wordt niet bekend of niet van belang is.

Voor whn dicht bij 1 resp. 0 zullen we de termen "hoogstwaarschijnlijk" resp. "hoogstonwaarschijnlijk" gebruiken.

Voor $k = 2m$ ($m \geqq 0$ geheel) en $\underline{x}$ reëel, is $\alpha_k = \mu_k$; $\alpha_0 = 1$.

$\alpha_k(\rho\,\underline{x}) = |\rho|^k\,\alpha_k(\underline{x})$.

<u>Indien α_k eindig is, is α_ℓ het ook, als $0 \leqq \frac{\ell}{k} \leqq 1$ is.</u>

<u>Bewijs</u>: is $0 < \ell \leqq k$, dan is: $\alpha_\ell = \int_0^\infty |x|^\ell P^{dx} = \int_0^1 + \int_1^\infty \leqq \int_0^1 P^{dx} + \int_1^\infty |x|^k\, P^{dx}$,

dus eindig. Is $k \leqq \ell < 0$, dan is: $\alpha_\ell \leqq \int_1^\infty P^{dx} + \int_0^1 |x|^k\, P^{dx}$, dus eindig.

In beide gevallen is <u>$\alpha_\ell < 1 + \alpha_k$</u>.

2.A. We noemen $\varphi(x)$ <u>positief-</u>, <u>negatief-</u>, resp. <u>nul-convex</u> in een zeker interval, als iedere koorde van de kromme $y = \varphi(x)$, waarvan de abscissen van de uiteinden in dat interval liggen, behoudens de uiteinden, geheel boven, onder resp. op de kromme ligt.

We noemen $\varphi(x)$ <u>nietpositief-</u> resp. <u>nietnegatief-convex</u>, als iedere koorde nergens boven resp. onder de kromme komt.

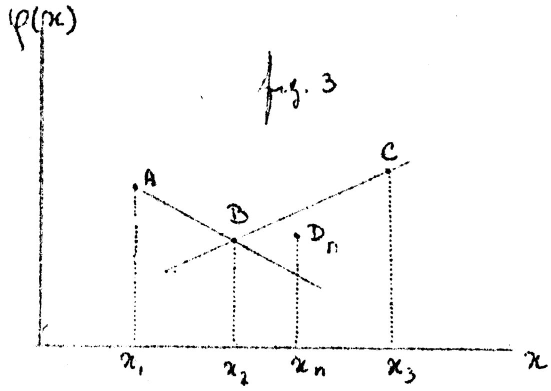
In al deze gevallen noemen we de kromme <u>convex</u>.

<u>Opmerking</u>: Indien van een in het interval $[x_1 x_2]$ convexe kromme een inwendig punt C van de koorde AB (A behorend bij x_1, B bij x_2) op AB ligt, is de kromme nul-convex.

STELLING: <u>Een convexe kromme is, behalve eventueel in de eindpunten, continu.</u>

<u>Bewijs</u>: Is de kromme nul-convex, dan is zij een rechte.

Beschouw drie punten A,B en C van een positief-convexe kromme, waarvan de abscissen $x_1 < x_2 < x_3$ zijn, en een rij punten D_n met abscissen $x_n \searrow x_1$. (zie fig.3, volgende bladzijde).



Alle D_n liggen nu onder BC en boven het verlengde van AB, zodat

$$\lim_n D_n = B$$

moet zijn. Evenzo als $x_n \nearrow x_2$, dus ook als $x_n \to x_2$. Het bewijs voor een negatief-convexe kromme verloopt analoog. Ook voor nietnegatief- en nietpositief-convexe kromme blijft het bewijs vrijwel onveranderd.

B. Ongelijkheid van Jensen.

Als $\varphi(x)$ convex is in het kleinste interval $\mathfrak{J}$ van de x-as, waar $\underline{x}$ bijna zeker in ligt, dan is $E\varphi(\underline{x}) - \varphi(E\underline{x})$

$\geqq 0$ indien $\varphi(x)$ nietnegatief-convex

$\leqq 0$ " " nietpositief-convex en

$= 0$ " " nul-convex is in dat interval, en slechts dan. [1]

Opmerking: 1. Het bijzondere geval, dat $\underline{x}$ één waarde bijna zeker aanneemt ($\underline{x} \approx E\underline{x}$) valt onder de nul-convexiteit, daar $\mathfrak{J}$ dan slechts uit dit punt bestaat.

2. Is $\varphi(x)$ positief- of negatief-convex, dan geldt het gelijkteken dan en slechts dan als $\underline{x} \approx E\underline{x}$ is.

Bewijs: a) $\varphi(x)$ zij in het genoemde interval $\mathfrak{J}$ nietnegatief-convex, d.w.z. zijn $A(x_1, \varphi(x_1))$ en $B(x_2, \varphi(x_2))$ punten van de kromme $y = \varphi(x)$ met x_1 en x_2 in $\mathfrak{J}$, en $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $a+b = 1$, dan is volgens definitie:

$$a.\varphi(x_1) + b.\varphi(x_2) \geqq \varphi(ax_1 + bx_2)$$

Door volledige inductie bewijst men, dat dit aequivalent is met:

$$\sum_1^n a_i\,\varphi(x_i) \geqq \varphi\Big(\sum_1^n a_i x_i\Big) \qquad a_i \geqq 0,\ \sum a_i = 1,\ x_i \in \mathfrak{J}\ .$$

Is dit nl. bewezen voor n-1, dan is:

$$\sum_1^n a_i\,\varphi(x_i) = (1-a_n)\sum_1^{n-1}\frac{a_i}{1-a_n}\,\varphi(x_i) + a_n\varphi(x_n) \geqq (1-a_n)\,\varphi\Big(\sum_1^{n-1}\frac{a_i}{1-a_1}\,x_i\Big) +$$

$$+ a_n\varphi(x_n) \geqq \varphi\Big(\sum_1^n a_i x_i\Big).$$

Dit geldt ook voor aftelbare sommen, indien het linkerlid en $\sum a_i x_i$ convergent zijn. Zij nl. $x_i \in \mathfrak{J}$, $a_i \geqq 0$ voor $i=1,2,\ldots$, $\sum a_i = 1$; voorts

$$\sum_{n+1}^{\infty} a_i\,\varphi(x_i) = \theta\varepsilon \quad ; \quad \sum_{n+1}^{\infty} a_i x_i = \theta'\varepsilon \text{ en } \sum_{n+1}^{\infty} a_i = \theta''\varepsilon\ ,\ \theta,\ \theta' \text{ en } \theta'' \text{ tussen}$$

-1 en +1, dan is:

[1] J.L.W.V.Jensen (Acta Math. 30 1906); B.Meidell (C.R. 175, 1922); R.von Mises (Crelle 165, 1931) gaf een generalisatie.

$$\sum_1^\infty a_i\varphi(x_i) = \sum_1^n a_i\varphi(x_i) + \theta\varepsilon \geqq (1-\theta''\varepsilon)\varphi\left(\frac{\sum_1^n a_i x_i}{1-\theta''\varepsilon}\right) + \theta\varepsilon = (1-\theta'\varepsilon)\varphi\left(\frac{\sum_1^\infty a_i x_i - \theta'\varepsilon}{1-\theta''\varepsilon}\right) + \theta\varepsilon.$$

Dit geldt voor iedere $\varepsilon > 0$, dus ook voor $\varepsilon = 0$, daar φ in het inwendige van $\mathcal{J}$ continu is en $\sum^\infty a_i x_i$ een inwendig punt van $\mathcal{J}$ is, tenzij voor een i_1 $a_i = \begin{cases} 1 & \text{voor } i = i_1 \\ 0 & \text{voor } i \neq i_1 \end{cases}$ is, in welk geval het gestelde triviaal is.

Zij nu $\{X_i\}$ een aftelbare kategorie op $\mathcal{J}$ en $x_i \in X_i$, dan is $P^{X_i} \geqq 0$ en $\sum P^{X_i} = 1$, dus geldt: $\sum P^{X_i}\varphi(x_i) \geqq \varphi(\sum P^{X_i} x_i)$

$E\varphi(\underline{x})$ en $E\underline{x}$ zijn de limiet van een rij sommen van de vorm van resp. het linker- en rechterlid, zodat evenals boven volgt: $E\varphi(\underline{x}) \geqq \varphi(E\underline{x})$.

b) Voor een nietpositief-convexe kromme volgt het gestelde door φ door $-\varphi$ te vervangen.

c) 1. Is de kromme een rechte, dan is de gelijkheid evident.

2. Is gegeven: $\int_{\mathcal{J}} P^{d\lambda}\varphi(x_\lambda) = \varphi\left(\int_{\mathcal{J}} P^{d\lambda} x_\lambda\right)$, dan zij: $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2 = 0$, met $P^{\mathcal{J}_1} \neq 0$, $P^{\mathcal{J}_2} \neq 0$ en dus $\sum_1^2 P^{\mathcal{J}_k} = 1$, waarin we voor $\mathcal{J}_1$ en $\mathcal{J}_2$ twee deelintervallen nemen met eindpunten c_1, c_2 resp. c_2, c_3, als c_1 en $c_3 > c_1$ de eindpunten van $\mathcal{J}$ zijn. Daar $1 \geqq P \geqq 0$ is geldt dan:

$$c_1 P^{\mathcal{J}_1} \leqq \int_{\mathcal{J}_1} P^{d\lambda} x_\lambda \leqq c_2 P^{\mathcal{J}_1} \text{ en } c_2 P^{\mathcal{J}_2} \leqq \int_{\mathcal{J}_2} P^{d\lambda} x_\lambda \leqq c_3 P^{\mathcal{J}_2}.$$

Dus $x_k = \dfrac{\int_{\mathcal{J}_k} P^{d\lambda} x_\lambda}{P^{\mathcal{J}_k}}$ ligt in $\mathcal{J}_k$ $(k=1,2)$. Zij $\varphi(x)$ nietnegatief-convex (voor nietpositiefconvexe φ verloopt het bewijs analoog), dan is, daar φ ook in $\mathcal{J}_1$ en $\mathcal{J}_2$ apart nietnegatief-convex is:

$$\sum_1^2 P^{\mathcal{J}_k}\varphi(x_k) = \sum P^{\mathcal{J}_k}\varphi\left(\frac{\int_{\mathcal{J}_k} P^{d\lambda} x_\lambda}{P^{\mathcal{J}_k}}\right) \leqq \sum P^{\mathcal{J}_k}\cdot\frac{\int_{\mathcal{J}_k} P^{d\lambda}\varphi(x_\lambda)}{P^{\mathcal{J}_k}} = \sum\int_{\mathcal{J}_k} P^{d\lambda}\varphi(x_\lambda) =$$

$$= \int_{\mathcal{J}} P^{d\lambda}\varphi(x_\lambda) = \text{(volgens het gegeven) } \varphi\left(\int_{\mathcal{J}} P^{d\lambda} x_\lambda\right) = \varphi\left(\sum\int_{\mathcal{J}_k} P^{d\lambda} x_\lambda\right) =$$

$= \varphi(\sum P^{\mathcal{J}_k} x_k) \leqq \sum_1^2 P^{\mathcal{J}_k}\varphi(x_k)$ volgens de nietnegatieve convexiteit van φ in $\mathcal{J}$.

Alle $\leqq$-tekens zijn dus gelijkheidstekens, dus in het bijzonder is:

$$\varphi(P^{\mathcal{J}_1}x_1 + P^{\mathcal{J}_2}x_2) = P^{\mathcal{J}_1}\varphi(x_1) + P^{\mathcal{J}_2}\varphi(x_2)$$

zodat volgens 2A het stuk gelegen tussen x_1 en x_2 nul-convex moet zijn. Daar echter c_2 willekeurig dicht bij de uiteinden van $\mathcal{J}$ gebracht kunnen worden en daardoor x_1 of x_2, moet $\varphi(x)$ in het hele interval nul-convex zijn.

Opmerkingen: 1. Men kan de ongelijkheid van Jensen als volgt interpreteren: $y = \varphi(x)$ kan beschouwd worden als een "zware" kromme en wel met een massa $P^{r(x_1 \leqq x \leqq x_2)}$ tussen de punten $(x_1, \varphi(x_1))$ en $(x_2, \varphi(x_2))$ voor iedere $c_1 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq c_2$. De ongelijkheid van Jensen zegt dan, dat bij een nietnegatief-, nietpositief- resp. nul-convexe kromme het zwaartepunt boven, onder resp. op de kromme ligt.

2. Bij het bewijs van de ongelijkheid is stilzwijgend ondersteld, dat $E\underline{x}$ en $E\varphi(\underline{x})$ eindig zijn. Bij deze en al de nog af te leiden ongelijkheiden geldt echter zowel in het geval van oneindige reeksen als van oneigenlijke integralen: indien het grootste lid convergent is, is het kleinste lid convergent of $-\infty$ en als het kleinste lid convergeert, is het grootste lid convergent of $+\infty$. Oneigenlijke divergentie kan dus, in geval één van beide leden convergeert, in het andere lid niet optreden. De ongelijkheden behouden meestal hun geldigheid, als beide leden eigenlijk divergent zijn, zij het eventueel met het gelijkheidsteken. Zijn beide leden positief dan volgt uit de divergentie van het kleinste lid, dat ook het grootste divergent is. Deze singuliere gevallen zullen niet bij iedere ongelijkheid behandeld worden, daar zij veelal triviaal zijn; worden zij niet vermeld, dan wordt ondersteld, dat beide leden convergent zijn.

3. Literatuur: G.H.Hardy, J.E.Littlewood en G.Polya, Inequalities, Cambridge 1934. In dit boek is een literatuurregister opgenomen.

4. De hier gegeven definitie van convexiteit is niet de meest gebruikelijke. Gewoonlijk eist men alleen, dat het midden van iedere koorde boven-, onder- resp. op de kromme ligt. Deze definitie omvat meer gevallen dan de hier gegevene en komt ermee overeen voor continue fcts. Het bestaan van niet-continue en in de uitgebreide zin convexe fcts is slechts bewezen met behulp van het keuzeaxioma van Zermelo. Dergelijke fcts zijn in ieder interval onbegrensd. De theorie van de convexe fcts is van Jensen afkomstig.

Toepassingen:

C. Corollarium 1: $\alpha_k^{\ell} \geqq \alpha_{\ell}^{k}$ voor $k \geqq \ell \geqq 0$ of $\ell \geqq 0 \geqq k$ of $\ell \leqq k \leqq 0$

$\alpha_k^{\ell} \leqq \alpha_{\ell}^{k}$ voor $k \leqq \ell \leqq 0$ of $k \geqq 0 \geqq \ell$ of $\ell \geqq k \geqq 0$.

Bewijs: $\varphi(x) = x^k$ is voor $x > 0$ nietnegatief-convex voor $k \geqq 1$ en $k \leqq 0$ en nietpositief-convex voor $0 \leqq k \leqq 1$. Substitueren we $|\underline{x}|$ voor $\underline{x}$ in de ongelijkheid van Jensen, dan krijgen we:

$E|\underline{x}|^k \geqq (E|\underline{x}|)^k$ dus $\alpha_k \geqq \alpha_1^k$ voor $k \geqq 1$ en $k \leqq 0$ en

$E|\underline{x}|^k \leqq (E|\underline{x}|)^k$ dus $\alpha_k \leqq \alpha_1^k$ voor $0 \leqq k \leqq 1$.

Nemen we $\frac{k}{\ell}$ i.p.v. k ($\ell \neq 0$) en $|\underline{x}|^{\ell}$ i.p.v. $|\underline{x}|$, dan komt er:

$E|\underline{x}|^k \geq (E|\underline{x}|^{\ell})^{k/\ell}$, dus $\alpha_k \geq \alpha_\ell^{k/\ell}$ voor $\frac{k}{\ell} \geq 1$ en $\frac{k}{\ell} \leq 0$ en

$E|\underline{x}|^k \leq (E|\underline{x}|^{\ell})^{k/\ell}$, dus $\alpha_k \leq \alpha_\ell^{k/\ell}$ voor $0 \leq \frac{k}{\ell} \leq 1$.

Hieruit volgt het gestelde voor $\ell \neq 0$. Door verwisseling van k en ℓ blijkt deze voorwaarde overbodig.

Het gelijkheidsteken geldt dan en slechts dan als $y^{k/\ell}$ nul-convex is, dus voor $k/\ell = 0$ of $k/\ell = 1$ of als $\underline{y} \approx E\underline{y}$ is. Daar echter $\underline{y} = |\underline{x}|^k$ is, is dit laatste het geval als $k = 0$ of $|\underline{x}| \approx E|\underline{x}|$ is. Door verwisseling van k en ℓ verkrijgen we dezelfde voorwaarden voor ℓ, dus tezamen:

$$k.\ell.(k-\ell) = 0 \quad \text{of} \quad |\underline{x}| \approx E|\underline{x}|.$$

D. Corollarium 2: Het meetkundig gemiddelde van $|\underline{x}|$ is $\leq$ het rekenkundig gemiddelde van $|\underline{x}|$.

Definitie: Hierin wordt met het meetkundig gemiddelde bedoeld: $e^{E\ln|\underline{x}|}$

Dit is een generalisatie van het gewone meetkundig gemiddelde, want als $|\underline{x}|$ slechts een eindig aantal waarden $a_1, \ldots, a_n$ aanneemt, alle met de wh. 1/n, dan is:

$$E\ln|\underline{x}| = \frac{1}{n}\sum \ln|a_i|, \text{ dus } e^{E\ln|\underline{x}|} = \left\{\prod_1^n |a_i|\right\}^{\frac{1}{n}}.$$

Met het rekenkundig gemiddelde wordt bedoeld: $E|\underline{x}|$. Men ziet gemakkelijk in, dat men $E|\underline{x}|$ als een gegeneraliseerd rekenkundig gemiddelde kan beschouwen.

Bewijs van corollarium 2: ln x is voor x > 0 negatief convex, dus volgens B geldt: $E\ln|\underline{x}| \leq \ln E|\underline{x}|$, dus $e^{E\ln|\underline{x}|} \leq E|\underline{x}|$.

Het gelijkheidsteken treedt dan en slechts dan op, als $|\underline{x}| \approx E|\underline{x}|$ is.

Opmerking: Vervangt men in deze ongelijkheid $|\underline{x}|$ door $|\underline{x}|^k$ en neemt men van beide leden de k^e-machtswortel, dan volgt:

$e^{E\ln|\underline{x}|} \leq \alpha_k^{\frac{1}{k}}$ voor $k > 0$ en $e^{E\ln|\underline{x}|} \geq \alpha_k^{\frac{1}{k}}$ voor $k < 0$.

Dus als er een $k > 0$ is met α_k eindig, is $E\ln|\underline{x}|$ eindig of $-\infty$ en als er een $k < 0$ is met α_k eindig, is $E\ln|\underline{x}|$ eindig of $+\infty$.

E. Corollarium 3: De entropische fct van iedere gereduceerde variabele is nietnegatief-definiet.

Bewijs. De fct e^{xX} is nietnegatief-convex voor iedere X, dus geldt:

$e^{z_x(X)} = E\, e^{\underline{x}X} \geq e^{X E\underline{x}}$ dus: $z_x(X) \geq X.E\underline{x}$ dus $z_{\overset{\circ}{x}}(X) = z_x(X) - X.E\underline{x} \geq 0$.

Het gelijkheidsteken treedt dan en slechts dan op als $X = 0$ of $\underline{x} \approx E\underline{x}$ is. In het laatste geval is de entropische fct identiek nul.

Voorbeelden: enkele gereduceerde entropische fcts, die we later zullen ontmoeten en waarvan men ook direct kan zien, dat ze $\geqq 0$ zijn, zijn.

$z_{\underline{x}}(X) = \frac{1}{2}\sigma^2 X^2$ (normale verdeling)

$z_{\underline{x}}(X) = a(e^X - 1 - X)$ (Piossonverdeling)

$z_{\underline{x}}(X) = \ln(pe^{qX} + qe^{-pX})$ (idempotente variabele)

$z_{\underline{x}}(X) = -a\left\{\ln(1-X) + X\right\}$, $a > 0$ (Γ-variabele)

3. De ongelijkheid van Jensen kan als volgt gegeneraliseerd worden voor n stochastische variabelen:

Is $\varphi(\vec{\underline{x}}) = \varphi(x_1,\ldots,x_n)$ in een convexe vz V van de $\vec{x}$-ruimte, waar $\vec{\underline{x}}$ bijna zeker in ligt, convex, dan is $E\varphi(\vec{\underline{x}}) - \varphi(E\vec{\underline{x}})$

$\geqq 0$ indien $\varphi(\vec{x})$ nietnegatief-convex
$\leqq 0$ indien $\varphi(\vec{x})$ nietpositief-convex en
$= 0$ indien $\varphi(\vec{x})$ nul-convex is in een vz, waar $\vec{\underline{x}}$ bijna zeker in ligt, en slechts dan.

Hierbij is de definitie voor convexiteit van φ analoog aan die voor één veranderlijke. In de stelling is niet gesproken van een kleinste convexe vz, waar $\vec{\underline{x}}$ bijna zeker in ligt, omdat het bestaan daarvan niet zo direct in te zien is als bij één veranderlijke. Hij bestaat echter wel en verstaat men onder V deze vz, dan wordt de gelijkheidsvoorwaarde weer dezelfde als bij één veranderlijke. We zullen het bewijs van de stelling niet geven.

4.A. Ongelijkheid van Hölder (O.Hölder, Über einen Mittelwertsatz, Göttinger Nachrichten, 1889)

$E|\underline{x}_1^{a_1}\ldots\underline{x}_n^{a_n}| \leqq (E|\underline{x}_1|)^{a_1}\ldots(E|\underline{x}_n|)^{a_n}$ $(a_n \geqq 0,\ \sum a_i = 1)$, waarin het gelijkheidsteken dan en slechts dan geldt, als voldaan is aan:

1) $|\underline{x}_i|\,E|\underline{x}_j| \approx |\underline{x}_j|\,E|\underline{x}_i|$ voor minstens één i en alle j van 1...n, of
2) slechts één van de a_i is $\neq 0$ (dus $=1$).

Bewijs: 1. Is er een i met $|\underline{x}_i| \approx E|\underline{x}_i| = 0$, dan zijn linker- en rechterlid beide $=0$ en is bovendien aan voorwaarde 1) voldaan.

2. Zijn alle $E|\underline{x}_i| > 0$, dan is volgens corollarium 2, toegepast op een eindig wh-veld:

$$\frac{E|\underline{x}_1^{a_1}\ldots\underline{x}_n^{a_n}|}{(E|\underline{x}_1|)^{a_1}\ldots(E|\underline{x}_n|)^{a_n}} = E\left(\left(\frac{|\underline{x}_1|}{E|\underline{x}_1|}\right)^{a_1}\ldots\left(\frac{|\underline{x}_n|}{E|\underline{x}_n|}\right)^{a_n}\right) \leqq E\left(\frac{a_1|\underline{x}_1|}{E|\underline{x}_1|} + \ldots + \frac{a_n|\underline{x}_n|}{E|\underline{x}_n|}\right) = 1.$$

Het gelijkheidsteken treedt, eveneens volgens corollarium 2, dan en slechts dan op, als aan voorwaarde 1) of 2) voldaan is.

B. Corollarium 4: $\ln \alpha_k$ is, voorzover α_k eindig is, een nietnegatief-convexe fct van k, d.w.z. als $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ en $a+b=1$ is, geldt: $a \ln \alpha_k + b \ln \alpha_\ell \geqq \ln \alpha_{ak+b\ell}$ waarin het gelijkheidsteken dan en slechts dan geldt als $ab=0$ of $|\underline{x}| \approx E|\underline{x}|$ is.

Bewijs: Vullen we in de ongelijkheid van Hölder voor 2 stochastische variabelen voor $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, a_1 en a_2 in: $|\underline{x}|^k, |\underline{x}|^\ell$, a resp. b, dan

komt er: $E|\underline{x}|^{ak+b\ell} \leqq (E|\underline{x}|^k)^a (E|\underline{x}|^\ell)^b$, waaruit het gestelde volgt door links en rechts de logarithme te nemen.

Opmerking: $\ln \alpha_k$ is dus een continue fct van k in ieder interval, waarin α_k eindig en $\neq 0$ is; α_k zelf is dus ook, voor zover eindig, continu, terwijl hier de voorwaarde $\alpha_k \neq 0$ overbodig is.

C. Speciale gevallen van A en B.

a) Leggen we aan de ongelijkheid van Hölder voor 2 variabelen een wh-veld met n eln ten grondslag, die allen wh $1/n$ hebben en nemen we $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, dan is, als we voor $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ invullen $\underline{x}^2$ en $\underline{y}^2$:

$$\left|\sum_1^n x_i y_i\right| = n|E\underline{x}\underline{y}| \leq n\, E|\underline{x}\underline{y}| \leq n(E|\underline{x}|^2)^{\frac{1}{2}}(E|\underline{y}|^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_1^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_1^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ dus}$$

$\left(\sum x_i y_i\right)^2 \leqq \sum x_i^2 . \sum y_i^2$. Dit is de ongelijkheid van Cauchy

(A.L.Cauchy, Cours d'analyse de l'école Royale Polytechnique, Paris 1821)

b) Nemen we een wh-veld met een algemene wh-verdeling en substitueëren we voor $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ resp. $\underline{x}^2$ en $\underline{y}^2$, dan komt er voor $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ de overeenkomstige integraalongelijkheid:

$$\left(\int x_\lambda y_\lambda P^{d\lambda}\right)^2 \leqq \int x_\lambda^2 P^{d\lambda} . \int y_\lambda^2 P^{d\lambda}.$$ Dit is de ongelijkheid van Schwartz

(H.A.Schwartz, Acta soc.scient.Fenn. 15 (1885))

c) B levert voor $k=2h$, $\ell=0$, $a=b=\frac{1}{2}$: $\alpha_h^2 \leqq \alpha_{2h}$, daar $\alpha_0 = 1$ is.

h=1 levert $\alpha_1^2 \leqq \alpha_2 = \sigma^2 + \mu_1^2$ en daar $|\mu_1| = |E\underline{x}| \leq E|\underline{x}| = \alpha_1$ is, geldt:

$$|\mu_1| \leqq \alpha_1 \leqq \sqrt{\sigma^2 + \mu_1^2}$$

Hieruit kan men α_1 schatten, als σ en μ_1 bekend zijn, in het bijzonder als σ klein is t.o.v. $|\mu_1|$. Daar verder $\sigma^2 + \mu_1^2 \leqq \frac{(\mu_1^2 + \frac{1}{2}\sigma^2)}{\mu_1^2}$ is,

geldt: $1 \leqq \frac{\alpha_1}{|\mu_1|} \leqq 1 + \frac{\sigma^2}{2\mu_1^2}$.

Alle voor α_k geldige ongelijkheden gelden ook voor $\tilde{\alpha}_k$. In het bijzonder is dus, daar $\tilde{\mu}_1 = 0$ is: $0 \leq \tilde{\alpha}_1 \leq \sigma$; $\tilde{\alpha}_1$ wordt soms de gemiddelde afwijking (van het gemiddelde) genoemd. Deze is dus altijd kleiner dan de spreiding, tenzij $|\underline{x}| \approx E|\underline{x}|$ is, inwelk geval ze gelijk zijn.

d) Bij gegeven α_2 is α_1 dus naar boven begrensd. Echter niet naar beneden, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld: van een verdeling van Poisson met tot nul naderend gemiddelde α wordt, daar $\alpha_1 = \alpha$ en $\alpha_2 = \alpha + \alpha^2$ is, $$\frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha + \alpha^2}} = \sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$ willekeurig klein.

e) Een schatting van $\alpha_{\frac{1}{2}}$ als α_1 en σ bekend zijn, krijgen we als volgt uit B: zij $k=\frac{1}{2}$, $\ell=2$, $ak+b\ell=1$, dus $a=2/3$, $b=1/3$, dan komt er:

$\alpha_1^3 \leqq \alpha_{\frac{1}{2}}^2 \cdot \alpha_2$. Nemen we daarentegen $k=1$, $\ell=0$ en $a=b=\frac{1}{2}$, dan komt er:

$\alpha_{\frac{1}{2}} \leqq \sqrt{\alpha_1}$, dus met behulp van c):

$$1 \geqq \frac{\alpha_{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha_1}} \geqq \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\sigma^2 + \mu_1^2}} \geqq \frac{\alpha_1}{\sqrt{\sigma^2 + \alpha_1^2}}$$, waarin de tweede en derde ongelijkheid blijven gelden als α_1 door $|\mu_1|$ vervangen wordt.

En voor de gereduceerde momenten geldt:

$$1 \geqq \frac{\tilde{\alpha}_{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\tilde{\alpha}_1}} \geqq \frac{\tilde{\alpha}_1}{\sigma}$$

De laatste twee ongelijkheden zijn op eenvoudige wijze geometrisch te interpreteren met behulp van de positieve convexiteit van $\ln \alpha_k$ (het triviale geval, dat $|\underline{x}| \simeq E|\underline{x}|$ is, uitgesloten). Zijn dus α_1 en α_2 bekend, dan kennen we 3 punten O, A en B van de kromme $y=\ln \alpha_k$ ($\alpha_0=1$; zie fig 4). Het punt C met $k=\frac{1}{2}$ moet dan liggen tussen P en Q, nl onder OA en boven het verlengde van BA.

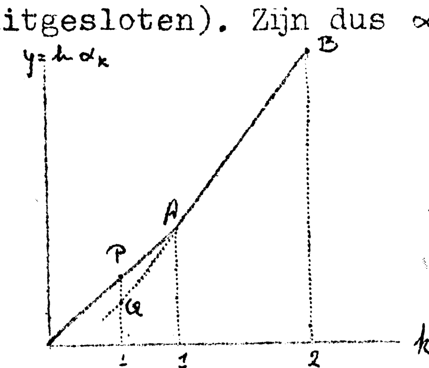


fig. 4.

f) Nemen we voor $0 \leqq r \leqq s \leqq t$ (maar $t > r$): $k=r$, $\ell=t$, $a=\frac{t-s}{t-r}$, $b=\frac{s-r}{t-r}$, dus $ak+b\ell=s$, dan wordt B:

$$\alpha_s \leqq \alpha_r^{\frac{t-s}{t-r}} \cdot \alpha_t^{\frac{s-r}{t-r}}$$

Dit is de <u>ongelijkheid van Liapounoff</u> (A. Liapounoff, Mémoires de l'Acad. de St. Petersbourg <u>12</u> (1901), no5).

g) In de ongelijkheid van Hölder kan de voorwaarde $\sum a_i = 1$ vervangen worden door $\sum a_i \leqq 1$, zoals blijkt, als we voor $0 \leqq k \leqq 1$ de $|\underline{x}_i|$ vervangen door $|\underline{x}_i|^k$ en voor iedere i de ongelijkheid

$$\alpha_k \leqq \alpha_1^k \quad (0 \leqq k \leqq 1)$$ toepassen.

Het gelijkheidsteken geldt, indien $\sum a_i = p \leq 1$ is, dan en slechts dan als aan minstens één van de volgende voorwaarden voldaan is:

1. $p=0$ (dus $a_i=0$ voor iedere i)
2. Er is een $a_i=1$ (zodat de overige $a_i=0$ zijn)
3. Er is een i met $a_i > 0$ en $\underline{x}_i \approx 0$ ')
4. Voor iedere i, waarvoor $a_i \neq 0$ is, geldt $|\underline{x}_i| \approx E|\underline{x}_i|$
5. $p=1$ en $|\underline{x}_i|\, E|\underline{x}_j| \approx |\underline{x}_j|\, E|\underline{x}_i|$ voor minstens één i en voor alle j, waarvoor $a_j \neq 0$ is.

h) Voor $a_1=a$ en $a_2=b$ met $a+b=1$ en met E genomen over een alternatief met gelijke kansen, waarop $\underline{x}_1$ de niet-negatieve waarden x_1 en y_1 en $\underline{x}_2$ de niet-negatieve waarden x_2 en y_2 aanneemt, wordt de ongelijkheid van Hölder:

$$x_1^a x_2^b + y_1^a y_2^b \leq (x_1+y_1)^a (x_2+y_2)^b \qquad (a+b=1)$$

met als gelijkheidsvoorwaarde: $ab(|x_1y_2| - |x_2y_1|) = 0$.

Stelt men voor $n=2$, $ab \neq 0$: $p=1/a$, $p'=1/b = p/(p-1)$, dan krijgt men de ongelijkheid van Hölder in de vorm:

$$E|\underline{x}|^{\frac{1}{p}} |\underline{y}|^{\frac{p-1}{p}} \leq (E|\underline{x}|)^{\frac{1}{p}} (E|\underline{y}|)^{\frac{p-1}{p}} \qquad (p \geq 1)$$

of, als men $|\underline{x}|$ door $|\underline{x}|^p$ en $|\underline{y}|$ door $|\underline{y}|^{\frac{p}{p-1}}$ vervangt:

$$E|\underline{x}\underline{y}| \leq (E|\underline{x}|^p)^{\frac{1}{p}} \left(E|\underline{y}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \qquad (p \geq 1)$$

met het speciale geval (voor x_1, y_1, x_2 en $y_2 \geq 0$)

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leq (x_1^p + x_2^p)^{\frac{1}{p}} \left(y_1^{\frac{p}{p-1}} + y_2^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \qquad (p \geq 1)$$

De notatie met p en p', onderworpen aan de relatie $1/p + 1/p' = 1$ is gebruikelijker dan die met de reciproke waarden a en b.

Voor $p=2$ krijgen we:

$$\left\{E\sqrt{|\underline{x}\underline{y}|}\right\}^2 \leq E|\underline{x}| \,.\, E|\underline{y}|$$

welke ongelijkheid ook gemakkelijk uit die van Schwartz (zie blz.99) volgt.

i) <u>Corollarium 5</u>: $z_x(X)$ is voor reële X een niet-negatief-convexe fct van X, voorzover z gedefinieerd is, d.w.z.

$$z_x(aX_1+bX_1) \leq a.z_x(X_1) + b.z_x(X_2) \quad \text{als } ab \geq 0 \text{ en } a+b=1 \text{ is}$$

en waarin het gelijkheidsteken dan en slechts dan geldt, als

$$ab(X_1-X_2)\,(\underline{x}-E\underline{x}) \approx 0 \quad \text{is.}$$

') We interpreteren 0^0 als 1. Daarom is hier de voorwaarde $a_i > 0$ nodig.

Bewijs: De stelling volgt uit corollarium 4, als we daarin voor $|\underline{x}|$ invullen $e^{\underline{x}}$, daar

$$\ln \alpha_x(e^{\underline{x}}) = \ln Ee^{\underline{x}X} = z_{\underline{x}}(X) \quad \text{is.}$$

Opmerking: de ongelijkheid geldt ook voor $a+b \leqq 1$ (zie punt g).

j) Corollarium 6: $z_{\underline{x}}(X)$ is voor reële X in haar existentiegebied een nietnegatief-convex functionel van $\underline{x}$, d.w.z. voor $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ en $a+b=1$ geldt:

$$z_{a\underline{x}+b\underline{y}}(X) \leqq az_{\underline{x}}(X) + bz_{\underline{y}}(X)$$, waarin het gelijkheidsteken dan en slechts dan geldt, als $abX(\tilde{\underline{x}}-\tilde{\underline{y}}) \approx 0$ is.

Bewijs: volgens de ongelijkheid van Hölder voor 2 stochastische variabelen $e^{\underline{x}X}$ en $e^{\underline{y}X}$ met $a_1 = a$ en $a_2 = b$ geldt:

$$E\left\{(e^{\underline{x}X})^a (e^{\underline{y}X})^b\right\} \leqq (Ee^{\underline{x}X})^a (Ee^{\underline{y}X})^b.$$

Nemen we links en rechts de logarithme, dan blijft de ongelijkheid gelden en er komt:

$$\ln \alpha_x(e^{a\underline{x}+b\underline{y}}) \leqq a \ln \alpha_x(e^{\underline{x}}) + b \ln \alpha_x(e^{\underline{y}}),$$

waaruit evenals in het vorige punt de ongelijkheid volgt. Het gelijkheidsteken geldt voor reële X dan en slechts dan, als

$$abX\left\{\underline{x}-\underline{y} - E(\underline{x}-\underline{y})\right\} \approx 0 \quad \text{is.}$$

Uit de voor $ab \neq 0$ geldende voorwaarde $e^{\underline{x}X}.Ee^{\underline{y}X} - e^{\underline{y}X}.Ee^{\underline{x}X} \approx 0$ volgt namelijk, daar $Ee^{\underline{x}X}$ en $Ee^{\underline{y}X} \neq 0$ zijn, $e^{(\underline{x}-\underline{y})X} \approx C$, m.a.w. daar X reëel is: $X\left\{(\underline{x}-\underline{y}) - E(\underline{x}-\underline{y})\right\} \approx 0$ of $X(\tilde{\underline{x}}-\tilde{\underline{y}}) \approx 0$.

Opmerking: Ook deze ongelijkheid geldt als $a+b \leqq 1$ is.

k) De ongelijkheid van Hölder geeft met $\underline{x}_i = \underline{x}^{k_i}$:

$$\alpha_{\Sigma a_i k_i} \leqq \prod_i \alpha_{k_i}^{a_i} \qquad (a_i \geqq 0, \ \textstyle\sum a_i = 1)$$

Het gelijkheidsteken geldt dan en slechts dan, als minstens één der volgende voorwaarden vervuld is:

1. Er is een i met $a_i = 1$
2. $\underline{x} \approx E\underline{x}$
3. $k_i = k_j$ voor minstens één i en alle j, waarvoor $a_j \neq 0$ is.

Opmerking: Is k_i geheel en even, dan wordt dit $\alpha_{\Sigma a_i k_i} \leqq \prod_i \mu_{k_i}^{a_i}$

Is ook $\sum a_i k_i$ geheel en even, dan $\mu_{\Sigma a_i k_i} \leqq \prod_i \mu_{k_i}^{a_i}$

Is $\sum a_i k_i$ geheel, maar oneven, dan

$$\mu_{\Sigma a_i k_i} \leqq |\mu_{\Sigma a_i k_i}| \leqq \alpha_{\Sigma a_i k_i} \leqq \prod_i \mu_{k_i}^{a_i}$$

1) Vullen we in de ongelijkheid van Hölder voor $|\underline{x}_i|$ in $\underline{x}^{k_i}e^{\underline{x}X}$ $(i=1,\dots,n)$, waarin $k_i \geq 0$, geheel en <u>even</u> is voor iedere i, dan komt er voor $a_i \geq 0$, $\sum a_i = 1$ en $\sum a_i k_i \geq 0$ en geheel:

$$E\underline{x}^{\sum a_i k_i} e^{\underline{x}X} \leq E|\underline{x}|^{\sum a_i k_i} e^{\underline{x}X} \leq \prod_1^n \left\{E|\underline{x}|^k e^{\underline{x}X}\right\}^{a_i} = \prod_1^n \left\{E\underline{x}^{k_i} e^{\underline{x}X}\right\}^{a_i} \quad \text{, dus:}$$

$$\underline{Z_{\underline{x}}^{(\sum a_i k_i)}(X) \leq \prod \left\{Z^{(k_i)}(X)\right\}^{a_i}} \qquad \sum a_i = 1$$

waarin $Z_{\underline{x}}^{(k)}(X)$ de afgeleide van de orde k van $Z_{\underline{x}}(X)$ met betrekking tot X is en waarin we, zoals duidelijk is, factoren met gelijke k_i samengenomen kunnen denken, zodat we alle k_i verschillend, benevens alle $a_i > 0$ en $n > 1$ kunnen onderstellen.

Nodig en voldoende voor gelijkheid is, dat beide $\leq$-tekens gelijkheidstekens worden. Dit is voor het eerste het geval, als $\underline{x} \approx |\underline{x}|$ of $\sum a_i k_i$ even is en voor het tweede, als

$$\underline{x}^{k_i} e^{\underline{x}X}\, E\underline{x}^{k_j} e^{\underline{x}X} \approx \underline{x}^{k_j} e^{\underline{x}X}\, E\underline{x}^{k_i} e^{\underline{x}X} \quad \text{is voor minstens één i en}$$

alle j (hierin kan $\underline{x}$ i.p.v. $|\underline{x}|$ genomen worden, daar de k_i even zijn). Deze aequivalentie is een gelijkheid voor alle x_λ van een deelvz Λ van Γ met $P^\Lambda = 1$. Voor iedere $x \neq 0$ met $\lambda \in \Lambda$ geldt:

$$x_\lambda^{k_i - k_j} = C = \frac{E\underline{x}^{k_i}\, e^{\underline{x}X}}{E\underline{x}^{k_j}\, e^{\underline{x}X}}$$

zodat $|\underline{x}|$ hoogstens één waarde $\neq 0$ (dus >0) met wh $\neq 0$ aan kan nemen. Hierin is het geval $|\underline{x}| \approx E\underline{x}$, dus a fortiori $\underline{x} \approx 0$ begrepen.

Samenvattend verkrijgen we dus als <u>gelijkheidsvoorwaarde</u>:

<u>$\underline{x} \approx |\underline{x}|$ of $\sum a_i k_i$ even, en voorts: $|\underline{x}| \approx E|\underline{x}|$ of $|\underline{x}|$ neemt bijna zeker hoogstens één waarde $\neq 0$ aan.</u>

Nemen we in deze ongelijkheid $n=2$, $k_1=0$, $k_2=2$, $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, dan komt er:

$$(Z')^2 \leq Z.Z''$$

Voor $n=2$, $k_1=0$, $k_2=4$, $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$: $\qquad (Z'')^2 \leq Z.Z^{IV}$

en voor $n=2$, $k_1=2$, $k_2=4$, $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$: $\qquad (Z''')^2 \leq Z''.Z^{IV}$.

Deze ongelijkheden volgen echter alle ook uit het feit, dat $E\, f^2(\underline{x}).e^{\underline{x}X}$ positief definiet is en op die wijze zijn scherpere ongelijkheden van dezelfde aard af te leiden. We zullen dus verder op deze toepassing van de ongelijkheid van Hölder niet ingaan.

<u>Opmerking</u>: De bovenstaande ongelijkheid kan ook uitgebreid worden voor $\sum a_i \leq 1$, maar dit betekent een verzwakking, daar dit (vgl. bl. 100 punt g) bij de ongelijkheid van Hölder het geval is, indien men van de gewone op deze verzwakte voorwaarde overgaat.

m) Volgens de ongelijkheid van Hölder en corollarium 2 (bl.97) is:

$$E|\underline{x}|^p|\underline{y}|^q \leq (E|\underline{x}|)^p(E|\underline{y}|)^q \leq p.E|\underline{x}| + q.E|\underline{y}| .$$

Vullen we $\underline{x}^t/p$ in voor $\underline{x}$ en $\underline{y}^t/q$ voor $\underline{y}$, dan wordt dit:

$$E|\underline{x}|^{pt}|\underline{y}|^{qt} \leq p^p q^q(E|\underline{x}|^t + E|\underline{y}|^t) .$$

(M.Fréchet, Généralisatés sur les Probabilités. Variables aléatoires, bl 61, 1937; met $p^p q^q$ vervangen door 1 is de ongelijkheid gegeven door E.Slutski, Über stochastische Asymptoten und Grenzwerte, Metron 5, pag. 1-90, 1925, bl.32).

Voor $p=q=\frac{1}{2}$ en $\underline{x}^2$ voor $\underline{x}$, $\underline{y}^2$ voor $\underline{y}$ krijgen we de triviale ongelijkheid+

$$E|\underline{x}\underline{y}| \leq E\tfrac{1}{2}\underline{x}^2\underline{y}^2 .$$

n) De ongelijkheid van Hölder geldt met omgekeerd ongelijkheidsteken als alle a_i op één na ≤ 0 zijn en $\sum a_i \geq 1$ is. De gelijkheidsvoorwaarde blijft onveranderd.

Bewijs: a) Voor 2 factoren is de ongelijkheid van Hölder:

$$E|\underline{x}|^a|\underline{y}|^b \leq (E|\underline{x}|)^a(E|\underline{y}|)^b \qquad ab \geq 0,\ 0 \leq a+b \leq 1.$$

Zij nu $a' = 1/a$ en $b' = -b/a$, dus $a = 1/a'$ en $b = -b'/a'$, dan is dus voor $0 \leq \frac{1-b'}{a'} \leq 1$, d.w.z. voor $a'+b' \geq 1$:

$$E|\underline{x}|^{\frac{1}{a'}}|\underline{y}|^{-\frac{b'}{a'}} \leq (E|\underline{x}|)^{\frac{1}{a'}}(E|\underline{y}|)^{-\frac{b'}{a'}}$$

of, als we de laatste factor naar de andere kant brengen en daarna beide leden tot de macht a' verheffen:

$$E|\underline{x}| \geq (E|\underline{x}^{\frac{1}{a'}}\underline{y}^{-\frac{b'}{a'}}|)^{a'}(E|\underline{y}|)^{b'} .$$

Vervangen we hierin $\underline{x}^{1/a'}\underline{y}^{-b'/a'}$ door $\underline{x}$, dan komt er:

$$E|\underline{x}^{a'}\underline{y}^{b'}| \geq (E|\underline{x}|)^{a'}(E|\underline{y}|)^{b'} \qquad a'b' \leq 0 \text{ en } a'+b' \geq 1.$$

b) De ongelijkheid van Hölder volgt uit corollarium 2 (vgl. bl 98 en 97) en wel voor eindig veel termen. De te vergelijken grootheden zijn:

$$\prod_i |x_i|^{a_i} \text{ en } \sum_i a_i|x_i| \quad \text{met} \quad \sum_i a_i = 1.$$

Dit werd op bl. 97 gedaan door van beide de ln te nemen, hetgeen, als niet $a_i \geq 0$ is voor iedere i, slechts mogelijk is, als $\sum a_i|x_i| \geq 0$ is. Dit zullen we voorlopig onderstellen. Volgens opmerking 1 op bl.96 kan men dan $\ln\prod|x_i|^{a_i}$ interpreteren als de ordinaat van het zwaartepunt van de punten $P_i \equiv (|x_i|, \ln|x_i|)$, waarbij P_i de massa a_i draagt, terwijl $\ln\sum a_i|x_i|$ de logarithme van de abscis van dit zwaartepunt is. Zijn nu alle $a_i \geq 0$, dan ligt dit zwaartepunt binnen de convexe veelhoek $P_1 \ldots P_n$, dus onder de kromme $y = \ln x$, zodat we het op bl. 97 vermelde resultaat krijgen. Ligt het zwaartepunt echter boven de kromme $y = \ln x$, dan wordt het ongelijkteken omgekeerd. Zijn nu alle $a_i \leq 0$, behalve b.v. (zie fig.5, waarin n=4 is) a_n in P_n, dan kunnen we alle negatieve massa's

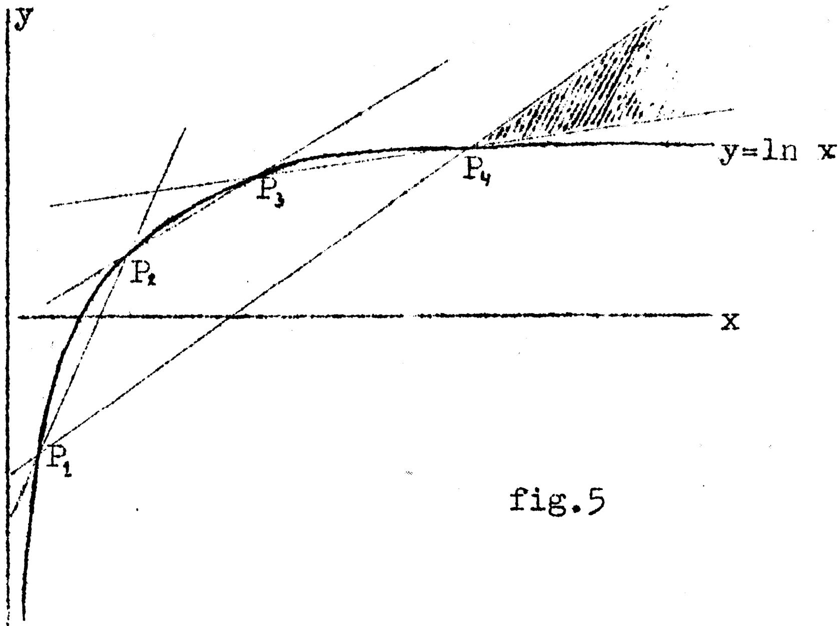


fig.5

vervangen denken door een enkele negatieve van de grootte $\sum_1^{n-1} a_i$ en gelegen binnen de convexe veelhoek $P_1 \ldots P_{n-1}$, dus ook binnen de hoek $P_1 P_n P_{n-1}$ (in de figuur: $P_1 P_4 P_3$). Daar in P_n een positieve massa ligt, ligt dan het zwaartepunt van alle n massa's tezamen binnen de overstaande hoek van $P_1 P_n P_{n-1}$, in de figuur in het geärceerde gebied, dus boven de kromme $y = \ln x$. Derhalve is dan:

$$\prod |x_i|^{a_i} \geq \sum a_i |x_i| \qquad \sum a_i = 1, \text{ één } a_i > 0.$$

Deze ongelijkheid blijft echter gelden, als $\sum a_i |x_i| \leq 0$ is, zodat ze algemeen geldig is. De ongelijkheid van Hölder in de vorm:

$$E \prod |\underline{x}_i|^{a_i} \geq \prod (E|\underline{x}_i|)^{a_i} \qquad \sum a_i = 1 \text{ alle } a_i \text{ op één na } \leq 0$$

volgt nu als op bl.98 punt 4A. De overgang van de voorwaarde $\sum a_i = 1$ op $\sum a_i \geq 1$ verkrijgt men analoog aan het op bl.100 onder punt g behandelde.

Een andere combinatie van de tekens van $a_1 \ldots a_n$, waarbij men de ligging van het zwaartepunt kent, zonder nog andere gegevens als bekend aan te nemen, is er niet, zodat de stelling zonder het geven van nevenvoorwaarden niet verder gegeneraliseerd kan worden.

Opmerking: Men kan dus de ongelijkheid van Hölder voor 2 termen algemeen aldus opschrijven: ¹)

$$\operatorname{sgn} p(1-p).E|\underline{x}^p \underline{y}^{1-p}| \leq \operatorname{sgn} p(1-p).(E|\underline{x}|)^p (E|\underline{y}|)^{1-p} \quad \text{of:}$$

$$\operatorname{sgn} p(1-p).E|\underline{x}\underline{y}| \leq \operatorname{sgn} p(1-p).(E|\underline{x}|^{\frac{1}{p}})^p (E|\underline{y}|^{\frac{1}{1-p}})^{1-p} \ .$$

¹) $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 \text{ voor } x \geq 0 \\ -1 \text{ voor } x < 0 \end{cases}$.

5. A. Definitie: a) $M_k = \alpha_k^{\frac{1}{k}}$ voor $k \neq 0$, $0 < \alpha_k < +\infty$;
voor $k > 0$ en $\alpha_k = \infty$ is $M_k = \infty$;
voor $k < 0$ en $\alpha_k = \infty$ is $M_k = 0$.

b) $M_{+\infty} = \lim_{k \to +\infty} M_k$ (waarbij de waarde $+\infty$ als limiet toegelaten wordt).

$M_{-\infty} = \lim_{k \to -\infty} M_k$

c) $M_0 = e^{E \ln |x|}$ als het rechterlid zin heeft, d.w.z. als de exponent $E \ln|\underline{x}|$ eindig, $+\infty$ of $-\infty$ is, doordat van beide integralen:

$$\int_0^{\varepsilon} \ln|x_\lambda|\, P^{d\lambda} \qquad \text{en} \qquad \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} \ln|x_\lambda|\, P^{d\lambda}$$

minstens één tot 0 nadert voor $\varepsilon \searrow 0$.

M_k heet het absolute gemiddelde van de orde k.

Notatie: Wat de notatie betreft wordt de M_k beschouwd als een operator, die werkt op alle erop volgende stochastische variabelen, over openende haken heen en tot de eerste sluitende haak, behorende bij een openende haak, die aan M_k voorafgaat. Om de variabele worden geen absolute-waarde-strepen gezet, zij zijn in de definitie van M_k opgenomen.

Corollarium 1: $M_{+\infty}$ = bovenste grens van $\mathfrak{J}$
$M_{-\infty}$ = onderste grens van $\mathfrak{J}$
waarin $\mathfrak{J}$ het kleinste afgesloten interval is, waar $|\underline{x}|$ bijna zeker in ligt [1]).

Opmerking: we noemen de bovenste en onderste grens van $\mathfrak{J}$ resp. het effectief maximum b en het effectief minimum a van $|\underline{x}|$.

Bewijs: We geven dit voor $k \to +\infty$; voor $k \to -\infty$ verloopt het analoog.

Voor iedere $\varepsilon > 0$ is $P\left[|\underline{x}| \geqq b-\varepsilon\right] = q_\varepsilon > 0$. Dus is voor iedere k:
$b^k \geqq \alpha_k = E|\underline{x}|^k \geqq q_\varepsilon(b-\varepsilon)^k$, dus $b^k \geqq M_k \geqq (b-\varepsilon)q_\varepsilon^{\frac{1}{k}}$ dus $b \geqq M_\infty \geqq b-\varepsilon$.
Dit geldt voor iedere $\varepsilon > 0$, dus ook voor $\varepsilon = 0$.

Samenvatting:

$k = +\infty$: $M_{+\infty} = b$, het effectief maximum van $|\underline{x}|$.

$k = 2$ en $\underline{x} = \tilde{\underline{x}}$: $M_2^2 = \tilde{\alpha}_2 = \sigma^2$, dus $M_2 = \sigma$, het Pythagoreïsch gemiddelde van $\tilde{\underline{x}}$.

$k = 1$: $M_1 = \alpha_1 = \alpha$ is het eerste absolute moment van $\underline{x}$, het rekenkundig gemiddelde van $|\underline{x}|$ (zie 2.C).

$k = 0$: $M_0 = e^{E \ln|x|}$ is het meetkundig gemiddelde van $|\underline{x}|$ (zie 2.D)

$k = -1$: $M_{-1} = \beta$ is het gegeneraliseerde harmonische gemiddelde van $|\underline{x}|$; bij discrete $|\underline{x}|$, die de waarden $a_1 \ldots a_n$ ieder met wh $1/n$ aanneemt is nl. $\beta^{-1} = E|\underline{x}|^{-1} = \frac{1}{n}\sum|a_i|^{-1}$.

$k = -\infty$: $M_{-\infty} = a$, het effectief minimum van $|\underline{x}|$.

[1]) Hierbij is onder bovenste grens, in afwijking van de gewoonte, ook het geval begrepen, dat $\mathfrak{J}$ naar rechts onbegrensd is.

B. Voor we de eigenschappen van M_k nagaan, bewijzen we het volgende

LEMMA: Als van een rij op $\Lambda_{on} \approx \Gamma$ L-meetbare en integreerbare fcts $\varphi_{n\lambda}$, die voor iedere λ behoudens een 0-vz Λ_0, monotoon niet-dalend naderen tot een fct φ_λ, de integralen $\int_\Gamma P^{d\lambda}\varphi_{n\lambda} = (P\varphi_n)^\Gamma \leq C$ zijn voor iedere n, is φ ook integreebaar, terwijl $\lim_n (P\varphi_n)^\Gamma = (P\varphi)^\Gamma \leq C$ is, waarin P een niet-negatieve absoluut additieve vz-fct op Γ is.

Opmerking: Dit lemma is een uitbreiding van lemma2 op bl.72, dat bij het bewijs gebruikt wordt.

Bewijs: Daar $\lim \varphi_n = \varphi$ is en de φ_n L-meetbaar zijn, is φ ook L-meetbaar. (lemma 1,bl.72)

a) Zij $\Lambda = \Gamma\,[\varphi < 0]$, dan is $\varphi_n \leq \varphi < 0$ op Λ, dus is, daar φ_n integreerbaar is $(P\varphi)^\Lambda$ ook eindig.

b) Noemen we de grootste negatieve waarde, die $(P\varphi_1)^\Lambda$ (met $\Lambda \subset \Gamma$) kan aannemen, d.i. $(P\varphi_1)^{\Gamma[\varphi_1<0]} = -B$, dan is voor iedere n en iedere deelvz $M \subset \Gamma$: $-B \leq (P\varphi_n)^M \leq B+C$ hetgeen uit de monotonie volgt.

c) Zij $M = \Gamma - \Lambda = \Gamma\,[\varphi \geq 0]$. Was nu $(P\varphi)^M$ divergent, dan zou (zie bl.55, stelling 9) voor iedere kategorie $\{K\}$ met $va_\varphi\{K\}$ begrensd $\sum P^{K_n}\varphi_{k_n}$ divergent moeten zijn. Daar $\{K\}$ met $K_n = \Gamma\,[n \leq \varphi < n+1]$ een dergelijke kategorie is, is, als we $M_N = \bigcup_0^{N-1} K_n$ nemen:

$\lim_{N\to\infty} \int_{M_N} P^{d\lambda}\varphi_\lambda = +\infty$, dus voor N voldoende groot is $(P\varphi)^{M_N} \geq 2(B+C)$.
In M_N echter is $\varphi_n \to \varphi$ gelijkmatig, dus $\lim_n (P\varphi_n)^{M_N} = (P\varphi)^{M_N}$, hetgeen in tegenspraak is met b). Dus ook $(P\varphi)^M$ is eindig.

d) Nu is $\varphi - \varphi_n \searrow 0$ en $0 \leq \varphi - \varphi_n \leq \varphi - \varphi_1$, waarin $\varphi - \varphi_1$ een integreerbare fct is. Dus volgens lemma 2 bl.72 is $\lim_n (P\varphi_n)^\Gamma = (P\varphi)^\Gamma$.

C. Eigenschappen van M_k.

STELLING: De vz van die waarden van k, waarvoor M_k eindig is en >0, is een interval $\mathfrak{J}$ met eindpunten $-\infty \leq A \leq 0$ en $+\infty \geq B \geq 0$, dat open, afgesloten of halfopen kan zijn (dus ook leeg kan zijn of alleen het punt 0 kan bevatten).
Op het afgesloten interval $\bar{\mathfrak{J}}$ is M_k continu, indien we in het rechtereindpunt van $\bar{\mathfrak{J}}$ de waarde $+\infty$ voor M_k toelaten, en monotoon niet-dalend, terwijl $M_k = M_\ell$ voor $k \neq \ell$ dan en slechts dan optreedt, als $|\underline{x}| \approx E|\underline{x}|$ is.
M_B en M_A zijn het effectief maximum resp. - minimum van $|\underline{x}|$.

Bewijs: a) Uit punt 1 (bl.93) tezamen met 2.D (bl.97) blijkt: M_k is eindig in een interval, dat het punt 0 bevat of als randpunt heeft. Het interval is leeg als E ln $|\underline{x}|$ oscilleert of divergent is, terwijl $M_k = +\infty$

is voor alle $k \neq 0$.

b) Corollarium 1 (bl.96) levert de monotonie voor $k \neq 0$.

$M_k = M_\ell$ treedt dan en slechts dan op als $(k-\ell)(|\underline{x}| - E|\underline{x}|) \approx 0$ is.

c) Uit lemma 5.B (bl.107) tezamen met b) blijkt:

$\lim\limits_{k\downarrow 0} M_k = \lim\limits_{k\downarrow 0} \{E|\underline{x}|^k\}^{1/k} = \lim\limits_{k\downarrow 0} \{1+E(|\underline{x}|^k-1)\}^{1/k} = e^{\lim E\frac{|x|^k-1}{k}} = e^{E\lim\limits_{k\downarrow 0}\frac{|x|^k-1}{k}} =$
$= e^{E\ln|x|} = M_0$ als M_k eindig is voor $k > 0$ en hetzelfde voor $\ell \nearrow 0$ als M_ℓ eindig is voor $\ell < 0$.

d) Uit lemma 5.B en c) blijkt de continuïteit van M_k binnen het interval I en tevens, dat deze zich uitstrekt tot de eindpunten, indien men deze van binnen het interval benadert.

e) de laatste bewering van de stelling is corollarium 1 (bl.106).

Opmerking: Voor reële c is verder: $M_k c\underline{x} = |c|.M_k\underline{x}$.

D. Corollarium 2: $\frac{z_x(X)}{X}$ is voor reële X, waarvoor z gedefinieerd is, een monotoon niet-dalende fct van X.

Bewijs: vgl. corollarium 5. $\ln M_X e^{\underline{x}} = \frac{1}{X}\ln\alpha_{\underline{x}}(e^X) = \frac{z_{\underline{x}}(X)}{X}$.

Volgens stelling C is M_X een monotoon niet-dalende fct van X; hetzelfde geldt dus voor $\ln M_X$. $z_{\underline{x}}(X_1)/X_1 = z(X_2)/X_2$ treedt dan en slechts dan op, als $(X_1 - X_2)(\underline{x} - E\underline{x}) \approx 0$ is.

Corollarium 3: $\operatorname{sgn} k.M_k\underline{x}^{a_1}\ldots\underline{x}^{a_n} \leqq \operatorname{sgn} k.(M_k\underline{x}_1)^{a_1}\ldots(M_k\underline{x}_n)^{a_n}$ $(a_n \geqq 0, \sum a_i = 1)$, waarin noodzakelijk en voldoende voor gelijkheid is, dat aan minstens één van de volgende voorwaarden is voldaan:

1. Er is een i met $a_i = 1$.
2. $k\{|\underline{x}_i| M_k\underline{x}_j - |\underline{x}_j| M_k\underline{x}_i\} \approx 0$ voor minstens één i en alle j met $a \neq 0$.

Bewijs: Substitueer in de ongelijkheid van Hölder $|x_i|^k$ voor $|x_i|$ en trek vervolgens in beide leden de k^e-machts- wortel.

De gelijkheidsvoorwaarde volgt direct uit de op bl.98 voor de ongelijkheid van Hölder afgeleide, waar dan de voorwaarde $k = 0$ nog bij komt.

Dat $k = 0$ gelijkheid oplevert ziet men als volgt:

$M_0\prod|x_i|^{a_i} = e^{E\ln\prod|x_i|^{a_i}} = e^{\sum a_i E\ln|x_i|} = \prod(e^{E\ln|x_i|})^{a_i} = \prod(M_0\underline{x}_i)^{a_i}$.

Opmerking: Dit corollarium kan, evenals de ongelijkheid van Hölder worden uitgebreid voor $\sum a_i \leqq 1$ en voor alle a_i negatief op één na, met $0 \leqq \sum a_i \leqq 1$.

E. $\operatorname{sgn} h.\operatorname{sgn} k.\operatorname{sgn}\ell.M_\ell\underline{xy} \leqq \operatorname{sgn} h.\operatorname{sgn} k.\operatorname{sgn}\ell.(M_k\underline{x})M_h\underline{y}$; $\frac{1}{\ell} = \frac{1}{h} + \frac{1}{k}$

met als gelijkheidsvoorwaarde (nodig en voldoende):

$$|\underline{x}|^k E|\underline{y}|^h \approx |\underline{y}|^h E|\underline{x}|^k .$$

Bewijs: Reeds bewezen (punt n) bl. 104) is:

(1) $\quad \operatorname{sgn}\alpha.\operatorname{sgn}\beta.E|\underline{x}|^{\alpha}|\underline{y}|^{\beta} \leqq \operatorname{sgn}\alpha.\operatorname{sgn}\beta.(E|\underline{x}|)^{\alpha}(E|\underline{y}|)^{\beta} \quad \alpha+\beta=1$

met als gelijkheidsvoorwaarde: $\quad \alpha\beta(|\underline{x}|E|\underline{y}| - |\underline{y}|E|\underline{x}|) \approx 0.$

Zij nu $h = \lambda\alpha$, $k = \lambda\beta$, $\lambda \neq 0$, dus (wegens $\alpha+\beta = 1$) $h+k = \lambda \neq 0$, dus

$\alpha = \frac{h}{h+k}$ en $\beta = \frac{k}{h+k}$ en zij verder $\ell = \frac{kh}{k+h}$ dan gaat (1), als we daarin $|\underline{x}|$ vervangen door $|\underline{x}|^k$ en $|\underline{y}|$ door $|\underline{y}|^h$, over in:

$\operatorname{sgn} h.\operatorname{sgn} k.E|\underline{x}|^{\ell}|\underline{y}|^{\ell} \leqq \operatorname{sgn} h.\operatorname{sgn} k.(E|\underline{x}|^k)^{\frac{h}{k+h}}(E|\underline{y}|^h)^{\frac{k}{k+h}}$; $\frac{1}{\ell} = \frac{1}{h} + \frac{1}{k}$, dus

$\operatorname{sgn} h.\operatorname{sgn} k.(M_{\ell}\underline{xy})^{\ell} \leqq \operatorname{sgn} h.\operatorname{sgn} k.(M_k\underline{x})^{\ell}(M_h\underline{y})^{\ell}.$

Is $\ell \neq 0$, dan wordt dit, als we links en rechts de ℓ $\underline{\underline{e}}$ machts-wortel trekken:

(2) $\quad \operatorname{sgn} h.\operatorname{sgn} k.\operatorname{sgn}\ell.M_{\ell}\underline{xy} \leqq \operatorname{sgn} h.\operatorname{sgn} k.\operatorname{sgn}\ell.(M_k\underline{x}).M_h\underline{y}.$

Daar voor $\ell \neq 0$ ook h en k $\neq 0$ zijn, wordt in dit geval de gelijkheidsvoorwaarde: (2') $\quad |\underline{x}|^k E|\underline{y}|^h \approx |\underline{y}|^h E|\underline{x}|^k.$

Verder is voor $\ell = 0$:

$$M_0\underline{xy} = (M_0\underline{x}).M_0\underline{y} = e^{E\ln|\underline{x}|}.e^{E\ln|\underline{y}|}$$ zodat (2) voor

ℓ =k=h=0 in een gelijkheid overgaat. Is ℓ=h=0, maar k≠0, dan is

(3) $\quad \operatorname{sgn} k.M_0\underline{xy} = \operatorname{sgn} k.e^{E\ln|\underline{x}|}\,e^{E\ln|\underline{y}|} \leqq \operatorname{sgn} k.(M_k\underline{x}).e^{E\ln|\underline{y}|},$

zodat (2) geldig blijft. Gelijkheid treedt in het laatste geval op, als P $[y=0] > 0$ is of $|\underline{x}| \approx E|\underline{x}|$. (Analoog voor ℓ=k=0 en h≠0). Deze voorwaarde echter in (2') begrepen. Is nl. aan (2') voldaan, terwijl $|\underline{x}|^k \not\approx E|\underline{x}|^k$ is, dan is van de deelvz $\Lambda \subset \Gamma$, met $|\underline{x}|^k \neq E|\underline{x}|^k$ $P^{\Lambda} > 0$, zodat voor iedere $\lambda \in \Lambda$ geldt: $|y_{\lambda}|^0 \neq E|\underline{y}|^0$ of $|y_{\lambda}|^0 = E|\underline{y}|^0 = 0$.

In het laatste geval ($E|\underline{y}|^0 = 0$) is $|\underline{y}| \approx 0$, zodat inderdaad $P[y=0] > 0$ is. Is $|y_{\lambda}|^0 \neq E|\underline{y}|^0$, hetgeen, als $E|\underline{y}|^0 \neq 0$ is voor iedere $\lambda \in \Lambda$ het geval moet zijn, dan onderscheiden we de twee mogelijkheden: $E|\underline{y}|^0 = 1$ en $E|\underline{y}|^0 \neq 1$. In het eerste gavl is dus $|y_{\lambda}|^0 \neq 1$, d.w.z. $|y_{\lambda}| = 0$ voor iedere $\lambda \in \Lambda$, dus ook nu $P[\underline{y} = 0] > 0$ en in het tweede geval is $P[|\underline{y}| > 0] < 1$, daar anders $E|\underline{y}|^0 = 1$ zou zijn, dus ook $P[\underline{y} = 0] > 0$.

6. A. De ongelijkheden van Ingham-Jessen en Minkowski.

Zij $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ de product-vz van de twee vzn Γ_1 en Γ_2 met eln λ_1 resp. λ_2 (vgl.bl.69) en $V = (V_1, V_2)$ het product van twee abs add vz-fcts V_1 (op Γ_1) en V_2 (op Γ_2) (vgl. stelling 16,bl.69) en zij $\underline{z} = z_{\lambda_1\lambda_2}$ een op Γ L-meetbare en t.o.v. V absoluut integreerbare fct, terwijl bovendien $\underline{z}$ voor iedere vaste λ_2 L-meetbaar op Γ_1 en voor iedere vaste λ_1 L-meetbaar op Γ_2 is (vgl. stelling 18, bl.73). Zij verder:

$E_i|\underline{z}|^a = \int_{\Gamma_i} V_i^{d\lambda_i}|z_{\lambda_1\lambda_2}|^a$ en $M_{ik} = \left\{E_i|\underline{z}|^k\right\}^{\frac{1}{k}}$ dan geldt de volgende stelling:

STELLING: (1) $\operatorname{sgn}(k-\ell).M_{1k}M_{2\ell}\underline{z} \leqq \operatorname{sgn}(k-\ell).M_{2\ell}M_{1k}\underline{z}$ en:

(2) $\operatorname{sgn}(k-1)\left\{E_1(E_2|\underline{z}|)^k\right\}^{1/k} \leqq \operatorname{sgn}(k-1).E_2(E_1|\underline{z}|^k)^{1/k}$,

terwijl voor optreden van het gelijkheidsteken, indien de integralen convergent zijn, noodzakelijk en voldoende is, dat resp.:

$$(1')\quad (k-\ell)\left\{|\underline{z}|\,M_{2\ell}M_{1k}\underline{z} - (M_{1k}\underline{z})M_{2\ell}\underline{z}\right\} \approx 0 \text{ en}$$

$$(2')\quad (k-1)\left\{|\underline{z}|\,E_2(E_1|\underline{z}|^k)^{1/k} - (E|\underline{z}|^k)^{1/k}E|\underline{z}|\right\} \approx 0 \text{ is.}$$

Opmerking: (2) ontstaat uit (1) door $\ell=1$ te nemen. We behoeven dus alleen (1) te bewijzen. (1) is de ongelijkheid van A.E.Ingham en E.Jessen (1929) en (2) de ongelijkheid van H.Minkowski (1896).

De gelijkheidsvoorwaarde komt bij beide neer op ontbindbaarheid van $\underline{z}$ in 2 fcts, waarvan de éne alleen van λ_1 en de andere alleen van λ_2 afhangt.

Bewijs: a. Volgens stelling 18 bl.73 is $E_1E_2|\underline{z}| = E_2E_1|\underline{z}|$ dus is ook

$$M_{1k}M_{2k}\underline{z} = (E_1E_2|\underline{z}|^k)^{1/k} = (E_2E_1|\underline{z}|^k)^{1/k} = M_{2k}M_{1k}\underline{z} .$$

b. Zij $k \neq 0$; we onderstellen $M_{1k}\underline{z} > 0$ op Γ_2 '). Nu is $\operatorname{sgn}(k-\ell) =$ $= \operatorname{sgn} k.\operatorname{sgn}\ell.\operatorname{sgn}\frac{k\ell}{k-\ell}$, terwijl voor $\ell=0$ $\operatorname{sgn}(k-\ell) = \operatorname{sgn} k$ is, zodat we door toepassing van de ongelijkheid van Hölder krijgen:

$$\operatorname{sgn}(k-\ell).M_{1k}M_{2\ell}\underline{z} = \operatorname{sgn}(k-\ell).M_{1k}M_{2\ell}\frac{\underline{z}}{(M_{1k}\underline{z})^{\frac{k-\ell}{k}}}(M_{1k}\underline{z})^{\frac{k-\ell}{k}} \leqq$$

$$\leqq \operatorname{sgn}(k-\ell).M_{1k}M_{2k}\frac{\underline{z}}{(M_{1k}\underline{z})^{\frac{k-\ell}{k}}}\;M_{2,\frac{k\ell}{k-\ell}}(M_{1k}\underline{z})^{\frac{k-\ell}{k}} =$$

$$= \operatorname{sgn}(k-\ell)\left\{M_{2,\frac{k\ell}{k-\ell}}(M_{1k}\underline{z})^{\frac{k-\ell}{k}}\right\}M_{1k}M_{2k}\frac{\underline{z}}{(M_{1k}\underline{z})^{\frac{k-\ell}{k}}} =$$

$$= \operatorname{sgn}(k-\ell)\;(M_{2\ell}M_{1k}\underline{z})^{\frac{k-\ell}{k}}\;M_{2k}M_{1k}\frac{\underline{z}}{(M_{1k}\underline{z})^{\frac{k-\ell}{k}}} = \operatorname{sgn}(k-\ell)(M_{2\ell}M_{1k}\underline{z})^{1-\frac{\ell}{k}}M_{2k}(M_{1k}\underline{z})^{\frac{\ell}{k}} =$$

$$= \operatorname{sgn}(k-\ell)(M_{2\ell}M_{1k}\underline{z})^{1-\frac{\ell}{k}}(M_{2\ell}M_{1k}\underline{z})^{\frac{\ell}{k}} = \operatorname{sgn}(k-\ell).M_{2\ell}M_{1k}\underline{z} .$$

c. De gelijkheidsvoorwaarde wordt nu: $k=\ell$ (in welk geval de gelijkheid direct uit het vorige volgt) of bijna overal op Γ_1:

$$\frac{|\underline{z}|^k}{(M_{1k}\underline{z})^{\frac{k-\ell}{k}}}\,E_2(M_{1k}\underline{z})^{\ell} \underset{V_2}{\approx} \left(E_2\frac{|\underline{z}|^k}{(M_{1k}\underline{z})^{k-\ell}}\right)(M_{1k}\underline{z})^{\ell} \quad \text{dus:}$$

') We bewijzen de stelling alleen onder deze onderstelling.

$$|\underline{z}|^k E_2(M_{1k}\underline{z})^\ell \underset{V_2}{\approx} (M_{1k}\underline{z})^k E_2 \frac{|\underline{z}|^k}{(M_{1k}\underline{z})^{k-\ell}}$$

Stellen we hierin $E_2 \dfrac{|\underline{z}|^k}{(M_{1k}\underline{z})^{k-\ell}} = \varphi_{\lambda_1}$ en nemen we van beide leden het $M_{2,\ell/k}$-gemiddelde, dan krijgen we:

$$(M_{2\ell}\underline{z})^k (M_{2\ell}M_{1k}\underline{z})^\ell = (M_{2\ell}M_{1k}\underline{z})^k \cdot \varphi_{\lambda_1} \text{ bijna overal op } \Gamma_1 .$$

Vullen we de zo verkregen waarde van φ_{λ_1} in de gelijkheidsvoorwaarde in, dan komt er:

$$|\underline{z}|^k (M_{2\ell}M_{1k}\underline{z})^\ell \approx (M_{1k}\underline{z})^k (M_{2\ell}\underline{z})^k (M_{2\ell}M_{1k}\underline{z})^{\ell-k} \text{ dus}$$

$$|\underline{z}|\, M_{2\ell}M_{1k}\underline{z} \approx (M_{1k}\underline{z}).M_{2\ell}\underline{z} ,$$ waarbij de aequivalentie t.o.v. $V_1.V_2$ geldt.

d. De tot nu toe gebruikte voorwaarde $k \neq 0$ is overbodig, zoals gemakkelijk blijkt door in het bereikte resultaat k met ℓ en M_1 met M_2 te verwisselen.

e. Voor $k = \ell = 0$ volgt de gelijkheid direct, daar dan

$$M_{10}M_{20}\underline{z} = e^{\ell_1 \ell_2 |\underline{z}|} = e^{\ell_2 \ell_1 |\underline{z}|} = M_{20}M_{10}\underline{z} \text{ is.}$$

8. a) Corollarium 1: sgn(k-1).$M_k\underline{x}$ is een nietnegatief-convex functionel van $\underline{x}$, d.w.z. is $a \geq 0$, $b \geq 0$ en $a+b = 1$, dan is

$$\text{sgn}(k-1).M_k(a\underline{x} + b\underline{y}) \leq \text{sgn}(k-1) \left\{a.M_k\underline{x} + b.M_k\underline{y}\right\}.$$

Het gelijkheidsteken treedt dan en slechts dan op, als

$$(k-1).ab.(|\underline{x}|E|\underline{y}| - |\underline{y}|E|\underline{x}|) \approx 0 \text{ is.}$$

Bewijs: Zij E_1 het gemiddelde over het gegeven wh-veld Γ_1 en E_2 het gemiddelde over een alternatief Γ_2 met eln μ' en μ'' en resp. whn a en b. Dan is volgens de ongelijkheid van Minkowski, als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ stochastische variabelen op Γ_1 zijn:

$$\text{sgn}(k-1).M_k(a\underline{x} + b\underline{y}) = \text{sgn}(k-1) \left\{E_1(a|\underline{x}| + b|\underline{y}|)^k\right\}^{1/k} = \text{sgn}(k-1) \left\{E_1(E_2|\underline{z}|)^k\right\}^{1/k} \leq$$

$$\leq \text{sgn}(k-1).E_2(E_1|\underline{z}|^k)^{1/k} = \text{sgn}(k-1).(a.M_k\underline{x} + b.M_k\underline{y}) \text{ waarin}$$

$$\underline{z} = \begin{cases} |\underline{x}| \text{ voor } \lambda_2 = \mu' \\ |\underline{y}| \text{ voor } \lambda_2 = \mu'' \end{cases} \text{ is.}$$

Het gelijkheidsteken treedt dus, behalve voor $k = 1$, op, als $|\underline{z}|$ het product van twee onafhankelijke stochastische variabelen op Γ_1 resp. Γ_2 is en dit is dan en slechts dan het geval, als $ab = 0$ is of $|\underline{x}|$ en $|\underline{y}|$ bijna overal op Γ_1 evenredig zijn.

b) Corollarium 2: Voor $k \geq 0$ is $\operatorname{sgn}(k-1).\,\alpha_k(\underline{x})$ een nietnegatief-convex functionel van $\underline{x}$, d.w.z. is $a \geq 0$, $b \geq 0$ en $a+b = 1$, dan is

$$\operatorname{sgn}(k-1).\,\alpha_k(a\underline{x} + b\underline{y}) \leq \operatorname{sgn}(k-1)\left\{a.\,\alpha_k(\underline{x}) + b.\,\alpha_k(\underline{y})\right\},$$

waarin het gelijkheidsteken dan en slechts dan optreedt als

$$k(k-1).ab.(|\underline{x}|E|\underline{y}| - |\underline{y}|E|\underline{x}|) \approx 0 \text{ is.}$$

Bewijs: Het gestelde volgt uit corollarium 1 met behulp van de voor $k \geq 0$ geldende nietnegatieve-convexiteit van: $\operatorname{sgn}(k-1)\,|z|^k$.

c) Corollarium 3: Is $\varphi(x) \geq 0$ en $\operatorname{sgn}(k-1).\,\varphi(x)$ nietnegatief-convex in een interval $\mathfrak{J}$, waar $\underline{x}$ bijna zeker in ligt, dan is $\operatorname{sgn}(k-1).M_k\,\varphi(\underline{x})$ een nietnegatief-convex functionel van $\underline{x}$, d.w.z. voor $a \geq 0$, $b \geq 0$ en $a+b = 1$ geldt: $\operatorname{sgn}(k-1)M_k\,\varphi(a\underline{x} + b\underline{y}) \leq \operatorname{sgn}(k-1)\left\{a.M_k\,\varphi(\underline{x}) + b.M_k\,\varphi(\underline{y})\right\}$.

waarin het gelijkheidsteken dan en slechts dan optreedt, als $ab = 0$ is of φ nul-convex in $\mathfrak{J}$ en $(k-1)\left\{\varphi(\underline{x}).E\,\varphi(\underline{y}) - \varphi(\underline{y}).E\,\varphi(\underline{x})\right\} \approx 0$.

Bewijs: $\operatorname{sgn}(k-1).M_k\,\varphi(a\underline{x} + b\underline{y}) \leq \operatorname{sgn}(k-1).M_k(a\,\varphi(\underline{x}) + b\,\varphi(\underline{y})) \leq$
$\leq \operatorname{sgn}(k-1)\left\{a.M_k\,\varphi(\underline{x}) + b.M_k\,\varphi(\underline{y})\right\}$ volgens de convexiteit van $\operatorname{sgn}(k-1).\,\varphi$ en corollarium 1. De gelijkheidsvoorwaarde verkrijgt men door na te gaan, wanneer beide $\leq$ -tekens gelijkheidstekens worden.

C. Speciale gevallen van de ongelijkheden van Minkowski en Ingham-Jessen.

a) Voor $k=2$ wordt de ongelijkheid van Minkowski:

$$E_1(E_2\,|\underline{z}|)^2 \leq \left\{E_2(E_1\,|\underline{z}|^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^2 \qquad ^{1})$$

en voor $k=\frac{1}{2}$:
$$E_1\sqrt{E_2\,|\underline{z}|} \geq \sqrt{E_2(E_1\sqrt{|\underline{z}|})^2}\,.$$

b) Nemen we in de ongelijkheid van Minkowski voor Γ_1 een alternatief met kansen p en q $(p+q=1)$ op stochastische variabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ afhankelijk van λ_2, dan komt er, als we $E_2 = E$ stellen:

$$\operatorname{sgn}(k-1)\left\{p(E|\underline{x}|)^k + q(E|\underline{y}|)^k\right\}^{1/k} \leq \operatorname{sgn}(k-1).E(p|\underline{x}|^k + q|\underline{y}|^k)\,.$$

Nemen we voor Γ_2 een eindig wh-veld, waarop $\underline{x}$ en $\underline{y}$ de positieve waarden $x_1,..,x_n$ resp. $y_1,..,y_n$ met whn $a_1,..,a_n$ aannemen, dan wordt dit:

$$\operatorname{sgn}(k-1)\left\{p(\textstyle\sum a_i x_i)^k + q(\sum a_i y_i)^k\right\}^{1/k} \leq \operatorname{sgn}(k-1).\textstyle\sum a_i(px_i^k + qy_i^k)^{1/k}\,.$$

En voor $k=2$, $p=q=\frac{1}{2}$ en $a_i = 1/n$ voor iedere i:

$$\sqrt{(\textstyle\sum x_i)^2 + (\sum y_i)^2} \leq \textstyle\sum\sqrt{x_i^2 + y_i^2}\,.$$

c) Nemen we voor Γ_2 een alternatief met kansen p en q $(p+q=1)$ op stochastische variabelen $\underline{x}$ resp. $\underline{y}$ afhankelijk van λ_1, dan komt er, als we $E_1 = E$ stellen:

¹) De formulering van de gelijkheidsvoorwaarden wordt hier aan de lezer overgelaten.

$$\mathrm{sgn}(k-1)\left\{E(p|\underline{x}|+q|\underline{y}|)^k\right\}^{1/k} \leq \mathrm{sgn}(k-1)\left\{p(E|\underline{x}|^k)^{1/k}+q(E|\underline{y}|^k)^{1/k}\right\}.$$

(Dit is corollarium 1).

Nemen we hierin voor Γ_1 een eindig wh-veld, waarop $\underline{x}$ en $\underline{y}$ de positieve waarden $x_1,\ldots x_n$ resp. $y_1,\ldots y_n$ met whn $a_1,\ldots a_n$ aannemen, dan wordt dit:

$$\mathrm{sgn}(k-1)\left\{\sum a_i(px_i+qy_i)^k\right\}^{1/k} \leq \mathrm{sgn}(k-1)\left\{p(\sum a_i x_i^k)^{1/k}+q(\sum a_i y_i^k)^{1/k}\right\}.$$

Voor $k=2$, $p=q=\frac{1}{2}$ en $a_i=1/n$ voor iedere i wordt dit de bekende ongelijkheid:

$$\sqrt{\sum(x_i+y_i)^2} \leq \sqrt{\sum x_i^2}+\sqrt{\sum y_i^2} ,$$

die in de driehoeksongelijkheid overgaat, als we $\underline{x}$ vervangen door $\underline{x}-\underline{z}$ en $\underline{y}$ door $\underline{z}-\underline{y}$.

Een generalisatie van deze driehoeksongelijkheid krijgen we door de eis $k=2$ te laten vallen, maar $p=q=\frac{1}{2}$ en $a_i=1/n$ te houden:

$$\mathrm{sgn}(k-1).M_k(\underline{x}+\underline{y}) \leq \mathrm{sgn}(k-1)\ (M_k\underline{x}+M_k\underline{y}),$$

waarin M_k voor M_{1k} gezet is; of, als we $\underline{x}$ door $\underline{x}-\underline{z}$ en $\underline{y}$ door $\underline{z}-\underline{y}$ vervangen en $k \geq 1$ onderstellen:

$$M_k(\underline{x}-\underline{y}) \leq M_k(\underline{x}-\underline{z})+M_k(\underline{y}-\underline{z}).$$

Daar dit de driehoeksongelijkheid is, blijkt dus $\delta(\underline{x},\underline{y}) = M_k(\underline{x}-\underline{y})$ voor $k \geq 1$ als definitie van een "afstand" van de stochastische varabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ bruikbaar te zijn.

d) Nemen we in de ongelijkheid van Minkowski $k=0$, dan komt er:

$$e^{\lambda_1 \ln \lambda_2 |\underline{z}|} \geq E_2 e^{\lambda_1 \ln |\underline{z}|} .$$

Nemen we hierin voor Γ_1 een eindig wh-veld, dan krijgen we de ongelijkheid van Hölder terug. Nemen we voor Γ_2 een alternatief met kansen p en q $(p+q=1)$ op stochastische variabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$, afhankelijk van λ_1, dan krijgen we, als we $E_1=E$ stellen:

$$e^{\lambda \ln(p|\underline{x}|+q|\underline{y}|)} \geq p.e^{\lambda \ln|\underline{x}|}+q.e^{\lambda \ln|\underline{y}|} .$$

e) De ongelijkheid van Ingham-Jessen gaat voor $k=2$, $\ell=1$ en voor $k=1$, $\ell=\frac{1}{2}$ over in het onder a) genoemde geval. Voor $k=2,1$ of $\frac{1}{2}$ en $\ell=0$ in het onder d) genoemde geval, met $|\underline{z}|^2$, $|\underline{z}|$ resp. $|\underline{z}|^{\frac{1}{2}}$ i.p.v. $|\underline{z}|$.

Voot $k=2$ en $\ell=\frac{1}{2}$ komt er:

$$\sqrt{E_1(E_2\sqrt{|\underline{z}|})^4} \leq (E_2\sqrt[4]{E_1|\underline{z}|^2})^2 .$$

f) Nemen we in de ongelijkheid van Ingham-Jessen voor Γ_1 een eindig wh-veld met kansen a_i op stochastische variabelen $\underline{x}_i$ afhankelijk van λ_2, dan krijgen we, als we $M_{2\ell}=M_\ell$ stellen:

$$\mathrm{sgn}(k-\ell)\left\{\sum a_i(M_\ell\underline{x}_i)^k\right\}^{1/k} \leq \mathrm{sgn}(k-\ell).M_\ell(\sum a_i x_i^k)^{1/k} .$$

Nemen we ook voor Γ_2 een eindig wh-veld, waarop $\underline{x}_i$ de positieve waarden x_{ij} met whn b_j aanneemt, dan krijgen we:

$$\operatorname{sgn}(k-\ell)\left\{\sum a_i\left(\sum b_j x_{ij}^{\ell}\right)^{\frac{k}{\ell}}\right\}^{\frac{1}{k}} \leq \operatorname{sgn}(k-\ell)\left\{\sum b_j\left(\sum a_i x_{ij}^{k}\right)^{\frac{\ell}{k}}\right\}^{\frac{1}{\ell}}.$$

Indien deze beide wh-velden alternatieven met gelijke kansen zijn en $x_{11},\ldots,x_{22}$ de positieve getallen a,b,c en d zijn, komt er:

$$\operatorname{sgn}(k-\ell)\left\{(a^\ell+b^\ell)^{\frac{k}{\ell}}+(c^\ell+d^\ell)^{\frac{k}{\ell}}\right\}^{\frac{1}{k}} \leq \operatorname{sgn}(k-\ell)\left\{(a^k+c^k)^{\frac{\ell}{k}}+(b^k+d^k)^{\frac{\ell}{k}}\right\}^{\frac{1}{\ell}}.$$

7.A. Ongelijkheid van Gauss-Winkler.

Is f(x) een wh-dichtheid met de eigenschap, dat g(x) = f(x) + f(-x) monotoon niet-stijgend is, dan is $(1+k)^{\frac{1}{k}} M_k \underline{x}$ een monotoon niet-dalende fct van k voor $k \geq 0$.

(C.F.Gauss, Theoria combinationis observatiorum, Art. 10; Winkler, Sitzungsberichte Wiener Akad. 53, 1866; het hier gegeven bewijs is ontleend aan M.Fréchet, Généralités sur les Prob., bl.62 e.v.)

Bewijs: Zij α_k eindig, dan is in

$$\alpha_k = \int_0^\infty x^k g(x)dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}g(x)\right]_0^\infty - \frac{1}{k+1}\int_0^\infty x^{k+1}dg(x)$$

de eerste term van het laatste lid = 0, daar α_k convergent is, zodat

1e $\quad 2^{k+1}\int_{\frac{x}{2}}^\infty t^k g(t)dt \geq 2^{k+1}\int_{\frac{x}{2}}^x t^k g(t)dt \geq x^{k+1}g(x) \geq 0$ is en het eerste lid van deze ongelijkheid voor $x\to\infty$ tot nul nadert, en

2e $\quad \int_0^x t^k g(t)dt \geq g(x)\int_0^x t^k dt = \frac{x^{k+1}}{k+1}g(x) \geq 0$ is en het eerste lid tot nul nadert voor $x \searrow 0$.

Zij nu $\quad \Phi(x) = \dfrac{\int_0^x t^\ell dg(t)}{\int_0^\infty t^\ell dg(t)}$ met $0<\ell<k+1$.

Dat de noemer convergent is volgt uit de convergentie van α_ℓ (zie bl.93) door bovenstaande partiële integratie toe te passen, waarbij weer de eerste term van het laatste lid nul wordt. De convergentie van de teller is dan evident.

$\Phi(x)$ is nu als een verdelingsfct te beschouwen; we duiden de noemer aan met -J, en het pe absolute moment met β_p. Daar nu:

$$d\Phi(x) = -\frac{x^\ell dg(x)}{J} \text{ is, geldt:}$$

$$\alpha_k = -\frac{1}{k+1}\int_0^\infty x^{k+1}dg(x) = \frac{J}{k+1}\int_0^\infty x^{k+1-\ell}d\Phi(x) = \frac{J}{k+1}\beta_{k+1-\ell}.$$

Nu is volgens corollarium 4 (bl.99) $\ln\beta_{k+1-\ell}$ een nietnegatief-convexe fct van $(k+1-\ell)$ en hetzelfde geldt dan bij vaste ℓ voor k. Zij nu

$$\delta_k = (k+1)\alpha_k = J.\beta_{k+1-\ell}$$

dan is $\ln\delta_k$ dus een nietnegatief-convexe fct van k. Bovendien gaat de kromme $y = \ln \delta_k$ door de oorsprong van het (y,k)-vlak, zodat $\frac{1}{k}\ln \delta_k$ de richtingscoëfficiënt is van de koorde, die de oorsprong met het punt $(\ln \delta_k, k)$ verbindt. Derhalve is $\frac{1}{k}\ln \delta_k = \ln \left\{(k+1)^{\frac{1}{k}} M_k\right\}$, dus ook $(k+1)^{\frac{1}{k}} M_k$ zelf, een monotoon niet-dalende fct van k.

B. Ongelijkheid van Bienaymé-Tschebycheff.

(I.J.Bienaymé,1796-1878;C.R.Acad.Sci.,37.1853; P.L.Tschebycheff, 1821-1894, Les valeurs moyennes, Journal de Math.,XII,1867).

$$P\left[|\tilde{x}| \geqq t\sigma\right] \leqq \frac{1}{t^2} \qquad \sigma = M_2 \tilde{x} .$$

Bewijs: $\sigma^2 = \int_0^\infty \tilde{x}^2 dF(\tilde{x}) = \int_0^{t\sigma} + \int_{t\sigma}^\infty \geqq 0 + t^2\sigma^2 \int_{t\sigma}^\infty dF(\tilde{x})$, dus

$\int_{t\sigma}^\infty dF(\tilde{x}) = P\left[|\tilde{x}| \geqq t\right] \leqq \frac{1}{t^2}$. Deze ongelijkheid geldt dus voor iedere wh-verdeling.

C. Is $\varphi(x) \geqq 0$ en $\varphi(x) \geqq \varphi(\xi)$ voor $|x| \geqq \xi$, dan is:

$$E\varphi(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dF(x) \geqq \int_{|x|\geqq\xi} \varphi(x)dF(x) \geqq \varphi(\xi).P\left[\underline{x} \geqq \xi\right] \text{, dus:}$$

$$P\left[|\underline{x}| \geqq \xi\right] \leqq \frac{E\varphi(\underline{x})}{\varphi(\xi)}$$

Nemen we hierin $\varphi(x) = \frac{\tilde{x}^4}{\sigma^4}$ en stellen we $\xi = t\sigma$, dan komt er:

$$P\left[|\tilde{x}| \geqq t\sigma\right] \leqq \frac{\frac{\tilde{\mu}_4}{\sigma^4}}{t^4} = \frac{\gamma_2}{t^4} .$$

Voor grote t wordt het rechterlid van de orde $1/t^4$, terwijl dit bij de ongelijkheid van Bienaymé-Tschebycheff slechts van de orde $1/t^2$ was. Neemt men voor $\varphi(x)$ een polynoom van de graad 2n, waarvan de integraal eindig is, dan krijgt men een rechterlid, dat voor grote t van de orde $1/t^{2n}$ is. Is $Ee^{|\tilde{x}|a}$ eindig, dan krijgen we:

$$P\left[|\tilde{x}| \leqq t\sigma\right] = \frac{Ee^{|\tilde{x}|a}}{e^{t\sigma a}}$$

zodat het linkerlid exponentieel naar nul gaat.

(Zie verder voor verschillende generalisaties en verscherpingen: M.Fréchet, Généralités sur les prob. Variables aléatoires, Parijs 1937, Traité du Calcul des Prob. par Emile Borel et collaborateurs, Tome I, fascicule III, premier livre).

D. Lemma 1: Is $G(x) = \int_p^x g(t)dt$ met $g(t)$ monotoon in een interval $\mathfrak{J}$, dan is $G(x)$ in dat interval convex en wel:

nietnegatief-convex als $g(t)$ monotoon niet-dalend is, en

nietpositief-convex als $g(t)$ monotoon niet-stijgend is.

Bewijs: a) Is c een punt van interval $\mathcal{J}$ en $\delta > 0$ zo, dat $c+\delta$ en $c-\delta$ nog tot $\mathcal{J}$ behoren, dan is, als $g(t)$ in $\mathcal{J}$ monotoon niet-stijgend is:
$$\int_0^\delta \left\{g(c-t) - g(c+t)\right\} dt \geq 0, \text{ dus:}$$
$$G(c) - G(c-\delta) \geq G(c+\delta) - G(c) \quad \text{of:} \quad G(c) \geq \tfrac{1}{2}\left\{G(c+\delta) + G(c-\delta)\right\} .$$

Daar dit voor iedere c en iedere $\delta > 0$, die aan bovenstaande eisen voldoen, geldt, is dus:
$$G(px+qy) \geq p.G(x) + q.G(y) \text{ voor iedere } x \text{ en } y \text{ in } \mathcal{J}, \text{ mits } p=q=\tfrac{1}{2} \text{ is.}$$

$G(x)$ is echter een continue fct, zodat hieruit (vgl.bl.96, opm.4) geconcludeerd kan worden, dat deze ongelijkheid ook geldt voor p en $q \neq \frac{1}{2}$ met $p \geq 0$, $q \geq 0$ en $p+q = 1$, zodat bewezen is, dat $G(x)$ in $\mathcal{J}$ nietpositief-convex is.

b) Is $g(t)$ monotoon niet-dalend, dan beschouwe men $-g(t)$.

Opmerking: de ligging van p t.o.v. $\mathcal{J}$ is niet van belang.

Lemma 2: Is $g(x)$ een integreerbare fct en $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$, terwijl $g(x)$ en $\Phi(x)$ voor $a \leq x \leq b$ beide monotoon zijn, de één niet-stijgend, de ander niet-dalend, dan is:
$$\int_a^b g(x)\,\Phi(x)dx \geq \Phi(a)\int_a^m g(x)dx + \Phi(b)\int_m^b g(x)dx, \text{ waarin}$$
$$m = \frac{b\Phi(b) - a\Phi(a) - \int_a^b \Phi(x)dx}{\Phi(b) - \Phi(a)} \quad \text{is.}$$

(B.Meidell, Quelques inégalités sur les fonctions monotones, Skandinavsk Aktuarieteidsskrift, häft 4, 1921).

Opmerking: het is van geen belang welke van de fcts g of Φ monotoon niet-stijgend en welke monotoon niet-dalend is.

Bewijs: a) $\Phi(x)$ zij de monotoon niet-dalende fct, dan is $\varphi(x) \geq 0$ voor $a \leq x \leq b$, zodat
$$\frac{\varphi(x)}{\int_a^b \varphi(x)dx}$$
voor $a \leq x \leq b$ als een wh-dichtheid te beschouwen is [1]. Noemen we de bij deze wh-dichtheid behorende mathematische verwachting M, dan is:
$$M\underline{x} = \frac{\int_a^b x\,\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx} = m$$
zoals met behulp van partiële integratie gemakkelijk na te rekenen is.

[1] Hierbij moet ondersteld worden, dat $\Phi(b) > \Phi(a)$ is. Is dit echter niet het geval, dan is $\Phi(x) = c$ voor $a \leq x \leq b$, zodat de stelling dan triviaal wordt.

$G(x) = \int_0^x g(t)dt$ is volgens lemma 1 voor $a \leqq x \leqq b$ convex en wel, daar $g(t)$ tussen a en b monotoon niet-stijgend is, nietpositief-convex.

Derhalve is volgens de stelling van Jensen: $MG(\underline{x}) \leqq G(M\underline{x})$, dus:

$$\int_a^b G(x)\varphi(x)dx \leqq G(m)\left\{\Phi(b) - \Phi(a)\right\} ,$$

of door partiële integratie in het eerste lid:

$$\left[G\,\Phi\right]_a^b - \int_a^b g(x)\,\Phi(x)dx \leqq G(m)\left\{\Phi(b) - \Phi(a)\right\} ,$$

waaruit het gestelde onmiddellijk volgt.

b) Is $\Phi(x)$ monotoon niet-stijgend en $g(x)$ monotoon niet-dalend, dan beschouwe men $-\Phi(x)$ en $-g(x)$.

E. Ongelijkheid van Meidell.

(B.Meidell; Sur un problème du calcul des prob. et les statistiques mathématiques, C.R.175(1922) bl.806-808)

Is $f(x)$ een wh-dichtheid met de eigenschap, dat $g(x) = f(x) + f(-x)$ monotoon niet-stijgend is voor $0 \leqq x \leqq b$ en is $\varphi(x) \geqq 0$ en integreerbaar voor $x \geqq 0$, dan is:

$$P\left[|\underline{x}| \geqq m\right] \leqq \frac{E\,\Phi(|\underline{x}|)}{\Phi(b)}$$

waarin $\Phi(|x|) = \int_0^{|x|}\varphi(t)dt$ en $m = \dfrac{b\,\Phi(b) - \int_0^b \Phi(x)dx}{\Phi(b)} = \dfrac{\int_0^b x.d\,\Phi(x)}{\int_0^b d\,\Phi(x)}$ is.

Bewijs: Zij $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = P\left[\underline{x} \leqq x\right]$ en voor $x \geqq 0$:

$$G(x) = \int_0^x g(x)dx = \int_{-x}^x f(t)dt = F(x) - F(-x) = P\left[|\underline{x}| \geqq x\right] \quad {}^{*})$$

Volgens lemma 2 is nu (daar daarin $a = 0$ is):

$$\Phi(b)\left\{G(b) - G(m)\right\} \leqq \int_0^b g(x)\,\Phi(x)dx = \int_0^\infty g(x)\,\Phi(x)dx - \int_b^\infty g(x)\,\Phi(x)dx \leqq$$

$$\leqq E\,\Phi(|\underline{x}|) - \Phi(b)\int_b^\infty g(x)dx = E\,\Phi(|\underline{x}|) - \Phi(b)\left\{1 - G(b)\right\} , \text{ dus}$$

$$1 - G(m) \leqq \frac{E\,\Phi(|\underline{x}|)}{\Phi(b)}$$, terwijl nu volgens lemma 2 de in stelling vermelde waarde heeft.

F. Meidell geeft de ongelijkheid alleen voor het speciale geval: $\Phi(x) = x^k$. Er komt dan: $P\left[|\underline{x}| \geqq m\right] \leqq \dfrac{\alpha_k}{b^k}$ met $m = \dfrac{k}{k+1}\,b$.

Derhalve is $P\left[|\underline{x}| \geqq \lambda\right] \leqq \dfrac{\alpha_k}{\lambda^k}\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^k$ indien de onderstellingen van de stelling voor $0 \leqq x \leqq \dfrac{k+1}{k}\lambda$ vervuld zijn.

*) I.a.a. is $\int_{-x}^{+x} f(t)dt = F(x) - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(-x-\varepsilon)$; in dit geval echter is F(x) continu.

G. Ongelijkheid van Camp.

(B.F.Camp, A new generalisation of Tchebycheffs Statistical Inequality, Bull.Am.math.soc.28,1922,bl.427-432).

Deze ongelijkheid is geldig, als $g(x) = f(x) + f(-x)$ monotoon niet-stijgend is voor $x \geqq a \geqq 0$. Dan is:

$$P\left[|\underline{x}| \geqq \lambda\right] \leqq \frac{\alpha_k}{\lambda^k}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \frac{1}{1+\Phi} + \theta \qquad \text{met:}$$

$$\theta = \frac{P\left[|\underline{x}| \geqq a\right]}{1 + 1/\Phi} \qquad \text{en} \qquad \Phi = \frac{\left(\frac{a}{\lambda}\,\frac{k}{k+1}\right)^k}{(k+1)\left(\frac{\lambda}{a} - 1\right)} .$$

Deze ongelijkheid gaat voor $a = 0$ over in die van Meidell. Voor het bewijs verwijzen we naar de publicatie van Camp, benevens naar het reeds vermelde boek van Fréchet, waarin nog verdere generalisaties gegeven worden.

W

IA

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhavestraat 49
AMSTERDAM O.

<u>Statistische Afdeling .</u>

Capita Selecta

Caput III Collectieve kenmerken, voortbrengende en karakteristieke functies.

Hoofdstuk II

door

Prof.Dr. D.van Dantzig

S1(C1)

pag. 119-169a

Collectieve kenmerken, voortbrengende en karakteristieke functies [1]

§ 1. Inleiding

1. Zij gegeven een collectie Γ en daarop een kategorisch systeem van kenmerken $A_1, \ldots, A_k$. Zij n de uitgebreidheid van Γ, $n_1, \ldots, n_k$ de uitgebreidheden der bij de A_i $(i=1, \ldots, k)$ behorende deelcollecties $\mathcal{A}_i$, dus $f_i = n_i/n$ de fqn dezer kenmerken. We beschouwen nu een willekeurige eigenschap E, die de eln van Γ al dan niet bezitten, en noemen $a_1, \ldots, a_k$ de fqn waarmede E in de deelcollecties $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ voorkomen, en c het fq waarmede E in Γ voorkomt. Dan is volgens de "distributieve eigenschap" der fqn (hoofdstuk 1, pag 15 [2]):

(1) $$c = f_1 a_1 + \ldots + f_k a_k .$$

Nemen we voor E een bepaalde eigenschap, dan zijn alle fqn bepaalde getallen, en (1) is een numerieke identiteit. Indien we echter E onbepaald laten, blijven ook de a_i en c onbepaald. Dan zijn echter de f_i in (1) bepaald als de coëfficiënten, waarmede de a_i in de ontwikkeling (1) van c voorkomen. Het is dan mogelijk, voor de fqn a_i en c dezelfde symbolen te gebruiken, als voor de bijbehorende kenmerken, en deze onbepaald gelaten fqn zelf ook met de term "kenmerken" aan te duiden. We krijgen dan in plaats van (1)

(2) $$C = \sum_1^k f_i A_i$$

C is het "collectieve kenmerk" van Γ.

Men kan ook de met (2) overeenkomende vergelijking opschrijven, waarin de frequenties i.p.v. de fqn voorkomen:

(3) $$nC = \sum_1^k n_i A_i$$

2. Voorbeelden.

a. Zij $\mathcal{A}$ de collectie van alle volgens de volkstelling van 31 December 1930 geregistreerde inwoners van de gemeente Amsterdam, A haar collectieve kenmerk (kort gezegd: "Amsterdammer"), M het kenmerk "mannelijk", V het kenmerk "vrouwelijk", beide met verder niet vermelde toevoeging "Amsterdammer". De uitgebreidheden der collecties $\mathcal{A}$, $\mathcal{M}$ en Φ zijn: 757 386, 365 512, resp. 391 874 , dus de fqn

---

[1]) Tevens Caput 3 van het College Capita selecta der whr.

[2]) College whr p. 10 regel 22 v.o.

van M en V $\frac{365\ 512}{757\ 386} = 0{,}48260$ resp. $\frac{391\ 874}{757\ 386} = 0{,}51740$. We hebben dus

$$A = 0{,}48260\ M + 0{,}517\ 40\ V \quad ^{1})$$

Hierin kunnen M,V en A geinterpreteerd worden als de fqn waarmede b.v. een bepaalde ziekte onder de mannelijke, de vrouwelijke, resp. alle "Amsterdammers" voorkomt.

b. Onder de 757 386 eln der collectie $\mathcal{A}$ van voorbeeld 1 waren

392 908 ongehuwd (O)
322 217 gehuwd (H)
34 584 gescheiden (S)
7 677 weduwe (-naar) (W)

We schrijven hiervoor:

$$757\ 386\ A = 392\ 908\ O + 322\ 217\ H + 34\ 584\ S + 7677\ W,$$

of na deling door 757 386:

$$A = 0{,}518\ 77\ O + 0{,}425\ 43\ H + 0{,}045\ 66\ S + 0{,}01014\ W.$$

c. Onder de 20^e decimalen van de 10 000 logarithmen log x, $80\ 000 \leqq x < 90\ 000$ (collectie $\mathcal{A}$, kenmerk D) volgens de Logarithmetica Brittannica komen 1 019 nullen voor (kenmerk N), 5 024 oneven cijfers (kenmerk $\mho$), dus 3 957 even cijfers $\neq$ 0 (kenmerk E'). We schrijven dus:

$$10\ 000\ D = 1\ 019\ N + 3\ 957\ E' + 5\ 024\ \mho$$

of

$$D = 0{,}101\ 9\ N + 0{,}395\ 7\ E' + 0{,}502\ 4\ \mho.$$

d. Gedurende het jaar 1939 vonden in Nederland (het Rijk binnen Europa) volgens de gebruikte statistiek 183 115 geboorten plaats (collectief kenmerk B)[2]) Daarvan waren 180 735 enkelvoudige geboorten (E) en 2 363 tweelinggeboorten[3]) (kenmerk T), 16 drielinggeboorten (D) en 1 vierlinggeboorte (V):

$$183\ 115\ B = 180\ 735\ E + 2\ 363\ T + 16\ D + V \quad ^{4})$$

of

$$B = 0{,}987\ 00\ E + 0{,}012\ 90\ T + 0{,}000\ 09\ D + 0{,}000\ 01\ V$$

3. De splitsing (2) van een collectief kenmerk C volgens een kategorisch systeem van kenmerken gaat in de identiteit

$$1 = \sum f_i$$

over, wanneer alle kenmerken A_i en C door het getal 1 worden vervangen. Dienovereenkomstig is b.v. in voorbeeld 2:

$$1 = 0{,}518\ 77 + 0{,}425\ 43 + 0{,}045\ 66 + 0{,}010\ 14$$

Dit substitueren van 1 voor de A_i betekent dat men voor E een eigenschap neemt, die aan alle eln van elke deelcollectie $\mathcal{A}_i$, dus aan

---

1) Decimale breuken hier en verder afgerond op een halve eenheid van de laatst weergegeven decimaal.

2) zie bl. 3 bovenaan.

3) " " " "

4) " " " "

[2]) Statistiek van de Bevolking van Nederland, 1939-1940, tabel 6, pag. 32. De hier gegeven getallen hebben betrekking op levend of doodgeborenen "wettig" of "onwettig".

[3]) We gebruiken de term "tweeling" voor twee "gelijktijdig" (d.w.z. in één uterus-ontsluiting) geboren kinderen, enz. één tweelinggeboorte = geboorte van één tweeling.

[4]) Voor 1V schrijven we kort V.

alle eln van Γ toekomt.

Het komt vaak voor, dat het in een later stadium van het onderzoek niet nodig is, sommige kenmerken verder nog van elkaar te blijven onderscheiden. Men zal dan voor E een eigenschap kiezen, die in de bijbehorende deelcollecties met gelijke fqn voorkomt, d.w.z. men vervangt deze kenmerken alle door éénzelfde. Indien men b.v. in voorbeeld 3 alleen even (kenmerk E) en oneven (O) wil onderscheiden substitueert men E voor N en voor E':

$$D = 0{,}101\,9\,E + 0{,}395\,7\,E + 0{,}502\,4\,O = 0{,}497\,6\,E + 0{,}502\,4\,O$$

Deze substituties zijn aan dezelfde regels gebonden als de substitutie van constanten (of andere variabelen) voor de argumenten ener fct; men moet namelijk het collectieve kenmerk als een (homogene lineaire) fct van zijn kenmerken beschouwen. Zo mogelijk wordt echter deze afhankelijkheid in de linkerleden niet expliciet aangegeven. Expliciet zouden de drie aangegeven functies D moeten worden voorgesteld door D(N,E',O), D(E,E,O) en D(E,E,1).

Dit substitutieproces wordt "ontmerken" genoemd.

Men kan ook de niet-benodigde fqn helemaal weglaten, maar alleen onder prijsgeven van het gebruik van het gelijkheidsteken . Dit moet dan door een ander teken, b.v. $\supset$ ("bevat") vervangen worden. B.v.

$$D \supset 0{,}101\,9\,N + 0{,}395\,7\,E'$$

Dit komt daar op neer, dat men voor de weggelaten kenmerken het getal nul gesubstitueerd heeft. Indien men echter andere substituties toelaat dan nieuwe variabelen of het getal 1 kan het weglaten van de argumenten der functies in de linkerleden licht tot fouten leiden; we zullen dit daarom bij voorkeur niet doen.

4. We beschouwen voorbeeld 4 van punt 2, waarin we echter de numerieke waarden der uitgebreidheden, die verder niet van belang zijn door de letters $n, n_1, \ldots, n_4$ en de fqn door $f_1, \ldots f_4$ vervangen:

$$nB = n_1 E + n_2 T + n_3 D + n_4 V$$

$$B = f_1 E + f_2 T + f_3 D + f_4 V. \quad (= f_1 E + (f_2+f_3+f_4) M \text{ (meerling)})$$

Voor de eigenschap, waarvan E,T, enz. de fqn zijn, kiezen we het ontbreken ener complicatie bij de bevalling die bij elk kind afzonderlijk kan voorkomen. Zij dan T_1, D_1, V_1 het fq van het niet optreden deser eigenschap bij de eerstgeboren tweelingen, drielingen, enz., T_2, D_2, V_2 van de tweede geborenen, indien zij bij de eerstgeborenen niet opgetreden is, D_3, V_3 bij de derde en V_4 bij de vierde-geborenen, indien zij bij de eerdergeborenen niet optreedt. Volgens de eigenschap der associativiteit is dan $T = T_1 T_2$ het fq van het in het geheel niet optreden dezer complicatie bij de tweelinggeboorten, $D = D_1 D_2 D_3$ en $V = V_1 V_2 V_3 V_4$ bij de drieling- en vierlinggeboorten. We krijgen dus:

$$B = f_1 E + f_2 T_1 T_2 + f_3 D_1 D_2 D_3 + f_4 V_1 V_2 V_3 V_4 ,$$

waarin nu het linkerlid het fq is van alle geboorten, waarbij de beschouwde complicatie in het geheel niet optreedt. Is in het bijzonder het optreden der complicatie onafhankelijk van het rangnummer der doelgeboorte en van het al dan niet optreden bij de eerdergeborenen bij dezelfde geboorte dan is $T_2 = T_1$, $D_3 = D_2 = D_1$, enz., dus

$$B = f_1 E + f_2 T_1^2 + f_3 D_1^3 + f_4 V_1^4 .$$

Is, nog meer in het bijzonder het optreden der complicatie onafhankelijk daarvan of de geboorte enkel-, twee-, drie- of viervoudig is, dan is $T_1 = D_1 = V_1 = E$, dus

$$B = f_1 E + f_2 E^2 + f_3 E^3 + f_4 E^4$$

het fq van het volledig ontbreken van de complicatie.

We hebben nu dus B door een polynomium in E voorgesteld. Elke factor E stelt de geboorte van één kind voor, elke factor E^k de geboorte van een k-ling.

De overgang van T,D,V op E^2, E^3, E^4 is door specialisatie van de beschouwde eigenschap verkregen en moet dus als een gedeeltelijke ontmerking opgevat worden. Zoals (in het algemeen!) iedere ontmerking, vermindert zij het aantal onderscheidingsmogelijkheden. Weliswaar komt dit in het onderhavige geval nog niet tot uitdrukking, daar de getallen $f_1, \ldots, f_4$ als coëfficiënten van een polynomium ondubbelzinnig bepaald zijn; bij verdere bewerkingen kan deze eigenschap echter verloren gaan (b.v. bij vermenigvuldiging van collectieve kenmerken).

5. De collectie $\mathcal{B}$ der geboorten stellen we nu voor door

$$\mathcal{B} = nB = n_1 E + n_2 E^2 + n_3 E^3 + n_4 E^4 .$$

Zij $\mathcal{K}$ de collectie der in deze geboorten geboren kinderen (kenmerk K) Deze heeft de uitgebreidheid $k = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4$. Hieronder zijn n_1 die geen "medegeborene" (kenmerk M_0) hebben, $2n_2$ die één medegeborene hebben (M_1), $3n_3$ die elk twee medegeborenen hebben (M_2) en $4 n_4$ die elk drie medegeborenen hebben (M_3). We hebben dus

$$K = \frac{n_1 M_0 + 2n_2 M_1 + 3n_3 M_2 + 4n_4 M_3}{n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4} = \frac{f_1 M_0 + 2f_2 M_1 + 3f_3 M_2 + 4f_4 M_3}{f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4}$$

We nemen nu voor het kenmerk M_k het fq van het ontbreken der in punt 4 genoemde complicatie bij elk der medegeborenen van een kind (dit kind zelf niet medegerekend). Voor het aldaar laatst beschouwde geval der onafhankelijkheid is dit fq 1 voor de enkelgeborenen, E voor elk tweelingkind, E^2 voor elk drielingkind, enz. Dus:

$$K = \frac{f_1 + 2f_2 E + 3f_3 E^2 + 4f_4 E^3}{f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4}$$

Men kan hiervoor ook schrijven:

$$D = \frac{\frac{dB}{dE}}{\left(\frac{dB}{dE}\right)_{E=1}} = \frac{B'(E)}{B'(1)}$$

Dit is dus het fq van het volledig ontbreken der complicatie bij alle medegeborenen der uit de beschouwde geboorten voortgekomen kinderen.

Elke drieling bevat drie, elke vierling 6 paren van tezamengeborenen, wanneer men een paar niet rangschikt. Doet men dit wel, dan wordt het aantal paren verdubbeld. Er zijn dus $n_2 + 3n_3 + 6n_4$ ongerangschikte en $2n_2 + 6n_3 + 12n_4$ gerangschikte paren. Het fq van het ontbreken der complicatie bij alle medegeborenen van een paar (de tot dit paar behorende kinderen niet medegerekend) is dus bij een tweeling 1, bij een drieling E, bij een vierling E^2. Voor de collectie der paren (collectief kenmerk P) vinden we dus:

$$P = \frac{n_2 + 3n_3 E + 6n_4 E^2}{n_2 + 3n_3 + 6n_4} = \frac{2f_2 + 6f_3 E + 12f_4 E^2}{2f_2 + 6f_3 + 12f_4} = \frac{\frac{d^2B}{dE^2}}{\left(\frac{d^2B}{dE^2}\right)_{E=1}} = \frac{B''(E)}{B''(1)}$$

Evenzo vinden we voor het fq van het volledig ontbreken van de complicatie bij alle medegeborenen van een tezamengeboren tripel $B'''(E)/B'''(1) = \frac{6f_3 + 24f_4 E}{6f_3 + 24f_4} = \frac{f_3 + 4f_4 E}{f_3 + 4f_4}$

6) De onderstaande tabel[1]) bevat dezelfde collectie geboorten als boven behandeld, onderscheiden naar 1e de veelvuldigheid der geboorte, 2e het geslacht der kinderen, 3e hun levensvatbaarheid[2]).

Voeren we de kenmerken J_l en M_l voor een levendgeboren jongen, resp. meisje en J_d en M_d voor de doodgeborenen in, dan kunnen we b.v. een drieling, bestaande uit één levendgeboren jongen en één levend- en één doodgeboren meisje (na gedeeltelijk ontmerken evenals in punt 4) voorstellen door $J_l M_l M_d$. Indien de symbolen J_l, enz. geinterpreteerd worden als de fqn van het niet-optreden ener bepaalde eigenschap bij een J_l, enz. en indien dit onafhankelijk is van het al dan niet op-

[1]) L.C. tabel 4, p. 31 en tabel 7, p. 33.

[2]) De onderscheiding naar "wettigheid" of "onwettigheid" blijft hier buiten beschouwing.

treden daarvan bij de medegeborenen, onverschillig welk kenmerk deze bezitten,

TABEL I

Alle geboorten		
Levensvatbaarheid	Jongens	Meisjes
Levend	92 705	88 212
Dood	2 490	2 106

Tweelingen			
Levensvatbaarheid	2 J.	1 J 1 M	2 M
beide levend	686	754	690
1 J. levend	64	25	-
1 M. levend	-	39	51
beide dood	25	7	22

Drielingen					Vierlingen
Levensvatbaarheid	3 jongens	2 jongens 1 meisje	1 jongen 2 meisjes	3 meisjes	1 jongen 3 meisjes
Alle levend	3	5	2	-	1
1 M. dood	-	-	2	2	-
2 J. dood	1	-	-	-	-
2 M. dood	-	-	-	1	-

dan kunnen we bovenstaande tabel als volgt samenvatten:

$$183\,115\ B = (j_\ell J_\ell + m_\ell M_\ell + j_d J_d + m_d M_d) + (688\ J_\ell^2 + 754\ J_\ell M_\ell + 690\ M_\ell^2 +$$

$$+ 64\ J_\ell J_d + 25\ J_\ell M_d + 39\ M_\ell J_d + 51\ M_\ell M_d + 25\ J_d^2 + 7\ J_d M_d + 22\ M_d^2) + (3\ J_\ell^3 +$$

$$+ 5\ J_\ell^2 M_\ell + 2\ J_\ell M_\ell^2 + 2\ J_\ell M_\ell M_d + 2\ M_\ell^2 M_d + J_\ell J_d^2 + M_\ell M_d^2) + J_\ell M_\ell^3$$

Men ziet hieruit, hoe gemakkelijk deze symbolische notatie zich "lezen" laat. De getallen $j_\ell, \ldots, m_d$ zijn niet direct uit de tabel af te lezen.

We hebben hier voor B een polynomium in J_ℓ, M_ℓ, J_d en M_d gevonden. (de deling door 183 115 laten we eenvoudigheidshalve achterwege). Ontmerken we ten aanzien van de levensvatbaarheid, d.w.z. substitueren we $L_\ell = L_d = L$, $M_\ell = M_d = M$, dan krijgen we:

$$183\,115\ B = (j_\ell + j_d) J + (m_\ell + m_d) M + (775\ J^2 + 825\ J\ M + 763\ M^2) +$$

$$+ (4\ J^3 + 5\ J^2 M + 4\ J\ M^2 + 3\ M^3) + J\ M^3.$$

Ontmerken we daarentegen t.a.v. het geslacht: $J_\ell = M_\ell = K_\ell$, $J_d = M_d = K_d$, dan krijgen we:

$$183\,115\, B = (j_\ell + m_\ell)K_\ell + (j_d + m_d)K_d + (2\,132\, K_\ell^2 + 179\, K_\ell K_d + 54\, K_d^2) +$$
$$+ (10\, K_\ell^3 + 4\, K_\ell^2 K_d + 2\, K_\ell K_d^2) + K_\ell^4.$$

Stellen we door $\mathcal{J}_\ell$, enz. de collectieve kenmerken van de collectie van alle levendgeboren jongens, enz., ongeacht de veelvuldigheid hunner geboorte, en lezen we de uitgebreidheden dezer collecties af uit het eerste gedeelte van de tabel, dan vinden we:

$$92\,705\, \mathcal{J}_\ell = 183\,115 \frac{\partial B}{\partial J_\ell} = j_\ell + (1\,372\, J_\ell + 754\, M_\ell + 64\, J_d + 25\, M_d) +$$
$$+ (9\, J_\ell^2 + 10\, J_\ell M_\ell + 2\, M_\ell^2 + M_\ell M_d + M_d^2) + M_\ell^3 = j_\ell + 2\,215\, K + 24\, K^2 + K^3 =$$
$$= j_\ell + 2\,240,$$

(waarin we rechts volledig ontmerkt hebben), dus $j_\ell = 92\,705 - 2\,240 = 90\,465$. Hierin kan $\mathcal{J}_\ell$ geinterpreteerd worden als het ontbreken der bedoelde eigenschap bij alle medegeborenen van levengeboren jongens. Evenzo vinden we:

$$88\,212\, \mathcal{M}_\ell = 183\,115 \frac{\partial B}{\partial M_\ell} = m_\ell + (754\, J_\ell + 1\,380\, M_\ell + 39\, J_d + 51\, M_d) +$$
$$+ (5\, J_\ell^2 + 2 \times 2 J_\ell M_\ell + 2\, J_\ell M_d + 2 \times 2\, M_\ell M_d + M_d^2 + 3\, J_\ell M_\ell^2 = m_\ell + 2\,224\, K +$$
$$+ 16\, K^2 + 3\, K^3 = m_\ell + 2\,243, \text{ dus } m_\ell = 85\,969,$$
$$2\,490\, \mathcal{J}_d = 183\,115 \frac{\partial B}{\partial J_d} = j_d + (64\, J_\ell + 39\, M_\ell + 25 \times 2\, J_d + 7\, M_d) + 2\, J_\ell J_d =$$
$$= j_d + 162, \text{ dus } j_d = 2\,328;$$
$$2\,106\, \mathcal{M}_d = 183\,115 \frac{\partial B}{\partial M_d} = m_d + (25\, J_\ell + 51\, M_\ell + 7\, J_d + 22 \times 2\, M_d) +$$
$$+ (2 J_\ell M_\ell + 2\, M_\ell^2 + 2\, M_\ell M_d) = m_d + 133, \text{ dus } m_d = 1\,973.$$

De waarden $j_\ell, \ldots, m_d$ stemmen overeen met de l.c. in tabel 8 gegevene, die evenals de rest dezer tabel uit de eerder genoemden is af te leiden.

§ 2. De methode der collectieve kenmerken.

A. Algemene karakterisering

1. We beschouwen een (eigenlijke) collectie van elkaar uitsluitende eventualiteiten [1]) Γ van de uitgebreidheid γ ; haar eln ("elementaire evn") duiden we aan met ε_λ ($\lambda = 1,\ldots,\gamma$). De "methode der collectieve kenmerken" bestaat daarin, dat we de evn ε_λ en het collectieve kenmerk C van de collectie Γ door getallen, en wel door whn [1,2]) vervangen.

Daartoe nemen we een ev $\mathcal{E}$ in gedachten, die telkens kan gebeuren als een el ε_λ gebeurt, en wel zo, dat er in dat geval een bepaalde wh (die van el tot el verschillend kan zijn) e_λ bestaat, dat $\mathcal{E}$ niet [3]) gebeurt. Dit betekent dus, dat we de ene collectie Γ vervangen denken door een aantal N denkbeeldige collecties $\Gamma^{(r)}$ ($1 \leq r \leq N$) van dezelfde uitgebreidheid γ en wel zodanig, dat er onder de overeenkomstige N eln $\varepsilon_\lambda^{(r)}$ (λ vast, r variabel) Ne_λ voorkomen, waarvoor, als ze gebeuren ook $\neg\mathcal{E}$ gebeurt. Onder de $N\gamma$ mogelijke gevallen tezamen (r en λ beide variabel!) komen er dus $\sum_\lambda Ne_\lambda$ voor, die tot $\neg\mathcal{E}$ leiden, d.w.z. het gemiddelde fq van de eln per collectie $\Gamma^{(r)}$ die tot $\neg\mathcal{E}$ leiden is $\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{N}\sum Ne_\lambda = \frac{1}{\gamma}\sum e_\lambda$. Gaan we hier weer van de fq-terminologie tot de wh-terminologie terug, door de fictieve collecties $\Gamma^{(r)}$ weer te vervangen door Γ, dan wordt dit gemiddelde fq de wh dat $\neg\mathcal{E}$ tengevolge van een el van Γ zal optreden. Deze wh is dus het gemiddelde C der aan de ε_λ toegevoegde whn:

$$C = \frac{1}{\gamma}\sum e_\lambda . \tag{1}$$

$C = P(\neg\mathcal{E})$
$e_\lambda = P(\neg\mathcal{E}/\lambda = \lambda)$; λ, $P(\lambda = \lambda) = \frac{1}{\gamma}$

Deze wh C is dus een aan ieder el van Γ (tengevolge van zijn tot Γ behoren) toegevoegd getal (afhankelijk van de gekozen ev $\mathcal{E}$), dat we als representant voor het collectieve kenmerk van Γ kunnen kiezen en daarom ook met de letter C aangeduid hebben. We zullen deze wh metaforisch daar ook als "collectief kenmerk" van Γ aanduiden.

---

[1]) Afkortingen: ev(n) = eventualiteit(en); wh(n) = waarschijnlijkheid (-heden)

[2]) Daar vele toepassingen der methode op beschouwingen omtrent mathematische modellen in plaats van empirische collecties betrekking hebben, zullen we in dit gedeelte de fq-terminologie herhaaldelijk door wh-terminologie vervangen. We herinneren er aan, dat een wh eenvoudig een fq is met betrekking tot een model-collectie waarbij ter mathematische vereenvoudiging dikwijls een limietproces wordt toegepast, in welk geval de wh als limiet van fqn optreedt.

[3]) Hierin kan "niet" even goed door "wel" d.w.z. $\mathcal{E}$ door $\neg\mathcal{E}$ ("non-$\mathcal{E}$"; vgl. pag. 13; Whr pag. 12) vervangen worden. Het gebruik van deze negatie is dus onwezenlijk, maar maakt verschillende formuleringen iets gemakkelijker tot de verbeelding sprekend.

We laten nu de ev $\mathcal{E}$ geheel of gedeeltelijk onbepaald, waardoor de e_λ het karakter van variabelen krijgen. Het "collectieve kenmerk" C wordt dan eveneens een variabele, en wel een functie (i.c. een homogene lineaire fct) van de als onafhankelijk veranderlijken te beschouwen e_λ.

2. We denken ons nu Γ verdeeld in een kategorisch systeem van k subcollecties A_i ($1 \leq i \leq k$) van de uitgebreidheden γ_i (dus $\sum_i^k \gamma_i = \gamma$). Aan elk daarvan kunnen we evenzo een "collectief kenmerk" in de nieuwe zin toevoegen als een wh

$$A_i = \frac{1}{\gamma_i}\sum_i e_\lambda$$

waarin het symbool $\sum_i$ een sommatie aanduidt over al die eln van Γ die in A_i liggen. Stellen we nog $\frac{\gamma_i}{\gamma} = p_i$, dan is dus

$$\gamma C = \sum e_\lambda = \sum_i^k \sum_i e_\lambda = \sum_i^k \gamma_i A_i$$

of

(2) $$C = \sum_i^k p_i A_i \quad ; \quad \sum_i^k p_i = 1.$$

Tussen de "collectieve kenmerken" C en A_i bestaat dus de identiteit (2), onverschillig hoe de ev $\mathcal{E}$ gekozen is (mits zodanig dat voor elk el ε_λ een bepaalde wh e_λ bestaat).

3. De identiteit (2) blijft nu ook bestaan, als we van de collectie Γ overgaan tot het wh-veld $\mathcal{C}$, waarop de oorspronkelijke eln ε_λ niet meer onderscheiden worden, maar de eventualiteiten $\mathcal{A}_i$ bestaande in het gebeuren van één der tot A_i behorende eln [1]) thans als "elementair" beschouwd worden en de whn p_i bezitten; $\mathcal{C}$ is dus de vz bestaande uit de k eln $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$, waaraan de getallen $p_1, \ldots p_k$ toegevoegd zijn, terwijl aan iedere deelvz $\mathcal{V}$ van $\mathcal{C}$ de som $p(\mathcal{V})$ van alle p_i is toegevoegd, behorende bij $\mathcal{A}_i$ die tot deze deelvz behoren. Deze "functie" $p(\mathcal{V})$ is de (absoluut) additieve vz-fct die het wh-veld als zodanig definieert. Doordat het wh-veld eindig is, is deze vz-fct door de getallen p_i ondubbelzinnig bepaald. Deze echter zijn hunnerzijds bepaald als de coefficienten van de ontwikkeling (2) van de variabele C naar de variabelen A_i. Door deze ontwikkeling is de add vz-fct $p(\mathcal{V})$ dus volledig vastgelegd. Doordat nu de e_λ niet meer optreden, kunnen de A_i thans als onafhankelijk veranderlijken beschouwd worden. We kunnen $\mathcal{C}$ interpreteren als een experiment, dat kategorisch tot één van de evn ("uitslagen", "uitkomsten", "resultaten", enz.) $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ leidt. De overgang van de

---

[1]) $\mathcal{A}_i$ is dus de disjunctie der eln van A_i.

van de collectie Γ naar het wh-veld $\mathcal{E}$ houdt in, dat de fijnere onderscheiding (door middel van de e_λ) dan de $\mathcal{A}_i$ toestaan niet meer van belang wordt geacht (b.v. verschillende plaatsen of tijdstippen van het experiment, bepaalde variaties in de apparatuur, e.d.). Deze bepalen de toegestane voorwaarden, waaronder het experiment genomen zal worden. Zijn deze vervuld, dan treden de $\mathcal{A}_i$ met de whn p_i op.

4. Gaan we thans van een eindig tot een oneindig wh-veld $\mathcal{E}$ over, dan moeten we daartoe een rij van eindige wh-velden $\mathcal{E}_\nu$ $(1 \leqq \nu < \infty)$ beschouwen, zodanig, dat elke deelvz $\mathcal{V}$ van het oneindige wh-veld uit een rij deelvzn $\mathcal{V}_\nu$ der approximerende wh-velden $\mathcal{E}_\nu$ ontstaat, en dat de bijbehorende waarden $p\,(\mathcal{V}_\nu)$ der add vz-fcts p_ν een limiet hebben, die we met $p(\mathcal{V})$ aanduiden, en wel zodanig dat deze vz-fct niet slechts additief, maar zelfs absoluut additief is (zie pag. 26; whr pag. 51). Denken we ons nu aan elk el ε_λ van $\mathcal{E}$ een getal A_λ toegevoegd als wh dat een ev $\mathcal{E}$ niet gebeurt, dan vormen deze getallen A_λ een gewone fct (geen vz-fct) op het wh-veld $\mathcal{E}$. Volgens het op bl. 27 e.v. (whr bl. 55 e.v.) behandelde kan deze gewone fct A_λ met behulp van de abs add vz-fct p geïntegreerd worden.

Zonder hierbij op de algemene theorie in te gaan vermelden we slechts de belangrijkste voor de mathematische statistiek belangrijke gevallen.

a. $\mathcal{E}$ is aftelbaar oneindig; i doorloopt de waarden 1,2,3,...
Dan is $\sum_1^\infty p_i = 1$ en

(3) $$C = \sum_1^\infty p_i A_i\,. \leq 1 \quad \text{, daar } A_i \leq 1$$

b. $\mathcal{E}$ is onaftelbaar, maar bestaat uit een ééndimensionaal continuum, waarlangs een parameter gegeven is, die we met x in plaats van i aanduiden. In plaats van A_i komt nu een willekeurige fct A_x of $A(x)$, die niet continu [1]) behoeft te zijn. Voorts veronderstellen we, dat de abs add vz-fct $p(\mathcal{V})$ een fq-dichtheid (hier wh-dichtheid) $f(x)$ bezit, waarbij dan $p(\mathcal{V})$ de integraal van $f(x)$ over de vz $\mathcal{V}$ is Men heeft dan $\int f(x)dx = 1$ en

(4) $$C = \int f(x)A(x)dx, \leq 1 \quad \text{daar } A(x) \leq 1.$$

uitgestrekt over het gehele gebied der variabele x. Zo dit niet de gehele x-as omvat, nemen we $f(x) = 0$ buiten dit gebied; de integraal kan dan van $-\infty$ tot $+\infty$ genomen worden.

c. $\mathcal{E}$ is een meer-dimensionaal continuum, b.v. een r-dimensionale Cartesische ruimte R_r of een deel ervan; $p(\mathcal{V})$ bezit een wh-

---

[1])We onderstellen hier dat de discontinuiteiten slechts van zodanige aard zijn, dat integratie in de zin van Riemann mogelijk blijft. Dit is echter niet nodig.

dichtheid $f(x_1,\ldots,x_r)$, die we buiten het beschouwde deel wederom nul nemen. $A(x_1,\ldots,x_r)$ is een gewone (eventueel discontinue [1])) fct op $\mathscr{C}$. We hebben dan

(5) $$C = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_r f(x_1,\ldots,x_r)A(x_1,\ldots,x_r)$$

waarvoor we bij afkorting echter ook schrijven

(6) $$C = \int dx\, f(x)A(x),$$

onder x de getallen $x_1,\ldots,x_r$ en onder dx het product $dx_1\ldots dx_r$ samenvattende en de integratie over de gehele ruimte R_r uitstrekkende.

5. In (2) was C een (lineaire) fct van de eindig vele variabelen A_i. In (3) is C een fct van (aftelbaar) oneindig vele variabelen A_i geworden, d.w.z. een wet, die aan elke rij van getallen A_i (mits $\geqq 0$ en $\leqq 1$ gekozen, daar zij whn voorstellen) een getal C toevoegt. In (4) en (5) treedt in plaats hiervan een wet, die aan iedere <u>functie</u> $A(x)$ resp. $A(x_1,\ldots,x_r)$ (dus aan een vz van <u>onaftelbaar</u> veel getallen, nl. de functiewaarden)(mits overal $\geqq 0$ en $\leqq 1$) een getal C toevoegt. Zulk een wet, dus een fct van alle door een andere fct aangenomen waarden heet een <u>functionel</u>.

Als we in (2) of (3) willen aanduiden dat C een fct van de A_i is zonder precies de vorm van de fct aan te geven, schrijven we $C = \varphi(A_i)$, of ook $C = C(A_i)$ om de invoering van een nieuwe letter te vermijden. Dit is een afkorting voor $C = C(A_1,\ldots,A_r)$ resp. $C = C(A_1,A_2,A_3,\ldots)$, en wordt soms nog verder afgekort door de index i tussen de haakjes weg te laten. In de gevallen (4) en (5) vervangt men de ronde haken door rechte, om aan te duiden, dat we met een functionel inplaats van met een fct te maken hebben: $C = C[A] = C[A(x)]$

6. <u>Alle functionele afhankelijkheden (1) - (6) gaan in identiteiten over, als alle whn e_λ, A_i, $A(x)$ enz. en C door het getal 1 vervangen worden.</u> Dit blijkt n.l. uit de doorgaans vermelde relaties $\sum p_i = 1$ e.d., maar kan ook als volgt worden ingezien. Neemt men alle $e_\lambda = 1$, dan betekent dit (althans bij een eigenlijke collectie) dat non ξ <u>steeds</u> [2]) optreedt. Dan is dus ook $C = 1$. Is b.v. $A = 1$

---

[1]) zie voetnoot pag. Math. Stat. 39

[2]) Bij oneigenlijke collecties zal de term "steeds" (of ook "zeker") door "bijna zeker" vervangen moeten worden, d.w.z. zeker behoudens evn van wh 0. We gaan hierop echter niet in.

dan moeten alle [1]) e_λ (behorende bij ε_λ in A_i) gelijk 1 zijn, daar zij een gemiddelde = 1 hebben, en geen ervan > 1 kan zijn. In de gevallen (4) – (6) bedoelen wij met de notatie A = 1 of A(x) = 1, dat de fct A identiek (dus voor alle waarden van x) = 1 is.

7. De vz-fct $p(\mathcal{V})$ is volledig bepaald, als de fct C(A) [2]) voor alle toegelaten waarden stelsels A_i [3]) gedefinieerd is. Nemen we namelijk $A_i = 1$ voor alle $\mathcal{A}_i$, die tot $\mathcal{V}$ behoren en = 0 voor alle andere, dan neemt C de waarde $p(\mathcal{V})$ aan. In gevallen (2) en (3) krijgt men b.v. $C = p_{i_0}$ door $A_{i_0} = 1$ en $A_i = 0$ voor alle $i \neq i_0$ te nemen. In gevallen (4) – (6) krijgt men $C = p(\mathcal{V})$, waarbij we voor $\mathcal{V}$ gemakshalve een gebied nemen, door

$$A(x) = \begin{cases} 1 \text{ voor } x \text{ in } \mathcal{V} \\ 0 \text{ voor } x \text{ buiten } \mathcal{V} \end{cases}$$

te kiezen. We duiden deze speciale fct [4]) door $|^{\mathcal{V}}(x)$ [5]) (of $|^{\mathcal{V}}_x$ of $|^{\mathcal{V}}_i$) aan: zij is dus = 1 als haar benedenindex (resp. haar argument) een el is van de door haar bovenindex aangegeven vz, en anders altijd = 0. We hebben dan algemeen

(7) $$p(\mathcal{V}) = C\,(|^{\mathcal{V}})$$

Daar $|^{\mathcal{E}}$ overal = 1 is, vinden we dus terug dat $p(\mathcal{E}) = 1$ is.

Zo is b.v. in geval (4) de verdelingsfct F(x) van de stochastische variabele $\underline{x}$ die f(x) als wh-dichtheid bezit direct uit (4) af te lezen. Men heeft immers

(8) $$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx$$

voor iedere x_0. Men krijgt dit uit (4) door

$$A(x) = \begin{cases} 1 \text{ voor } x \leq x_0 \\ 0 \text{ voor } x > x_0 \end{cases}$$

d.w.z. $A = |^{[x \leq x_0]}$ te nemen. Bij functies van één veranderlijke x is het vaak gemakkelijk, in plaats van de algemene |-fct een speciale in te voeren, t.w.

---

[1]) Resp. "bijna alle". Vgl. de vorige voetnoot.

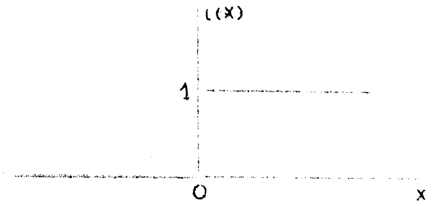
[2]) Resp. het functionel C[A]. We laten deze toevoeging verder doorgaans weg.

[3]) Mits overal ≧ 0 en ≦ 1. We laten deze toevoeging verder doorgaans weg.

[4]) Zij wordt doorgaans de karakteristieke fct van de vz $\mathcal{V}$ genoemd. De term "karakteristieke fct" heeft echter in dit hoofdstuk een tweede betekenis, die met deze niets te maken heeft.

[5]) De | is hier als (hoofdletter) iota uit te spreken.

(9) $$\iota(x) = \begin{cases} 1 \text{ voor } x \geqq 0 \\ 0 \text{ voor } x < 0 \end{cases}$$



Men heeft dan $A(x) = \iota(x_0 - x)$, of

(10) $$F(x_0) = C\left\{\iota(x_0 - x)\right\}.$$

Math. Stat. fig. 7 Whr fig. 6

8. Het belang van de methode van de collectieve kenmerken is echter voor een groot deel daarin gelegen, dat de vz fct $p(\mathcal{V})$ reeds bepaald is, zo $C(A)$ niet voor een zo ruime klasse van waardestelsels A_i (resp. fcts $A(x)$) gegeven is, maar slechts voor een veel engere klasse bekend is. Zo is b.v. in (2) duidelijk, dat C daar een lineaire fct van k onafhankelijke variabelen is. Neemt men echter voor A_i de machten A^i van één enkele variabele A, dan wordt $C(A)$ een fct van slechts één veranderlijke, die dan échter niet meer lineair is, maar een polynomium. Deze substitutie laat zich eenvoudig interpreteren als $\mathcal{A}_i$ als conjunctie van i eventualiteiten $\mathcal{A}_{i1}, \dots, \mathcal{A}_{ii}$ beschouwd kan worden. Men neemt dan een ev $\mathcal{E}_r$ in gedachten, die zich bij elke $\mathcal{A}_{ik}$ kan voordoen, en wel met een wh 1 - A, onafhankelijk daarvan of zij zich bij de andere $\mathcal{A}_{ij}$ wel dan niet voordoet. De ev $\neg\mathcal{E}$ gebeurt dan als $\mathcal{E}_r$ (de "complicatie" van § 1, punt 4) zich geen enkele keer voordoet.

Door deze zelfde substitutie wordt (3) een machtreeks in één variabele A. Nu is echter uit de analyse bekend, dat de coëfficienten van een in een machtreeks ontwikkelbare fct (speciaal een polynomium) ondubbelzinnig bepaald zijn. Zodra men dus de functionele afhankelijkheid tussen C en deze éne variabele A kent, zijn de coëfficienten p_i daardoor bepaald. Het is inderdaad voldoende, als $C(A^i)$ voor $0 \leqq A \leqq 1$ bepaald is. Uit een stelling van de functietheorie volgt, dat dit zelfs reeds het geval is, als $C(A)$ voor alle A uit een willekeurig klein, maar eindig deelinterval van het interval van 0 tot 1 bekend is. Men heeft dan namelijk:

(11) $$p_i = \frac{1}{i!}\,\frac{d^iC}{dA^i}$$

De overeenkomstige keuze $A(x) = A^x$ in (4) is alleen mogelijk als x uitsluitend waarden $\geqq 0$ aanneemt, daar $A(x)$ anders niet tussen 0 en 1 blijft. De wijze, waarop in dit geval $f(x)$ gevonden kan worden, behoort tot de theorie der transformaties van Laplace en blijft hier onbesproken.

9. Het is wel duidelijk, dat talloze andere speciale keuzen van A_i evenzeer kunnen dienen om de p_i vast te leggen. Van de grote vrijheid in de keuze die men op die manier verkrijgt, kan men een nuttig gebruik maken om voor een gegeven vraagstuk een eenvoudige oplossing te geven. Anderzijds houdt dit een ernstig nadeel van de methode in: door de introductie der A_i maakt men C afhankelijk van grootheden die in het algemeen door een opgegeven wh-vraagstuk zèlf niet bepaald zijn. Hun keuze zal dus op doelmatigheidsoverwegingen berusten, maar zal in het algemeen niet "goed" of "fout" zijn. Algemene aanwijzingen, welke keuze op eenvoudige wijze tot het doel zal voeren zijn, voor zover bekend, niet te geven. Het hierin gelegen bezwaar houdt in, dat hierdoor de typische uit de elementaire planimetrie bekende "hulplijn" - moeilijkheden optreden.

10. Een tweede ernstig nadeel van de methode bestaat daarin, dat de interpretatie der A_i, $A(x)$ enz. als whn beperking hunner waarden tot het interval $[0, 1]$ nodig maakt, hetgeen, zoals we aan het slot van punt 8 al zagen, voor stochastische variabelen die negatieve waarden aannemen het specialiseren tot machten ener wh uitsluit, en ook overigens licht tot moeilijkheden kan leiden. Men kan hieraan ontkomen door zich van deze interpretatie los te maken, en algemeen b.v. in geval (3)

$$C(A) = \sum_{1}^{\infty} p_n A_n$$

te definieren voor zodanige (al dan niet tussen 0 en 1 gelegen) waarden der A_n, waarvoor de reeks convergeert. Men kan dan ook negatieve en zelfs complexe waarden der A_n toelaten. De wederzijdse bepaaldheid van $C(A)$ en de p_n wordt dan een formeel rekenschema, zonder wh-theoretische interpretatie. Inderdaad is dit de wijze, waarop de methode (met de specialisatie $A_n = z^n$), dus

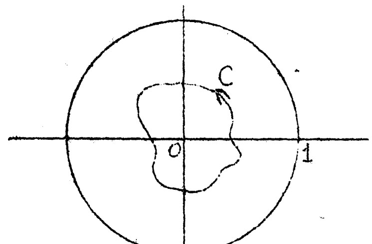
(12) $$C(z^n) = \varphi(z) = \sum p_n z^n$$

door Laplace systematisch ingevoerd (en lang voordien door de Moivre al ad hoc gebruikt) is; $\varphi(z)$ heet dan de voortbrengende fct van de getallen p_n. Behalve met behulp van (11), d.i. hier

$$p_n = \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(z)$$

kan p_n ook met behulp van de integraalstelling van Cauchy door complexe integratie bepaald worden

(13) $$p_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi(z)dz}{z^{n+1}}$$



waarbij $\oint$ integratie in het complexe z-vlak betekent, langs een willekeurig gesloten continue kromme C, die éénmaal in positieve

Math. Stat. fig. 8 Whr fig 7

zin om de oorsprong $z = 0$ loopt en geheel binnen het convergentiegebied der reeks (b.v. $|z| \leq 1$, daar de reeks voor $z = 1$ convergent is; $\sum p_n = 1$) gelegen, maar overigens willekeurig is. Neemt men speciaal de kromme $|z| = 1$, dus $z = e^{it}$, $|t| \leq \pi$, dan is $dz = iz\,dt$ en

$$(14) \qquad p_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi\,(e^{it})e^{-itn}\,dt$$

(de integraal kan ook over $0 \leq t \leq 2\pi$ of algemeen $a \leq t \leq a + 2\pi$ genomen worden). In dit geval zijn de p_n de coëfficiënten der ontwikkeling van $\varphi\,(e^{it}) = \psi\,(t)$ in een <u>reeks</u> van Fourier:

$$(15) \qquad C(e^{itn}) = \varphi\,(e^{it}) = \psi\,(t) = p_n e^{int},$$

waarvan bekend is, dat zij door (14) gegeven zijn. In deze vorm is de theorie wèl voor uitbreiding tot willekeurige stochastische variabelen vatbaar. We komen daarop nog terug.

11. In punt 3 waren we uitgegaan van de whn p_i van een kategorisch systeem van evn $\mathcal{A}_i$, alle onder dezelfde voorwaarde(n) $\mathcal{V}$ en we hebben daaraan de lineaire fct

$$(2) \qquad C = \sum_i p_i A_i$$

toegevoegd, waarin dus

$$(16) \qquad \begin{aligned} p_i &= P\left[\frac{\mathcal{A}_i}{\mathcal{V}}\right] \\ A_i &= P\left[\frac{\neg\,\mathcal{E}}{\mathcal{A}_i}\right] \\ C &= P\left[\frac{\neg\,\mathcal{E}}{\mathcal{V}}\right] \end{aligned}$$

is. We kunnen echter ook een dergelijk proces toepassen, indien we te maken hebben met de whn van éénzelfde ev $\mathcal{A}$ onder verschillende voorwaarden, (gevallen, hypothesen; omstandigheden e.d.) $\mathcal{V}_i$ $(i = 1,\ldots,k)$. Op analoge wijze als vroeger kunnen we bereiken, dat de $\mathcal{V}_i$ een <u>exclusief</u> systeem vormen. Is dan $\mathcal{H}$ de voorwaarde (hypothese enz.) dat minstens (dus precies) één der voorwaarden $\mathcal{V}_i$ vervuld is, dan is het systeem der $\mathcal{V}_i$ kategorsich t.o.v. $\mathcal{H}$. We onderstellen daarom verder dat $\mathcal{H}$ in ieder geval vervuld is. Zijn a_i de bedoelde whn, dan is dus

$$(17) \qquad a_i = P\left[\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{V}_i}\right]$$

Natuurlijk behoeft nu niet $\sum a_i = 1$ te zijn. Terwijl a_i de wh van $\mathcal{A}_i$ is als <u>gegeven is</u> dat het i$^{\underline{e}}$ geval zich voordoet, denken wij nu met behulp van een niet nader bepaalde loterij beslist, wèlk van de gevallen zich zal voordoen. We beschouwen dus een loterij, waarbij elk lot één der voorwaarden $\mathcal{V}_i$ als "kenmerk" draagt en nemen aan, dat de door loting verkregen voorwaarde bij het bepalen der wh van $\mathcal{A}$ vervuld is. Is X_i de wh, dat $\mathcal{V}_i$ bij de loting getrokken wordt, en C de wh, dat $\mathcal{A}$ gebeurt, hoe ook de loting uitvalt, dan is dus

(18)
$$C = P\left[\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{H}}\right]$$
$$X_i = P\left[\frac{\mathcal{V}_i}{\mathcal{H}}\right]$$

dus

(19)
$$\sum^i X_i = 1$$

en

(20)
$$C = \sum^i X_i a_i$$

Hier hebben we dus ook aan de whn a_i een lineaire fct C toegevoegd. Vergelijken we (2) met (20) dan correspondeert:

p_i met X_i
A_i " a_i
$\mathcal{A}_i$ " $\mathcal{V}_i$
$\mathcal{V}$ " $\mathcal{H}$
$\neg\mathcal{E}$ " $\mathcal{A}$

Ondanks het feit, dat de X_i door de betrekking (19) verbonden zijn, zijn de a_i door (20) ondubbelzinnig bepaald.

Substitueert men b.v. $X_k = 1 - \sum_1^{k-1} X_i$ in (20), dan wordt dit

$$C = a_k + \sum_1^{k-1} X_i (a_i - a_k)$$

waarin thans $X_1, \ldots, X_{k-1}$ onafhankelijk zijn, zodat a_k en de $a_i - a_k$, dus ook de a_i bepaald zijn. Men kan overigens ook de relatie (19) geheel vermijden, door in plaats van door (18) de X_i als

(21)
$$X_i = P[\mathcal{V}_i]$$

(zonder de onderstelling $\mathcal{H}$) te definiëren. Dan wordt

(22)
$$\sum^i X_i = P[\mathcal{H}] \leq 1,$$
$$1 - \sum^i X_i = P[\neg\mathcal{H}]$$

Evenals tevoren kan men ook hier afzien van de interpretatie der X_i als whn, en daarmede van de relatie (19). Men voegt dan zuiver formeel aan het stelsel getallen a_i de lineaire fct (20) toe.

Dit heeft het voordeel, dat men grotere vrijheid bezit ten aanzien van de keuze der variabelen X_i, in het bijzonder, dat deze geen reële getallen ≥ 0 en ≤ 1 behoeven te zijn, maar zelfs willekeurig complex gekozen kunnen worden. Daartegenover staat het nadeel, dat het bepalen der collectieve kenmerken C, d.i. hier der fcts $C(X_i)$ vaak minder eenvoudig is.

Tenslotte kan men de beide gevallen combineren. Is $p_{(j)i}$ de wh, dat zich het kenmerk $\mathcal{A}_i$ $(i = 1,\ldots,k)$ voordoet indien de voorwaarde $\mathcal{V}_j$ $(j = 1,\ldots,\ell)$ vervuld is, waarbij de $\mathcal{A}_i$ een kategorisch en de $\mathcal{V}_j$ een exclusief systeem vormen, dan voert men een onbepaald gelaten ev $\mathcal{E}$ in, die zich als $\mathcal{A}_i$ gebeurt met een wh A_i niet voordoet. Voorts voert men onbepaald gelaten whn X_j in dat $\mathcal{V}_j$ vervuld is en stelt de resulterende wh dat $\mathcal{E}$ niet optreedt C. Dan is dus

$$\begin{aligned} C &= P[\neg\mathcal{E}] \\ X_j &= P[\mathcal{V}_j] \\ p_{(j)i} &= P\left[\frac{\mathcal{A}_i}{\mathcal{V}_j}\right] \\ A &= P\left[\frac{\neg\mathcal{E}}{\mathcal{A}_i}\right] \end{aligned} \tag{23}$$

dus

$$C = \sum^j X_j \sum^i p_{(j)i}\, A_i \tag{24}$$

dan is dus C een bilineaire fct van de $k+\ell$ variabelen $A_1,\ldots,A_k;\ X_1,\ldots,X_\ell$.

Ook kan men ook hier de eindige sommen door oneindige of door integralen vervangen. In het meest algemene geval hebben we een vz $\mathfrak{M}$ van wh-velden Γ_μ, waarin μ een willekeurig el van $\mathfrak{M}$ is. Voor iedere μ is er nu een abs add vz fct $p_{(\mu)}^{\Lambda\mu}$ gegeven, waarin $\Lambda_\mu \subset \Gamma_\mu$ is. Beperken we de algemeenheid enigszins door te onderstellen, dat deze vz fcts alle op eenzelfde vz Γ gedefinieerd zijn, dan voert men een willekeurige (t.o.v. $p_{(\mu)}^{\Lambda}$ voor elke μ integreerbare) fct A_λ $(\lambda \in \Gamma)$ in, terwijl men voorts op de vz $\mathfrak{M}$ een abs add vz fct X^M $(M \subset \mathfrak{M})$ aanneemt, zodanig dat de integraal

$$C = C(X,A) = \int_{\mathfrak{M}} X^{d\mu} \int_{\Gamma} p_{(\mu)}^{d\lambda}\, A_\lambda$$

bestaat. Indien alle optredende grootheden whn voorstellen is de convergentie verzekerd mits de fcts meetbaar resp. abs add zijn t.o.v. de gekozen vz-lichamen; men heeft dan

$$0 \leqq A_\lambda \leqq 1\ ;\ 0 \leqq p_{(\mu)}^{\Lambda} \leqq p_{(\mu)}^{\Gamma} = 1;\ 0 \leqq X^M \leqq X^{\mathfrak{M}} = 1\ .$$

Door de speciale substitutie

$$\begin{aligned} X^M &= |_\mu^M = \begin{cases} 1 & \mu \in M \\ 0 & \neg\, \mu \in M, \end{cases} \\ A_\lambda &= |_\lambda^\Lambda = \begin{cases} 1 & \lambda \in \Lambda \\ 0 & \neg\, \lambda \in \Lambda, \end{cases} \end{aligned} \tag{25}$$

krijgt men $p_{(\mu)}^{\Lambda}$ terug:

$$p_{(\mu)}^{\Lambda} = C(|_\mu, |^\Lambda). \tag{26}$$

Bewerkingen met collectieve kenmerken.

1. We gaan uit van een eigenlijke collectie Γ van de uitgebreidheid n, waarop r kategorische systemen $\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_r$ gegeven zijn; de i^e kategorie $\mathcal{K}_i$ moge uit k_i kenmerken $\mathcal{A}_{i1},\dots,\mathcal{A}_{ik_i}$ bestaan. Omtrent de bij verschillende kategorieën behorende kenmerken is niets ondersteld, in het bijzonder niet, dat ze onafhankelijk zijn. Ze kunnen zelfs geheel of gedeeltelijk overeenstemmen. B.v. kan $\mathcal{A}_{13}=\mathcal{A}_{21}$ zijn, dit kenmerk behoort dan tot $\mathcal{K}_1$ zowel als tot $\mathcal{K}_2$. Ieder el van Γ bezit dan r (al dan niet verschillende) kenmerken $\mathcal{A}_{1\lambda_1},\dots,\mathcal{A}_{r\lambda_r}$ ($1 \leq \lambda_i \leq k_i$); komen hieronder gelijke voor, dan worden deze voor elke der kategorieën $\mathcal{K}_i$, waartoe ze behoren, in rekening gebracht. Het fq van de kenmerkencombinatie $\mathcal{A}_{1\lambda_1},\dots,\mathcal{A}_{r\lambda_r}$ wordt door $f_{\lambda_1\dots\lambda_r}$ voorgesteld. Daar alle combinaties $\mathcal{A}_{1\lambda_1},\dots,\mathcal{A}_{r\lambda_r}$ tezamen ook een kategorisch systeem vormen, is de som van alle $f_{\lambda_1\dots\lambda_r}$ gelijk 1:

$$\sum_{\lambda_1=1}^{k_1}\dots\sum_{\lambda_r=1}^{k_r} f_{\lambda_1\dots\lambda_r}=1. \tag{1}$$

Het fq $f_{i\lambda_i}$ van een bepaald kenmerk $\mathcal{A}_{i\lambda_i}$ is som van alle $f_{\lambda_1\dots\lambda_r}$ waarvan de i^e index de aangegeven waarde λ_i heeft:

$$f_{i\lambda_i} = \sum_{\lambda_1\dots\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\dots\lambda_r} f_{\lambda_1\dots\lambda_{i-1}\lambda_i\lambda_{i+1}\dots\lambda_r} \tag{2}$$

We denken nu aan elke kategorie $\mathcal{K}_i$ een stelsel van k_i trommels met loten toegevoegd, en wel zodanig, dat trekkingen uit trommels, die tot verschillende stelsels behoren, onderling onafhankelijk zijn. Zij bij de λ_i^e trommel van het i^e stelsel $A_{i\lambda_i}$ het (constant ondersteldе) fq van een bepaald resultaat (lotenkenmerk) $\neg\mathcal{E}_i$. Zij voorts $\mathcal{E}$ de disjunctie van $\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_r$, dus $\neg\mathcal{E}$ de conjunctie van $\neg\mathcal{E}_1,\dots,\neg\mathcal{E}_r$. We beschouwen alle mogelijke van dergelijke trommelstelsels, d.w.z. we beschouwen de $A_{i\lambda_i}$ als variabelen, die onafhankelijk van elkaar elk het interval van 0 tot 1 doorlopen. We onderstellen, dat steeds àls een el van Γ uit de i^e kategorie het kenmerk $\mathcal{A}_{i\lambda_i}$ blijkt te bezitten, een trekking uit de λ_i^e trommel van het i^e stelsel wordt gedaan. Dan is het fq van $\neg\mathcal{E}$ in de collectie van alle mogelijke trekkingsreeksen, die kunnen voorkomen àls een el de kenmerken-combinatie $\mathcal{A}_{1\lambda_1},\dots,\mathcal{A}_{r\lambda_r}$ bezit, $A_{1\lambda_1}\dots A_{r\lambda_r}$. Het fq C van $\neg\mathcal{E}$ in de collectie [1]) van alle combinaties van een trekking uit Γ met de daarbij behorende trekkingen uit de trommels is dan

$$C = \sum f_{\lambda_1\dots\lambda_r} A_{1\lambda_1}\dots A_{r\lambda_r} \tag{3}$$

waarbij het $\sum$-teken een afkorting is voor $\sum_{\lambda_1=1}^{k_1}\dots\sum_{\lambda_r=1}^{k_r}$.

---

[1]) Als b.v. elke trommel γ loten bevat heeft deze de uitgebreidheid $n\gamma^r$.

Dit fq C als fct van de variabelen $A_{i\lambda_i}$, uitvoeriger geschreven: $C(A_{i\lambda_i})$ of nog uitvoeriger: $C(A_{11},\ldots,A_{1k};\ldots;A_{r1},\ldots,A_{rk})$ is dan per definitie het collectieve kenmerk van Γ met betrekking tot de kategorieën $\mathcal{K}_i$.

Speciaal geval: Zijn alle r kategorieën onderling onafhankelijk, d.w.z. is het fq van $\Lambda_{i\lambda_i}$ gelijk aan $f_{i\lambda_i}$ onafhankelijk van de bij de andere kategorieën optredende fqn, dan is:

(4) $$f_{\lambda_1\ldots\lambda_r} = f_{1\lambda_1}\ldots f_{r\lambda_r} .$$

In dit geval kan (3) eenvoudiger geschreven worden:

(5) $$C = \Big(\sum_1^{k_1}{}_{\lambda_1} f_{1\lambda_1}A_{1\lambda_1}\Big)\ldots\Big(\sum_1^{k_r}{}_{\lambda} f_{r\lambda_r}A_{r\lambda_r}\Big) = \prod_1^r \Big(\sum_1^{k_i}{}_{\lambda_i} f_{i\lambda_i}A_{i\lambda_i}\Big)$$

2. Ontmerking. "Gedeeltelijk ontmerken" hebben we het proces genoemd, waarbij van twee (of meer) oorspronkelijk onderscheiden kenmerken het onderscheid verder buiten beschouwing wordt gelaten. Dit wordt daardoor tot uittdrukking gebracht, dat de bij deze kenmerken behorende trommels door één trommel vervangen worden, waaruit in beide gevallen (mèt teruglegging, daar de fqn constant moeten blijven) getrokken wordt, dus dat voor de bij die kenmerken behorende variabelen éénzelfde variabele gesubstitueerd wordt. Of deze door één der beide letters wordt aangeduid, die oorspronkelijk de beide variabelen aanduidden dan wel door een nieuw symbool, doet niets ter zake. Het gedeeltelijk ontmerken wordt dus in de symboliek der collectieve kenmerken algebraisch weergegeven door het substitueren van eenzelfde variabele voor twee (of meer) verschillende (oorspronkelijk onafhankelijke) veranderlijken.

"Volledig ontmerken" van een kenmerk noemden we het geheel buiten beschouwing laten van dit kenmerk. Dit proces wordt gerepresenteerd door het nemen van een trommel voor dit kenmerk, die uitsluitend $\neg\mathcal{E}_i$-loten bevat, d.w.z. door voor de bijbehorende $A_{i\lambda_i}$ het getal 1 te substitueren.

Vóór het ontmerken was C een multi-lineaire fct van de $\sum_1^r k_i$ variabelen $A_{1\lambda_1},\ldots,A_{r\lambda_r}$, t.w. lineair in de bij elke kategorie behorende $A_{i1},\ldots A_{ik_i}$. Na gedeeltelijk ontmerken kunnen sommige variabelen tot een hogere dan de eerste macht voorkomen, wanneer n.l. het onderscheid tussen twee tot verschillende kategorieën behorende kenmerken buiten beschouwing wordt gelaten. Dan wordt C dus een veelterm in de overblijvende variabelen, die niet meer lineair, maar nog altijd homogeen van de graad r is. Bij volledig ontmerken van sommige kenmerken worden de bijbehorende variabelen door 1 vervangen; de homogeniteit gaat dus in het algemeen verloren. C wordt dus een (niet noodzakelijk homogene) veelterm van de graad r (in het midden latende of de r-de graadstermen al dan niet ontbreken).

Voorbeeld. Uitgaande van

$$C = \sum f_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} A_{1\lambda_1} \ldots A_{r\lambda_r},$$

kiezen we uit elke kategorie één kenmerk, b.v. telkens het eerste A_{i1}. De andere kenmerken van de i^e kategorie worden niet meer onderscheiden, b.v. alle door A_{i2} voorgesteld. $C = C(A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1k_1}; \ldots; A_{r1}, A_{r2}, \ldots, A_{rk_r})$ gaat dan over in

$$C(A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{12}; \ldots; A_{r1}, A_{r2}, \ldots, A_{r2}) =$$
$$= \sum_1^2{}^{\mu_1} \ldots \sum_1^2{}^{\mu_r} g_{\mu_1 \ldots \mu_r} A_{1\mu_1} \ldots A_{r\mu_r}.$$

Hierin is $g_{\mu_1 \ldots \mu_r}$ de som van al die $f_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$, waarvoor 1^e bij iedere i met $\mu_i = 1$ ook $\lambda_i = 1$ is en 2^e bij iedere i met $\mu_i = 2$ $\lambda_i \geqq 2$ is. C is nu lineair in elk paar A_{i1}, A_{i2}. Dus nog steeds multilineair homogeen, daar de ontmerkingen uitsluitend binnen de afzonderlijke kategorieën hebben plaats gevonden. Heffen we voorts ook het verschil tussen $A_{11}, \ldots, A_{r1}$ op door deze alle b.v. door A te vervangen, dan wordt C een polinomium in A met coefficienten die nog multilineair in de A_{i2} zijn, en wel is de coefficient van A^k homogeen van de graad r-k, t.w. een som van veelvouden van producten $A_{i_1 2} \ldots A_{i_{r-k} 2}$ van telkens r-k verschillende uit de r kenmerken A_{i2}. De coefficient van $A^k A_{i_1 2} \ldots A_{i_{r-k} 2}$ (d.w.z. het fq van de bijbehorende kenmerkcombinatie) is gelijk aan die $g_{\mu_1 \ldots \mu_r}$, waarvoor de $i_1{}^e$, $i_2{}^e$, ..., $i_{r-k}{}^e$ index alle = 2 (dus $\mu_{i_1} = \ldots = \mu_{i_{r-k}} = 2$), en alle andere = 1 zijn. Indien oorspronkelijk reeds enkele der kenmerken $\mathcal{A}_{i1}$, b.v. $\mathcal{A}_{11}$ en $\mathcal{A}_{21}$ aan elkaar gelijk waren betekent de ontmerking $A_{11} = A_{21}$, dat dit kenmerk tweemaal (resp. meermalen) in rekening gebracht wordt.

Ontmerken we tenslotte volledig ten aanzien van de A_{i2}, d.w.z. letten we uitsluitend nog op de eerste kenmerken, (zonder deze naar het rangnummer van hun kategorie te onderscheiden), dan hebben we $A_{i2} = 1$ te stellen voor $1 \leqq i \leqq r$. Nu wordt:

$$C = C(A, 1, \ldots, 1; A, 1, \ldots, 1; \ldots; A, 1, \ldots 1) = \sum_0^r{}^k h_k A^k,$$

waarin h_k gelijk is aan de som van al die $g_{\mu_1 \ldots \mu_r}$, waarbij precies k van de r indices = 1 (dus de r-k overige = 2) zijn.

Wordt tenslotte ook A = 1 gesteld, d.w.z. letten we helemaal niet meer op de kenmerken, dan wordt natuurlijk ook C = 1 in ieder stadium de som van alle coëfficienten = 1 was.

Voor het speciale geval van r onafhankelijke kategorieën

$$(5) \qquad C = \prod_1^r \left(\sum_1^{k_i}{}^{\lambda_i} f_{i\lambda_i} A_{i\lambda_i} \right)$$

gaat C door de verschillende ontmerkingen eerst over in

$$(6) \qquad C = \prod_1^r (g_{i1} A_{i1} + g_{i2} A_{i2})$$

met $g_{i1} = f_{i1}$, $g_{i2} = f_{i2} + \ldots + f_{ik_i}$, $g_{\mu_1 \ldots \mu_r} = g_{1\mu_1} \ldots g_{r\mu_r}$.

Vervolgens in

$$C = \prod_1^r (g_{i1} \cdot A + g_{i2} A_{i2})$$

en tenslotte in

(7) $$C = \prod_1^r (g_{i1} A + g_{i2})$$

Daar voor iedere i $g_{i1} + g_{i2} = 1$ is kan hiervoor ook geschreven worden:

$$C = \prod \{1 - g_{i1}(1 - A)\}$$

waaraan direct te zien is, dat voor $A = 1$ ook $C = 1$ wordt.

Hierin is dus b.v.

$$h_0 = g_{12} \ldots g_{r2}$$

$$h_1 = g_{11} g_{22} \ldots g_{r2} + g_{12} g_{21} g_{32} \ldots g_{r2} + \ldots + g_{12} \ldots g_{r-1,2}\, g_{r1} = \sum_i \frac{g_{i1}}{g_{i2}} h_0$$

(Deze laatste korte schrijfwijze geldt alleen als alle $g_{i2} \neq 0$ zijn).

3. Vermenigvuldiging. We hebben thans bereikt, dat een collectie Γ van de uitgebreidheid n, waarop een aantal, eventueel meervoudig getelde kenmerken gegeven is, wordt voorgesteld door een polynomium (al dan niet homogeen, al dan niet multilineair) in bij deze kenmerken behorende variabelen, die elk het interval (0,1) doorlopen. De coëfficienten zijn alle ≥ 0 en hebben 1 tot som. Doordat we ons voorlopig tot eigenlijke collecties beperken kunnen we uitsluitend nog rationale getallen toelaten: de coëfficienten hebben alle n tot noemer; de variabelen een gemeenschappelijke noemer ν. Is r de graad van de veelterm, dan is de collectie Γ gerepresenteerd door een collectie van $n\nu^r$ reeksen van r+1 trekkingen, de eerste uit Γ, de volgende uit r trommels elk met ν loten. We zullen deze variabelen thans doorgenummerd denken en door A_λ $(1 \leq \lambda \leq m)$ voorstellen: $C = C(A_\lambda) = C(A_1, \ldots, A_m)$.

We beschouwen thans twee zulke collecties Γ' en Γ'', waarbij alle kenmerken op Γ' van alle kenmerken op Γ'' onderscheiden zijn, b.v. A'_λ, resp A''_μ (hun aantallen m' en m" kunnen al dan niet verschillend zijn). De grootheden r', r", ν', ν'', enz. zullen eveneens dezelfde betekenis als boven hebben, maar met betrekking tot Γ' resp. Γ''.

We vormen thans de collectie Γ bestaande uit alle (t.w. n = n'n") paren, gevormd uit een el van Γ' en een el van Γ'' als eln. Aan zulk een paar worden als kenmerken op Γ alle kenmerken van elk van zijn beide "componenten" toegevoegd, elk met zijn eigen veelvuldigheid. Het aantal paren met een bepaalde kenmerkcombinatie is dan klaarblijkelijk het product van de aantallen eln van Γ' resp. Γ'' die de bijbehorende "componerende kenmerkcombinaties" bezitten. We hebben dus, als C het collectieve kenmerk van Γ voorstelt:

(8) $$C(A'_\lambda, A''_\mu) = C'(A'_\lambda) C''(A''_\mu).$$

De collectie wordt gerepresenteerd door de collectie van alle $(n\gamma'^{r'}\gamma''^{r''})$ reeksen van 2+r'+r" onafhankelijke trekkingen, t.w. een el uit Γ', één uit Γ'', r' en r" uit de bij het el van Γ' resp. Γ'' behorende trommels.

Op dezelfde wijze kunnen we uit een willekeurig aantal collecties $\Gamma^{(\alpha)}(1 \leq \alpha \leq c)$ de "productcollectie" Γ vormen, waarvoor geldt:

(9) $$C_c(A^{(1)}_{\lambda_1},\ldots,A^{(c)}_{\lambda_c}) = C^{(1)}(A^{(1)}_{\lambda_1})\ldots C^{(c)}(A^{(c)}_{\lambda_c}).$$

In het bijzonder kunnen we voor $\Gamma^{(1)},\ldots,\Gamma^{(c)}$ telkens dezelfde collectie Γ_o nemen, in welk geval Γ_c de collectie is van alle c-tallen trekkingen uit Γ_o, en wel met teruglegging, daar alle combinaties van c al dan niet verschillende eln uit Γ_o moeten voorkomen. We hebben dan b.v. voor c = 2

$$C_2(A'_\lambda,A''_\mu) = C_o(A'_\lambda)C_o(A''_\mu)$$

Elk el van Γ_c is dan voorzien van alle kenmerkcombinaties der componerende eln van Γ_c, en wel onderscheiden naar het rangnummer van de trekking. Doen we dit laatste niet, d.w.z. stellen we $A''_\lambda = A'_\lambda$, b.v. $= A_\lambda$, dan houdt dit een ontmerking in. We kunnen dan n.l. kenmerkcombinaties, die uit dezelfde kenmerken zijn samengesteld, maar verschillend over de beide eln van Γ_o verdeeld, niet meer onderscheiden.

Voorbeeld: Γ_o is een kaartspel, waarop de beide kategorieën $\mathcal{K}_1 = (K_1,\ldots,K_4)$(de 4 kleuren) en $\mathcal{K}_2 = (W_1,\ldots,W_{13})$(de 13 "waarden") gegeven zijn. We hebben dus

$$C_o = \sum_1^4 i \sum_1^{13} j \frac{1}{52} K_i W_j = \frac{\sum K_i}{4}\,\frac{\sum W_j}{13}.$$

De collectie van alle paren van kaarten wordt nu voorgesteld door

$$C_2 = C_o(K'_i,W'_j).C_o(K''_i,W''_j) = \frac{1}{52^2}\sum^i\sum^j\sum^k\sum^\ell K'_iW'_jK''_kW''_\ell$$

en niet door

$$C_o(K_i,W_j) = \frac{1}{52^2}\sum^i\sum^j\sum^k\sum^\ell K_iW_jK_kW_\ell .$$

Bij deze laatste collectie immers is het paar hartenboer-schoppenzeven niet meer van het paar hartenzeven-schoppenboer onderscheiden. Onder een macht van een collectief kenmerk zullen we steeds een collectief kenmerk van de laatstgenoemde soort verstaan, waarbij dus de kenmerken der afzonderlijke trekkingsresultaten niet meer onderscheiden worden.

We merken nog op, dat de accenten resp. bovenindices niet als kenmerken der eln van Γ_c, maar wel als kenmerken der kenmerken dier eln kunnen worden beschouwd ("kenmerkkenmerken").

Speciaal geval. Op elke $\Gamma^{(\alpha)}$ vormen de $A^{(\alpha)}_{\lambda_\alpha}$ een kategorie:

(10) $$C^{(\alpha)} = \sum_1^{k_\alpha}\lambda_\alpha f^{(\alpha)}_{\lambda_\alpha} A^{(\alpha)}_{\lambda_\alpha}$$

Dan is
$$C_c(A^{(1)}_{\lambda_1},\ldots,A^{(c)}_{\lambda_c}) = \prod_{\alpha=1}^{c}\left(\sum_{\lambda_\alpha=1}^{k_\alpha} f^{(\alpha)}_{\lambda_\alpha} A^{(\alpha)}_{\lambda_\alpha}\right) = \sum_{\lambda_1\ldots\lambda_c} f_{\lambda_1\ldots\lambda_c} A^{(1)}_{\lambda_1}\ldots A^{(c)}_{\lambda_c}$$
met
$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_c} = f^{(1)}_{\lambda_1}\ldots f^{(c)}_{\lambda_c},$$
overeenkomende met (5) en (4).

Stemmen alle $\Gamma^{(\alpha)}$ overeen, dan is $k_\alpha = k$, $f^{(\alpha)}_\lambda = f_\lambda$ voor iedere λ en

(11) $$C_c(A^{(1)}_{\lambda_1},\ldots,A^{(c)}_{\lambda_c}) = \prod_{\alpha=1}^{c}\left(\sum_{\lambda=1}^{k} f_\lambda A^{(\alpha)}_\lambda\right)$$

Deze collectie zal men moeten beschouwen, als men trekkingsreeksen uit een kategorie wil bestuderen met inachtneming van de volgorde der trekkingsresultaten.

Slechts als men de volgorde der trekkingsresultaten buiten beschouwing wil laten, dus alleen op de aantallen keren wil letten, dat bepaalde kenmerken uit de kategorie optreden, kan men de $A^{(\alpha)}_\lambda$ door A_λ vervangen:

(12) $$C_c(A_{\lambda_1},\ldots A_{\lambda_c}) = \left(\sum_\lambda f_\lambda A_\lambda\right)^c = C_c(A_\lambda)^c .$$

Dit is de zgn. multinomiale collectie, die we ook als collectie van Bernoulli zullen aanduiden, al heeft Jacob Bernoulli alleen het geval k = 2 beschouwd (de zgn. binomiale collectie). Uitwerking geeft:

(13) $$C_c = C_c^c = \left(\sum_\lambda f_\lambda A_\lambda\right)^c = \sum c!\prod_{\lambda=1}^{k}\frac{(f_\lambda A_\lambda)^{c_\lambda}}{c_\lambda!}$$

d.w.z. de kenmerkcombinatie $A_1^{c_1}\ldots A_k^{c_k}$ komt met het fq

(14) $$P_{c_1\ldots c_k} = \frac{c!}{c_1!\ldots c_k!} f_1^{c_1}\ldots f_k^{c_k}$$

voor, zoals ook gemakkelijk rechtstreeks uit te rekenen is (vg. § 2; bl. 17).

We hebben de ontmerking $A^{(\alpha)}_\lambda = A_\lambda$ die tot (12) leidde op (11) toegepast, die trekkingsreeksen uit eenzelfde collectie weergaf. We kunnen deze echter ook reeds op (10) toepassen, dus op trekkingsreeksen uit verschillende collecties, mits de kategorieën daarop dezèlfde aantallen kenmerken bevatten: $k_1 = \ldots = k_k = k$. (Is b.v. k = 2, dan heeft men dus c alternatieven). Zij houdt dan in, dat men bij een trekkingsreeks alleen de aantallen overeenkomstige (gelijkgenummerde) kenmerken A_λ, maar niet hun volgorde in aanmerking neemt. Deze collectie, t.w.

(15) $$C_c(A_\lambda,\ldots,A_\lambda) = \prod_{\alpha=1}^{c}\left(\sum_{\lambda=1}^{k} f^{(\alpha)}_\lambda A_\lambda\right)$$

is door Poisson ingevoerd [1]). Zij kan vooral worden toegepast als men een aantal experimenten beschouwt met telkens hetzelfde kategorische systeem van mogelijke uitslagen, met van experiment tot experiment variërende whn, die echter telkens van de voorafgaande resultaten onafhankelijk zijn.

---

[1]) We zullen echter met de naam "collectie van Poisson" een andere collectie aanduiden.

4. Lineaire combinatie. We beschouwen evenals in 3 twee collecties Γ', Γ'' van de uitgebreidheden n' en n" met collectieve kenmerken $C' = C'(A'_\lambda)$, $C'' = C''(A''_\mu)$. Indien Γ' en Γ'' geen gemeenschappelijk element bezitten, zullen we onder $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ de collectie verstaan, die bestaat uit alle eln van Γ' en die van Γ'' tezamen, onderworpen aan willekeurige permutaties van àl deze n'+ n" eln. Elk el van Γ' resp. Γ'' blijft daarbij drager van zijn eigen kenmerkcombinatie. Als Γ' en Γ'' wèl gemeenschappelijke eln bezitten, denken we deze collecties vervangen door andere ("copieën" ervan) die er één aan één mee overeenstemmen, en die géén eln gemeen hebben. Ook in andere gevallen is dit doelmatig, b.v. als de eln van Γ' en die van Γ'' ongelijksoortig zijn. Men vervangt dan b.v. elk el door een registerkaart, waarop alle kenmerken zijn aangegeven en behoeft dan slechts deze beide kaartsystemen (die we met Γ' en Γ'' zullen blijven aanduiden) bij elkaar te voegen. Door alle kaarten met betrekking tot de trekkingsoperatie aan elkaar gelijk te maken bewerkstelligt men op eenvoudige wijze de vereiste permutabiliteit.

Daar Γ de uitgebreidheid n = n'+n" heeft, zal een kenmerkcombinatie die op Γ' het fq f heeft, op Γ het fq $\frac{n'}{n}$ f bezitten. We hebben dus

$$(16) \qquad C(A'_\lambda, A''_\mu) = \frac{n'}{n} C'(A'_\lambda) + \frac{n''}{n} C''(A''_\mu).$$

Het is in overeenstemming hiermede, dat we ook wel $\Gamma = nC$, en evenzo $\Gamma' = n'C'$, $\Gamma'' = n''C''$ schrijven.

Analoog heeft men voor c collecties $\Gamma^{(\alpha)}$ twee aan twee zonder gemeenschappelijke eln):

$$(17) \qquad C(A^{(1)}_{\lambda_1}, \ldots, A^{(c)}_{\lambda_c}) = \frac{\sum_\alpha n^{(\alpha)} C^{(\alpha)}(A^{(\alpha)}_{\lambda_\alpha})}{\sum_\alpha n^{(\alpha)}}$$

We merken op, dat (16) en (17) de eerste relaties zijn waarin niet alleen fqn, maar ook de uitgebreidheden $n^{(\alpha)}$ van de $\Gamma^{(\alpha)}$ voorkomen. Dit is echter niet zeer wezenlijk. Laat c getallen p_α gegeven zijn, ≥ 0 met $\sum p_\alpha = 1$. Omdat we ons nog steeds tot eigenlijke collecties beperken nemen we aan, dat ook deze rationaal zijn; N zij een gemeenschappelijke noemer, zodanig dat Np_α door $n^{(\alpha)}$ deelbaar is. We vervangen nu elke collectie $\Gamma^{(\alpha)}$ niet door een copie één-aan-één, maar door $\frac{Np_\alpha}{n^{(\alpha)}}$ copieën op de boven aangegeven wijze. De vereniging Γ heeft de uitgebreidheid $\sum_\alpha Np_\alpha = N$ en het collectieve kenmerk

$$(18) \qquad C = \sum_\alpha \frac{Np_\alpha}{n^{(\alpha)}} \cdot \frac{n^{(\alpha)}}{n} C^{(\alpha)}(A^{(\alpha)}_{\lambda_\alpha}) = \sum_\alpha p_\alpha C^{(\alpha)}(A^{(\alpha)}_{\lambda_\alpha})$$

Hiermede hebben we dus een willekeurige (homogeen) lineaire combinatie der $C^{(\alpha)}$ met coëfficienten ≥ 0 met som 1 verkregen. Doordat bij vervanging van alle $A^{(\alpha)}_\lambda$ door 1 $C^{(\alpha)} = 1$ wordt, is dit ook met C het geval.

Natuurlijk kan op een aldus gevormde collectie evenals in punt 3 achteraf het procédé der ontmerking toegepast worden. Men kan ook (18) op deze wijze uit (17) ontstaan denken door eerst $\sum_\alpha \frac{Np_\alpha}{n^{(\alpha)}}$ verschillende copieën te nemen, en deze achteraf voor iedere α met betrekking tot hun rangnummer te ontmerken. In het bijzonder kan men voor de oorspronkelijke $\Gamma^{(\alpha)}$ telkens dezelfde collectie Γ' nemen. Γ, volgens (17) gevormd, bestaat dus uit c copieën van Γ', waarbij de kenmerken op verschillende copieën nog van elkaar onderscheiden zijn.

$$C = \frac{1}{c} \sum C'(A_\lambda^{(\alpha)})$$

Na ontmerking ten aanzien van deze verschillen wordt eenvoudig $C = C'(A_\lambda)$. De collectie Γ (van de uitgebreidheid n'c) heeft dan hetzelfde collectieve kenmerk als Γ' (van de uitgebreidheid n'). Twee collecties waarop dezelfde (resp. één aan één met elkaar overeenkomende) kenmerken gedefinieerd zijn, en waarbij dezelfde (resp. overeenkomstige) kenmerkcombinaties gelijke fqn bezitten, zullen gelijkvormig genoemd worden. Deze bezitten dus gelijke collectieve kenmerken (ev. met andere variabelen). Zij kunnen steeds beschouwd worden als verenigingen van aantallen gelijkluidende copieën van éénzelfde collectie.

Tenslotte kan men de p_α, in plaats van er gegeven getallen voor te nemen, ook onbepaald laten. Schrijven we er dan X_α voor ($X_\alpha \geqq 0$, $\sum_\alpha X_\alpha = 1$), dan wordt (18):

(19) $$C = \sum_\alpha X_\alpha C^{(\alpha)}(A_{\lambda_\alpha}^{(\alpha)})$$

Deze X_α hebben dus het karakter van de in §2, punt 10 ingevoerde kenmerken van de tweede soort. In de bij (19) behorende collectie Γ is X_α het fq dàt een el tot $\Gamma^{(\alpha)}$ behoort, en de coëfficient, waarmede een product der $A_{\lambda_\alpha}^{(\alpha)}$ in $C^{(\alpha)}$ voorkomt het fq van de bijbehorende kenmerkcombinatie van een el àls dit tot $C^{(\alpha)}$ behoort.

5. Substitutie. Vermenigvuldiging, lineaire combinatie van collectieve kenmerken en ontmerking zijn tezamen voldoende om veeltermen van een willekeurig (eindig) aantal collectieve kenmerken in te voeren, waarbij we ons uiteraard beperken tot veeltermen met niet-negatieve rationale coëfficienten die 1 tot som hebben. Immers een geheel veelvoud van zulk een veelterm is een som van producten van (al dan niet gelijke) factoren; door ontmerking worden op de in punt 3 en 4 aangegeven wijze de in veelvouden of machten optredende variabelen aan elkaar gelijkgesteld.

Hiermede is dus in de eerste plaats bereikt, dat iedere veelterm met de aangegeven eigenschap zelf als een collectief kenmerk kan worden beschouwd. Zij n.l.

(20) $$z = \varphi(x_1, \ldots, x_k) = \sum f_{h_1 \ldots h_k} \prod_1^k x_\lambda^{k_\lambda}$$

zulk een veelterm, waarbij $\sum = \sum_1^{r_1}{}_{h_1} \ldots \sum_1^{r_k}{}_{h_k}$ is. Dan is dus $f_{h_1 \ldots h_k} \geqq 0$,

$\sum f_{h_1 \dots h_k} = \varphi(1,\dots,1) = 1$, $Nf_{h_1 \dots h_k}$ = geheel voor alle $h_1,\dots,h_k$. Dan is

(21) $$C = \varphi(A_1,\dots,A_k)$$

het collectieve kenmerk van een collectie Γ van N eln, waarvan telkens $Nf_{h_1 \dots h_k}$ h_1 kenmerken A_1, h_2 kenmerken A_2, enz. dragen. Wordt aan elk kenmerk A_λ een trommel $\mathcal{T}_\lambda$ met γ loten toegevoegd, waarvan $\gamma - \gamma A_\lambda$ een bepaald kenmerk $\mathcal{E}_0$ dragen, en neemt men voorts een trommel $\mathcal{T}_0$ met γ loten, die geen van allen het kenmerk $\mathcal{E}_c$ dragen, dan is C het fq van het geen enkele maal voorkomen van het kenmerk $\mathcal{E}_c$ in de collectie Γ^*, bestaande uit alle mogelijke reeksen van de volgende r+1 trekkingen ($r = \sum_1^k r_\lambda$), waarvan de laatste r ondersteld worden alle onafhankelijk van elkaar te zijn: 1e een trekking uit Γ, 2e voor elke factor $A_\lambda^{h_\lambda}$ h_λ trekkingen (met teruglegging, wegens de onafhankelijkheid) uit trommel $\mathcal{T}_\lambda$; 3e $\sum_1^k (r_\lambda - h_\lambda) - 1$ trekkingen uit trommel $\mathcal{T}_0$. Deze laatste trekkingen zijn eigenlijk overbodig, daar zij toch in geen geval tot een $\mathcal{E}_0$ leiden; zij dienen echter om de trekkingsreeksen permutabel te maken. De collectie Γ^* heeft dan de uitgebreidheid $N\gamma^r$. Als triviaal geval komen onder de polynomia ook de monomia (met coëfficient 1) voor: $z = \prod_1^k x_\lambda^{h_\lambda}$. Hierbij krijgt men dan een collectief kenmerk dat een product van kenmerken is, t.w. $C = \prod_\lambda A_\lambda^{h_\lambda}$, behorende bij een collectie, welker eln alle dezelfde kenmerkcombinatie bezitten. Twee van zulke collecties die gelijke k en gelijke h_λ bezitten zijn klaarblijkelijk gelijkvormig.

Volgens het aan het begin gezegde kunnen we echter in $\varphi(x_1,\dots,x_k)$ voor de x_λ niet slechts willekeurige onafhankelijke kenmerken A_λ, maar zelfs willekeurige collectieve kenmerken substitueren. Zij daartoe

(22) $$C^{(\lambda)} = C^{(\lambda)}(A_1^{(\lambda)},\dots,A_{j_\lambda}^{(\lambda)})$$

een stelsel van k collectieve kenmerken, voorgesteld door polynomia in hun variabelen. Elk daarvan kan, als boven omschreven, geacht worden bij een collectie Γ_λ^* van $N_\lambda \gamma_\lambda^{r_\lambda}$ trekkingsreeksen te behoren, waarin $C^{(\lambda)}$ het fq is van optreden van een kenmerk $\neg \mathcal{E}_\lambda$, bestaande uit het geen enkele keer optreden van een kenmerk $\mathcal{E}_{\lambda c}$ in de reeks.

Is voorts γ een gemeenschappelijk veelvoud van de k getallen $N_\lambda \gamma_\lambda^{r_\lambda}$ dan kan men k trommels $\mathcal{T}_\lambda^*$ vullen met collecties die met de Γ_λ^* gelijkvormig zijn, zodat op elk el ("lot") daarvan zulk een trekkingsreeks aangegeven is. $C^{(\lambda)}$ is dan het fq van $\neg \mathcal{E}_\lambda$ in $\mathcal{T}_\lambda^*$. Neemt men dan deze trommels $\mathcal{T}_\lambda^*$ in plaats van de oorspronkelijke $\mathcal{T}_\lambda$, dan is het fq van $\neg \mathcal{E}$, t.w. het optreden van geen enkele $\mathcal{E}_\lambda$ in de collectie Γ^* gelijk aan de uitdrukking die verkregen wordt door de $C^{(\lambda)}(A_\mu^{(\lambda)})$ in $C = C(A_\lambda)$ voor de A_λ te substitueren.

Men kan het hier beschreven substitutieproces behoudens in een enkel uitzonderingsgeval als de reciproke bewerking van het vroeger besproken "ontmerken" beschouwen, weshalve we het ook wel met de term "merken" zullen aanduiden. Indien namelijk de rechterleden van (22) géén nuldegraadsdelen bevatten, gaat door de ontmerkingen $A_1^{(\lambda)} = \ldots = A_{j_\lambda}^{(\lambda)} = A_\lambda$ en $A_\lambda = A_\lambda^2 = A_\lambda^3 = \ldots$ (maar niet = 1) (22) in $C^{(\lambda)} = A_\lambda$, dus $C(C^{(\lambda)}(A_\mu^{(\lambda)}))$ weer in $C(A_\lambda)$ over. Klaarblijkelijk kan men in (20) in plaats van de $f_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}$ te geven, deze ook geheel of gedeeltelijk onbepaald laten, in welk geval we ze b.v. door $X_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}$ voorstellen. Deze variabele fqn hebben dan het karakter van de in § 2, punt 10 ingevoerde kenmerken van de tweede soort.

Als voorbeeld van de toepassing van substitutie beschouwen we een serie opeenvolgende experimenten. In tegenstelling met het bij de collectie van Bernoulli optredende geval zullen we echter niet onderstellen, dat deze experimenten onderling onafhankelijk zijn. We laten, integendeel, toe, dat de fqn der verschillende uitslagen die een bepaald experiment kan hebben, afhankelijk zijn van de uitslagen van <u>alle</u> voorafgaande experimenten. Wel zullen we bij elk afzonderlijk experiment onderstellen dat de mogelijke uitslagen als een kategorisch systeem gegeven zijn, en wel dat dit door een <u>lineaire</u> functie van de kenmerken kan worden voorgesteld. We hebben dan een zgn. <u>kettingproces van Markoff</u> (Duits: "Markoffsche Kette")(A.A. Markoff, 1856-1922).

Het eerste experiment worde voorgesteld door

$$C^1 = \sum_1^{k_1}{}_\lambda f_\lambda^1 A_\lambda^1, \tag{23}$$

d.w.z. de mogelijke uitslagen A_λ^1, die een kategorisch systeem vormen, hebben fqn f_λ (natuurlijk met $\sum f_\lambda = 1$). Bij het tweede experiment nemen we aan, dat als bij C^1 A_λ^1 opgetreden is, zich kenmerken $A_{(\lambda)\mu}^{12}$ kunnen voordoen, die zowel in aard als in aantal van λ kunnen afhangen, hetgeen door de eerste index (λ) is aangegeven; $1 \leq \mu \leq k_{2\lambda}$. Zij $f_{(\lambda)\mu}^2$ [1]) het fq van het optreden van het μ^e dezer kenmerken, onder de voorwaarde dat bij C^1 het λ^e is opgetreden. Dan wordt het tweede experiment onder deze voorwaarde voorgesteld door

$$C_{(\lambda)}^2 = \sum_1^{k_{2\lambda}}{}_\mu f_{(\lambda)\mu}^2 A_{(\lambda)\mu}^2 \tag{24}$$

De beide eerste experimenten tezamen worden dan voorgesteld door het collectieve kenmerk $C^{12} = C^{12}(B_{\lambda\mu}^{12})$, dat uit $C^1 = C^1(A_\lambda^1)$ ontstaat door voor de A_λ^1 de met A_λ^1 vermenigvuldigde $C_{(\lambda)}^2 = C_{(\lambda)}^2(A_{(\lambda)\mu}^2)$ te substitueren. We duiden daarbij met $B_{\lambda\mu}^{12}$ de bij de beide eerste experimenten tezamen behorende uitslagenparen aan:

$$B_{\lambda\mu}^{12} = A_\lambda^1 A_{(\lambda)\mu}^2 \quad (B_\lambda^1 = A_\lambda^1). \tag{25}$$

$$C^{12} = C^{12}(B_{\lambda\mu}^{12}) = C^1(C_{(\lambda)}^2(B_{\lambda\mu}^{12})) = \sum_1^{k_1}{}_\lambda f_\lambda^1 \sum_1^{k_{2\lambda}}{}_\mu f_{(\lambda)\mu}^2 B_{\lambda\mu}^{12} = \sum_1^{k_1}{}_\lambda \sum_1^{k_{2\lambda}}{}_\mu g_{\lambda\mu}^{12} B_{\lambda\mu}^{12} \tag{26}$$

---

[1]) We gebruiken in dit gedeelte boven-indices 1,2,...,h,...,m, niet met exponenten te verwarren.

waarin

$$g^{12}_{\lambda\mu} = f^1_\lambda f^2_{(\lambda)\mu}$$

het fq van $B^2_{\lambda\mu}$ voorstelt, t.w. het product van het fq van A^1_λ met het fq van $A^{12}_{(\lambda)\mu}$ onder voorwaarde van A^1_λ.

Op deze wijze kunnen we voortgaan. Zij $g_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}$ het fq van het achtereenvolgens optreden van het $\lambda_1^e, \ldots, \lambda_m^e$ kenmerk bij de eerste m experimenten, en $B^{1 \ldots m}_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}$ het symbool voor deze uitslagenreeks (het fq van het geen enkele maal optreden van een gebeurtenis ξ_0. De serie van de eerste m experimenten wordt dan voorgesteld door

$$C^{1 \ldots m} = C^{1 \ldots m}(B^{1 \ldots m}_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}) = \sum g_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} B^{1 \ldots m}_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} \tag{28}$$

waarin gesommeerd wordt over alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ met $1 \leqq \lambda_1 \leqq k_1$, $1 \leqq \lambda_2 \leqq k_{2(\lambda_1)}$, ..., $1 \leqq \lambda \leqq k_{m(\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1})}$.

Zij $A^{m+1}_{(\lambda_1 \ldots \lambda_m)\lambda_{m+1}}$ $(1 \leqq \lambda_{m+1} \leqq k_{m+1(\lambda_1 \ldots \lambda_m)})$ het symbool voor het optreden van het λ_{m+1}^e kenmerk bij het $(m+1)^e$ experiment, indien bij de eerste m experementen successivelijk $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ opgetreden zijn en $f^{m+1}_{(\lambda_1 \ldots \lambda_m)\lambda_{m+1}}$ het fq daarvan onder dezelfde voorwaarde. Dan is het collectieve kenmerk van het $(m+1)^e$ experiment onder deze voorwaarde:

$$C^{m+1}_{(\lambda_1 \ldots \lambda_m)} = C^{m+1}_{(\lambda_1 \ldots \lambda_m)}(A^{m+1}_{(\lambda_1 \ldots \lambda_m)\lambda_{m+1}}) = \sum_{\lambda_{m+1}} f^{m+1}_{(\lambda_1 \ldots \lambda_m)\lambda_{m+1}} A^{m+1}_{(\lambda_1 \ldots \lambda_m)\lambda_{m+1}} \tag{29}$$

De reeks van m+1 experimenten wordt dan voorgesteld door het collectieve kenmerk

$$C^{1 \ldots m+1} = C^{1 \ldots m}(C^{m+1}_{(\lambda_1 \ldots \lambda_m)}), \tag{30}$$

verkregen door (29) met $B^{1 \ldots m}_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}$ vermenigvuldigd voor $B^{1 \ldots m}_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}$ in (28) te substituëren. Daarbij treden fqn $g_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m+1}}$ op, t.w.

$$g_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m+1}} = g_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} f^{m+1}_{(\lambda_1 \ldots \lambda_m)\lambda_{m+1}} \tag{31}$$

Uit deze recurrente betrekking volgt, dat de $g_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}$ voor iedere m als volgt uit de voorwaardelijke fqn worden verkregen:

$$g_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} = f^1_{\lambda_1} f^2_{(\lambda_1)\lambda_2} f^3_{(\lambda_1\lambda_2)\lambda_3} \ldots f^m_{(\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1})\lambda_m} \tag{32}$$

Dit kan trouwens zonder collectieve kenmerken in te voeren direct uit de op pag 15 (whr pag 10) besproken eigenschap der associativiteit worden afgeleid. Voor de kenmerken van series van m+1 experimenten vinden we evenzo

$$B^{1 \ldots m+1}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m+1}} = B^{1 \ldots m}_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} A^{m+1}_{(\lambda_1 \ldots \lambda_m)\lambda_{m+1}} = A^1_{\lambda_1} A^2_{(\lambda_1)\lambda_2} \ldots A^{m+1}_{(\lambda_1 \ldots \lambda_m)\lambda_{m+1}} \tag{33}$$

Indien aantal $k_{m(\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1})} = k_m$ en aard der bij het m^e experiment optredende kenmerken niet afhangen van de voorafgaande uitslagen, en indien op de collectieve kenmerken $C^{1 \ldots m}$ geen vermenigvuldigingen of machtsverheffingen worden toegepast, kan men de $A^m_{(\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1})\lambda_m}$ tot

(34) $$A^m_{(\lambda_1\cdots\lambda_{m-1})\lambda_m} = A^m_{\lambda_m}$$

specialiseren (waarom alleen in deze gevallen?) Daardoor wordt

(35) $$B^{1\cdots m}_{\lambda_1\cdots\lambda_m} = A^1_{\lambda_1}\ldots A^m_{\lambda_m}$$

(28) wordt dan:

(36) $$C^{1\cdots m} = \sum g_{\lambda_1\cdots\lambda_m} A^1_{\lambda_1}\ldots A^m_{\lambda_m} = \sum f^1_{\lambda_1} f^2_{(\lambda_1)\lambda_2}\ldots f^m_{(\lambda_1\cdots\lambda_{m-1})\lambda_m} A^1_{\lambda_1}\ldots A^m_{\lambda_m}$$

De fqn $f^m_{(\lambda_1\cdots\lambda_{m-1})\lambda_m}$ mogen daarbij nog wèl van $\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}$ afhangen.

Is dit laatste ook niet het geval, dan is de uitslag van C^m onafhankelijk van de voorafgaande. We hebben dan

37) $$f^m_{(\lambda_1\cdots\lambda_{m-1})\lambda_m} = f^m_{\lambda_m}$$

dus

(38) $$C_{(\lambda_1\cdots\lambda_{m-1})} = C^m = \sum_{\lambda=1}^{k_m} f^m_\lambda A^m_\lambda$$

Geldt (37), dus (38) tevens voor iedere $h \leq m$, dan is

(39) $$C^{1\cdots m} = \sum f^1_{\lambda_1}\ldots f^m_{\lambda_m} A^1_{\lambda_1}\ldots A^m_{\lambda_m} = C^1\ldots C^m = \prod_{h=1}^{m}\left(\sum_{\lambda=1}^{k_h} f^h_\lambda A^h_\lambda\right).$$

Is $k_1=\ldots=k_m=k$, dan kan men hierin de A^h_λ tot A_λ, ontmerken, d.w.z. rangnummers der experimenten buiten beschouwing laten, die bepaalde resultaten voortgebracht hebben, dus alleen op het aantal keren letten, dat een bepaald resultaat is voorgekomen. Dit houdt dus in, dat elk el van de collectie $\Gamma^{1\cdots m}$, dat bij een bepaalde uitslagenreeks der eventuele experimenten behoort, zèlf weer als een collectie beschouwd wordt, daar haar eln, de afzonderlijke uitslagen der reeks, aan willekeurige permutaties onderworpen worden. In het onderhavige geval gaat (39) dan over in Poisson's in punt 3 besproken generalisatie van de collectie van Bernoulli, die in het nog specialere geval $f^1_\lambda = \ldots = f^m_\lambda = f_\lambda$ ontstaat.

Het nog zeer algemene geval (36) is iets specialer dan (21), (20). Schrijft men daarin $g_{\lambda_1\cdots\lambda_m}$ voor $f_{\lambda_1\cdots\lambda_k}$ en neemt men de rangnummers der experimenten in aanmerking, dan krijgt men het tweede lid van (36). De $g_{\lambda_1\cdots\lambda_h}$ voor $h<m$ krijgt men door de kenmerken der $(h+1)^e, \ldots, m^e$ experimenten volledig te ontmerken, dus uit

(40) $$g_{\lambda_1\cdots\lambda_h} = \sum_{\lambda_{h+1}\cdots\lambda_m} g_{\lambda_1\cdots\lambda_h\lambda_{h+1}\cdots\lambda_m}$$

Daaruit volgt nog niet, dat dit ook in de vorm van het derde lid geschreven kan worden. Daartoe zou men voor iedere $h \leq m$ de $f_{(\lambda_1\cdots\lambda_{h-1})\lambda_h}$ uit betrekkingen van de gedaante (31) moeten oplossen, dus

(41) $$f^1_{\lambda_1} = g_{\lambda_1},\quad f^2_{(\lambda_1)\lambda_2} = \frac{g_{\lambda_1\lambda_2}}{g_{\lambda_1}},\ldots,\quad f_{(\lambda_1\cdots\lambda_{h-1})\lambda_h} = \frac{g_{\lambda_1\cdots\lambda_{h-1}\lambda_h}}{g_{\lambda_1\cdots\lambda_{h-1}}}$$

moeten stellen. Daartoe is echter nodig, dat de noemers alle $\neq 0$ zijn, hetgeen bij (20), (21) niet het geval behoeft te zijn. (Zijn echter alle

$g_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} \neq 0$, dan is deze voorwaarde wèl vervuld daar dit dan ook met de $g_{\lambda_1 \ldots \lambda_h}$, $h \leq m$ het geval is). Tengevolge van (40), (41), tezamen met $g_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} > 0$ en $\sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} g_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} = 1$ is dan algemeen ook $0 < f_{(\lambda \ldots \lambda_{h-1})\lambda_h} \leqq 1$, hetgeen eveneens nodig is.

Indien dus alle $g_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} > 0$ zijn (en $\sum g_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} = 1$ is), kan $\sum g_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} A^1_{\lambda_1} \ldots A^m_{\lambda_m}$ steeds beschouwd worden, als op de beschreven manier uit een reeks van m opeenvolgende, in het algemeen onderling afhankelijke experimenten te zijn verkregen.

Een ander speciaal geval van (36), algemener dan het geval van onafhankelijkheid (37), bestaat daarin, dat de fqn der verschillende uitslagen van elk experiment afhankelijk zijn van de uitslag van het onmiddellijk voorafgaande, maar niet van de vroegere experimenten. In plaats van (37) heeft men dan

$$f^h_{(\lambda_1 \ldots \lambda_{h-1})\lambda_h} = f^h_{(\lambda_{h-1})\lambda_h}, \tag{42}$$

of nog specialer, als $k_h = k$, is $= f_{(\lambda_{h-1})\lambda_h}$, onafhankelijk van h. Men heeft dan een zgn. <u>enkelvoudig</u> kettingproces van Markoff, waarbij (in de wh-terminologie) een <u>constante</u> "<u>overgangswh</u>" van elke "toestand" $A^{h-1}_{\lambda_{h-1}}$ (na het (h-1)$^{\underline{e}}$ experiment) naar elke andere $A^h_{\lambda_h}$ bestaat (λ_{h-1} en λ_h doorlopen hier immers <u>dezelfde</u> reeks waarden $1,\ldots,k$). De theorie van deze processen is vooral door B. HOSTINSKY te Praag bestudeerd.

6. <u>Limietovergang</u>. We hebben ons in dit gedeelte tot dusverre nog tot <u>eigenlijke</u> collecties beperkt. Op de op bl. 23 e.v. (punt D) besproken wijze kunnen we daarbij reeds van de eigenlijke collecties overgaan tot de bijbehorende fq-velden, die alle voorkomende kenmerkcombinaties tot eln hebben, waaraan hun fqn zijn toegevoegd. Daardoor is dan op het eindige fq-veld een (abs) additieve vz-fct bepaald.

Wat de analoge limietovergang van de collectieve kenmerken betreft valt het volgende op te merken:

Vooreerst kan men een rij colleciteve kenmerken $C_n(A_\lambda)$ beschouwen die alle polynomia in <u>dezelfde</u> variabelen A_λ, alle van <u>dezelfde</u> graad zijn. Als $\lim_{n\to\infty} C_n(A_\lambda) = C(A_\lambda)$ bestaat voor alle waarden stelsels der $A_\lambda \geq 0$ en ≤ 1, dan is $C(A_\lambda)$ eveneens een polynomium van dezelfde graad. De coëfficienten kunnen nu echter ook <u>irrationale</u> getallen zijn. Deze zijn dan echter eveneens ≥ 0 en ≤ 1 en hebben 1 tot som, daar $C(1) = \lim_{n\to\infty} C_n(1) = 1$ is.

Indien echter de $C_n(A_\lambda)$ niet alle dezelfde graad hebben, t.w. indien hun graden onbeperkt toenemen (daar men anders door aanvulling met termen met coëfficienten 0 kan bereiken dat zij wèl alle dezelfde graad hebben) <u>kan</u> $\lim_{n\to\infty} C_n(A_\lambda)$ een <u>machtreeks</u> in de A_λ zijn. In het algemeen behoeft dit echter geenszins het geval te zijn, zoals reeds het eenvoudige voorbeeld $C_n(A) = A$ leert, waarbij

$\lim_{n\to\infty} C_n(A) = \begin{cases} 0 & 0 \leq A < 1 \\ 1 & A = 1 \end{cases}$ is. In ieder geval echter zien we, dat machtreekseen in een of meer variabelen A_λ met coëfficienten ≥ 0 en som der coëfficienten = 1 als ("oneigenlijke") collectieve kenmerken kunnen optreden. Dit kan echter met zeer veel algemenere fcts eveneens het geval zijn.

Op de algemene theorie hiervan, die grotendeels nog onontwikkeld is, kunnen we hier niet ingaan.

7. <u>Trekkingen</u>. We gaan uit van een collectie Γ_1 van de uitgebreidheid n, waarop een kategorisch systeem van kenmerken A_λ $(1 \leq \lambda \leq r)$ gegeven is. Zij n_λ de frequentie (niet het fq) van A_λ in deze collectie, zodat $\sum n_\lambda = n$ is. Het collectieve kenmerk dezer collectie is dan

$$C_1 = \frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^{r} n_\lambda A_\lambda \tag{27}$$

We beschouwen thans een collectie van zulke collecties Γ_1, waarvan we voorlopig aannemen, dat ze alle precies dezelfde samenstelling (dus dezelfde getallen n_λ) hebben. Elke Γ_1 is dan een el van Γ_0; de eln van Γ_1 daarentegen worden nu <u>kenmerken</u> van dit el Γ_1. Tengevolge van de permutabiliteit der eln van Γ_1 heeft het geen zin, voor deze kenmerken een bepaalde volgorde (of andere relaties) vast te leggen, zodat, wanneer we uitsluitend het kategorisch systeem der A_λ blijven beschouwen, we deze n kenmerken tot de A_λ kunnen ontmerken. Elk el van Γ_0 (d.w.z. elke collectie Γ_1) wordt dan voorgesteld door het product $A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots A_r^{n_r}$, en daar alle eln van Γ_1 deze zelfde samenstelling hebben, is dit ook het collectieve kenmerk van Γ_0:

$$C_0 = \prod_{\lambda=1}^{r} A_\lambda^{n_\lambda} \tag{28}$$

We merken op, dat C_0 en nC_1 (dus Γ_1, niet C_1 zelf) <u>multiplicatief</u> resp. <u>additief</u> uit dezelfde kenmerken zijn samengesteld.

We beschouwen nu een reeks van k achtereenvolgende trekkingen van een el uit Γ_1, waarbij na elke trekking, afhankelijk van het trekkingsresultaat, de collectie bepaalde wijzigingen kan ondergaan. We onderstellen echter, dat de trekkingsmethode invarient is bij willekeurige permutaties van de eln voor iedere trekking. Het mathematisch formalisme dient niet om een empirisch verkregen trekkingsreeks, maar om de trekkings<u>methode</u>, t.w. de collectie bestaande uit alle op deze wijze verkrijgbare trekkingsreeksen te beschrijven.

Het fq van de trekkingsreeksen, waarbij bij de eerste trekking A_λ getrokken wordt is tengevolge van de permutabiliteitseis $\frac{n_\lambda}{n}$. Tengevolge van de trekking wordt n_λ met 1 verminderd; alle n_μ met $\mu \neq \lambda$ blijven onveranderd. Als dus A_λ getrokken wordt, blijft in de collectie

$$\left(\prod_{\mu\neq\lambda} A_\mu^{n_\mu}\right) . A_\lambda^{n_\lambda - 1} = A_\lambda^{-1} C_0 \quad \text{achter.}$$

De subcollectie van alle trekkingen waarbij A_λ verschijnt wordt dus voorgesteld door $\frac{n_\lambda}{n} A_\lambda^{-1} C_o = \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial A_\lambda} C_o$. We hebben echter nog geen rekening gehouden 1e met het getrokken el zelf, 2e met de aan te brengen wijzigingen in de collectie. Het trekken van een el betekent eigenlijk dit een nieuw kenmerk te geven (met behoud van het oude), t.w. "bij de eerste trekking getrokken te zijn". We geven dit weer door het met A'_λ in plaats van A_λ aan te duiden. De wijziging in de samenstelling kan worden weergegeven door een operator Ω'_λ, werkende op de overblijvende collectie $\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial A_\lambda} C_o$. De subcollectie, bestaande uit alle trekkingsreeksen die bij de eerste trekking A_λ opleveren wordt dus na aanbrengen van het kenmerk "getrokken te zijn" en na de bijbehorende wijziging in de samenstelling aangegeven door $\frac{1}{n} A'_\lambda \Omega'_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda} C_o$. De gehele na de eerste trekking verkregen collectie is dus

$$C_1 = n^{-1} \sum\nolimits^{\lambda} B'_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda} C_o \qquad B_\lambda = A'_\lambda \Omega'_\lambda . \tag{27}$$

De gehele eerste trekking wordt dus voorgesteld door het toepassen op C_o van een operator

$$\Omega' = n^{-1} \sum\nolimits^{\lambda} A'_\lambda \Omega'_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda} \tag{28}$$

De aard van de operator Ω'_λ wordt bepaald door de aard der wijziging. Wordt de overblijvende collectie onveranderd gelaten, dan neemt men $\Omega'_\lambda = 1$, dus $B_\lambda = A'_\lambda$ (gewone trekkingen zonder teruglegging).

$\Omega' = n^{-1} \sum\nolimits^{\lambda} A'_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda}$. Wordt de getrokken bal teruggelegd, dan moet de ontbrekende factor A_λ weer worden toegevoegd, dus is dan

$\Omega'_\lambda = A_\lambda$, $B_\lambda = A'_\lambda A_\lambda$ en $\Omega_1 = n^{-1} \sum\nolimits^{\lambda} A'_\lambda A_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda}$.

Wordt de getrokken bal teruggelegd en worden nog d_λ ballen met <u>hetzelfde</u> kenmerk toegevoegd, dan moet $n_\lambda - 1$ in $n_\lambda + d$ overgaan, terwijl n_μ voor $\mu \neq \lambda$ onveranderd moet blijven. Dan is dus

$\Omega'_\lambda = A_\lambda^{d_\lambda + 1}$, $B_\lambda = A'_\lambda A_\lambda^{d_\lambda + 1}$ en

$$\Omega_1 = n^{-1} \sum\nolimits^{\lambda} A'_\lambda A_\lambda^{d_\lambda + 1} \cdot \frac{\partial}{\partial A_\lambda} = \sum\nolimits^{\lambda} \frac{-d_\lambda}{n} A'_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda^{-d_\lambda}} \tag{29}$$

Men kan echter ook ingewikkelder samenstellingswijzigingen beschouwen, waarin de operatoren Ω'_λ niet eenvoudig door vermenigvuldigingen kunnen worden voorgesteld.

Onderstellen we nu vooreerst, dat het aantal eln van de gewijzigde collectie n_1 bedraagt en onafhankelijk is van het kenmerk van het getrokken el (kort gezegd: van het getrokken kenmerk). In de beide eerstgenoemde voorbeelden is dit het geval met $n_1 = n-1$ resp. $n_1 = n$; in het derde voorbeeld alleen als $d_1 = \ldots = d_k$ $(=d)$ is, en wel met $n_1 = n+d$. In dat geval is C_1 een homogene veelterm van de graad n_1 in de A_λ (en bovendien van de graad 1 in de A'_λ), b.v. in het derde voorbeeld bestaande uit termen $\frac{n_\lambda}{n} A'_\lambda A_\lambda^{d_\lambda+n_\lambda} \prod_{\mu\neq\lambda} A_\mu^{n_\mu}$. Bij de tweede trekking kan men nu voor elk van deze termen op dezelfde wijze tewerk gaan, hetgeen dus neerkomt op het toepassen van operatoren Ω''_λ. In de onderstelling dat hiervoor lineaire operatoren genomen kunnen worden, kan men deze op de gehele collectie C_1 toepassen; men krijgt dan

$$C_2 = (n_1^{-1} \sum^\mu A''_\mu \, \Omega''_\mu \frac{\partial}{\partial A_\mu})(n^{-1} \sum^\lambda A'_\lambda \, \Omega'_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda})C_0 = \Omega''\Omega' C_0 = \Omega_2 C_0$$

Op deze wijze voortgaande krijgt men na k trekkingen:

(30) $$C_k = \Omega^{(k)}\Omega^{(k-1)}\ldots\Omega''\Omega' C_0 = \Omega_k C_0 \,.$$

(31) $$\Omega^{(h)} = n_{h-1}^{-1} \sum^\lambda A_\lambda^{(h)} \Omega_\lambda^{(h)} \frac{\partial}{\partial A_\lambda} \qquad (1 \leq h \leq k)\ (n_0 = n)$$

(32) $$\Omega_k = \Omega^{(k)}\ldots\Omega' \,.$$

B.v. heeft men voor trekkingen zonder teruglegging (eigenlijke steekproeven):

$$\Omega_k = \frac{1}{n^{!k}} \prod_1^k \Big(\sum^\lambda A_\lambda^{(h)} \frac{\partial}{\partial A_\lambda}\Big)$$

en, als men alleen op de aantallen der getrokken eln, niet op hun volgorde let, d.w.z. $A_\lambda^{(h)}$ tot A'_λ ontmerkt: $A_\lambda^{(k)} = \ldots = A''_\lambda = A'_\lambda$:

(33) $$\Omega_k = \frac{1}{n^{!k}} \Big(\sum^\lambda A'_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda}\Big)$$

Voor trekkingen mèt teruglegging krijgt men op dezelfde wijze bij ontmerking $A_\lambda^{(h)} = A'_\lambda$:

(34) $$\Omega_k = \frac{1}{n^k} \Big(\sum A'_\lambda A_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda}\Big)^k$$

Bij toevoeging van telkens d+1 eln met hetzelfde kenmerk als het getrokkene krijgt men evenzo:

(35) $$\Omega_k = \frac{1}{n(n+d)(n+2d)\ldots(n+kd-d)} \Big(\sum A'_\lambda A_\lambda^{d+1} \frac{\partial}{\partial A_\lambda}\Big)^k$$

waarvoor men ook kan schrijven:

(36) $$\Omega_k = \frac{1}{(-\frac{n}{d})^{!k}} \Big(\sum A'_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda^{-d}}\Big)^k$$

(Collectie van Eggenberger-Pólya [1]))

Uitwerking hiervan als een multinomium (zie pag. 52; Whr 141) geeft:

(37) $$\Omega_k = \frac{1}{(-\frac{n}{d})^{!k}} \sum \frac{k!}{k_1!\ldots k_r!} A_1'^{k_1} \ldots A_r'^{k_r} \Big(\frac{\partial}{\partial A_1^{-d}}\Big)^{k_1} \ldots \Big(\frac{\partial}{\partial A_r^{-d}}\Big)^{k_r} =$$

$$= \frac{k!}{(-\frac{n}{d})^{!k}} \sum_{\Sigma k_\lambda = k}^{k_1 \ldots k_r} \prod_1^r \Big\{ \frac{1}{k_\lambda!} A_\lambda'^{k_\lambda} \Big(\frac{\partial}{\partial A_\lambda^{-d}}\Big)^{k_\lambda} \Big\}$$

Is C_0 door (28) gegeven, dan werkt elke factor $\Big(\frac{\partial}{\partial A_\lambda^{-d}}\Big)^{k_\lambda}$ op de factor $A_\lambda^{n_\lambda} = (A_\lambda^{-d})^{-\frac{n_\lambda}{d}}$ alleen, en geeft dus, daar $\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k x^m = m^{!k} x^{m-k}$ is,

[1]) zie onderaan volgende bladzijde.

$(-\frac{n_\lambda}{d})^{!k} (A_\lambda^{-d})^{-\frac{n_\lambda}{d}-k_\lambda} = (-\frac{n_\lambda}{d})^{!k} A_\lambda^{n_\lambda+k_\lambda d}$, zodat men krijgt:

$$(38) \qquad C_k = \frac{k!}{(-\frac{n}{d})^{!k}} \sum \prod_1^r \left\{ \frac{(-\frac{n_\lambda}{d})^{!k_\lambda}}{k_\lambda !} A_\lambda'^{\,k} \; A_\lambda^{n_\lambda+k_\lambda d} \right\}$$

Het fq van trekkingen, waarbij (onafhankelijk van de volgorde) k_1 maal $A_1, \ldots, k_r$ maal A_r getrokken is, is de coëfficient van $\prod_\lambda (A_\lambda'^{\,k_\lambda} A_\lambda^{n_\lambda+k_\lambda d})$, dus

$$(39) \qquad p_{k_1 \ldots\ldots k_r} = \frac{\prod_\lambda \binom{\frac{n_\lambda}{d}}{k_\lambda}}{\binom{-\frac{n}{d}}{k}} =$$

$$= \frac{k!}{k_1! \ldots k_r!} \; \frac{n_1(n_1+d)\ldots(n_1+k_1d-d)\ldots n_r(n_r+d)\ldots(n_r+k_r-d)}{n(n+d)\ldots(n+kd-d)}$$

($k = \sum k_\lambda$), zoals ook (veel gemakkelijker!) door rechtstreeks uitrekenen gevonden kan worden.

Voor $d = -1$ krijgt men de trekkingen zonder teruglegging (eigenlijke steekproeven) terug, en voor $d = 0$ de trekkingen met teruglegging (Bernoulliaanse steekproeven met $p_\lambda = \frac{n_\lambda}{n}$) (Vgl. Hfdst. 1, § 2, punt 3, bl. 15 e.v.)

De operatoren Ω_k, gegeven door (31) - (37) kunnen ook worden toegepast, als C_0 niet door (28), maar als een homogene veelterm van de graad n gegeven is.

De hier beschreven methode om een trekkingsreeks door een product van operatoren voor te stellen, heeft nog het bezwaar, aan de beperking tot homogene veeltermen gebonden te zijn. Dit vereist 1e als C_0 als veelterm in de A_λ gegeven is, d.w.z. een collectie van collecties voorstelt, dat deze alle hetzelfde aantal eln bevatten, 2e dat de samenstellingswijzigingen telkens tot hetzelfde el-aantal leiden, ongeacht de voorafgaande trekkingsresultaten. Door een geringe wijziging kunnen we deze beperking opheffen. Daartoe merken we op, dat de methode in hoofdzaak berust op de kunstgreep, de vermenigvuldiging met $n_\lambda A_\lambda^{-1}$ door de differentiatie $\frac{\partial}{\partial A_\lambda}$ voor te stellen. Zo zullen we nu de deling door n kunnen voorstellen door een integratie, daar $\frac{1}{n} = \int_0^1 X^{n-1} dX$ is. De factor X^{n-1} kunnen we krijgen door na de differentiatie $A_1, \ldots, A_r$ door $A_1X, \ldots, A_rX$ te vervangen. Voeren we het symbool $S_{x_1 \ldots\ldots x_r}^{y_1 \ldots y_r}$

[1]) F. Eggenberger en G. Polya, Über die Statistik verketteter Vorgänge, ZS.f. angewandte Math. und Mechanik (ZAMM) 3, 279 - 289, 1923.

in voor de bewerking: vervang in de achter het symbool staande uitdrukking $x_1,\dots,x_r$ overal waar deze voorkomt resp. door $y_1,\dots,y_r$, zodat

$$(40)\qquad S_{x_1}^{y_1}\cdots{}_{x_r}^{y_r}\, f(x_1,\dots,x_r) = f(y_1,\dots,y_r)$$

is, dan wordt, als $n = \sum n_\mu$ is

$$\frac{n_\lambda}{n} A_\lambda^{-1}\cdot \prod_\mu A_\mu^{n_\mu} = \int_0^1 dX\, S_{A_1\cdots A_r}^{A_1X\cdots A_rX} \frac{\partial}{\partial A_\lambda} \prod_\mu A_\mu^{n_\mu} \qquad \text{dus}$$

$$(41)\qquad \Omega' = \sum_\lambda A'_\lambda\, \Omega'_\lambda \int_0^1 dX S_{A_1\cdots A_r}^{A_1X\cdots A_rX} \frac{\partial}{\partial A_\lambda}$$

en analoog $\Omega^{(h)}$. Daar hierin géén van de getallen n_λ en n meer optreedt, kan deze op iedere collectie, ongeacht haar homogeniteit worden toegepast, zodat (30), (31) met (41) in plaats van (32) b.v. ook geldt als in het op pag 61 genoemde derde voorbeeld (29) de getallen $d_1,\dots,d_r$ niet alle gelijk zijn. In plaats van (36) krijgt men dan

$$(42)\qquad \Omega_k = \Big(\sum_\lambda A'_\lambda A_\lambda^{d_\lambda+1} \int_0^1 dX S_{A_1\cdots A_r}^{A_1X\cdots A_rX} \frac{\partial}{\partial A_\lambda}\Big)^k$$

We merken op: 1e dat de factoren X telkens bij de substitutie erin gebracht, bij de integratie weer verdwijnen; 2e dat de factor $A_\lambda^{d_\lambda+1}$ links en $\frac{\partial}{\partial A_\lambda}$ rechts van het substitutie-symbool moet staan, zodat men deze niet tot een $-d_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda^{-d_\lambda}}$ kan verenigen, tenzij men de daar te veel optredende factor $X^{d_\lambda+1}$ of X weer verwijdert:

$$(43)\qquad \Omega_k = \Big(\int_0^1 dX S_{A_1\cdots A_r}^{A_1X\cdots A_rX} \sum_\lambda A'_\lambda X^{-d_\lambda-1} \frac{\partial}{\partial A_\lambda^{-d_\lambda}}\Big)^k = \Big\{ \Big(\sum_\lambda A'_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda^{-d_\lambda}}\Big) \int_0^1 \frac{dX}{X} S_{A_1\cdots A_r}^{A_1X\cdots A_rX}\Big\}^k$$

§ 3. <u>Karakteristieke functies</u>.

1. Zij $F(x)$ de verdelingsfct ener (reële) stochastische variabele $\underline{x}$. De functie $Z_{\underline{x}}(\tau)$, bij afkorting $Z(\tau)$ gedefinieerd door

(1) $$Z_{\underline{x}}(\tau) = Z(\tau) = \mathcal{E}\, e^{x\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x\tau}\, dF(x)$$

voor die (reële of complexe) waarden van τ, waarvoor de integraal bestaat, heet de <u>karakteristieke functie</u> van de variabele $\underline{x}$.

Is $\tau = it$ zuiver imaginair (d.w.z. t reëel), dan bestaat de integraal altijd, daar $|e^{ixt}| = 1$ en $|dF(x)| = dF(x)$, dus $\left|\int e^{ixt}\, dF(x)\right| \leq \int dF(x) = 1$ is. Verder geldt (vgl. Whr bl. 87): Bestaat $Z(\tau)$ voor $\tau = s$ (s en t worden steeds reëel ondersteld), dan ook voor $\tau = s+it$ en algemener voor $\tau = \theta s+it$ met willekeurige t en $0 \leq \theta \leq 1$. Bestaat zij voor $\tau = s+it$, dan ook voor $\tau = \theta s+it$ met willekeurige t en $0 \leq \theta < 1$ (niet ≤ 1!); voor $\tau = s+it$, $t \neq t_0$ kan zij voor sommige t wel, voor andere niet bestaan (voor $t = 0$ zeker niet, tenzij voor alle t). Samenvattend kunnen we zeggen:
$Z(\tau)$ bestaat hetzij alleen op de imaginaire as van het complexe τ-vlak, hetzij in alle inwendige punten van een daarmede evenwijdige strook, die deze as bevat of erdoor begrensd wordt, en op elk der begrenzende rechten geen of sommige of alle punten, met dien verstande, dat zij steeds in alle punten van de imaginaire as bestaat, ook als deze begrenzende rechte is. De strook kan zich ook naar een van beide zijden of naar beide tot het oneindige uitstrekken, in welk geval daar uiteraard geen begrenzende rechte is.

We zullen verder het existentiegebied van $Z(\tau)$ niet expliciet vermelden, wetende dat dit in het ongunstigste geval uit de imaginaire as, eventueel uit een strook, en soms uit het gehele complexe vlak bestaat. Voor de functie $Z(it)$ zal soms ook de notatie $\varphi(t)$ gebruikt worden. Veelal wordt alleen deze functie beschouwd, daar zij altijd bestaat, en voldoende is om harerzijds $F(x)$ ondubbelzinnig te bepalen.
De logarithme van de karakteristieke fct - waar deze bestaat - noemen we de <u>entropische fct</u> $z_{\underline{x}}(\tau)$:

(2) $$z_{\underline{x}}(\tau) = \ln Z_{\underline{x}}(\tau)$$

De meerwaardigheid van de logarithme zal in punt 2B opgeheven worden.

2. De eenvoudigste eigenschappen der karakteristieke fct zijn:

A. Zijn a en b constanten, dan is

(3) $$Z_{a\underline{x}+b}(\tau) = e^{b\tau} Z_{\underline{x}}(a\tau); \quad z_{a\underline{x}+b}(\tau) = b\tau + z_{\underline{x}}(a\tau)$$

in het bijzonder

(3') $$Z_{\underline{x}+b}(\tau) = e^{b\tau} Z_{\underline{x}}(\tau); \quad z_{\underline{x}+b}(\tau) = b\tau + z_{\underline{x}}(\tau)$$

(3") $$Z_{a\underline{x}}(\tau) = Z_{\underline{x}}(a\tau); \quad z_{a\underline{x}}(\tau) = z_{\underline{x}}(a\tau),$$

zoals onmiddellijk door substitutie in (1) blijkt.

B.

(4) $$Z(0) = 1$$

Men kan derhalve z(0) = 0 nemen, waarmede de waarde van de logarithme dus van $z(\tau)$ is vastgelegd. Voorts is

(5) $$|\varphi(t)| = |Z(it)| \leq 1;\ \mathfrak{R}\{z(it)\} \leq 0 \quad (t \text{ reëel})\ ^{*)}$$

Voorts kan men bewijzen, dat $\varphi(t)$ een voor alle (reëele) t continue fct van t is, en dat $Z(\tau)$, als deze fct ook buiten de imaginaire τ-as, dus in een strook bestaat, in het inwendige daarvan en op randen waarop $Z(\tau)$ overal bestaat (dus op de imaginaire as) continu is.

C. Is $\underline{x}$ symmetrisch verdeeld, d.w.z.

$$F(-x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \{1 - F(x+\tau)\}$$

voor iedere x, dan is $\varphi(t)$ reëel (en slechts dan): $\varphi(-t) = \varphi(t)$

Algemeen is

$$\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$$

waarin $\bar{z}$ het geconjugeerd-complexe getal van z voorstelt.

D. Neemt $\underline{x}$ alleen aequidistante waarden c+nh (n geheel) aan, dan is $\varphi(t)$ periodiek met de periode $\frac{2\pi}{h}$; $Z(\tau)$ en $z(\tau)$ zijn periodiek met de periode $\frac{2\pi i}{h}$. Is anderzijds $\varphi(t_0) = 1$ voor een reële $t_0 \neq 0$, dan is $\varphi(t)$ periodiek met de periode t_0, en $\underline{x}$ neemt ("bijna zeker") alleen aequidistante waarden met de distantie $h = \frac{2}{t_0}$ aan.

E. De entropische fct ener gereduceerde variabele $\underline{\tilde{x}} = \underline{x} - \mu$ (in de onderstelling dat het eerste moment bestaat) is voor reële τ (voor zoverre zij bestaat) ≥ 0.

(6) $$z_{\tilde{x}}(\tau) = z_x(\tau) - \mu\tau \geq 0$$

Het gelijkheidsteken geldt dan en slechts dan als hetzij $\tau = 0$, hetzij $\underline{x}$ bijna zeker ~~constant~~ is; d.w.z. dat $P[\underline{x} = c] = 1$ is; dan is $F(x) = \iota(x-c)$, waarin $\iota(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ is (vgl bl. 42, Whr bl. 131), en $\mu_1 = c$, dus $\underline{x} \approx \mathcal{E}\,\underline{x} = \mu$, waarin het symbool $\approx$ aangeeft, dat de beide leden "bijna zeker" - d.w.z. behoudens een eventualiteit met wh nul - gelijk zijn. (Vgl Whr pag. 93)

F. De entropische fct is voor reële τ niet-negatief convex op het interval, waar zij bestaat (bestaat zij voor geen reële $\tau \neq 0$, dan bestaat dit "interval" uit slechts één punt: het gestelde is dan triviaal):

Zijn $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a+b = 1$, τ_1 en τ_2 reëel en in het definitiegebied van $z(\tau)$, dan is

---

*) Met $\mathfrak{R}u$ wordt het reële deel van het complexe getal u aangeduid; met $\mathfrak{J}u$ de coëfficient van i, dus $\mathfrak{R}u = \frac{u+\bar{u}}{2} = x$, $\mathfrak{J}u = \frac{u-\bar{u}}{2i} = y$ als $u = x + iy$ is.

(7) $$z(a\tau_1 + b\tau_2) \leqq az(\tau_1) + bz(\tau_2).$$

Vgl. Whr pag 101.

Gevolg: Is z tweemaal differentieerbaar (t.w. als μ_2 bestaat, vgl. punt 3), dan is $z'' > 0$, tenzij $\underline{x}$ bijna zeker constant is (dan is $z'' = 0$).

Gevolg: Bestaat $z(\tau)$ voor alle reele τ en is $\mu \neq 0$, dan is er één en slechts één reele $\tau \neq 0$ met $z(\tau) = 0$.

G. De entropische fct is voor reele τ (voor zoverre zij bestaat) een niet-negatief convex functioneel van de stochastische variabele:

(8) $$z_{a\underline{x}+b\underline{y}}(\tau) \leqq az_{\underline{x}}(\tau) + bz_{\underline{y}}(\tau)$$

als $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $a+b = 1$ is, en τ reëel is en in het definitiegebied van $z_{\underline{x}}$ zowel als van $z_{\underline{y}}$ (en dan ook van $z_{a\underline{x}+b\underline{y}}$) ligt.

H. Bestaat het moment [1]) van de orde k, dan is $\varphi(t)$ overal k maal differentieerbaar en

(9) $$\varphi^{(k)}(t) = i^k \int x\, e^{ixt}\, dF(x),$$

in het bijzonder

(10) $$\varphi^{(k)}(0) = i^k \mu_k$$

Bestaat $Z(\tau)$ in een strook, dan is

(11) $$Z^{(k)}(0) = \mu_k \quad ,$$

waarbij eventueel de afgeleide naar rechts of naar links genomen moet worden. Evenzo is dan

(12) $$z^{(k)}(0) = \kappa_k$$

de cumulant van de orde k. Uit de existentie van $\varphi^{(k)}(0)$ behoeft echter die van μ_k nog niet noodzakelijk te volgen.

---

[1]) Soms wordt existentie van het absolute moment α_k ondersteld; voor even k is $\alpha_k = \mu_k$; voor oneven k volgt de existentie van α_k uit die van μ_k , mits men deze laatste als $\lim\limits_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty}} \int_{-x_1}^{x_2} x\,dF(x)$ interpreteert, waarbij x_1 en x_2 onafhankelijk van elkaar variëren. Bestaat alleen $\lim\limits_{x_1 \to \infty} \int_{-x_1}^{x_1} x\,dF(x)$, welke limiet met het symbool $⨍ x\,dF(x)$ (de zgn. "valeur principale" van de oneigenlijke integraal) wordt aangeduid, dan behoeft α_k niet te bestaan zoals het voorbeeld $F(x) = \frac{1}{\pi}$ arctg x, $F'(x) = = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}$ leert. Voor de eigenschappen der momenten verwijzen wij naar Whr bl. 81 - 92.

I. Bestaat $Z(\tau)$ voor $a < \tau < b$, $a < 0$, $b > 0$, dan zijn $Z(\tau)$ en $z(\tau)$ in dit gebied <u>analytische</u> fcts van τ; $Z^{(k)}(\tau)$ en $z^{(k)}(\tau)$ bestaan voor alle (natuurlijke) k, en tevens de absolute, dus ook de gewone en de factoriële momenten en de cumulanten van ieder orde k. In dit geval is

(13) $$Z(\tau) = \sum_{0}^{\infty}{}_{k} \frac{\mu_k}{k!}\tau^k$$

(14) $$z(\tau) = \sum_{0}^{\infty}{}_{k} \frac{\kappa_k}{k!}\tau^k$$

(15) $$Z(\ln(1+\tau)) = \sum_{0}^{\infty}{}_{k} \frac{\mu_{[k]}}{k!}\tau^k$$

(Vgl. Whr pag 87). Wegens (13) wordt $Z(\tau)$ wel de momenten-voortbrengende fct ("moment generating function") genoemd. De absolute momenten laten zich echter niet op eenvoudige wijze in $Z(\tau)$ uitdrukken.

3. De existentie van de momenten hangt af van de "snelheid" waarmede $F(x)$ voor $x \to -\infty$ en $1 - F(x)$ voor $x \to \infty$, dus ook (in de op pag. 22 Math. Stat. gebruikte notatie in de aldaar genoemde gevallen) $f(x) = F'(x)$ resp. f_i (of p_i) naar nul gaan. De belangrijkste gevallen zijn:

α) $f(x)$ resp. f_i is $O(x^{-\lambda})$ [1], $\lambda > 1$, voor $x \to \pm\infty$. Dan is $F(-x) = O(x^{-\lambda+1})$ en $1-F(x)$ eveneens en α_k bestaat voor $k \geq \lambda - 1$. De eigenschappen van punt 2F gelden dan. Geldt de eigenschap <u>niet</u> voor alle $\lambda > 1$, dan bestaat $Z(\tau)$ <u>alleen</u> op de imaginaire as.

β) . $f(x)$ resp. f_i en dan ook $1-F(x)$ en $F(x)$ zijn

$O(e^{-bx})$ voor $x \to +\infty$ $b > 0$ en
$O(e^{ax})$ voor $x \to -\infty$ $a > 0$.

In dit geval bestaan <u>alle</u> momenten; $Z(\tau)$ en $z(\tau)$ zijn analytisch in de strook $-a < \Re\,\tau < b$, en de eigenschappen van punt 2G gelden.
Opmerking: Is b.v. voor $x \to \infty$ $f(x) = O(e^{-bx}x^{\lambda})$, dan is ook $f(x) = O(e^{-b'x})$ voor iedere $b' < b$.

γ) . $f(x) = O(e^{-c|x|^{\lambda}})$ voor een $\lambda > 1$. Dan is a fortiori
$f(x) = O(e^{-a|x|})$ voor <u>alle</u> $a > 0$, dus de onder β genoemde voorwaarden zijn vervuld; $Z(\tau)$ en $z(\tau)$ bestaan en zijn analytisch in het <u>gehele</u> complexe vlak.

Hieruit tezamen met punt 2G blijkt, dat <u>de eigenschappen van $F'(x)$ in het oneindige onmiddellijk samenhangen met de differentieerbaarheids- resp. analyticiteitseigenschappen van $\varphi(t)$</u>. Eerstgenoemde kunnen worden uitgedrukt door existentie-eigenschappen van momenten resp. van $Z(\tau)$ voor reële τ.

---

[1]) Zie voor voetnoot volgende pagina.

4. Anderzijds hangt het gedrag van $\varphi(t)$ voor $t \to \pm\infty$ onmiddellijk samen met de differentieerbaarheidseigenschappen van $f(x)$. Is b.v. $f(x)$ k-maal differentieerbaar en $|f^{(k)}(x)|$ over de gehele x-as integreerbaar [2], dan is $|\varphi(t)| \leq \frac{C}{|t|^k}$ [3]) voor een passend gekozen constante C (b.v. $C = \int |f^{(k)}(x)|dx$), zoals onmiddellijk door partiële integratie blijkt.

Omgekeerd kunnen uit iets scherpere kleinheids-onderstellingen van $\varphi(t)$ voor $t \to \pm\infty$ iets zwakkere differentieerbaarheidseigenschappen van $f(x)$ afgeleid worden.

5. De belangrijkste eigenschappen van $\varphi(t)$ zijn echter: het optellingstheorema, de eenduidigheidsstelling, het omkeringstheorema en de continuiteitsstelling.

6. Twee stochastische variabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ worden onafhankelijk genoemd als de wh dat $\underline{x} \leq x$ en $\underline{y} \leq y$ is voor alle x en y gelijk is aan het product van de whn dat $\underline{x} \leq x$ en dat $\underline{y} \leq y$ is:

(16) $$P[\underline{x} \leq x, \underline{y} \leq y] = P[\underline{x} \leq x]\, P[\underline{y} \leq y].$$

Hieruit volgt dat ook de overeenkomstige relaties bestaan, die verkregen worden, als men zowel links als rechts één van beide of beide $\leq$-tekens vervangt door een $<$-, een $>$- of een $\geq$-teken. Ook geldt dan

(17) $$P[x_1 < \underline{x} \leq x_2, y_1 < \underline{y} \leq y_2] = P[x_1 < \underline{x} \leq x_2]\, P[y_1 < \underline{y} \leq y_2]$$

Daaruit kan men afleiden, dat tussen de verdelingsfcts van $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{x}+\underline{y}$ de fundamentele betrekking bestaat:

(18) $$F_{\underline{x}+\underline{y}}(z) = \int F_{\underline{x}}(z-u)\, dF_{\underline{y}}(u) = \int F_{\underline{y}}(z-u)\, dF_{\underline{x}}(u)$$

De integralen zijn hier, als altijd wanneer geen integratiegrenzen aangegeven zijn, van $-\infty$ tot $+\infty$ (i.c. dus $-\infty < u < +\infty$) genomen.

---

[1]) De "orde-symbolen" $o(x)$ en $O(x)$ van Emil Landau (1877 - 1935) zijn als volgt gedefinieerd. Men schrijft $f(x) = o(\varphi(x))$ als voor voldoend grote $x > 0$ $\varphi(x) \neq 0$ en $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ is.
Men schrijft $f(x) = O(\varphi(x))$ als voor voldoend grote $x > 0$ $\varphi(x) \neq 0$ is en er constanten x_0 en C bestaan zodanig dat voor $x_0 \leq x < +\infty$: $\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| \leq C$ is. N.B. Het symbool = is hier geen gelijkheidsteken; uit $f(x) = o(\varphi(x))$ en $g(x) = o(\varphi(x))$ volgt niet $f(x) = g(x)$. Men leze voor $= O$: "is (hoogstens) van de orde (van)" en voor $= o$: "is van een kleiner orde dan (de orde van)".

[2]) Het is reeds voldoende, dat $f^{(k-1)}(x)$ bestaat en van begrensde variatie is.

[3]) Deze ongelijkheid is onscherp voor $|t^k| \leq C$, daar in ieder geval $|\varphi(t)| \leq 1$ is. Zij kan daarom vervangen worden door $|\varphi(t)| \leq \frac{2C}{1+|t|^k}$, die voor $|t^k| \geq C$ minder scherp is, maar voor $|t^k| \leq C$ althans een eindige grens (≤ 2) geeft.

Voor het geval dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ continu (differentieerbaar) zijn bestaat tussen de verdelingsdichtheden de met (18) overeenkomende betrekking

(19) $$f_{\underline{x}+\underline{y}}(z) = \int f_{\underline{x}}(z-u)\, f_{\underline{y}}(u)\, du = \int f_{\underline{x}}(u)\, f_{\underline{y}}(z-u)\, du$$

Uit (18) kan men nu afleiden:

$$\varphi_{\underline{x}+\underline{y}}(t) = \int e^{izt}\, dF_{\underline{x}+\underline{y}}(z) = \int e^{izt}\, d_z \int F_{\underline{y}}(z-u)\, dF_{\underline{x}}(u) =$$

$$= \int dF_{\underline{x}}(u) \int e^{izt}\, d_z F_{\underline{y}}(z-u) = \int dF_{\underline{x}}(u) \int e^{i(u+v)t} dF_{\underline{y}}(v) =$$

$$= \int e^{iut}\, dF_{\underline{x}}(u)\, . \int e^{ivt}\, dF_{\underline{y}}(v) = \varphi_{\underline{x}}(t)\, . \, \varphi_{\underline{y}}(t)$$

Hierin betekent $d_z F_{\underline{y}}(z-u)$, dat bij de differentiatie z als onafhankelijk variabele, u als constante beschouwd moet worden, terwijl de rechtvaardiging van de verwisseling der integraties en der vervanging van de dubbele integraal door een product van integralen achterwege gelaten is.

Op analoge wijze bewijst men het <u>Optellingstheorema</u>. Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijke stochastische variabelen, dan is (voor zoverre de fcts bestaan)

(20) $$\boxed{z_{\underline{x}+\underline{y}}(\tau) = z_{\underline{x}}(\tau) + z_{\underline{y}}(\tau),}$$

hetgeen aequivalent is met

(21) $$Z_{\underline{x}+\underline{y}}(\tau) = Z_{\underline{x}}(\tau) \times Z_{\underline{y}}(\tau),$$

Hiervan is de relatie

(22) $$\varphi_{\underline{x}+\underline{y}}(t) = \varphi_{\underline{x}}(t)\, .\, \varphi_{\underline{y}}(t),$$

waarvan het bewijs boven kort aangeduid is, de specialisering voor $\tau = it$.

7. De <u>eenduidigheidsstelling</u> luidt: Zijn $F_1(x)$ en $F_2(x)$ verdelingsfuncties, en geldt voor de bijbehorende karakteristieke fcts $\varphi_1(t)$ en $\varphi_2(t)$ dat

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$$

is voor iedere reële t, dan is ook

$$F_1(x) = F_2(x)$$

voor iedere reële x.

A fortiori geldt laatstgenoemde relatie dus als $Z_1(\tau) = Z_2(\tau)$ of ook $z_1(\tau) = z_2(\tau)$ is in een gehele de imaginaire as omvattende strook.

Het is daarom te verwachten, dat men bij gegeven $\varphi(t)$ ook $F(x)$ zal kunnen berekenen. Dit wordt bereikt met behulp van het <u>Omkeringstheorema</u>: Indien $\varphi(t)$ de karakteristieke fct ener variabele met verdelingsfct $F(x)$ is, dan is voor alle reële x_1 en x_2

23) $$\boxed{F(x_2) - F(x_1) = \fint \frac{e^{-ix_2t} - e^{-ix_1t}}{-2\pi it}\, \varphi(t)dt,}$$

waarin het symbool $\fint$ de "valeur principale" der oneigenlijke integraal gedefinieerd is door

(24) $$⨍ u(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{+T} u(t)dt$$

Hierdoor is F(x) op een constante na bepaald; deze wordt achteraf vastgelegd door $F(-\infty) = 0$ te nemen. Het is echter niet mogelijk, rechtstreeks $x = -\infty$ te substitueren, daar dan e^{-ix_2t} niet meer bestaat.

Is F(x) continu differentieerbaar, dan is het eenvoudiger f(x) rechtstreeks te bepalen met behulp van

(25) $$f(x) = \frac{1}{2\pi} ⨍ e^{-ixt} \varphi(t)dt$$

Indien $\varphi(t)$ voor $t \to \pm\infty$ voldoend snel naar nul gaat (hetgeen volgens punt 4 het geval is als f(x) tweemaal differentieerbaar is) kan in (25) (en a fortiori in (24)) het symbool ⨍ door een gewoon integraalteken vervangen worden.

Het discrete gedeelte kan afzonderlijk verkregen worden uit

(26) $$p(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e^{-ixt} \varphi(t)dt$$

waarin het linkerlid de sprong van de verdelingsfct bij de argumentwaarde x voorstelt, dus $F(x) - \lim_{\varepsilon \searrow 0} F(x-\varepsilon)$. De limiet in het rechterlid is dus nul voor alle x, waar F(x) continu is. Indien in het bijzonder <u>x</u> alleen gehele waarden aanneemt is $\varphi(t)$ volgens punt D periodiek met de periode 2π. De limiet in (26) is dan nul, tenzij x = n geheel is. In dit geval is de gehele integrand dus periodiek. Neemt men dan $T = \pi N$, dan is

$$\int_{-T}^{+T} = \int_{-\pi N}^{+\pi N} = N \int_{-\pi}^{+\pi}, \text{ dus } \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi},$$

en (25) gaat over in

(27) $$p_n = p(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-int} \varphi(t)dt,$$

daar in dit geval de limietovergang achterwege kan blijven.

Het resultaat (27) is reeds op pag 44 (Whr 133) (14) vermeld, daar in dit geval $Z(\tau)$ een machtreeks in e^{τ} met coöfficienten p_n is.

Voorts vermelden we het

<u>Continuiteitstheorema</u>. Is $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... een rij van stochastische variabelen met verdelingsfcts $F_n(x)$ en karakteristieke fcts $\varphi_n(t)$ (n = 1, 2, 3, ...) en is $\varphi(t)$ een fct, zodanig dat voor <u>iedere reële</u> t

(28) $$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$$

is, en wel gelijkmatig op een willekeurig klein eindig interval dat t = 0 als inwendig punt bevat, dan <u>bestaat er een verdelingsfct</u> F(x), waarbij $\varphi(t)$ als karakteristieke fct behoort, en waarvoor

(29) $$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

geldt voor iedere x, <u>waar F(x) continu is</u>.

Belangrijk is daarbij, dat men <u>niet</u> vooraf behoeft te weten, dat $\varphi(t)$

een karakteristieke fct is, mits de gelijkmatigheidsconditie vervuld is. Deze kan ook vervangen worden door de eis, dat $\varphi(t)$ voor $t = 0$ continu is.

Dat anderzijds uit (29) (voor iedere x, waar F(x) continu is) (28) volgt, is veel gemakkelijker te bewijzen.

Op de bewijzen kunnen we overigens te dezer plaatse niet ingaan. We moeten daarvoor naar de boeken van PAUL LÉVY, van wie een groot gedeelte van de theorie der karakteristieke fcts, en in het bijzonder de omkerings- en continuiteitsstelling afkomstig zijn, en van HARALD CRAMÈR, die de continuiteitsstelling met de hier vermelde zwakke onderstellingen bewezen heeft, verwijzen.

Literatuur: P.Lévy, Calcul des Probabilités (Paris, 1925)
" , Leçons sur l'addition des variables aleatoires (Paris, 1937)
H.Cramèr, Random variables and probability distributions. Cambridge tracts in mathematics, nr 36 (Cambridge, 1937).

---

8. We beschouwen enkele toepassingen van de voorafgaande stellingen. De hier kort te bespreken stochastische vatiabelen zullen in het volgende hoofdstuk uitvoeriger besproken worden.

Aan een alternatief, waarbij één der kenmerken ontmerkt is: $C_1 = p + qB$, kunnen we als stochastische variabele $\underline{x}_a$ [1] het getal 0 toevoegen als B niet, en het getal 1 als B wel optreedt. Deze variabele heeft de karakteristieke fct [2]

$$Z_A(\tau) = p + qe^{\tau}$$

en de entropische fct (vgl. Whr pag. 90.c):

$$(30)\quad \chi_A(\tau) = \ln(p+qe^{\tau}) = q\tau + \tfrac{1}{2}pq\tau^2 + \tfrac{1}{6}pq(p-q)\tau^3 + \tfrac{1}{24}pq(1-6pq)\tau^4 + \dots$$

Het aantal keren $\underline{x}_B$ [3] dat B optreedt bij n onafhankelijke trek- uit dit alternatief, de variabele van Bernoulli, is de som van n onafhankelijke variabelen, die alle dezelfde verdeling als $\underline{x}_A$ bezitten:

$$(31)\qquad \underline{x}_B = \underline{x}_{1A} + \dots + \underline{x}_{nA}$$

Immers $\underline{x}_B$ neemt de waarde k aan als bij k van de trekkingen B optreedt, dus als k van de $\underline{x}_{iA}$ de waarde 1 aannemen (en de overige de waarde 0). Dus is de karakteristieke fct van $\underline{x}_B$:

$$(32)\quad Z_B(\tau) = \{Z_A(\tau)\}^n = (p+qe^{\tau})^n$$

en $\chi_B(\tau) = n.\chi_A(\tau) = nq\tau + \tfrac{1}{2}nq\tau^2 + \dots$

derhalve is $\mu_B = nq$ en $\sigma_B^2 = npq$ [4].

Beschouwt men een rij van zulke variabelen $\underline{x}_{B(n,q_n)}$ van Bernoulli, waarbij $p = p_n = 1 - q_n$ van n afhankelijk is en wel zodanig, dat nq_n voor $n \longrightarrow \infty$ de limiet $\alpha > 0$ heeft, dan is:

$$\lim Z_{B(n,q_n)}(\tau) = \lim(p_n + q_n e^{\tau})^n = \lim\{1 + q_n(e^{\tau}-1)\}^n = e^{(e^{\tau}-1)\lim nq_n}$$

dus als we de limietfunctie met Z_p aanduiden [5] dan is:

$$(33)\quad \boxed{Z_p(\tau) = e^{\alpha(e^{\tau}-1)}}$$

Daar we hier voor kunnen schrijven:

$$Z_p(\tau) = e^{-\alpha}e^{\alpha e^{\tau}} = \sum_0^{\infty}{}_n\, e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}e^{n\tau}$$

is dit de karakteristieke fct van een stochastische variabele $\underline{x}_p$, de variabele van Poisson, waarvoor geldt:

---

1) A = alternatief , 2) We scrijven $Z_A(\tau)$ als afkorting van $Z_{\underline{x}_A}(\tau)$ e.d., 3) B = Bernoulli, 4) $\mu_B = \mu_{\underline{x}_B}$, enz., 5) P = Poisson.

(34) $$P[\underline{x}_p = n] = e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}$$

Volgens de eenduidigheidsstelling is dit de enige variabele, die $Z_p(\tau)$ tot karakteristieke fct heeft, en volgens de continuiteitsstelling is $\lim F_{B(n,q_n)}(x) = F_p(x)$ voor iedere x, die geen natuurlijk getal is (daar $\underline{x}_p$ alleen natuurlijke waarden aanneemt, dus $F_p(x)$ alleen dan discontinu is[1]). We schrijven daarvoor ook:

$$\underline{x}_p = \lim_{n\to\infty} \underline{x}_{B(n,q_n)}$$

9. Voor de gereduceerde variabele van Bernoulli $\underline{x}_B = \underline{x}_B - nq$ geldt:[2]

(35) $$\tilde{\chi}_B(\tau) = \tfrac{1}{2}npq\tau^2 + \tfrac{1}{6}npq(p-q)\tau^3 + \tfrac{1}{24}npq(1-6pq)\tau^4 + \dots$$

en

(36) $$\tilde{Z}_B(\tau) = e^{-nq\tau}(p+qe^{\tau})^n = (pe^{-q\tau} + qe^{p\tau})^n$$

We zullen een stochastische variabele <u>gestandaardiseerd</u> noemen als haar spreiding 1 is en haar gemiddelde 0[3]; een willekeurige stochastische variabele (die een eindig tweede moment bezit) wordt gestandaardiseerd door haar met haar gemiddelde te verminderen en het verschil door haar spreiding te delen. Voor de uit $\underline{x}_B$ afgeleide gestandaardiseerde variabele

$$\underline{x}_{B(st)} = (\underline{x}_B - \mu_B)\sigma_B^{-1}$$

geldt dus:

$$\chi_{B(st)} = \tilde{\chi}_B\left(\frac{\tau}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{6}\frac{p-q}{\sqrt{npq}}\tau^3 + \frac{1}{24}\frac{1-6pq}{npq}\tau^4 + \dots$$

Algemeen is de coefficient van $\tau^k/k!$: $n.D_k(q)/\sqrt{npq}^{\,k}$, waarbij $D_k(q)$ volgens Whr pag. 90 de cumulant van de orde k van $\underline{x}_A$ is. Men heeft dus, wanneer we ditmaal q <u>constant</u> houden:

---

1) In dit geval vogt hieruit, dat $\lim F_{B(n,q_n)}(x) = F_p(x)$ ook geldt voor de discontinuiteitspunten. Immers zowel $F_{B(n,q_n)}$ als F_p zijn trapfuncties, die van rechts continu zijn en beide slechts discontinuiteiten hebben in <u>dezelfde</u> punten, zodat uit convergentie in de tussengelegen punten ook convergentie in deze discontinuiteitspunten volgt.

2) We schrijven $\tilde{\chi}_B$ als afkorting van $\chi_{\tilde{\underline{x}}_B}$ enz.,

3) We zullen de gestandaardiseerde verdeling ook de bij een verdeling behorende <u>standaard-verdeling</u> noemen en hem aangeven door achter het voor de verdeling gebezigde symbool tussen haakjes st te zetten.

$$\lim_{k\to\infty} z_{B(st)} = \tfrac{1}{2}\tau^2.$$

Daar deze limietfunctie voor $\tau = 0$ continu is (voldoende ware reeds, dat dit voor zuiver imaginaire τ het geval is) is de limiet zelf een entropische fct:

(37) $\lim z_{B(st)}(\tau) = \frac{1}{2}\tau^2 = z_{N(st)}(\tau)$ waarin $B = B(n,q)$ is.

De bijbehorende stochastische variabele heet de (gestandaardiseerde) normaal verdeelde (of korter: normale) variabele. Hiervoor is dus:

$$Z_{N(st)}(\tau) = e^{\frac{1}{2}\tau^2} \quad \text{en} \quad \varphi_{N(st)}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Daar $\varphi_{N(st)}(t)$ voor $t \to \pm\infty$ voldoende snel naar nul gaat, is de verdelingsfct continu en zelfs differentieerbaar en we hebben volgens pag. 71 (Whr 160) (25):

$$f_{N(st)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ixt}\varphi_{N(st)}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

(daar hier de oneigenlijke integraal wegens haar convergentie met haar hoofdwaarde-volgens-Cauchy overeenstemt). De in het rechterlid optredende integraal heeft de waarde $e^{-\frac{1}{2}x^2}\sqrt{2\pi}$

dus:

(38) $$\boxed{f_{N(st)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

is de verdelingsdichtheid van de normale verdeling. Volgens de continuiteitsstelling is nu $\lim_{n\to\infty} F_{B(st)}(x) = F_{N(st)}(x)$ en daar

$$F_{B(st)}(y) = P[x_{B(st)} \leq y] = P\left[\frac{x_{B(n,q)} - nq}{\sqrt{npq}} \leq y\right] = P[x_{B(n,q)} \leq nq + y\sqrt{npq}] \text{ is}$$

volgt uit

$$\lim_{n\to\infty}\{F_{B(st)}(y_2) - F_{B(st)}(y_1)\} = F_{N(st)}(y_2) - F_{N(st)}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y_1}^{y_2} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

de betrekking:

(39) $$\boxed{\lim_{n\to\infty} P[nq - y_1\sqrt{npq} < x_{B(n,q)} \leq nq + y_2\sqrt{npq}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y_1}^{y_2} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx}.$$

Dit resultaat kan ook rechtstreeks, zonder behulp der karakteristieke fct bewezen worden, zoals A. de Moivre reeds in 1733 gedaan heeft.

Voor het fq van het aantal keren, dat in n onafhankelijke trekkingen het resultaat B bereikt wordt, d.i. $\frac{1}{n} x_{B(n,q)}$, geldt dus:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[q - y_1\sqrt{\frac{pq}{n}} < \frac{1}{n} x_{B(n,q)} \leq q + y_2\sqrt{\frac{pq}{n}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y_1}^{y_2} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

Voor voldoende grote n is de wh dat $\left|\frac{1}{n} x_{B(n,q)} - q\right| \leq c$ is voor iedere constante (van n onafhankelijke) $c > 0$ en ieder tweetal waarden y_1 en y_2 voor voldoend grote n groter dan de uitdrukking in het rechterlid, daar dan $-c < -y_1\sqrt{\frac{pq}{n}}$ en $y_2\sqrt{\frac{pq}{n}} < c$ is. Daar deze wh in ieder geval $\leqq 1$ is, terwijl de integraal in het rechterlid voor $y_1 \to \infty$ en $y_2 \to \infty$ tot 1 nadert, volgt daaruit dat de wh. dat het fq $\frac{1}{n}\underline{x}_{B(n,q)}$ hoogstens c van q verschilt voor iedere $c > 0$ 1 tot limiet heeft.

(40) $$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\underline{x}_{B(n,q)} - q\right| \leq c\right] = 1$$

10. Deze eigenschap was reeds door Jacob Bernoulli (1654-1705) in het vierde deel van zijn Ars Conjectandi bewezen en zal hier het theorema van Bernoulli genoemd worden. Zij wordt veelal met de naam " wet der grote getallen" aangeduid, een benaming die door S.D. Poisson voor het iets algemenere geval ingevoerd is, waarin de opeenvolgende alternatieven, waaruit getrokken wordt, niet alle gelijk behoeven te zijn (zie punt 11). Enige verwarring wordt vaak gewekt door het feit, dat de uitdrukking "wet der grote getallen" soms voor het mathematische theorema (40) (of een van haar generalisaties) en soms voor de aan de ervaring ontleende uitspraak gebruikt wordt, inhoudende, dat fq en andere statistische grootheden, die bij verschillende empirische collecties kunnen worden bepaald bij overgang van één collectie naar andere fluctuaties vertonen, die in zeer vele gevallen in grootte afnemen bij toenemende uitgebreidheid der collecties. We zullen om deze reden de uitdrukking "wet der grote getallen" liever vermijden. Bernoulli meende evenals vele auteurs na hem, dat dit ervaringsfeit door zijn theorema bewezen werd. Dit is echter niet juist, al ware het slechts omdat een ervaringsfeit in geen enkel geval door een mathematische stelling, maar uitsluitend door waarneming bewezen kan worden. Wel kan een stelling een ervaringsfeit weergeven; indien dit het geval is, is daarmee ten hoogste bewezen, dat de aan de stelling ten grondslag liggende onderstellingen een bruikbaar mathematisch model voor de beschouwde ervaringsverschijnselen vormen. Dit zal dan het geval blijven, totdat uit deze onderstellingen gevolgtrekkingen worden gededuceerd, die bij empiristische interpretatie niet met de ervaringen in overeenstemming zijn, in welk geval het oorspronkelijke model door een ander dient te worden vervangen.

Resumerend kunnen we dus zeggen, dat een mathematische stelling nooit een ervaringsfeit kan bewijzen, maar uitsluitend, in combinatie met waarnemingen, de voorlopige bruikbaarheid van een mathematisch model.

In casu kunnen we opmerken, dat de aan het theorema van Bernoulli ten grondslag liggende onderstellingen , t.w. onafhankelijkheid der opeenvolgende waarnemingen en constantie der whn q, in ruwe benadering vaak een bruikbaar model opleveren, maar dat hun bruikbaarheid bijna altijd verloren gaat, zodra men wat nauwkeuriger observeert. De conclusie echter, die door (40) wordt uitgedrukt heeft bij passende interpretatie een veel algemener bruikbaarheidsgebied, hetgeen daarmede samenhangt, dat zij onder zeer veel algemenere onderstellingen kan worden bewezen. Dit geldt ook voor een met (39) overeenkomende eigenschap, die als het centrale grenswaardetheorema der whr bekend staat, en die we nu zullen bespreken.

11. De eerste generalisatie bestaat daarin, dat we het rechterlid van (31) kunnen vervangen door een som van n onafhankelijke stochastische variabelen, die wel (nog) aale eenzelfde verdelingsfct bezitten, zonder dat deze nu juist een alternatief behoeft te zijn (mits slechts het eerste en tweede moment bestaan).

Teneinde dit te preciseren noemen we een rij van stochastische variabelen $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2, \ldots$ met gemiddelden $\alpha_n = \mathcal{E}\underline{s}_n$ en spreidingsquadraten $\beta_n^2 = \mathcal{E}(\underline{s}_n - \alpha_n)^2$ asymptotisch normaal, indien de verdelingsfct van $u_n = (\underline{s}_n - \alpha_n)/\beta_n$ voor $n \to \infty$ de verdelingsfct van de normale standaardverdeling tot limiet heeft [1]. Daarbij is niet ondersteld, dat α_n en β_n voor $n \to \infty$ een limiet hebben. De gegeven voorwaarde houdt dus in, dat voor iedere reële y_1 en y_2 geldt:

$$(41)\qquad \lim_{n\to\infty} P\left[\alpha_n - y_1\beta_n < \underline{s}_n \leq \alpha_n + y_2\beta_n\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y_1}^{y_2} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

Zijn nu $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2, \ldots$ onafhankelijke stochastische variabelen, die alle eenzelfde verdelingsfct $F(x)$ met eindige momenten μ en $\sigma^2+\mu^2$ van de eerste en tweede orde bezitten, en is:

$$(42)\qquad \underline{s}_n = \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n$$

dan zullen we bewijzen, dat $\underline{s}_n$ asymptotisch normaal is. Is $\varphi(t)$ de karakteristieke fct van elk der $\underline{x}_j$ op de imaginaire as, $\varphi_{\underline{s}_n}(t)$ die van $\underline{s}_n$, dan volgt uit de onafhankelijkheid:

$$(43)\qquad \varphi_{\underline{s}_n}(t) = \prod_1^n \varphi_{\underline{x}_j}(t) = \{\varphi(t)\}^n$$

daar $\varphi_{x_j}(t) = \varphi(t)$ is voor iedere j. Voorts is

$$(44)\qquad \chi(it) = \ln\varphi(t) = i\mu t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \theta(t^2)$$

waarin $\theta(t^2)$ een grootheid is, die na deling door t^2 voor $t \to 0$ tot nul nadert [2]. Derhalve is

---

1) $\underline{u}_n$ is dus de bij $\underline{s}_n$ behorende standaardverdeling. Asymptotische normaliteit betekent dus, dat de verdelingsfct van de gestandaardiseerde verdeling tot die van de normale standaardverdeling nadert. De verdelingsfct van $\underline{s}_n$ zelf behoeft niet convergent te zijn.

2) Vgl. de definitie van het ordeteken op blz. 69, Whr 158; daar werd hetzelfde teken ingevoerd voor $t \to \infty$. De hier gegeven uitbreiding van de definitie zal ook verderop nog gebruikt worden terwijl dezelfde uitbreiding ook voor het θ-teken geldt.

(45) $\chi_{s_n}(it) = n.\chi(it) = in\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + n\,\theta(t^2)$

Het gemiddelde α_n van s_n is dus $n\mu$ en het spreidingsquadraat $\beta_n^2 = n\sigma^2$. Dus geldt voor de bijbehorende standaard-variabele

(46) $u_n = (s_n - \alpha_n)/\beta_n$:

$$\chi_{u_n}(it) = -i\frac{\alpha_n}{\beta_n}t + \chi_{s_n}\left(\frac{it}{\beta_n}\right) = -\frac{1}{2}t^2 + n\,\theta\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)$$

Volgens de definitie van het θ-symbool is:

$$\lim_{n\to\infty} n\,\theta\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right) = \frac{t^2}{\sigma^2}\lim \frac{\theta\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)}{\frac{t^2}{n\sigma^2}} = 0$$

Dus

(47) $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{u_n}(it) = -\frac{1}{2}t^2$

waaruit tengevolge van het continuiteitstheorema volgt dat

(48) $\lim\limits_{n\to\infty} F_{u_n}(x) = F_{n(st)}(x)$

is, d.w.z. dat s_n asymptotisch normaal is en (41) geldt. Hiervan is (39) het bijzondere geval, dat $x_j = x_A$ de variabele van een alternatief is.

12. Dit resultaat kan nog uitgebreid worden tot het geval, dat de verdelingsfct $F_j(x)$ der variabelen x_j niet alle dezelfde zijn. Er is dan echter, behalve de eis dat de eerste momenten μ_j en de spreidingen σ_j alle bestaan, nog een verdere voorwaarde nodig. Een voldoende voorwaarde is, dat x_j een eindig absoluut gereduceerd moment $\tilde{\alpha}_{3j}$ van de derde orde bezit (dus ook een eindig derde cumulant κ_{3j}) en dat de hierna te noemen limietbetrekking (54) (of (55)) geldt. Definieren we ook nu s_n en u_n door (42) en (46), dan geldt in (43) nog het eerste gelijkheidsteken, terwijl (44) vervangen moet worden door:

(49) $\chi_j(it) = \ln \varphi_j(it) = i\mu_j(t) - \frac{1}{2}\sigma_j^2 t^2 + \theta(\tilde{\alpha}_{3j}t^3)$

Hierin is de laatste term volgens de definiet van het θ-symbool absoluut genomen $\leq C|\tilde{\alpha}_{3j}t^3|$, waarin C een constante is. Dan wordt:

(50) $\chi_{s_n}(it) = \sum_1^n \chi_j(it) = it\sum\mu_j - \frac{1}{2}t^2\sum\sigma_j^2 + \sum\theta(\tilde{\alpha}_{3j}t^3)$

of, met

(51) $\alpha_n = \sum_1^n \mu_j$, $\beta_n^2 = \sum_1^n \sigma_j^2$ en $\gamma_n = \sum_1^n \tilde{\alpha}_{3j}$:

(52) $\chi_{s_n}(it) = it\alpha_n - \frac{1}{2}t^2\beta_n^2 + \theta(\gamma_n t^3)$

dus

(53) $\chi_{u_n}(it) = -\frac{1}{2}t^2 + \theta\left(\frac{\gamma_n}{\beta_n^3}t^3\right)$

Indien nu voldaan is aan de voorwaarde

(54) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{\beta_n^3} = 0$ d.w.z.

(55) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_1^n \tilde{\alpha}_{3j}}{\left(\sum_1^n \sigma_j^2\right)^{3/2}} = 0$

dan heeft (daar de constante C onafhankelijk van n gekozen kan worden[1]) de laatste term van (52) voor iedere constante t nul tot limiet, d.w.z. dan geldt (47), dus ook (48), dus ook (41).

We hebben dus bewezen: <u>de som van n onafhankelijke stochastische variabelen, die elk een absoluut moment van de derde orde bezitten, waarbij aan (55) voldaan is, is asymptotisch normaal.</u>[2]

Afgezien van de precieze vorm van de "extra voorwaarde" (hier de existentie van de $\tilde{\alpha}_{3j}$ en (55)) wordt deze stelling het centraal limiet-theorema genoemd. Zonder expliciete vermelding van de "extra voorwaarde" is zij het eerst door Laplace bewezen. Het eerste exacte bewijs is van de Russische wiskundige A. Liapounoff (1901) afkomstig, die als extra voorwaarde minder verlangt dan (55), daar hij slechts absolute momenten van een orde $2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ maar overigens willekeurig klein, gebruikt. Verdere bewijzen onder nog zwakkere onderstellingen zijn door J.W. Lindeberg (1922), A. Kolmogoroff (1931), P. Lévy (1935, 1937), W. Feller (1935), W. Sternberg (1940 ?) e.a. gegeven.

Als bijzonder geval kunnen we nog Poisson's generalisatie van het theorema van Bernoulli beschouwen. Daarbij is iedere $\underline{x}_j$ een alternatief variabele, die de waarden 0 en 1 met whn $p_j = 1 - q_j$ resp. q_j aanneemt, dus $\mu_j = q_j$, $\sigma_j^2 = p_j q_j$. Voorts is $\alpha_n = \sum q_j = n\bar{q}$, $\beta_n^2 = \sum p_j q_j = n(\bar{q} - \overline{q^2}) = n(\bar{p}\bar{q} - \sigma_q^2)$ waarin $\bar{p}$, $\bar{q}$ en $\overline{q^2}$ de rekenkundig gemiddelden der p_j, q_j en q_j^2 voorstellen en σ_q^2 de spreiding der q_j is (die dus altijd $\leq \bar{p}.\bar{q} \leq \frac{1}{4}$ is). Aan een voldoende "extra voorwaarde" blijkt voldaan te zijn als $\sum_1^\infty p_j q_j$ <u>divergent</u> is. Beschouwt men, evenals in punt 9 het fq $\underline{m}_n = \frac{1}{n}\underline{s}_n$ in plaats van het aantal $\underline{s}_n$ der keren, dat het kenmerk B verschijnt, dan geldt (41) dus in de gedaante

$$\lim_{n\to\infty} P\left[-y_1\sqrt{\frac{\bar{q}-\overline{q^2}}{n}} < \underline{m}_n - \bar{q} \leq y_2\sqrt{\frac{\bar{q}-\overline{q^2}}{n}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y_1}^{y_2} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

waaruit analoog met (40) voor iedere $c > 0$ volgt:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[|\underline{m}_n - \bar{q}| \leq c\right] = 1$$

(Stelling van Bernoulli-Poisson; Poisson's "wet van de grote getallen").

13. We vermelden tenslotte nog een stelling, die bij verschillende der voorafgaande en een groot aantal andere limietstellingen, al dan niet met gebruik maken van karakteristieke fcts met vrucht kan worden toegepast.

---

1) Dit ziet men het gemakkelijkst in door in (49) voor de restterm van de Taylor-ontwikkeling van $z_j(it)$ de integraalrestterm te nemen.

2) De som zelf, niet gestandaardiseerd, behoeft géén voor $n \to \infty$ convergente verdelingsfct te bezitten.

Zij $\varphi(x)$ een **fct,** die in het interval $a \leqq x \leqq b$ continu is, waarvan de absolute waarde bij $x = x_0$ ($a < x_0 < b$) een absoluut maximum met $\varphi''(x_0) \neq 0$ heeft en die in een omgeving van dat punt drie maal continu differentieerbaar is. Dan is dus $\varphi'(x_0) = 0$, $\frac{\varphi''(x_0)}{\varphi(x_0)} < 0$ en $|\varphi(x)| < |\varphi(x_0)|$ voor alle $x \neq x_0$.

Zij voorts $\psi(x)$ in het interval begrensd ($|\psi(x)| \leqq M$) en in een omgeving van $x = x_0$ continu differentieerbaar.

Dan is, als men $-\frac{\varphi''(x_0)}{\varphi(x_0)} = \beta^2$ stelt, voor grote n

$$\int_a^b \{\varphi(x)\}^n \psi(x)\, dx \approx \frac{\{\varphi(x_0)\}^n \psi(x_0)}{\beta} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

Precies gezegd:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\beta\sqrt{n}}{\{\varphi(x_0)\}^n \psi(x_0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \{\varphi(x)\}^n \psi(x)\, dx = 1$$

Schets van het bewijs:

$$\left\{\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}\right\}^n = e^{n \ln\left\{1 + \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi(x_0)}\right\}} =$$

$$= e^{n \ln\left\{1 - \frac{1}{2}(x-x_0)^2\beta^2 + \theta(x-x_0)^3\right\}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}n(x-x_0)^2\beta^2 + \theta(n(x-x_0)^3)}$$

en

$$\frac{\psi(x)}{\psi(x_0)} = e^{\theta(x-x_0)} \text{, dus met } x - x_0 = \frac{t}{\beta\sqrt{n}}$$

$$\frac{\beta\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \left\{\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}\right\}^n \frac{\psi(x)}{\psi(x_0)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(a-x_0)\beta\sqrt{n}}^{(b-x_0)\beta\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}t^2 + \theta\left(\frac{t^3}{\sqrt{n}}\right)}\, dt$$

waarbij de grenzen van de integraal naar $\pm\infty$ gaan, zodat deze zelf, als men niet op de correctiefactor $e^{\theta\left(\frac{t^3}{\sqrt{n}}\right)}$ let, dus naar $\sqrt{2\pi}$ gaat. Men kan bewijzen (door splitsing van het integratieinterval in drie delen) dat de correctiefactor voor $n \to \infty$ zo snel naar 1 nadert dat de limietovergang voor $n \to \infty$ inderdaad het gewenste resultaat heeft.

Litteratuur: P. Lévy, Calcul des Probabilités (Paris 1925).
" " , Leçons sur l'addition des variables aléatoires (Paris 1937).
H. Cramèr, Random variables and probability distributions (Cambridge 1937).
A. Khintchine, Asymptotische Gesetze der Whr (Berlijn 1933, N.Y. 1947)

W

A

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

Statistische Afdeling

Capita Selecta

Hoofdstuk III

Verdelingen

door:

Prof.Dr.D.van Dantzig

pag.170-282.

Hoofdstuk 3. Verdelingen.

§ 1. De belangrijkste discrete collecties en verdelingen.

We zullen in deze en de volgende paragrafen een overzicht geven van de belangrijkste en meest voorkomende collecties en verdelingen en hun voornaamste eigenschappen. Voor zover de hierbij optredende grootheden (momenten, semi-invarianten, karakteristieke fcts, enz.) zonder vereenvoudiging uit de algemeen geldende eigenschappen kunnen worden afgeleid, zullen deze veelal niet expliciet worden vermeld. We zullen de meeste dezer verdelingen door een gemakkelijk herkenbaar symbool aanduiden. We zullen verder soms de uit een verdeling verkregen geitereerde verdelingen vermelden. Is $\underline{x}$ een stochastische variabele met verdelingsfct $F(x)$, dan verstaan we onder de N-voudig geitereerde verdeling de verdeling van de som $\underline{s}_N$ van N onafhankelijke variabelen, elk met een verdelingsfct $F(x)$. Heeft deze som de verdelingsfct $G_N(x)$, dan is:

$$G_1(x) = F(x)$$

en overeenkomstig § 3 (18) bl. 69 (Whr. 158):

$$G_{N+1}(x) = \int G_N(x-u)\, dF(u) = \int F(x-u)\, dG_{N-1}(u)$$

terwijl $Z_{\underline{s}_N}(\tau) = \{Z_{\underline{x}}(\tau)\}^N$ is.

1. Constante of één-waardige variabele. Symbool C_0, zo nodig $C_0(a)$.

a. Definitie: de variabele neemt slechts [1]) één waarde a aan:

$$\underline{x}_{C_0} = a$$

b. Verdelingsfct: $F_{C_0}(x) = \iota(x-a)$ $\qquad \iota(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

c. Momenten, cumulanten:

$$\mu_{k,C_0} = a^k \; ; \; \mu_{!k,C_0} = a^{!k} \; ; \; \alpha_{k,C_0} = |a|^k$$

$$\tilde{\mu}_{k,C_0} = 0 \; (k \neq 0) \; ; \; \varkappa_{1,C_0} = a \; ; \; \varkappa_{k,C_0} = 0 \; (k \neq 0)$$

d. Karakteristieke fct:

$Z_{C_0}(\tau) = e^{a\tau}$; $z_{C_0}(\tau) = a\tau$ $\qquad$ (τ willekeurig complex)

De verdeling is gekarakteriseerd door de eigenschap, dat de spreiding = 0 is, of ook dat de entropische fct lineair is.

e. Speciaal geval: a = 0; $Z_{C_0(0)}(\tau) = 1$; $z_{C_0(0)}(\tau) = 0$

f. Geitereerde verdelingen van $C_0(0)$: deze stemmen met de enkelvoudige overeen.

---

[1]) We zullen verder de woorden "bijna zeker", d.w.z. behoudens een wh 0, achterwege laten.

2. <u>Alternatief</u>. Symbool A, zo nodig A(q) of A(q;a,b).
Zie Whr pag. 90-92

a. <u>Definitie</u>: Een kategorisch systeem bestaande uit twee evn met fqn $p = 1-q$ en q. De ev met fq q wordt soms een "succes" genoemd.

b. <u>Collectief kenmerk</u> [1]) $C_A = C_A(A,B) = pA + qB$.

c. <u>Variabele</u>: $\underline{x}_A = \underline{x}_A(q;a,b)$ ("tweewaardige variabele") die, indien de evn A en B optreden de waarde a resp. b aanneemt:

$$P_A[\underline{x} = a] = p; \quad P_A[x = b] = q.$$

d. <u>Verdelingsfct</u>: $F_A(x) = p.\,u(x-a) + q.\,u(x-b)$.

e. <u>Gemiddelde en spreidingsquadraat</u>:

$$\mu_A = pa + qb \quad ; \sigma_A^2 = pq(a-b)^2$$

f. <u>Speciale gevallen</u>:

1°. <u>Gereduceerd alternatief</u>. Symbool A(red):

$$\underline{x}_{A(red)} = \underline{x}_{A(q;-q\ell,p\ell)} = \tilde{\underline{x}}_{A(q;a,b)} \qquad \text{met } \ell = b-a$$

$$\underline{x}_{A(q;a,b)} = \underline{x}_{A(red)} + pa + qb.$$

2°. <u>Eenheidsalternatief</u>. Symbool A,1

$$\underline{x}_{A,1} = \underline{x}_{A(q;0,1)} = \underline{z} = \ell^{-1}(\underline{x}_{A(q;a,b)} - a) \qquad \text{met } \ell = b-a$$

$$x_{A(q;a,b)} = a + (b-a)\underline{x}_{A,1}$$

3°. <u>Symmetrisch alternatief</u>. Symbool A(sym).

$$x_{A(sym)} = \underline{x}_{A(\frac{1}{2};0,1)} = \ell^{-1}(\underline{x}_{A(\frac{1}{2};a,b)} - a) \qquad \text{met } \ell = b-a$$

$$\underline{x}_{A(\frac{1}{2};a,b)} = a + (b-a)\underline{x}_{A(sym)}$$

4°. $A(\frac{1}{2};-1,+1)$.

g. <u>Momenten, cumulanten.</u>

$$\mu_{k;A,1} = q \quad (k \geq 1)$$

$$\varkappa_{k,A} = \varkappa_{k;A,1}\cdot\ell^k \qquad (k \geq 2)$$

$$\varkappa_{k;A,1} = \vartheta_k(q) = \sum_1^k (-1)^{m-1}(m-1)!\,q^m a_{km}$$

(zie Whr bl. 91 en voor a_{km} bl 82-83.)

Speciaal voor A,1: $\varkappa_1 = q,\ \varkappa_2 = pq,\ \varkappa_3 = pq(p-q),\ \varkappa_4 = pq(1-6pq)$

h. <u>Karakteristieke fct</u>, enz.:

$$z_A(\tau) = p e^{a\tau} + q e^{b\tau}$$

---

[1]) Het gebruik van de letter A voor het eerste kenmerk en ook als symbool zal wel geen verwarring wekken.

$$z_{A(red)}(\tau) = p\,e^{-ql\tau} + q\,e^{pl\tau}$$

$$z_{A,1}(\tau) = p + q e^{\tau} = 1 + q \sum_{1}^{\infty}{}_{k} \frac{\tau^k}{k!}$$

$$z_{A,1}(\tau) = \ln(p + q e^{\tau}) = \sum_{1}^{\infty}{}_{k} \frac{\vartheta_k(q)}{k!} \tau^k$$

$$z_{A(sym)}(\tau) = e^{\frac{1}{2}\tau}\,\mathrm{ch}\,\tfrac{1}{2}\tau \quad {}^{1}); \quad \varphi_{A(sym)}(t) = e^{\frac{1}{2}it} \cos \tfrac{1}{2}t$$

$$z_{A(\frac{1}{2};-1,+1)}(\tau) = \mathrm{ch}\,\tau \quad ; \varphi_{A(\frac{1}{2};-1,+1)}(t) = \cos t$$

i. Geitereerde verdelingen: De n-voudige geitereerde verdeling is de verdeling van Bernoulli (zie volgende punt).

3. Collectie en verdeling van Bernoulli. Symbool B; B(n) of B(q,n), ook binomiale collectie en verdeling genoemd.
(Zie § 2, punt C, bl. 17).

a. Definitie: De collectie bestaat uit alle (gerangschikte) n-tallen van (al dan niet gelijke) eln van een alternatief, ontmerkt ten aanzien van de "kenmerkenkenmerken", die de rangschikking bepalen. Haar eln kunnen worden verkregen door n opeenvolgende onafhankelijke trekkingen uit een alternatief en ontmerking van de volgorde, waarin de trekkingsresultaten worden verkregen.

b. Frequentiequotienten: $P_{B(n)}(m) = \binom{n}{m} p^{n-m} q^m$

c. Collectief kenmerk:

$$C_{B(q,n)} = C^{n}_{A(q)} = (pA + qB)^n = \sum_{0}^{n}{}_{m} \binom{n}{m} p^{n-m} q^m A^{n-m} B^m$$

d. Samenvattend collectief kenmerk:

$$C_B = \sum_{0}^{\infty}{}_{n} X^n (1-X)\, C_{B(n)} = \frac{1-X}{1-X(pA+qB)}$$

Interpretatie: neem een ander alternatief A^* te hulp met fq X voor een "succes". Verricht achtereenvolgende onafhankelijke trekkingen uit A^* totdat voor het eerst een "wansucces" optreedt; verricht na ieder uit A^* verkregen "succes" een trekking uit het gegeven alternatief A=A(q).

---

[1]) De hyperbolische sinus, cosinus en tangens worden aangeduid met sh, ch, th.

e. Generalisatie: Bij een willekeurig aantal (r) kenmerken $A_1,\dots,A_r$ met fqn $p_1,\dots,p_r$ ($\sum p_\lambda = 1$) krijgt men op analoge wijze de multinomiale collectie (waarvoor we hetzelfde symbool B zullen gebruiken), die voor r = 2 in de collectie van Bernoulli of binomiale collectie overgaat ($A_1 = A$, $A_2 = B$, $p_1 = p$, $p_2 = q$). In het algemeene geval is:

$$C_{B(n)} = \left(\sum p_\lambda A_\lambda\right)^n \qquad \text{en } C_B = \frac{1-X}{1-X\sum p_\lambda A_\lambda}$$

f. Variabele van Bernoulli: $\underline{x}_B$ = het aantal keren, dat het kenmerk B met fq q wordt verkregen (het aantal "successen"):

$$\underline{x}_B = \sum_1^n{}_i\, \underline{y}_i \;;\; \underline{y}_1,\dots,\underline{y}_n \quad \text{onafhankelijk, elke } \underline{y}_i \text{ is een } \underline{x}_{A(q;0,1)}$$

m.a.w. haar verdeling is de n-voudig geitereerde van die van het eenheidsalternatief.

g. Verdelingsfct:

$$F_B(x) = \sum_0^{[x]}{}_m \binom{n}{m} p^{n-m} q^m = \frac{n!}{[x]!\,(n-[x]-1)!}\int_q^1 u^{[x]}(1-u)^{n-[x]-1}\,du =$$

$$= \binom{n}{[x]}\int_0^p (1-v)^{[x]}\, d\left(v^{n-[x]}\right) \qquad \text{met } 0 \leqq x \leqq n \text{ [1]}$$

$$R_B(x) = 1 - F_B(x) = \sum_{[x+1]}^n{}_m \binom{n}{m} p^{n-m} q^m = \frac{n!}{[x]!\,(n-[x]-1)!}\int_0^q u^{[x]}(1-u)^{n-[x]-1}\,du$$

$$= \binom{n}{[x]}\int_p^1 (1-v)^{[x]}\, d\left(v^{n-[x]}\right) \qquad \text{met } 0 \leqq x \leqq n.$$

h. Karakteristieke en entropische fct: (τ willekeurig complex)

$$Z_B(\tau) = \left\{Z_{A,1}(\tau)\right\}^n = (p+q\,e^\tau)^n = \sum_0^n{}_m \binom{n}{m} p^{n-m} q^m \sum_0^\infty{}_k \frac{m^k\tau^k}{k!} =$$

$$= e^{nq\tau}\left(p\,e^{-q\tau} + q\,e^{p\tau}\right)^n = e^{nq\tau}\sum_0^n{}_m \binom{n}{m} p^{n-m} q^m \sum_0^\infty{}_k \frac{(m-nq)^k\tau^k}{k!}$$

$$z_B(\tau) = n\,.\,z_{A,1}(\tau) = n\,\ln(p+q\,e^\tau) = n\sum_1^\infty{}_k\, \vartheta_k(q)\frac{\tau^k}{k!}$$

$$Z_B(\ln(1+\xi)) = (1+q\,\xi)^n = \sum_0^n{}_k \binom{n}{k} q^k \xi^k .$$

---

[1] $[x]$ = entier van x = grootste gehele getal $\leqq$ x.

i. Momenten en cumulanten: $(k \geqq 0)$

$$\mu_{|k,B} = n^{!k} q^k$$

$$\mu_{k,B} = \sum_0^n m \binom{n}{m} p^{n-m} q^m m^k$$

$$\tilde{\mu}_{k,B} = \sum_0^n m \binom{n}{m} p^{n-m} q^m (m-nq)^k$$

$$\kappa_{k,B} = n\, \vartheta_k(q)$$

Speciaal: $\kappa_{1,B} = \mu_{1,B} = nq$; $\sigma_B^2 = npq$; $\kappa_{3,B} = npq(p-q)$;

$$\kappa_{4,B} = npq(1-6pq) \text{ ; } \gamma_1 = \frac{p-q}{\sqrt{npq}} \text{ ; } \gamma_2 = \frac{1-6pq}{npq}$$

j. Speciaal geval: Symmetrische variabele van Bernoulli.
Symbool B(sym): $B(sym) = B(\frac{1}{2};n)$

$$Z_{B(sym)}(\tau) = e^{\frac{1}{2}n\tau}(\operatorname{ch} \tfrac{1}{2}\tau)^n \text{ ; } \varphi_{B(sym)}(t) = e^{\frac{1}{2}nit}(\cos \tfrac{1}{2}t)^n$$

k. Karakteristieke fct van de standaard-variabele:

$$\underline{x}_{B(st)} = (\underline{x}_B - \mu_{1,B})\sigma_B^{-1}$$

$$Z_{B(st)} = \left(p e^{-\tau\sqrt{\frac{q}{np}}} + q e^{+\tau\sqrt{\frac{p}{nq}}}\right)^n$$

l. Collectie van Bernoulli-Poisson: Deze is de generalisatie van de collectie van Bernoulli, verkregen door n (al dan niet verschillende) alternatieven te nemen in plaats van n maal hetzelfde alternatief. (Vgl. Hfdst 2, § 3, punt 12). Symbool: BP.

$$C_{BP} = \prod_1^n (p_i A + q_i B) \qquad (p_i = 1-q_i)$$

$$Z_{BP} = \prod_1^n (p_i + q_i e^{\tau})$$

$$z_{BP} = \sum_1^n \ln(p_i + q_i e^{\tau})$$

$$\kappa_{k,BP} = \sum_1^n \vartheta_k(q_i)$$

m. Geitereerde verdeling: De N-voudig geitereerde verdeling van $F_{B(q,n)}$ is $F_{B(q,Nn)}$; die van $F_{BP(q_1,\ldots\ldots,q_n)}$ is $F_{BP(q_1,\ldots,q_1,\ldots\ldots,q_n,\ldots,q_n)}$ waarbij elke q_i N maal voorkomt.

4. Collectie van Poisson. Symbool P, zo nodig $P(\alpha)$.

a. Definitie: De collectie van Poisson is de limiet voor $n \to \infty$ van een rij collecties van Bernoulli (met ontmerkt kenmerk voor een "wansucces"), waarbij nq een eindige positieve limiet α heeft (dus lim q = 0 is).

b. Collectief kenmerk:

$$C_p = \lim_{\substack{n\to\infty \\ nq\to\alpha}} (p+qB)^n = \lim \{1+q(B-1)\}^n = e^{\alpha(B-1)} = e^{-\alpha(1-B)}$$

c. Interpretatie: We beschouwen een centrifuge, aan welks omtrek langs de benedenrand op gelijke afstanden n gelijke openingen gemaakt zijn. Wanneer we een klein kogeltje langs de (verticaal gestelde) as in de centrifuge laten vallen, zal dit gelijke whn hebben, in één der openingen terecht te komen. Beschouwen we deze openingen als kenmerken $A_1, \dots, A_n$, dan is het collectieve kenmerk van de collectie van alle mogelijkheden $\frac{1}{n}\sum_1^n A_i$.

Laten we achtereenvolgens m = αn kogeltjes in de centrifuge verdwijnen, zodat elk onafhankelijk van alle andere gelijke whn heeft, in elk der openingen te komen, dan is het collectieve kenmerk van de collectie van alle (n^m) mogelijkheden

$$\left(\frac{1}{n}\sum_1^n A_i\right)^m ,$$

(multinomiale collectie met gelijke whn).

We letten nu alleen op één van de openingen A_1 = A, d.w.z. we ontmerken alle andere volledig ($A_2 = \dots = A_n = 1$).

We krijgen dan dus

$$\left\{\frac{1}{n}(A+1+\cdots\cdots+1)\right\}^m = \left\{\frac{1}{n}(A+n-1)\right\}^m = \left(1-\frac{1-A}{n}\right)^m$$

De limiet, die we bij constante nq > 0 (of bij tot een constante $\alpha > 0$ naderende nq) voor $n \to \infty$ (dus $\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \alpha$) krijgen is de collectie van Poisson. Het collectieve kenmerk is dus

$$C_p = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1-A}{n}\right)^{\alpha n} = e^{-\alpha(1-A)}$$

Hiervoor kunnen we ook schrijven

$$C_p = e^{-\alpha} \cdot e^{\alpha A} = \sum_0^\infty e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}A^k .$$

Het aantal kogeltjes, dat door de beschouwde opening A gaat kan dus alle (gehele) waarden $k \geqq 0$ aannemen met whn $P_k = e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}$. We hebben daarbij gebruik gemaakt (en zullen ook verder gebruik maken) van stellingen, die we hier niet kunnen bespreken, en die ons toestaan onder bepaalde onderstellingen uit limes-relaties van collectieve kenmerken tot overeenkomstige limes-relaties van de coëfficienten te besluiten (vg. bl. 59, Whr 148, punt 12). Van de hier bedoelde stellingen noemen we slechts een eenvoudig voorbeeld.

Zij voor ieder natuurlijk getal ν $C_\nu(A) = \sum_0^\infty c_{\nu k} A^k$

een machtreeks in A, convergent voor $0 \leqq A \leqq 1$, dus ook voor alle complexe A met $|A| \leqq 1$. Geldt d.a.

$$\lim_{\nu\to\infty} C_\nu(A) = C(A)$$

gelijkmatig voor alle complexe A met $|A| \leqq 1$, dan is $C(A)$ eveneens in een machtreeks $\sum_0^\infty{}_k c_k A^k$ ontwikkelbaar, en voor iedere k is

$$\lim_{\nu\to\infty} c_{\nu k} = c_k \quad .$$

Het is niet voldoende te onderstellen, dat de convergentie gelijkmatig is voor alle reële A met $0 \leqq A \leqq 1$. (of zelfs $|A| \leqq 1$).

In het hier beschouwde geval is overigens de limietovergang ook gemakkelijk aan de coëfficienten zelf te voltrekken:

$$\left\{\frac{1}{n}(A+n-1)\right\}^n = \sum_0^n{}_k \binom{n}{k} A^k (n-1)^{n-k}\, n^{-n} \quad ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{!k}}{k!}\left(\frac{n}{\alpha}-1\right)^{n-k}\left(\frac{n}{\alpha}\right)^{-n} = \frac{\alpha^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{!k}}{n^k}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-k} = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha} .$$

d. Variabele van Poisson: x_p = aantal "successen". Zij neemt uitsluitend gehele, niet-negatieve, waarden m aan.

e. Frequentiequotienten:

$$f_{m,p} = P[x_p = m] = e^{-\alpha}\frac{\alpha^m}{m!}$$

f. Verdelingsfct:

$$F_p(x) = \sum_0^{[x]}{}_m f_{m,p} = \sum_0^{[x]}{}_m e^{-\alpha}\frac{\alpha^m}{m!} = \frac{1}{[x]!}\int_\alpha^\infty e^{-u}u^{[x]}du .$$

$$R_p[x] = 1 - F_p(x) = \sum_{[x+1]}^\infty{}_m e^{-\alpha}\frac{\alpha^m}{m!} = \frac{1}{[x]!}\int_0^\alpha e^{-u}u^{[x]}dx .$$

g. Karakteristieke en entropische fct:

$$Z_p(\tau) = e^{\alpha(e^\tau - 1)}$$

$$z_p(\tau) = -\alpha + \alpha e^\tau .$$

h. Cumulanten en momenten:

$$\chi_{k,p} = \alpha \qquad (k \geqq 1)$$

$$\mu_{!k,p} = \alpha^k$$

$$\mu_{k,p} = \sum_0^\infty{}_m e^{-\alpha}\frac{\alpha^m m^k}{m!}$$

Speciaal: $\mu_{1,p} = \sigma_p^2 = \alpha$; $\mu_{2,p} = \alpha + \alpha^2$, $\mu_{!2,p} = \alpha^2$.

i. Invarianten:

$$\gamma_{1,p} = \frac{\chi_{3,p}}{\sigma_p^3} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \;;\; \gamma_{2,p} = \frac{\chi_{4,p}}{\sigma_p^4} = \frac{1}{\alpha} \;;\; \gamma_{h,p} = \alpha^{-\frac{1}{2}h} \quad (h \geqq 0).$$

j. Geitereerde verdelingen: De N-voudig geitereerde verdeling van $F_{P(\alpha)}$ is $F_{P(N\alpha)}$

k. Limietovergang $\alpha \to \infty$: Voor $\alpha \to \infty$, waarvoor men ook kan nemen $\frac{\alpha}{n}$ = constant, $n \to \infty$, is $\underline{x}_{P(\alpha)}$ de som van n onafhankelijke variabelen $\underline{x}_{P(\frac{\alpha}{n})}$, dus volgens Hfdst. 3 § 3, pt 12 asymptotisch normaal met $\mu = \frac{\alpha}{n}$ en $\sigma^2 = \frac{\alpha}{n}$.

l. Toepassing: De collectie van Poisson wordt zeer vaak toegepast, in het bijzonder, wanneer α een tijd- of ruimteinterval voorstelt. Men gaat dan uit van een collectie Γ_0 van objecten of gebeurtenissen, die over een tijd- of ruimtegebied G in het groot ongeveer gelijkmatig verdeeld is, d.w.z. dat bij willekeurige verdeling van G in een aantal even grote deelgebieden, mits deze niet te klein gekozen zijn, elk daarvan ongeveer evenveel objecten bevat. Indien nu in de rangschikking der objecten generlei regelmaat wordt waargenomen neemt men aan, dat bij willekeurige verdeling van G in een groot aantal even kleine gebieden $G_1, \ldots, G_n$ elk object even grote wh heeft, in elk dezer deelgebieden te komen. D.w.z. men beschouwt de gegeven collectie als een el ener collectie van collecties, waarbij de objecten op alle mogelijke wijzen over de deelgebieden verdeeld zijn, zodanig dat het aantal verdelingen, waarbij gegeven eln in gegeven deelgebieden liggen, onafhankelijk is van de keuze der eln en deelgebieden (zolang hun aantallen onveranderd blijven). Zijn er m objecten en n deelgebieden, dan krijgt men een multinomiale collectie $(\frac{1}{n}\sum_1^n G_i)^m$. Zijn de getallen m en n zeer groot en ontmerkt men ten aanzien van alle deelgebieden op één na, dan krijgt men een collectie van Poisson met $\alpha = \frac{m}{n}$; α wordt daardoor evenredig met de grootte der deelgebieden. Bij de werkelijke toepassing neemt men gewoonlijk voor de collectie van collecties in plaats van Γ_0 en alle mogelijke andere verdelingen, een verdeling van Γ_0 in een aantal grote collecties, elk waarvan in n kleine verdeeld is.

De collectie van Poisson kan gewoonlijk als model gebruikt worden bij tellingen van bacteriën, vetbolletjes e.d., in agar-platen en van rode bloedlichaampjes in de haemocybometer (de deelgebieden zijn dan oppervlakten van gegeven grootte), bij emissie van α - (of andere) deeltjes door een radio-actief praeparaat (de deelgebieden zijn dan tijdsintervallen). Nodig is steeds, 1° dat de deelgebieden zo klein gekozen worden, dat hun aantal minstens dezelfde orde van grootte heeft als het aantal objecten, 2° dat ze zo groot gekozen worden, dat het fq van objecten, die slechts gedeeltelijk in een gebied liggen, te verwaarlozen is en 3° dat eventuele systematische afwijkingen, daarin bestaande dat sommige groepen van deelgebieden een hoger, andere een lager gemiddeld objecten-aantal bevatten, te verwaarlozen zijn.

Enkele veel geciteerde voorbeelden van toepassing zijn afkomstig van L. von BORTKIEWICZ, Das Gesetz der kleinen Zahlen, 1898, wiens benaming "wet der kleine getallen" voor de verdeling van Poisson niet zeer gelukkig gekozen is.

5. Collectie van de Moivre of hypergeometrische collectie.
Symbool M(n), zo nodig $M(n; \nu_1, \nu_2)$.

a. Definitie: De collectie bestaat uit alle (gerangschikte) n-tallen van verschillende eln van een alternatief, ontmerkt ten aanzien van de rangschikking. Haar eln kunnen worden verkregen door n opeenvolgende trekkingen zonder teruglegging en ontmerking van de volgorde der trekkingsresultaten.

b. Collectief kenmerk: Ingevolge pag. 61 (Whr 150) is dit, als het gegeven alternatief door $A^{\nu_1} B^{\nu_2}$ ($\nu = \nu_1 + \nu_2$) wordt voorgesteld:

$$C_{M(n)} = C_{M(n;\nu_1,\nu_2)}(A',B';A,B) = \frac{1}{\nu^{!n}}\left(A'\frac{\partial}{\partial A} + B'\frac{\partial}{\partial B}\right)^{n} A^{\nu_1} B^{\nu_2} =$$

$$= \frac{1}{\nu^{!n}} \sum_{n_1} \binom{n}{n_1} \left(A'\frac{\partial}{\partial A}\right)^{n_1} A^{\nu_1}\, B'\left(\frac{\partial}{\partial B}\right)^{n-n_1} B^{\nu_2} =$$

$$= \sum_{n_1} \frac{\binom{n}{n_1} \nu_1^{!n_1} \nu_2^{!n_2}}{\nu^{!n}} A'^{n_1} B'^{n_2} A^{\nu_1-n_1} B^{\nu_2-n_2} \quad (n = n_1 + n_2)$$

of na ontmerking A = B = 1 en weglating der accenten

$$C_{M(n)} = C_{M(n)}(A,B) = C_{M(n)}(A,B;1,1) = \sum_{n_1} \frac{\binom{\nu_1}{n_1}\binom{\nu_2}{n_2}}{\binom{\nu}{n}} A^{n_1} B^{n_2} \quad (n = n_1 + n_2).$$

c. Samenvattend collectief kenmerk van de volledige monstercollectie bij gegeven uitgangscollectie $A^{\nu_1} B^{\nu_2}$.

Beslis hoeveel trekkingen ($n \leq \nu$) uit de gegeven collectie gedaan zullen worden door dit aantal gelijk te nemen aan het aantal "successen" (Y) bij een Bernoulliaanse steekproef van de uitgebreidheid ν uit een hulpalternatief met fqn P = 1-Q en Q.

$$C_M = \sum_0^{\nu} {}_{n}\, C_{B(\nu,n)}(P,Q)\int_0^1 dX \cdot S_{A,B}^{AX,BX}\left(A'\frac{\partial}{\partial A} + B'\frac{\partial}{\partial B}\right) A^{\nu_1} B^{\nu_2} =$$

$$= \sum_0^{\nu} {}_{n} \binom{\nu}{n} P^{\nu-n} Q^{n} C_{M(n;\nu_1,\nu_2)}(A',B';A,B) =$$

$$= \sum_{n_1,n_2} \binom{\nu_1}{n_1}\binom{\nu_2}{n_2} P^{\nu-n} Q^{n} A'^{n_1} B'^{n_2} A^{\nu_1-n_1} B^{\nu_2-n_2} =$$

$$= (PA + QA')^{\nu_1} (PB + QB')^{\nu_2}$$

of met $P = \frac{1}{1+\zeta}$, $Q = \frac{\zeta}{1+\zeta}$ $(\zeta \geqq 0)$

$$(1+\zeta)^{\nu} C_M = \sum_0^{\nu} {}_{n} \binom{\nu}{n} \zeta^{n} C_{M(n)} = (A + \zeta A')^{\nu_1} (B + \zeta B')^{\nu_2}.$$

$C_{M(n)}$ wordt dus verkregen door het rechterlid naar ζ te ontwikkelen en de coëfficient van ζ^n door $\binom{\nu}{n}$ te delen.

d. Generalisatie: Bij een willekeurig aantal (r) kenmerken $A_1, \ldots, A_r$ met fqn $\nu_1, \ldots, \nu_r$ is de uitgangscollectie $\prod A_\lambda^{\nu_\lambda}$ en voorts

$$C_{M(n)} = \frac{1}{\binom{\nu}{n}} \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_r \\ \sum n_\lambda = n}} \prod \binom{\nu_\lambda}{n_\lambda} A_\lambda^{n_\lambda} A_\lambda'^{\,\nu_\lambda - n_\lambda} \qquad \left(\nu = \sum_\lambda \nu_\lambda\right)$$

$$C_M = \prod (PA_\lambda + QA_\lambda')^{\nu_\lambda} .$$

e. Variabele van de Moivre: $\underline{x}_{M(n)}$ = aantal keren, dat kenmerk B' (korte notatie: B) verkregen wordt bij n trekkingen.

f. Frequentiequotienten:

$$p_m = P\left[\underline{x}_{M(n)} = m\right] = \frac{\binom{\nu_1}{n-m}\binom{\nu_2}{m}}{\binom{\nu}{n}} = \frac{\binom{n}{m}\binom{\nu-n}{\nu_2-m}}{\binom{\nu}{\nu_2}} =$$

$$= \frac{\nu_1!\,\nu_2!\,n!\,(\nu-n)!}{(n-m)!\,(\nu_1-n+m)!\,m!\,(\nu_2-m)!\,\nu!} = \frac{(-1)^m\,\nu_1^{!n}}{\nu^{!n}} \; \frac{n^{!m}\,\nu_2^{!m}}{m!\,(n-\nu_1-1)^{!m}}$$

[1])

g. De hypergeometrische fct [2]) $F(a,b;c;x)$ is voor $|x|<1$ gedefinieerd als

$$F(a,b;c;x) = 1 + \frac{ab}{1.c}x + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{1.2.\,c(c+1)}x^2 + \cdots$$

$$= \sum_0^\infty {}_m \frac{(-x)^m}{m!} \; \frac{(-a)^{!m}(-b)^{!m}}{(-c)^{!m}}$$

of

$$F(-\alpha,-\beta;-\gamma;-y) = \sum_0^\infty {}_m \frac{\alpha^{!m}\beta^{!m}}{m!\,\gamma^{!m}} y^m$$

Derhalve is p_m de coëfficient van x^m in de ontwikkeling van

$$\frac{\nu_1^{!n}}{\nu^{!n}} F(-n, -\nu_2; \nu_1-n+1; x)$$

h. Eigenschappen van de hypergeometrische fct:

1. $$\frac{d}{dx}F(a,b;c;x) = \frac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;x)$$

2. $F(a,b;c;x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2} + \left\{c-(a+b+1)x\right\}\frac{dF}{dx} - abF = 0$$

---

[1]) Hierbij is gebruik gemaakt van: $(\nu_1-n+m)^{!m} = (-1)^m(n-\nu_1-1)^{!m}$

[2]) Vgl. E.T. Whittaker and G.N. Watson, A course of modern analysis, 1st ed. 1902, 4th ed. 1946, Ch. XIV.

3. $F(-n,\beta;\beta;x) = (1-x)^n$

$F(1,1;2;x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x}$

$\lim\limits_{\beta\to\infty} F(1,\beta;1;\frac{x}{\beta}) = e^x$

4. Is $\Re c > \Re b > 0$ dan is bij passende keuze van de waarde der (in het algemeen meerduidige, complexe) fct$(1-ux)^{-a}$ voor $|x|<1$

$$F(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-ux)^{-a}\,du$$

Onder de voorwaarden $-a \ngeq 0$ geheel, $\Re b < \Re c < \Re(a+1)$

$$F(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-c)\Gamma(c-b)}\int_0^1 u^{a-c}(1-u)^{c-b-1}(u-x)^{-a}\,du$$

Onder de voorwaarden $-a \geq 0$ geheel, $\Re b \ngtr \Re c < \Re(a+1)$, is

$$F(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(-c+1)\Gamma(b)}\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{a-c}((1-u)+ux)^{-a}\,du$$

i. Verdelingsfct:

$$F_{M(n)}(x) = \frac{\sum_{n_2=0}^{[x]}\binom{\nu_1}{n-n_2}\binom{\nu_2}{n_2}}{\binom{\nu}{n}} = \frac{\sum_{n_2=0}^{[x]}\binom{n}{n_2}\binom{\nu-n}{\nu_2-n_2}}{\binom{\nu}{\nu_2}}$$

In de volledige collectie:

$$F_M(x) = \sum_{n=0}^{\nu}\binom{\nu}{n}P^{\nu-n}Q^{n}F_{M(n)}(x) =$$
$$= \sum_{n_2=0}^{[x]}\sum_{n_1=0}^{\nu_1}\binom{\nu_1}{n_1}\binom{\nu_2}{n_2}P^{\nu-n_1-n_2}Q^{n_1+n_2} =$$
$$= (P+Q)^{\nu_1}\sum_{n_2=0}^{[x]}\binom{\nu_2}{n_2}P^{\nu_2-n_2}Q^{n_2} = F_{B(\nu_2,Q)}(x)$$

j. Karakteristieke fct:

$$Z_M(\tau) = (P+Q)^{\nu_1}(P+Qe^{\tau})^{\nu_2} = \sum_n\binom{\nu}{n}P^{\nu-n}Q^{n}Z_{M(n)}(\tau)$$

$$Z_{M(n)}(\tau) = \sum_{n_2=0}^{\nu_2}\frac{\binom{\nu_1}{n-n_2}\binom{\nu_2}{n_2}}{\binom{\nu}{n}}e^{n_2\tau} = \frac{\nu_1^{!n}}{\nu^{!n}}F(-n,-\nu_2;\nu_1-n+1;e^{\tau})$$

k. Factoriele momenten, cumulanten:

Daar $n_2^{!k} = 0$ is voor $n_2 < k$ is:

$$\mu_{!k,M(n)} = \binom{\nu}{\nu_2}^{-1} \sum_{n_2=k}^{n} \binom{n}{n_2}\binom{\nu-n}{\nu_2-n_2} n_2^{!k} =$$

$$= \binom{\nu}{\nu_2}^{-1} n^{!k} \sum_{n_2=k}^{n} \binom{n-k}{n_2-k}\binom{\nu-n}{\nu_2-n_2} =$$

$$= \binom{\nu}{\nu_2}^{-1} n^{!k} \binom{\nu-k}{\nu_2-k} = \frac{n^{!k}\,\nu_2^{!k}}{\nu^{!k}} \qquad {}^{1})$$

Of ook uit

$$\sum_k \mu_{!k,M} \frac{\tau^k}{k!} = Z_n(\ln(1+\tau)) = C(1,1+\tau) = (1+Q\tau)^{\nu_2}$$

dus

$$\mu_{!k,M} = \nu_2^{!k} Q^k = (P+Q)^{\nu-k} Q^k \nu_2^{!k} = \sum \binom{\nu}{n} P^{\nu-n} Q^n \mu_{!k,M(n)}$$

$$\mu_{!k,M(n)} = \binom{\nu}{n}^{-1} \nu_2^{!k} \binom{\nu-k}{\nu-n} = \frac{n^{!k}\,\nu_2^{!k}}{\nu^{!k}}$$

Speciaal (onder weglating van M(n)) als men $p = \frac{\nu_1}{\nu}$ en $q = \frac{\nu_2}{\nu}$ stelt:

$$\mu = \mu_1 = n \cdot \frac{\nu_2}{\nu} = nq$$

$$\mu_{!2} = n(n-1)\frac{\nu_2(\nu_2-1)}{\nu(\nu-1)} = n(n-1)\, q\left(q - \frac{p}{\nu-1}\right)$$

$$\mu_{!3} = n(n-1)(n-2)\frac{\nu_2(\nu_2-1)(\nu_2-2)}{\nu(\nu-1)(\nu-2)} = n(n-1)(n-2)\, q\left(q-\frac{p}{\nu-1}\right)\left(q-\frac{2p}{\nu-2}\right)$$

$$\mu_{!4} = n(n-1)(n-2)(n-3)\, q\left(q-\frac{p}{\nu-1}\right)\left(q-\frac{p}{\nu-2}\right)\left(q-\frac{3p}{\nu-3}\right)$$

dus:

$$\sigma^2 = \mu_{!2} + \mu - \mu^2 = n\frac{(\nu-n)\,\nu_1\nu_2}{\nu^2(\nu-1)} = npq\frac{\nu-n}{\nu-1} = pqn - pq\frac{n^{!2}}{\nu-1}$$

$$\tilde{\mu}_3 = \mu_{!3} + 3\mu_{!2}(1-\mu) + \mu(1-\mu)(1-2\mu)$$

---

¹)Hierbij is gebruik gemaakt van $\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}\binom{q}{s-r} = \binom{p+q}{s}$
Zie Whr, § 2, Momenten, bl. 86.

$$\tilde{\mu}_3 = \frac{n p q (p-q)(\nu-n)(\nu-2n)}{(\nu-1)(\nu-2)}$$

$$\tilde{\mu}_4 = \mu_{!4} + 2\mu_{!3}(3-2\mu) + \mu_{!2}(7-12\mu+6\mu^2) + \mu(1-\mu)(3\mu^2-3\mu+1) =$$

$$= \frac{n p q (\nu-n)}{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}\left[\nu(\nu+1) - 6n(\nu-n) - 3pq\{n(\nu+6)(n-\nu)+2\nu^2\}\right]$$

l. Overgang naar collectie van Bernoulli:

Voor $\frac{\nu_1}{\nu} = p$, $\frac{\nu_2}{\nu} = q$ en $\nu \to \infty$ gaat de collectie van de Moivre bij gegeven constante n in die van Bernoulli over [1]. Het collectieve kenmerk van de volledige collectie gaat niet in dat van Bernoulli over, dat in 3,d genoemd is (met hulp-whn $X^n(1-X)$ gevormd), maar met $Q \to 0$, $Q\nu \to \alpha$ in $e^{\alpha(pA'+qB')-\alpha}$, dat op overeenkomstige wijze met hulp-whn van Poisson, t.w. $e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}$ gevormd is. Bij de limietovergangen kan gebruikgemaakt worden van

$$\frac{(\nu_2-m)^{!k}}{(\nu-m)^{!k}} \longrightarrow q^k \quad , \quad \frac{(n-m)^{!k}}{(\nu-m)^{!k}} \longrightarrow 0 \qquad \text{enz.}$$

m. Limietovergangen: Vgl. hiervoor punt 7,b.

6. Verdeling van Pascal of negatief-binomiale verdeling.

Symbool P_{sc}, $P_{sc}(m)$, $P_{sc}(q)$, $P_{sc}(q,m)$

a. Definitie: $\underline{n} = \underline{x}_{P_{sc}(q,m)}$ is het aantal onderling onafhankelijke trekkingen uit een constant alternatief, dat benodigd is om m "successen" (fq q) te behalen. De laatste trekking moet een succes zijn; de n-1 overige bestaan uit m-1 successen en n-m wansuccessen in willekeurige volgorde. Dus:

b. Frequentiequotienten:

$$p_{(m)n} = P\left[\frac{\underline{n} = n}{\underline{m} = m}\right] = \binom{n-1}{m-1} p^{n-m} q^m \qquad (m \leqq n < \infty)$$

$$p_{(m)n} = 0 \qquad (n \leqq m-1)$$

c. Collectief kenmerk: $C_{P_{sc}(m)} = \sum_{m}^{\infty}{}_n\, p_{(m)n} A^n = q^m \sum_{m}^{\infty}{}_n \binom{n-1}{m-1} p^{n-m} A^n.$

---

[1]) Uit de verwisselbaarheid van n en ν_2 bij gegeven ν, die vooral in $\mu_{!k}$ duidelijk tot uitdrukking komt (vgl. ook pt. i), volgt dat ditzelfde voor $\nu \to \infty$, $n \to \infty$, $\frac{n}{\nu} \to$ constante, ν_2 = constant, het geval is.

$$= q^m A^m \sum_0^\infty {}_k \binom{k+m-1}{m-1} (pA)^k = A^m \left(\frac{1-p}{1-pA}\right)^m =$$

$$= A^m (p' + q'A)^{-m}$$

als $p' = \frac{1}{1-p} = \frac{1}{q}$ en $q' = 1 - p' = \frac{-p}{q}$ is. Formeel heeft $C_{P_{sc}(m)}$ dus (behoudens de factor A^m, die niet terzake doet) dezelfde eigenschappen als $C_{B(n)}$ met negatieve $n = -m$ en negatieve q' (dus $p' > 1$). Om deze reden wordt de verdeling van n bij constante m ook wel de negatief binomiale verdeling genoemd.

d. Limietovergangen: Voor $m \to \infty$, $0 < \lim_{m \to \infty} pm = \alpha$ (eindig) is:

$$\lim_{m \to \infty} C_{P_{sc}(m)} A^{-m} = e^{\alpha(A-1)} = C_{P(\alpha)}$$

het collectieve kenmerk der collectie van Poisson (de factor A^m in $C_{P_{sc}(m)}$ heeft slechts formele betekenis; zij kan door een onbelangrijke wijziging der definitie verwijderd worden). Daarentegen is voor constante p $\underline{x}_{P_{sc}(m)}$ asymptotisch normaal (vgl. Hfdst. 3, § 3, punt 12) daar deze variabele de som is van m onafhankelijke variabelen, elk volgens P_{sc} (1) verdeeld.

e. Samenvattend collectief kenmerk:

$$C_{P_{sc}} = \sum_0^\infty {}_m\, y^m (1-y) C_{P_{sc}(m)} = \frac{(1-y)(1-pA)}{1-pA-qAy}$$

Dit resultaat kan (in iets andere notatie) rechtstreeks uit C_B (punt 3) verkregen worden en zelfs in veel algemenere vorm. Zij:

$$C = \sum_{m,n} X^n (1-X)\, p_{(n)}(m)\, B^m$$

het collectief kenmerk van een rij van n trekkingen, waarbij m maal het kenmerk B verkregen wordt. De trekkingen behoeven niet onafhankelijk en uit een constant alternatief gedaan te zijn; is dat wel het geval, dan is $C = C_B$. Zij $p_{(m)}(n)$ de wh dat precies n trekkingen nodig zijn om B^m te krijgen. We zullen aantonen, dat

$$1 - C = \sum_{m,n} B^{m-1}(1-B)\, p_{(m)}(n)\, X^n \qquad \text{is.}$$

Interpretatie van C: we werpen met een (valse) munt met wh X voor "munt" totdat voor het eerst "kruis" komt. Is n maal "munt" geworpen, dan doen we n trekkingen. Worden daarbij m successen verkregen, dan trekken we m maal (onafhankelijk) uit een loterij met wh 1-B op een "niet" (= "catastrophe"). Dan is C de wh dat geen enkele "niet" geloot wordt. Men kan nu telkens achtereenvolgens werpen, trekken (mits "munt" geworpen is), loten (mits een succes getrokken is); C is de wh dat deze serie proeven eindigt doordat "kruis" geworpen wordt. Zij kan echter ook zonder dat "kruis" geworpen wordt eindigen, doordat een "niet" geloot wordt. De totale wh daarvoor is 1-C, daar de totale wh, dat zij niet eindigt wegens $X < 1$, dus $\lim_{n \to \infty} X_n = 0$, nul is.

Zijn voordien m-1 "prijzen" geloot (wh = B^m (1-B)) en is $p_{(m)}(n)$ de wh dat n trekkingen nodig zijn om m successen te bereiken, dan is $\sum_m B^{m-1}(1-B)p_{(m)}(n)$ de wh, dat n trekkingen nodig zijn om een "niet" te loten; de wh, dat deze n trekkingen gedaan worden is X^n (nu géén factor 1-X, daar "kruis" niet geworpen is), dus de totale wh, dat een "niet" geloot wordt is $\sum_{m,n} B^{m-1}(1-B)\, p_{(m)}(n)X^n$. Daar dit anderzijds = 1-C is, is de gestelde relatie verkregen.

f. Karakteristieke fct:

$$Z_{Psc(q,m)}(\tau) = \left(\frac{1-p}{1-p.e^{\tau}}\right)^m$$

$$Z_{Psc(q,m)}(\ln(1+\xi)) = \left(\frac{q}{q-p\xi}\right)^m = \left(1-\frac{p}{q}\xi\right)^{-m}$$

$$z_{Psc(q,m)}(\tau) = m \ln \frac{1-p}{1-pe^{\tau}} .$$

g. Verdelingsfct: $n = [x]$

$$F_{Psc(q,m)}(x) = \sum_{0}^{n}{}_{\nu} \binom{\nu-1}{m-1} p^{\nu-m} q^m = \sum_{m}^{n}{}_{\nu} \binom{\nu-1}{m-1} p^{\nu-m} q^m =$$

$$= \sum_{0}^{n-m}{}_{\lambda} \binom{\lambda+m-1}{\lambda} p^{\lambda} q^m = \sum_{0}^{n-m}{}_{h} \binom{n}{h} p^h q^{n-h} =$$

$$= F_{B(1-q,n)}(n-m) =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!\,(m-1)!} \int_p^1 u^{n-m}(1-u)^{m-1}\,du =$$

$$= \binom{n}{m} \int_0^q (1-v)^{n-m}\, d(v^{m-1}) .$$

PIERRE REMOND DE MONTMORT (1678-1718) bewees (Essai d'Analyse sur les Jeux de Hazards, 1708, 2^{me} éd. 1714) dat

$$\sum_{0}^{\nu-\ell-1}{}_{n} \binom{\ell+n}{n} p^n q^{\ell+1} = \sum_{0}^{\nu-\ell-1}{}_{h} \binom{\nu}{h} p^h q^{\nu-h} \qquad (\text{dus } F_{Psc(q,\ell+1)}(\nu-\ell-1))$$

de wh is, dat bij opeenvolgende trekkingen uit een alternatief pA + qB $B^{\ell+1}$ optreedt voordat A^{ν} optreedt. Voor $p = q = \frac{1}{2}$ was dit resultaat in andere gedaante reeds door PASCAL verkregen bij zijn onderzoekingen over het "Problème des Partis" (Traité du Triangle Arithmétique, 1665); voor $p \neq \frac{1}{2}$ was het resultaat aan JACOB en JOHAN BERNOULLI bekend.

h. Momenten en cumulanten:

$$\mu_{!k,Psc} = (-m)^{!k}\left(-\frac{p}{q}\right)^k = (m+k-1)^{!k}\left(\frac{p}{q}\right)^k$$

$$\mu_{k,Psc} = q^m \sum_0^\infty \binom{n+m-1}{n} p^n n^k$$

$$\varkappa_{k,Psc} = -m . D_k\left(-\frac{p}{q}\right)$$

Speciaal: $\varkappa_{1,Psc} = m\frac{p}{q}$; $\varkappa_{2,Psc} = \frac{mp}{q^2}$; $\varkappa_{3,Psc} = \frac{mp(1+p)}{q^3}$;

$$\varkappa_{4,Psc} = \frac{mp}{q^2}\left(1+\frac{6p}{q^2}\right) ; \gamma_{1,Psc} = \frac{1+p}{\sqrt{mp}} ; \gamma_{2,Psc} = \frac{q^2+6p}{mp} .$$

7. Verdeling van Eggenberger-Polya.

Symbool EP, EP(δ), EP(ν_1, ν_2 ; δ)

Lit.: F. Eggenberger en G. Polya, Ueber die Statistik verketteter Vorgänge, Zs.f. angewandte Math. u. Mech. 3 (1923), 279-289.

a. Definitie: Uitgaande van een collectie C_0 van de uitgebreidheid ν waarop een kategorisch systeem van r kenmerken A_λ ($1 \leq \lambda \leq r$) gegeven is, die met fqn ν_λ ($\sum \nu_\lambda = \nu$) voorkomen, wordt een rij opeenvolgende trekkingen gedaan, waarbij telkens als een el A_λ getrokken wordt, dit el benevens δ andere die ditzelfde kenmerk dragen (weer) aan de collectie worden toegevoegd.

De collectie van alle mogelijke trekkingsreeksen (resp. alle, van de lengte n) zullen we de collectie C_{EP} (resp. $C_{EP(n)}$) van Eggenberger-Polya noemen. Voor r = 2, $A_1 = A$, $A_2 = B$, zullen we het aantal bij n trekkingen verkregen "successen" (kenmerk B) de variabele $x_{EP(n)}$ van Eggenberger-Polya noemen.

b. Speciale gevallen: Voor $\delta = 0$ krijgt men eenvoudig de collectie van Bernoulli; voor $\delta = -1$ de collectie van de Moivre (t.w. voor r = 2; anders haar genaralisatie, zie punt 5d). We laten namelijk ook negatieve waarden van δ toe, waarbij -c eln toevoegen (c > 0) geinterpreteerd wordt als c eln wegnemen.

c. Collectief kenmerk: De uitgangscollectie C_0 is een el van de collectie C_{EP} (bestaande uit "alle" trekkingsreeksen van de lengte 0). Als zodanig schrijven we:

$$C_{EP(0)} = C_0 = \prod_1^r A_\lambda^{\nu_\lambda}$$

Volgens § 2, punt 7, pag 62, whr 151 geeft één trekking:

$$C_{EP(1)} = \left(\sum A'_\lambda A_\lambda^{\delta+1} \frac{\nu_\lambda}{\nu} A_\lambda^{-1}\right) C_0 =$$

$$= \frac{1}{\nu}\left(\sum A'_\lambda A_\lambda^{\delta+1} \frac{\partial}{\partial A_\lambda}\right) C_0 = -\frac{\delta}{\nu}\left(\sum A'_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda^{-\delta}}\right) C_0$$

en n trekkingen, daar we op de volgorde der trekkingsresultaten niet letten:

$$C_{EP(n)} = \frac{1}{\left(\frac{-\nu}{\delta}\right)^{!n}} \left(\sum_\lambda A'_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda^{-\delta}}\right)^n C_0$$

d. Frequentiequotienten: Is na een aantal trekkingen de samenstelling $\prod A_\lambda^{\nu_\lambda^*}$ geworden, dan is de wh, eerst een kenmerk A_λ en dan A_μ ($\mu \neq \lambda$) te trekken:

$$\frac{\nu_\lambda^*}{\nu'} \cdot \frac{\nu_\mu^*}{\nu'+\delta}$$

dus gelijk aan de wh, deze kenmerken in omgekeerde volgorde te trekken. De wh van een trekkingsreeks is dus onafhankelijk van de volgorde der resultaten (dit ware niet het geval, zo na trekking van een A_λ $\delta_\lambda + 1$ eln met dit kenmerk zouden worden teruggelegd, waarbij niet alle δ_λ gelijk waren).

De wh van het trekkingsresultaat $\prod A_\lambda'^{\,n_\lambda}$ in een bepaalde volgorde in $n = \sum n_\lambda$ trekkingen is dus:

$$\frac{\{\nu_1(\nu_1+\delta)\ldots\ldots(\nu_1+n_1\delta-\delta)\}\ldots\ldots\{\nu_r(\nu_r+\delta)\ldots\ldots(\nu_r+n_r\delta-\delta)\}}{\nu(\nu+\delta)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\nu+n\delta-\delta)} =$$

$$= \frac{\prod\left(-\frac{\nu_\lambda}{\delta}\right)^{!n_\lambda}}{\left(-\frac{\nu}{\delta}\right)^{!n}}$$

Daar het aantal verschillende volgorden de multinomiaalcoefficient $\frac{n!}{\prod n_\lambda!}$ is, is dus de wh van $\prod A_\lambda'^{\,n_\lambda}$ in een willekeurige volgorde:

$$P_{n_1,\ldots,n_r} = \frac{n!}{\left(-\frac{\nu}{\delta}\right)^{!n}} \prod_\lambda \frac{\left(-\frac{\nu_\lambda}{\delta}\right)^{!n_\lambda}}{n_\lambda!} = \frac{\prod_\lambda \binom{-\nu_\lambda/\delta}{n_\lambda}}{\binom{-\nu/\delta}{n}} = \frac{\prod_\lambda \binom{\nu_\lambda/\delta + n_\lambda - 1}{n_\lambda}}{\binom{\nu/\delta + n - 1}{n}} .$$

Dit kan ook uit $C_{EP(n)}$ worden gevonden door de operator volgens het binomium van Newton te ontwikkelen:

$$C_{EP(n)} = \frac{n!}{\left(-\frac{\nu}{\delta}\right)^{!n}} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r \\ \sum n_\lambda = n}} \prod_\lambda \frac{A_\lambda'^{\,n_\lambda}}{n_\lambda!} \left(\frac{\partial}{\partial A_\lambda^{-\delta}}\right)^{n_\lambda} \prod A_\lambda^{\nu_\lambda} =$$

$$= \frac{n!}{\left(-\frac{\nu}{\delta}\right)^{!n}} \sum_{\substack{n_\lambda \\ \sum n_\lambda = n}} \prod_\lambda \frac{A_\lambda'^{\,n_\lambda}}{n_\lambda!} \left(-\frac{\nu_\lambda}{\delta}\right)^{!n_\lambda} A_\lambda^{\nu_\lambda + n_\lambda\delta} =$$

$$= \sum_{\substack{n_\lambda \\ \sum n_\lambda = n}} P_{n_1,\ldots,n_r} \prod_\lambda A_\lambda'^{\,n_\lambda} A_\lambda^{\nu_\lambda + n_\lambda\delta}$$

e. Negatieve δ: Voor $\delta = -c < 0$ krijgt men alleen dan een eenvoudig resultaat als alle ν_λ door δ deelbaar zijn; anders kan het gebeuren dat van een kenmerk minder dan δ eln overblijven; de definitie zou dan aangevuld moeten worden met een voorschrift, wat er dan zou moeten gebeuren. We zullen daarom voor $-\delta = c > 0$ $\frac{\nu_\lambda}{c} = \nu_\lambda'$ geheel onderstellen. Daar dan bij trekking van een A_λ dit el teruggelegd moet worden, maar nog c eln van hetzelfde kenmerk weggenomen moeten worden, kan men ook de eln "bij bosjes" van c tegelijk (telkens van hetzelfde kenmerk) bij elkaar "binden" en telkens een heel bosje "trekken". De collectie van Eggenberger-Polya is dan dus niet anders dan die van de Moivre voor de "bosjes". Men heeft dan:

$$C_0 = \prod A_\lambda^{\nu_\lambda} = \prod (A_\lambda^c)^{\nu_\lambda'} \quad , P_{n_1,\dots,n_r} = \frac{\prod \binom{\nu_\lambda'}{n_\lambda}}{\binom{\nu'}{n}} \qquad \text{enz.}$$

Inderdaad gaan bij vervanging van $-\frac{\nu_\lambda}{\delta}$ door ν_λ alle formules in de overeenkomstige van de Moivre over.

<u>Dit blijft formeel ook het geval als δ positief is</u> al verliezen ze dan hun interpreteerbaarheid volgens de Moivre. Voor $\delta = 0$ kunnen we de formules voor de collectie van Bernoulli terugkrijgen door formeel tot de limiet voor $\delta \to 0$ over te gaan (zonder rekening te houden met het feit, dat de formules in ons probleem alleen zinvol zijn als δ geheel is). We kunnen dus formeel alle resultaten uit de voor de Moivre afgeleide verkrijgen door ν_λ door $\nu_\lambda' = \frac{-\nu_\lambda}{\delta}$, ν door $\nu' = -\frac{\nu}{\delta}$ en A_λ resp. A_λ' door $A_\lambda^{-\delta}$ resp. A_λ' te vervangen.

f. <u>Samenvattend collectief kenmerk</u>:

$$C_{EP} = \prod \left(P' A_\lambda^{-\delta} + Q' A_\lambda'\right)^{-\nu_\lambda/\delta} \qquad \text{(Zie punt 5a)}$$

We hebben hier P' en Q' in plaats van P en Q geschreven, omdat deze grootheden zich alleen in het (minder belangrijke) geval $\delta < 0$ op de oude wijze laten interpreteren: beslis met behulp van een collectie van Bernoulli van de uitgebreidheid $\nu' = -\frac{\nu}{\delta}$ hoeveel trekkingen gedaan zullen worden. Voor $\delta > 0$ is $-\frac{\nu_\lambda}{\delta} < 0$; we zullen dan dus P' en Q' interpreteren als behorende bij de "negatief-binomiale" verdeling van Pascal (zie punt 6.c). We stellen dan dus

$$P' = \frac{1}{1-P} \quad \text{en} \quad Q' = \frac{-P}{1-P} \qquad \text{en krijgen:}$$

$$C_{EP} = (1-P)^{\nu/\delta} \prod \left(A_\lambda^{-\delta} - P A_\lambda'\right)^{-\nu_\lambda/\delta} = \prod \left(\frac{1-P}{1-P A_\lambda' A_\lambda^{-\delta}}\right)^{\nu_\lambda/\delta} \prod A_\lambda^{\nu_\lambda}$$

Hierin komt P met $-\zeta$ uit punt 5.c overeen. Dan is (vgl. 5.c en 6.a):

$$C_{EP} = \sum_n \binom{-\nu/\delta}{n} P'^{\,-n-\nu/\delta} Q'^{\,n} C_{EP(n)} =$$

$$= (1-P)^{\nu/\delta} \sum_n \binom{n-1+\nu/\delta}{n} P^n C_{EP(n)}$$

zodat $C_{EP(n)}$ de door $\binom{n-1+\nu/\delta}{n}$ gedeelde coefficient van P^n in de ontwikkeling van

$$C_{EP}(1-P)^{-\nu/\delta} = \prod (A_\lambda - P A_\lambda^{1-\delta})^{-\nu_\lambda/\delta}$$

naar machten van P is.

Interpretatie hiervan voor $\delta > 0$: beslis hoeveel EP-trekkingen gedaan zullen worden door tevens trekkingen uit een constant alternatief met kans Q op een "succes" te doen, en daarop telkens een EP-trekking te doen volgen, en daarmede door te gaan, totdat (exclusief, daar n met m-1 in 6.a overeenstemt) n "successen" behaald zijn.

g. Verdelingsfct (vg. 5.i):

$$F_{EP(n)}(x) = \sum_{n_2=0}^{[x]} \frac{\binom{-\nu_1/\delta}{n-n_2}\binom{-\nu_2/\delta}{n_2}}{\binom{-\nu/\delta}{n}} =$$

$$= \sum_{n_2} \frac{\binom{n}{n_2}\binom{-\nu/\delta-n}{-\nu_2/\delta-n_2}}{\binom{-\nu/\delta}{-\nu_2/\delta}} = \sum_{n_2} \frac{\binom{\nu_1/\delta+n-n_2+1}{n-n_2}\binom{\nu_2/\delta+n_2-1}{n_2}}{\binom{\nu/\delta+n-1}{n}} =$$

$$= \sum_{n_2} \frac{\binom{n}{n_2}\binom{\nu/\delta-1}{\nu_1/\delta-1}}{\binom{\nu/\delta+n-1}{\nu_2/\delta+n_2-1}} .$$

h. karakteristieke fct (vgl. 5.j):

$$Z_{EP}(\tau) = (P'+Q'e^{\tau})^{-\nu_2/\delta} = \left(\frac{1-P}{1-Pe^{\tau}}\right)^{\nu_2/\delta} =$$

$$= (1-P)^{\nu/\delta} \sum_n \binom{-\nu/\delta}{n}(-P)^n Z_{EP(n)}(\tau)$$

$$Z_{EP(n)}(\tau) = \frac{\left(-\frac{\nu_1}{\delta}\right)^{!n}}{\left(-\frac{\nu}{\delta}\right)^{!n}} F\left(-n, \frac{\nu_2}{\delta}; -\frac{\nu_1}{\delta}-n+1; e^{\tau}\right) =$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{\nu_1}{\delta}, \frac{\nu_2}{\delta}\right)} \int_0^1 (1-u)^{\frac{\nu_1}{\delta}-1} u^{\frac{\nu_2}{\delta}-1} (1-u+ue^{\tau})^n \, du \quad (\delta > 0)$$

i. Factoriele momenten, cumulanten (vgl. 5.k):

$$\mu_{!k, EP(n)} = \frac{n^{!k} \left(-\frac{\nu_2}{\delta}\right)^{!k}}{\left(-\frac{\nu}{\delta}\right)^{!k}}$$

$$\mu_1 = \mu = n \frac{\nu_2}{\nu} = nq$$

$$\mu_{!2} = n(n-1) \frac{\nu_2(\nu_2+\delta)}{\nu(\nu+\delta)} = n(n-1)\, q\left(q + \frac{p\delta}{\nu+\delta}\right)$$

$$\mu_{!3} = n(n-1)(n-2) \frac{\nu_2(\nu_2+\delta)(\nu_2+2\delta)}{\nu(\nu+\delta)(\nu+2\delta)} =$$

$$= n(n-1)(n-2)\, q\left(q + \frac{p\delta}{\nu+\delta}\right)\left(q + \frac{2p\delta}{\nu+2\delta}\right)$$

$$\mu_{!4} = n(n-1)(n-2)(n-3)\, q\left(q + \frac{p\delta}{\nu+\delta}\right)\left(q + \frac{2p\delta}{\nu+2\delta}\right)\left(q + \frac{3p\delta}{\nu+3\delta}\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{n\nu_1\nu_2(\nu+\delta n)}{\nu^2(\nu+\delta)} = npq\left\{1 + (n-1)\frac{\delta}{\nu+\delta}\right\}$$

$$\tilde{\mu}_3 = \frac{npq(p-q)(\nu+n\delta)(\nu+2n\delta)}{(\nu+\delta)(\nu+2\delta)}$$

$$\tilde{\mu}_4 = \frac{npq(\nu+n\delta)}{(\nu+\delta)(\nu+2\delta)(\nu+3\delta)}\left[\nu(\nu-\delta) - 6n\delta(\nu+n\delta) + 3pq\{n(\nu-6\delta)(\nu+n\delta) - 2\nu^2\}\right]$$

j. Verdelingstypen:

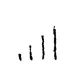
Bij constante n is $\dfrac{P_{n_1-1, n_2-1}}{P_{n_1, n_2}} = \dfrac{\nu_2 + n_2\delta}{\nu_1 + n_1\delta - \delta} \gtreqless 1$

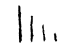
al naar gelang $\nu_2 + n_2\delta \gtreqless \nu_1 + n_1\delta - \delta$, dus voor $\delta > 0$

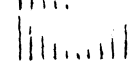
$$\Delta = \frac{\nu_2-\nu_1+\delta}{n\delta} \gtreqless \frac{n_1-n_2}{n} = \frac{2n_1}{n}-1 = 1-\frac{2n_2}{n} \qquad \text{en voor } \delta<0$$

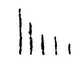
$$\Delta \lesseqgtr \frac{n_1-n_2}{n} \qquad \text{is.}$$

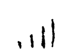
Derhalve geldt voor toenemende n_2:

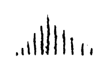
voor $\delta>0$, $\Delta \geqq 1$ is P_{n_1,n_2} monotoon stijgend: 

voor $\delta<0$, $\Delta \leqq -1$ is P_{n_1,n_2} monotoon dalend: 

voor $\delta>0$, $-1<\Delta<+1$ is P_{n_1,n_2} eerst dalend, dan stijgend: 
(met een minimum bij $\frac{n_2}{n} \approx \frac{1-\Delta}{2}$).

voor $\delta<0$, $\Delta \geqq 1$ is P_{n_1,n_2} monotoon dalend: 

voor $\delta>0$, $\Delta \leqq -1$ is P_{n_1,n_2} monotoon stijgend: 

voor $\delta<0$, $-1<\Delta<+1$ is P_{n_1,n_2} eerst stijgend, dan dalend: 
(met een maximum bij $\frac{n_2}{n} \approx \frac{1-\Delta}{2}$).

k. Toepassing: De verdelining is door Eggenberger ingevoerd om een model te verkrijgen voor de uitbreiding ener infectieziekte. Het "trekken" van een el komt dan overeen met het geïnfecteerd raken van een persoon. Het model heeft voor dit doel slechts een beperkte bruikbaarheid, doordat het hogelijk vereenvoudigd is. Geen rekening is er gehouden met: 1° overlijden van patienten, 2° natuurlijke en kunstmatige immunisering en isolatie van patienten, 3° variabiliteit van infectiekansen hetzij door fysiologische, hetzij door sociale eigenschappen der personen (vgl. reizigers en kluizenaars), enz. Een summier beeld van de infectiemogelijkheden vermag het echter wel te geven.

l. Limietovergang volgens Poisson:

Onderstel, dat ν_2, δ en $\frac{n\nu_2}{\nu_1}=\alpha$ van de orde 1 zijn ($\delta>0$), terwijl n, ν en $\nu_1 >> 1$ zijn. Zij $\frac{\nu_2}{\delta}=\beta$. Dan is $\nu_2=\beta\delta$, $\nu_1=n\frac{\beta}{\alpha}\delta$. We gaan bij constante α, β en δ tot de limiet voor $n\to\infty$ (dus ook $\nu_1\to\infty$, $\nu\to\infty$) over.

Voor de karakteristieke fct vinden we volgens h:

$$Z_{EP(n)}(\tau) = \frac{\left(\frac{\nu}{\delta}-1\right)!}{\left(\frac{\nu_1}{\delta}-1\right)!\left(\frac{\nu_2}{\delta}-1\right)!}\int_0^1 (1-u)^{\frac{\nu_1}{\delta}-1} u^{\frac{\nu_2}{\delta}-1}\left(1-u+ue^{\tau}\right)^n du =$$

$$= \frac{\left(\frac{n\beta}{\alpha}+\beta-1\right)^{\beta}}{(\beta-1)!}\int_0^1 (1-u)^{\frac{n\beta}{\alpha}}\left\{1-u(1-e^{\tau})\right\}^n u^{\beta-1}\,du \, .$$

Door de grote exponenten kunnen alleen vlak bij 0 gelegen waarden van u een bijdrage geven, die voor $n \longrightarrow \infty$ niet naar nul gaat. Dan is:

$$(1-u)^{\frac{n\beta}{\alpha}} \approx e^{-\frac{n\beta}{\alpha}u}$$

$$\{1-u(1-e^{\tau})\}^{n} \approx e^{-nu(1-e^{\tau})}$$ en

$$\left(\frac{n\beta}{\alpha}+\beta-1\right)!^{\beta} \approx \left(\frac{n\beta}{\alpha}\right)^{\beta}$$, dus

$$Z_{EP(\infty)}(\tau) = \lim_{n\to\infty} Z_{EP(n)}(\tau) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n\beta}{\alpha}\right)^{\beta}}{(\beta-1)!} \int_0^1 e^{-nu\left(\frac{\beta}{\alpha}+1-e^{\tau}\right)} u^{\beta-1}\, du =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\beta-1)!} \int_0^{\frac{n\beta}{\alpha}} e^{-t\left\{1+\frac{\alpha}{\beta}(1-e^{\tau})\right\}} t^{\beta-1}\, dt =$$

$$= \left\{1+\frac{\alpha}{\beta}(1-e^{\tau})\right\}^{-\beta}$$

daar $\int_{\frac{n\beta}{\alpha}}^{\infty}$ naar 0 gaat.

Het geval $\delta = 0$ is niet rechtstreeks hierin begrepen, maar kan, evenals in punt e formeel door limietovergang $\delta \to 0$, dus $\beta \to \infty$ verkregen worden. Dan is:

$$Z_{EP(n)}(\tau) \to \lim_{\beta\to\infty} \left\{1+\frac{\alpha}{\beta}(1-e^{\tau})\right\}^{-\beta} = e^{-\alpha(1-e^{\tau})} = Z_p(\tau) ,$$

de karakteristieke fct der verdeling van Poisson. De gevonden karakteristieke fct is voor gehele β die van Pascal (vgl. 6.f) met m $= \beta$, $p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

Ook voor negatieve δ , in het bijzonder voor $\delta = -1$ blijft de gevonden uitdrukking voor $Z_{EP(\infty)}$ geldig; daar in dat geval ook $\beta < 0$ is, krijgt men dan eenvoudig de verdeling van Bernoulli (althans voor gehele β , dus ν_2 deelbaar door $-\delta$, b.v. $\delta = -1$).

De verdeling van Eggenberger-Polya omvat dus als limietgevallen die van

Bernoulli voor lim $\frac{\delta}{\nu_2} < 0$

Poisson voor lim $\frac{\delta}{\nu_2} = 0$

Pascal voor lim $\frac{\delta}{\nu_2} > 0$.

De cumulanten van EP(∞) kunnen gevonden worden met gebruikmaken van de reeksontwikkeling:

$$\ln\{1+q(e^{\tau}-1)\} = q\tau + \frac{1}{2}q(1-q)\tau^2 + \frac{1}{6}q(1-q)(1-2q)\tau^3 + \frac{1}{24}q(1-q)(1-q+q^2)\tau^4 + \ldots\ldots$$
$$= \sum_0^{\infty} {}_k\, D_k(q) \cdot \frac{\tau^k}{k!}$$

(zie (Whr. bl. 90). Deze geeft namelijk met $q=-\frac{\alpha}{\beta}$:

$$\chi_{EP(\infty)}(\tau)=-\beta\ln\{1-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\tau}-1)\}=$$

$$=-\beta\sum_{1}^{\infty}{}_{k}\,D_k\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{\tau^k}{k!}=\alpha\tau+\frac{1}{2}\alpha\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\tau^2+\frac{1}{6}\alpha\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1+\frac{2\alpha}{\beta}\right)\tau^3+$$

$$+\frac{1}{24}\alpha\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\tau^4+\ldots\ldots$$

Dus: $\varkappa_1=\mu=\alpha$; $\varkappa_2=\sigma^2=\alpha\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)=\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\beta}$;

$$\varkappa_3=\frac{\alpha(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}{\beta^2}\quad;\quad\varkappa_4=\frac{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\beta^3}\quad;\ \text{enz.}$$

$$\gamma_1=\frac{2\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta(\alpha+\beta)}}\quad;\quad\gamma_2=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha\beta(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta(\alpha+\beta)}\quad;\ \text{enz}$$

Voor $\beta\to\infty$ gaan deze inderdaad in de overeenkomstige grootheden van Poisson's verdeling over.

De factoriële momenten, die reeds l.c. door Polya bepaald werden, zijn nog eenvoudiger te berekenen. (Polya gebruikt voor onze $\nu,\nu_1,\nu_2,\delta,$ n,α en β resp. de notaties : N, S, R, Δ, n, d en $\frac{h}{d}$)

m. Grote δ :

Interessant is nog het geval 3^o uit de tabel onder j, b.v. het geval van zeer grote δ (b.v. $\delta\gg\nu$). Dan is $\Delta\approx\frac{1}{n}$, dus $|\Delta|<1$. In dat geval is het eerste trekkingsresultaat vrijwel beslissend, doordat dan zoveel eln met hetzelfde kenmerk worden toegevoegd, dat het andere kenmerk bij de volgende trekking (en a fortiori bij nog latere) vrijwel geen kans meer heeft. Is b.v. $\nu_1=\nu_2=1$ en $\delta\gg 1$, dan is bij de eerste trekking $P_{01}=P_{10}=\frac{1}{2}$, bij de tweede is, als de eerste keer B getrokken is, de wh van A nog slechts $\frac{1}{1+\delta}$; wordt ook dan B getrokken, dan is bij de derde trekking de wh van A nog slechts $\frac{1}{1+2\delta}$, enz. Op deze wijze ziet men het (in dit geval zeer diepe) minimum ontstaan: bij n trekkingen (n>>1) worden hoogstwaarschijnlijk uitsluitend eln, alle met hetzelfde kenmerk getrokken, waarbij (voor $\nu_1=\nu_2$) beide kenmerken even grote whn hebben.

n. Limietovergangen naar variabelen van Pearson.

Vergelijk hiervoor § 3.

§2. De belangrijkste continue verdelingen van één variabele.

1. Homogeen verdeelde variabele. Symbool H of H(a,b)

a. Definitie: De variabele $x_{H(a,b)}$ is homogeen verdeeld in het interval, (a,b) als zij uitsluitend waarden in dit interval aanneemt en de wh, dat zij waarden uit een deelinterval van (a,b) aanneemt, evenredig is met de lengte van dat deelinterval. (De herhaaldelijk voorkomende formulering: "als zij alle waarden uit (a,b) met gelijke whn aanneemt" is als definitie ondeugdelijk: dit is voor iedere continue verdeelde variabele het geval, n.l. met de wh 0).

b. Verdelingsdichtheid:

$$f_{H(a,b)}(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ (b-a)^{-1} & a < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

$$= (b-a)^{-1}\{\iota(x-a) - \iota(x-b)\}$$

(Definitie der waarden voor x = a en x = b is overbodig).

c. Verdelingsfct:

$$F_{H(a,b)}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

$$= \frac{(x-a)\iota(x-a) - (x-b)\iota(x-b)}{b-a}$$

d. Karakteristieke fct:

$$Z_{H(a,b)}(\tau) = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{\tau x}\,dx = \frac{e^{b\tau} - e^{a\tau}}{(b-a)\tau}.$$

Voor de gereduceerde variabele:

$$Z_{H(a,b)}(\tau) = \frac{\operatorname{sh} \frac{b-a}{2}\tau}{\frac{b-a}{2}\tau}$$

Opmerking: Alle in §1 voorkomende karakteristieke fcts zijn periodiek, op de imaginaire as met reële periode, meestal 2π, daar de variabelen daar uitsluitend aequidistante (meestal gehele) waarden aannemen. Dit is hier niet meer het geval.

e. Speciaal geval: Homogene eenheidsvariabele: a = 0, b = 1

Symbool: H.

$$Z_H(\tau) = \frac{e^{\tau} - 1}{\tau}$$

$$Z_{H(red)}(\tau) = \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}\tau}{\frac{1}{2}\tau}$$

7. Momenten:

$$\mu_{H(a,b)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\tilde{\mu}_{k,H} = \begin{cases} 0 & \text{als k oneven is} \\ \dfrac{1}{2^k(k+1)} & \text{als k even is} \end{cases}$$

daar

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\tau}{\frac{1}{2}\tau} = \sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{(\frac{1}{2}\tau)^{2m}}{(2m+1)!} = \sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{1}{2^{2m}(2m+1)} \frac{\tau^{2m}}{(2m)!}$$

is. Speciaal:

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{12} \qquad (\text{vgl. } \sigma^2_{A(\frac{1}{2};0,1)} = \tfrac{1}{4})$$

$$\tilde{\mu}_{4,H} = \frac{1}{80} \ ; \ \kappa_{4,H} = \frac{1}{80} - \frac{3}{144} = -\frac{1}{120} \ ; \ \gamma_{2,H} = -\frac{6}{5}$$

8. Cumulanten: De cumulanten kunnen worden uitgedrukt met behulp van de getallen van Bernoulli (Jacob Bernoulli, Ars conjectandi). Men heeft n.l.:

$$\frac{\frac{1}{2}\tau}{\operatorname{th}\frac{1}{2}\tau} = 1 - \sum_{1}^{\infty}{}_n B_n \frac{(-\tau^2)^n}{(2n)!}$$

waarin B_n net n^e getal van Bernoulli is:

n	0	1	2	3	4	5	6
B_n	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{691}{2730}$

Dus

$$\frac{d}{d\tau} \ln \frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\tau}{\frac{1}{2}\tau} = \frac{\frac{1}{2}}{\operatorname{th}\frac{1}{2}\tau} - \frac{1}{\tau} = \sum_{1}^{\infty}{}_n (-1)^{n+1} B_n \frac{\tau^{2n-1}}{(2n)!}$$

en

$$\chi_{H(red.)}(\tau) = \ln \frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\tau}{\frac{1}{2}\tau} = \sum_{0}^{\infty}{}_n (-1)^{n+1} \frac{B_n}{2n} \frac{\tau^{2n}}{(2n)!}$$

dus

$$\kappa_{k,H} \begin{cases} 0 & \text{als k oneven is} \\ (-1)^{\frac{1}{2}k+1} \dfrac{B_{\frac{1}{2}k}}{k} & \text{als k even is} \end{cases}$$

Speciaal: enz.

$$\kappa_{2,H} = \sigma_H^2 = \frac{B_1}{2} = \frac{1}{12} \ ; \ \kappa_{4,H} = \frac{B_2}{4} = -\frac{1}{120} \ ; \ \kappa_{6,H} = \frac{B_3}{6} = \frac{1}{252}$$

g. Getransformeerde homogene verdeling:

Evenals bij de normale verdeling (zie beneden, punt 5) kunnen we ook hier variabelen $\underline{x}$ beschouwen, waarvan een functie homogeen verdeeld is. Dit is altijd het geval met de verdelingsfct van een stochatische variabele. Immers, hoe ook $\underline{x}$ verdeeld is, altijd is

$$F(x) = P[\underline{x} \leqq x] = P[F(\underline{x}) \leqq F(x)]$$

daar F(x) monotoon is, dus voor $0 \leqq y \leqq 1$

$$P[F(x) \leqq y] = y$$

dus

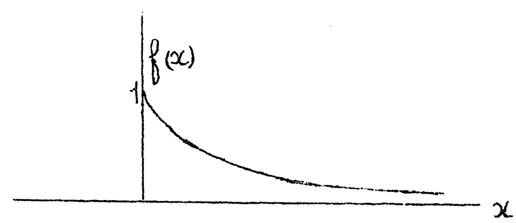
$$F(F(x)) = F_H(x)$$

d.w.z. $F(\underline{x})$ is homogeen verdeeld in (0,1). Dit is ook een der belangrijkste toepassingsgebieden der homogeen verdeelde variabelen, in het bijzonder in de theorie der steekproeven.

2. Exponentiele verdeling. Symbool E. (Verdeling van Pearson, type X).

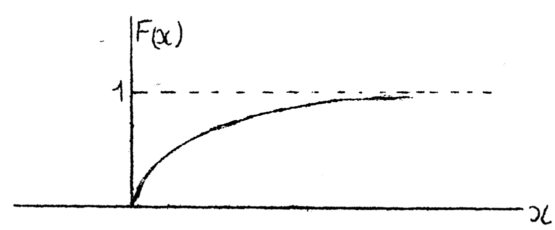
a. Definitie:

$$f_E(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geqq 0 \end{cases}$$



b. Verdelingsfct:

$$F_E(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq 0 \\ 1-e^{-x} & x \geqq 0 \end{cases}$$



c. Karakteristieke fct:

$$Z_E(\tau) = \frac{1}{1-\tau} \qquad \Re(\tau) < 1 \qquad ; \; z_E(\tau) = \ln \frac{1}{1-\tau} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\tau^k}{k}$$

d. Momenten en cumulanten:

$$\mu_{k,E} = k! \quad ; \; \varkappa_{k,E} = (k-1)! \qquad (k \geqq 1)$$

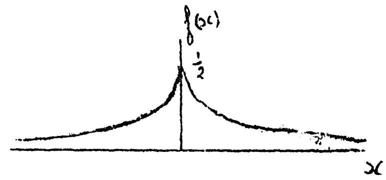
speciaal: $\mu = 1$; $\sigma^2 = 1$; $\varkappa_3 = 2 = \gamma_1$; $\varkappa_4 = 6 = \gamma_2$

e. Geitereerde verdelingen: zie Gamma-verdeling.

3. Verdeling van Laplace. Symbool L.

a. Definitie:

$$f_L(x) = \tfrac{1}{2}\, e^{-|x|}$$



b. Verdelingsfct:

$$F_L(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} & x \leqq 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & x \geqq 0 \end{cases} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \operatorname{sgn} x\, e^{-|x|}\right)$$

waarin $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{|x|} \quad (x \neq 0)$

c. Karakteristieke fct:

$$Z_L(\tau) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\tau} + \frac{1}{1+\tau}\right) = \frac{1}{1-\tau^2} \qquad |\mathcal{R}(\tau)| < 1$$

d. Momenten en cumulanten:

$$\mu_{k,L} = \begin{cases} 0 & k \text{ oneven} \\ k! & k \text{ even} \end{cases}$$

$$\varkappa_{k,L} = \begin{cases} 0 & k \text{ oneven} \\ \dfrac{k!}{\frac{1}{2}k} & k \text{ even} \end{cases}$$

Speciaal: $\sigma^2 = \mu_2 = 2$; $\mu_4 = 24$; $\varkappa_4 = 12$; $\gamma_2 = 3$

4. <u>Normale verdeling</u>. Symbool $N(\mu, \sigma)$; $N = N(0,1) = N(St)$.

a. <u>Definitie door verdelingsdichtheid</u>:

$$f_{N(\mu,\sigma)}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Herleiding tot $N(St)$:

$$x_{N(\mu,\sigma)} = \mu + \sigma x_{N(St)} = \mu + \sigma x_N \; ; \; f_{N(\mu,\sigma)}(x) = \frac{1}{\sigma} f_N\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

b. <u>Enkele veel gebruikte integralen</u>:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}a^2x^2 + \tau x}\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} e^{\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{a^2}}$$

mits $a^2 > 0$; τ is willekeurig reëel <u>of complex</u>.

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^k\, dx = 2^{\frac{k-1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\frac{k-1}{2}}\, dz = 2^{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{k-1}{2}\right)!$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^k\, dx = \begin{cases} 0 & \text{als k oneven is.} \\ 2^{\frac{k+1}{2}}\left(\frac{k-1}{2}\right)! = 1.3.5.\cdots(k-1)\sqrt{2\pi} & \text{als k even is.} \end{cases}$$

Voor k geheel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}a^2x^2 + \tau x} x^k\, dx = a^{-k-1} e^{\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\left(y + \frac{\tau}{a}\right)^k dy =$$

$$= a^{-k-1} e^{\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{a^2}} \sum_{j=0}^{[k/2]} \binom{k}{2j}\left(\frac{\tau}{a}\right)^{k-2j} 2^{j+\frac{1}{2}}\left(j-\frac{1}{2}\right)! =$$

$$= \sqrt{2\pi}\,.\, a^{-k-1}\,.\, e^{\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{a^2}} \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{k^{|2j}}{2^j\, j!}\left(\frac{\tau}{a}\right)^{k-2j}$$

daar $(2j)! = 2^{2j} j!\left(j-\frac{1}{2}\right)!\left(\sqrt{\pi}\right)^{-1}$ is.

c. <u>Karakteristieke en entropische fct</u>:

$$Z_{N(\mu,\sigma)}(\tau) = e^{\mu\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau^2} = e^{\mu\tau} Z_N(\sigma\tau) \qquad (\tau \text{ willekeurig complex})$$

$$\varphi_{N(\mu,\sigma)}(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$Z_N(\tau) = e^{\frac{1}{2}\tau^2} \; ; \; \varphi_N(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \; ; \; z_N(\tau) = \frac{1}{2}\tau^2$$

De normale verdeling is volledig gekarakteriseerd door de eigenschap van de entropische fct, een veelterm van de tweede graad te zijn.

d. <u>Cumulanten en momenten</u>:

$$\kappa_{k,N(\mu,\sigma)} = 0 \qquad \text{voor } k \geq 3.$$

$$\mu_{k,N} = \begin{cases} 0 & \text{als k oneven is} \\ \dfrac{2^{\frac{k+1}{2}}\left(\frac{k-1}{2}\right)!}{\sqrt{2\pi}} = 1.3.5.\cdots(k-1) & \text{als k even is.} \end{cases}$$

$$\mu_{k,N(\mu,\sigma)} = \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{k^{!2j}}{2^j j!} \mu^{k-2j} \sigma^{2j}.$$

Speciaal: $\mu_{1,N(\mu,\sigma)} = \mu$; $\mu_{2,N(\mu,\sigma)} = \mu^2+\sigma^2$;

$\mu_{3,N(\mu,\sigma)} = \mu^3+3\mu\sigma^2$; $\mu_{4,N(\mu,\sigma)} = \mu^4+6\mu^2\sigma^2+3\sigma^4$

e. Verdelingsfct:

$$F_{N(\mu,\sigma)}(x) = F_N\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

(zie tabellen).

f. Ontwikkeling volgens Taylor van $F_N(x)$:

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^n}{n!}$$

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

(convergentie voor iedere reële x of complexe x; convergeert langzaam voor absoluut grote x).

g. Asymptotische ontwikkeling van $1-F_N(x)$:

$$1-F_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1.3.5.\cdots(2k+1)\, e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^{2k+1}} + R_n$$

$$R_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} 1.3.5.\cdots(2n-1) \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{t^{2n}} dt$$

Bewijs door volledige inductie met behulp van partiële integratie. De reeks $\sum_0^\infty$ is divergent. Voor grote (reële positieve) x nemen de termen eerst af, later (nl. voor $n > \frac{x^2-1}{2}$) onbepaald toe. De restterm R_n heeft voor iedere n een waarden gelegen tussen 0 en de eerste verwaarloosde term. Voor practische doeleinden is gewoonlijk voldoende, de eerste term: $\frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x\sqrt{2\pi}}$ te nemen.

h. Geschiedenis.

De normale verdeling komt als limiet van de verdeling van Bernoulli reeds bij Abraham de Moivre voor (2° supplement, 1738, bij de Miscellanea Analytica, 1730); vervolgens als (tweede) foutenwet bij Laplace (1778; de eerste foutenwet in 1774; zie verdeling van Laplace);

daarna bij Robert Adrain (Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations, 1808, in het door hem te Philadelphia uitgegeven tijdschrift The Analyst, vol I); tenslotte bij Carl Friedrich Gauss (Theoria motus corporum coelestium, 1809). De naam "wet van Gauss", die vaak aan de normale verdeling gegeven wordt is dus historisch niet gerechtvaardigd, daar het volgens E.B. Wilson (geciteerd door M. Fréchet) ondanks de welbekende vroegrijpheid van Gauss weinig waarschijnlijk geacht moet worden, dat hij de foutenwet ontdekt zou hebben voor zijn tweede levensjaar (1778). De eerste tabellen van $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx$ zijn op instigatie van Laplace door de astronoom Kramp berekend (1799). In de oudere werken (tot ongeveer 1900) ontbreekt de factor $\frac{1}{2}$ in de exponent en dienovereenkomstig de factor 2 onder het wortelteken; het toevoegen van deze factor geeft bijna steeds vereenvoudiging en wordt daarom tegenwoordig vrijwel algemeen toegepast.

5. Getransformeerde normale verdelingen. Symbool EK. (Ingevoerd door F.Y. Edgeworth, 1902 en J.C. Kapteyn, 1903).

a. Definitie: Is $\varphi(y)$ voor $-\infty < y < +\infty$ monotoon stijgend van a tot b, dan is $\underline{x}_{EK} = \varphi(\underline{x}_N)$

b. Verdelingsfct: Zij $y = \psi(x)$, $a < x < b$ de inverse fct van $x = \varphi(y)$, dan is

$$F_{EK}(x) = F_N(\psi(x))$$

$$f_{EK}(x) = f_N(\psi(x)).\psi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\{\psi(x)\}^2}.\psi'(x)$$

c. Logarithmisch normale verdeling:

Zij speciaal $x = \varphi(y) = e^{\alpha y - \beta}$, dus $\psi(x) = \frac{\ln x + \beta}{\alpha}$, dus

$$f_{EK}(x)\,dx = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\alpha^2}(\ln x+\beta)^2}\frac{dx}{x} \qquad (0 < x < \infty)$$

d. Momenten:

$$\mu_{k,EK} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x^{k-1}e^{-\frac{(\ln x+\beta)^2}{2\alpha^2}}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2 + k(\alpha y - \beta)}dy = e^{\frac{1}{2}k^2\alpha^2 - k\beta}$$

$$\mu_{1,EK} = \mu = e^{\frac{1}{2}\alpha^2 - \beta} \quad ; \mu_{2,EK} = \mu_2 = e^{2\alpha^2 - 2\beta}$$

$$\alpha^2 = \ln\frac{\mu_2}{\mu_1} \quad ; \beta = \frac{1}{2}\ln\frac{\mu_2}{\mu^4} \qquad (\mu_2 > \mu^2 \text{ , dus } \alpha^2 > 0 \text{)}$$

$$\mu_{k,EK} = \left(\frac{\mu_2}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}k^2} \left(\frac{\mu_2}{\mu^4}\right)^{-\frac{1}{2}k} = \frac{\mu_2^{\frac{1}{2}k(k-1)}}{\mu^{k(k-2)}}$$

$$f_{EK}(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi \ln \frac{\mu_2}{\mu^2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\ln \frac{x\sqrt{\mu_2}}{\mu^2}\right)^2}{\ln \frac{\mu_2}{\mu^2}}}$$

of als men μ als eenheid kiest, waarin x gemeten wordt en

$$\frac{\mu_2}{\mu^2} = \lambda = \sigma^2 + 1$$ stelt:

$$f_{EK}(x) = \frac{1}{\lambda^{1/8}\, x\sqrt{2\pi x \ln\lambda}}\, \lambda^{-\frac{1}{2}\left({}^{\lambda}\log_e x\right)^2}$$

$$\mu_{k,EK} = \lambda^{\frac{1}{2}k(k-1)}$$

Speciaal:

$$\mu_3 = \lambda^3 \quad ; \tilde{\mu}_3 = (\lambda-1)^2(\lambda+2) = \varkappa_3 \quad ; \gamma_1 = (\lambda+2)\sqrt{\lambda-1}$$

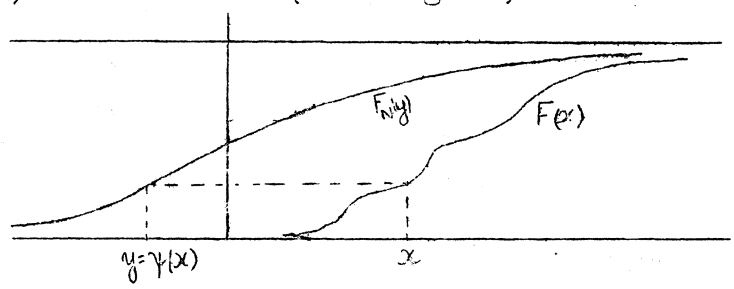
$$\mu_4 = \lambda^6 \quad ; \tilde{\mu}_4 = \lambda^6 - 4\lambda^3 + 6\lambda - 3 = (\lambda-1)^2(\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3)$$

$$\gamma_2 = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 6 = (\lambda-1)(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda + 6)$$

f. Toepasbaarheid: In § 3, punt 12, bl. 78 (Whr 167) hebben we gezien, dat een som van onafhankelijke stochastische variabelen onder zekere weinig restrictieve voorwaarden asymptotisch normaal verdeeld is (centraal limiettheorema). Onder dergelijke voorwaarden is een product van onafhankelijke veranderlijken asymptotisch logarithmisch normaal verdeeld. Is nl. $\underline{x}_n = \underline{y}_1 \cdots \underline{y}_n$ ($\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n$ onafhankelijk), dan is $\ln \underline{x}_n = \sum \ln \underline{y}_i$ en de $\ln \underline{y}_i$ zijn ook onafhankelijk. Indien dus de $\ln \underline{y}_i$ aan de voorwaarden van §3 punt 12 voldoen, dan is $\ln \underline{x}_n$ asymptotisch normaal. Hierop berusten vele toepassingen der logarithmisch normale verdeling. Is nl. een variabele grootheid onderworpen aan een reeks van invloeden, waarvan elk een uitwerking heeft, die de variabele een wijziging geeft, evenredig met haar tot dan bereikte waarde, dan kan men de na n veranderingen optredende waarde door $\underline{x}_n = \underline{x}_0 \underline{y}_1 \cdots \underline{y}_n$ voorstellen, waarbij $\underline{x}_0$ de beginwaarde is. Zijn de evenredigheidsfactoren $\underline{y}_i$ onderling en van $\underline{x}_0$ onafhankelijk, dan zal dus voor $\underline{x}_n$ een asymptotisch logarithmisch normale verdeling te verwachten zijn. Dit model van onafhankelijke evenredige veranderingen is bij verschillende biologische en maatschappelijke groeiprocessen bruikbaar. Wel moet men opmerken, dat, als alle $\underline{y}_i$ dezelfde verdelingsfct met gemiddelde μ bezitten, $\mathcal{E}x_n = \mathcal{E}x_0 \prod y_i = \mathcal{E}x_0 \prod \mathcal{E}y_i = \mu^n \mathcal{E}x_0$ is, dus voor $\mu \neq 1$ tot 0 of ∞ nadert. Bij toepassing op een groeiproces (dus $\mu > 1$), zou de onderstelling van constante verdelingsfct der evenredigheidsfactoren dus tot een model leiden, waarbij alle bomen "in de hemel groeien". Wel echter is een model mogelijk, waarbij y_i een van i afhankelijke verdelingsfct heeft, met gemiddelde $\mu_i > 1$, terwijl $\prod_1^n \mu_i$ voor $n \to \infty$ een eindige limiet heeft. Ook dan kan volgens het centrale limiet-theorema een asymptotisch logarithmisch normale verdeling tot stand komen.

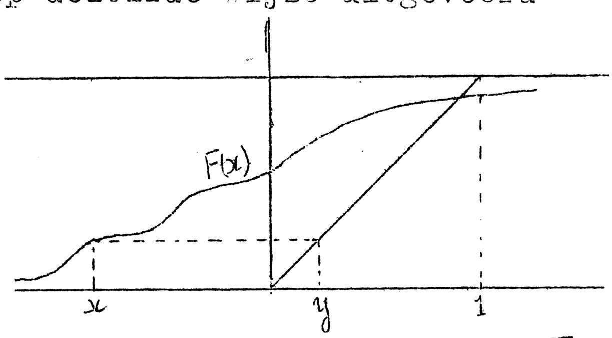
g. Transformatiemethode:

Iedere continue verdeling F(x) kan als een getransformeerde normale beschouwd worden. Om $y = \psi(x)$ te vinden behoeft men slechts bij gegeven x F(x) te bepalen en uit de percentilentabellen der normale verdeling $F_N(y) = F(x)$ af te lezen (zie figuur)



Men kan ook de verdelingsfct op logarithmisch wh-papier tekenen en de vergelijking der verkregen kromme op een eronder geschoven Cartesisch coördinatenstelsel aflezen; deze luidt dan $y = \psi(x)$.

Op dezelfde wijze kan iedere continue verdeling als een getransformeerde homogene beschouwd worden (vgl. pt 1.g). De transformatie wordt op dezelfde wijze uitgevoerd



$$y = P\left[F(x) \leq y\right]$$

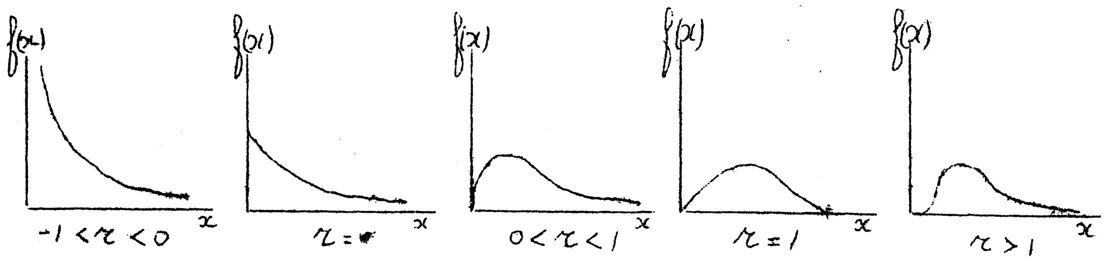
6. Gamma-verdeling. Symbool Γ, $\Gamma(r+1)$.
(Verdeling van Pearson, type VI).

a. Definitie:

$$f_{\Gamma(r+1)}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{r!} e^{-x} x^r & x > 0 \end{cases} \qquad (r > -1)$$

Speciaal geval: r = o, exponentiële verdeling.

b. Typen:



De modus ligt voor $r > 0$ bij $x = r$, daar $\frac{d \ln f}{dx} = -1 + \frac{r}{x}$ daar verdwijnt.

c. Verdelingsfct:

$$F_{\Gamma(r+1)}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{r!}\int_0^x e^{-u} u^r \, du & x > 0 \end{cases}$$

(onvolledige $\Gamma(r+1)$- fct).

d. Verdelingsfct voor gehele $r \geqq 0$:

Is r een natuurlijk getal, dan vindt men door partiële integratie voor $x \geqq 0$:

$$F_{\Gamma(r+1)}(x) = \frac{1}{r!}\int_0^x e^{-u} u^r \, du = e^{-x} \sum_{r+1}^{\infty} {}_h \frac{x^h}{h!} =$$

$$= 1 - e^{-x} \sum_0^r {}_h \frac{x^h}{h!} = 1 - F_{P(x)}(r)$$

$$R_{\Gamma(r+1)}(x) = 1 - F_{\Gamma(r+1)}(x) = F_{P(x)}(r)$$

e. Tabellen, notaties:

De verdelingsfct $F_{\Gamma(r+1)}(x)$ is door K. Pearson getabelleerd (Tables of the incomplete Gamma-function); Pearson gebruikt de notatie

$$I\left(\frac{x}{\sqrt{r+1}}, r\right) \text{ voor onze } F_{\Gamma(r+1)}(x) \, ;$$

de integraal $\int_0^x e^{-u} u^r \, du$ wordt veelal door $\Gamma_x(r+1)$ voorgesteld.

f. Karakteristieke fct:

$$Z_{\Gamma(r+1)}(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{r+1}} = \left\{ Z_E(\tau) \right\}^{r+1} \qquad \Re(\tau) < 1$$

$$z_{\Gamma(r+1)}(\tau) = (r+1)\, z_E(\tau)$$

g. Cumulanten en momenten:

$$\varkappa_{k,\Gamma(r+1)} = (r+1)\varkappa_{k,E} \quad ; \quad \mu_{k,\Gamma(r+1)} = (r+k)^{!k}$$

Speciaal: $\mu_1 = r+1$; $\mu_2 = (r+1)(r+2)$; $\mu_3 = (r+1)(r+2)(r+3)$;

$$\sigma^2 = r+1 \; ; \; \varkappa_3 = 2(r+1) \; ; \; \gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{r+1}} \; ; \; \varkappa_4 = 6(r+1) \; ; \; \gamma_2 = \frac{6}{r+1}$$

h. Asymptotisch normaal.

Uit het centrale limiet-theorema volgt direct, dat $\underline{x}_{\Gamma(r+1)}$ voor $r \to \infty$ asymptotisch normaal verdeeld is.
De afwijking is van de orde van

$$\frac{\mu_3}{\mu_2^{2/3}\sqrt{r+1}} = \frac{r+3}{r+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{r+2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r}} \, .$$

i. Gedrag der staartintegralen.

Is $x = \varepsilon r > 0$, $0 < |\varepsilon| << 1$, dan is (daar $r > -1$ is):

$$F_{\Gamma(r+1)}(x) = \frac{1}{r!}\int_0^{\varepsilon r} e^{-u} u^r \, du = \frac{r^{r+1}}{r!}\varepsilon^{r+1}\int_0^1 e^{-\varepsilon r t} t^r \, dt =$$

$$= \frac{(\varepsilon r)^{r+1}}{r!}\sum_0^{\infty}{}_k \frac{(-1)^k}{k!}\frac{(\varepsilon r)^k}{r+k+1} =$$

$$= \frac{(\varepsilon r)^{r+1}}{r!}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{\varepsilon r}{r+2} + \frac{1}{2}\frac{(\varepsilon r)^2}{r+3} - \cdots\cdots + \frac{(-1)^k}{k!}\frac{(\varepsilon r)^k}{r+k+1}|\theta|\right)$$

Hier en verder zal θ steeds een niet nader gespecificeerd getal ≥ -1 en ≤ 1 (dus $0 \leq |\theta| \leq 1$) voorstellen. In het bijzonder is dus

$$F_{\Gamma(r+1)}(\varepsilon r) = \frac{(r\varepsilon)^{r+1}}{r!}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{\varepsilon r}{r+2}|\theta|\right) =$$

$$= \frac{(r\varepsilon)^{r+1}}{r!}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{r\varepsilon}{r+2} + \frac{1}{2}\frac{(r\varepsilon)^2}{r+3}|\theta|\right) = \text{enz.}$$

Of ruwer:

$$F_{\Gamma(r+1)}(\varepsilon r) = \frac{(r\varepsilon)^{r+1}}{(r+1)!}\left(1 - |\theta|\varepsilon r\right)$$

Is $x = \xi r > 0$, $|\xi| >> 1$, dan vindt men door partiële integratie de (voor niet-gehele r asymptotische [1]) ontwikkeling

$$R_{\Gamma(r+1)}(x) = \frac{1}{r!} e^{-x}\left(x^{r} + r x^{r-1} + r(r-1)x^{r-2} + \cdots + r^{|(k-1)} x^{r-k+1}\right) + \frac{1}{(r-k)!}\int_x^\infty e^{-u} u^{r-k}\,du$$

$$R_{\Gamma(r+1)}(\xi r) = \frac{(r\xi)^r}{r!} e^{-r\xi}\left\{1 + \frac{1}{\xi} + \frac{r-1}{r\xi^2} + \cdots + |\theta| \frac{(r-1)^{|k-1}}{r^{k-1}\xi^k\left(1-\frac{1}{\xi}+\frac{k}{\xi r}\right)}\right\}$$

daar

$$\int_x^\infty e^{-u}\frac{u^h}{h!}\,du = \frac{e^{-x}x^h}{h!} + \int_x^\infty e^{-u}\frac{u^{h-1}}{(h-1)!}\,du =$$

$$= \frac{e^{-x}x^h}{h!} + |\theta|\frac{1}{x}\int_x^\infty e^{-u}\frac{u^h}{(h-1)!}\,du = \frac{1}{1-|\theta|\frac{h}{x}}\;\frac{x^h}{h!}e^{-x} =$$

$$= |\theta|\,\frac{x^{h+1}e^{-x}}{(x-h)\,h!}$$ is, hetgeen voor $h = r-k$ en $x = \xi r$

na enige herleiding in de bovenstaande restterm overgaat.

Speciaal is dus

$$R_{\Gamma(r+1)}(\xi r) = \frac{(r\xi)^r}{r!} e^{-r\xi}\left(1 + \frac{|\theta|}{\xi - 1 + \frac{1}{r}}\right) =$$

$$= \frac{(r\xi)^r}{r!} e^{-r\xi}\left(1 + \frac{1}{\xi} + \frac{r-1}{r}\,\frac{|\theta|}{\xi\left(\xi+1-\frac{2}{r}\right)}\right) = \text{enz.}$$

j. Geitereerde verdeling:

Door m-voudige iteratie van de $\Gamma(r+1)$ -verdeling krijgt men de $\Gamma(mr+m)$ -verdeling, daar

$$\left\{Z_{\Gamma(r+1)}(\tau)\right\}^m = Z_{\Gamma(mr+m)}(\tau)$$ is.

k. Getransformeerde Gamma-verdelingen:

Voor een getransformeerde Γ-verdeling is:

$$f(x) = \frac{1}{r!} e^{-\varphi(x)}\left\{\varphi(x)\right\}^r \varphi'(x),$$

waarbij $\varphi(x)$ monotoom stijgend is. Belangrijk is vooral het geval waarbij $\varphi(x)$ een kwadratische fct van x is, in het bijzonder

---

[1]) en voor gehele r eindige.

$\varphi(x) = \frac{1}{2} x^2$

Schrijft men χ in plaats van x, dan wordt

$$f(\chi) = \frac{1}{2^r r!} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \chi^{2r+1}$$

De bekende χ^2 - verdeling van Helmert en Pearson met $\nu = 2r+2$ vrijheidsgraden hangt hiermee onmiddelijk samen : $\frac{1}{2}\chi^2$ is $\Gamma(\frac{\nu}{2})$ - verdeeld. In het bijzonder is hierin voor r = $-\frac{1}{2}$ (dus 2^r r! $= \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$; $\nu = 1$ de normaal verdeelde variabele begrepen : $\frac{1}{2}\chi_N^2$ is van 0 (niet $-\infty$) tot $+\infty$ $\Gamma(\frac{1}{2})$-verdeeld.

7. <u>Bêta-verdeling of verdeling van Bayes</u>. Symbool B ; $B(\alpha+1, \beta+1)$
 (Verdeling van Pearson, type I)

a. <u>Definitie</u> $(\alpha > -1, \beta > -1)$

$$f_{B(\alpha+1,\beta+1)}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^\alpha (1-x)^\beta}{B(\alpha+1,\beta+1)} & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Hierin is

$$B(\alpha+1,\beta+1) = \int_0^1 u^\alpha (1-u)^\beta \, du = \qquad (\alpha > -1, \beta > -1)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{\alpha!\,\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}$$

Speciale gevallen: 1) $\alpha = \beta$ symmetrische B -verdeling

2) $\alpha = 0$ of $\beta = 0$ parabolische verdelingen.

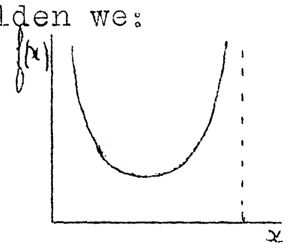
b <u>Symmetrie-eigenschap</u>:

$$f_{B(\alpha+1,\beta+1)}(1-x) = f_{B(\beta+1,\alpha+1)}(x)$$

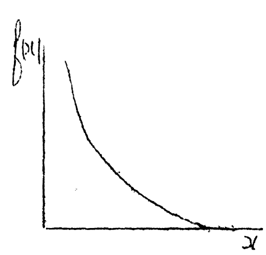
Voor de $\alpha = \beta$ is de verdelingsdichtheid dus symmetrisch t.o.v. $x = \frac{1}{2}$

c. <u>Typen</u>:

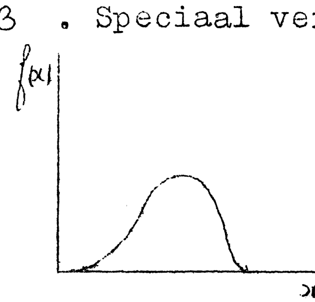
Zowel bij $x = 0$ als bij $x = 1$ kan elk der onder 6b aangegeven typen voorkomen, al naar gelang de waarden van α resp. β . Speciaal vermelden we:



$-1 < \alpha < 0$, $-1 < \beta < 0$
(U-vormig)



$-1 < \alpha < 0$, $\beta > 1$
(J-vormig)



$\alpha > 1$, $\beta > 1$
(klokvormig).

De modus ligt voor $\alpha > 1, \beta > 1$ bij $x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ daar aldaar $\frac{d \ln f}{dx} = \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{1-x}$ verdwijnt. Voor $-1 < \alpha < 0$, $-1 < \beta < 0$ ligt bij deze waarde het minimum. Voor alle andere waarden van α en β liggen de extrema aan de uiteinden van het interval.

d. Verdelingsfct.

$$F_{B(\alpha+1,\beta+1)}(x) = \frac{1}{B(\alpha+1,\beta+1)} \int_0^x u^{\alpha} (1-u)^{\beta}\, du$$

(onvolledige B -functie).

e. Notaties, transformaties, tabellen:

De integraal in het rechterlid van α wordt veelal door $B_x(\alpha+1,\beta+1)$ voorgesteld. De verdelingsfct is door Karl Pearson getabelleerd (Tables of the incomplete Beta-function); zij wordt door hem door $I_x(\alpha+1,\beta+1)$ voorgesteld.

Pearson transformeert gewoonlijk de variabele lineair zo, dat de modus de oorsprong wordt. De verdelingsdichtheid wordt dan, wanneer de exponenten α en β, zoals bij Pearson gebruikelijk is, door m_1 en m_2 worden voorgesteld,

$$f(x) = \frac{(x+a_1)^{m_1} (a_2-x)^{m_2}}{B(m_1+1, m_2+1)\,(a_1+a_2)^{m_1+m_2+1}} \qquad -a_1 < x < a_2$$

waarbij $\frac{a_1}{m_1} = \frac{a_2}{m_2}$ is, terwijl $a_1 + a_2$ willekeurig gekozen is.

Teneinde de vergelijking met de verdeling van Bernoulli gemakkelijk te maken, zullen we veelal

$$\alpha+\beta+2 = \nu \quad , \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} = p \quad , \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2} = q$$ stellen

$(\nu > 0\ ;\ p+q = 1\ ;\ p\,q \geq 0)$, zodat

$$f_{B(\alpha+1,\beta+1)} = f_{B(p\nu, q\nu)} = \frac{1}{B(p\nu, q\nu)}\, x^{p\nu-1} (1-x)^{q\nu-1}$$ wordt.

f. Identiteiten:

Door de integrand van $F_{B(\alpha+1,\beta+1)}(x)$ met $1 = u + (1-u)$ te vermenigvuldigen krijgt men, daar

$$\frac{B(u+1,v)}{B(u,v)} = \frac{\Gamma(u+1)\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\,\Gamma(u+v+1)} = \frac{u}{u+v} \quad \text{is},$$

$$F_{B(\alpha+1,\beta+1)}(x) = \frac{1}{B(\alpha+1,\beta+1)}\int_0^x u^{\alpha+1}(1-u)^\beta\, du + \frac{1}{B(\alpha+1,\beta+1)}\int_0^x u^\alpha(1-u)^{\beta+1}\, du =$$

$$(1) \qquad = \frac{B(\alpha+2,\beta+1)}{B(\alpha+1,\beta+1)} F_{B(\alpha+2,\beta+1)}(x) + \frac{B(\alpha+1,\beta+2)}{B(\alpha+1,\beta+1)} F_{B(\alpha+1,\beta+2)}(x) =$$

$$= \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} F_{B(\alpha+2,\beta+1)}(x) + \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+1} F_{B(\alpha+1,\beta+2)}(x).$$

Door partieel integreren vindt men:

$$F_{B(\alpha+1,\beta+1)}(x) = \binom{\alpha+\beta+1}{\alpha+1}\int_0^x (1-u)^\beta\, d u^{\alpha+1} =$$

$$(2) \qquad = \binom{\alpha+\beta+1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}(1-x)^\beta + F_{B(\alpha+2,\beta)}(x)$$

mits $\beta > 0$ en $0 \leqq x \leqq 1$ is.

$$F_{B(\alpha+1,\beta+1)}(x) = -\binom{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}\int_0^x u^\alpha\, d(1-u)^{\beta+1} =$$

$$(3) \qquad = -\binom{\alpha+1+\beta}{\alpha+1} x^\alpha(1-x)^{\beta+1} + F_{B(\alpha,\beta+2)}(x)$$

mits $\alpha > 0$ en $0 \leqq x \leqq 1$ is.

Door in de eerste term van (1) het laatste lid van (3) (met $\alpha+1$ in plaats van α) te substitueren, krijgt men:

$$F_{B(\alpha+1,\beta+1)}(x) = -\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}\binom{\alpha+2+\beta}{\alpha+1} x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta+1} +$$

$$(4) \qquad + \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} F_{B(\alpha+1,\beta+2)}(x) + \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2} F_{B(\alpha+1,\beta+2)}(x) =$$

$$= -\binom{\alpha+1+\beta}{\alpha} x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta+1} + F_{B(\alpha+1,\beta+2)}(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

Hier is dus de tweede exponent β met 1 verhoogd, zonder dat de eerste verlaagd is. Evenzo is:

$$(5) \qquad F_{B(\alpha+1,\beta+1)}(x) = \binom{\alpha+1+\beta}{\beta} x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta+1} + F_{B(\alpha+2,\beta+1)}(x) \qquad (0 \leqq x < 1)$$

terwijl uit (4) en (5) volgt:

$$F_{B(\alpha+1,\beta+1)}(x) = -\binom{\alpha+1+\beta}{\alpha} x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta+1} + \binom{\alpha+2+\beta}{\beta+1} x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta+2} + F_{B(\alpha+2,\beta+2)}(x)$$

$$(6) \qquad = \frac{(\alpha+\beta+1)!}{(\alpha+1)!\,(\beta+1)!}\left\{(\beta+1)(1-x) - (\alpha+1)x\right\} x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta+1} + F_{B(\alpha+2,\beta+2)}(x)$$

$$(0 \leqq x \leqq 1)$$

Door herhaalde toepassing van (6) krijgt men:

$$F_{B(\alpha+1,\beta+1)}(x) = \sum_{0}^{k-1} h \frac{(\alpha+\beta+2h+1)!}{(\alpha+h+1)!\,(\beta+h+1)!}\left\{(\beta+h+1)(1-x)+(\alpha+h+1)x\right\} x^{\alpha+h+1}(1-x)^{\beta+h+1} + \tag{7}$$

$$+ F_{B(\alpha+k+1,\beta+k+1)}(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

g. Momenten, eerste cumulanten:

$$\mu_k = \mathcal{E}\, x^k = \frac{B(\alpha+k+1,\beta+1)}{B(\alpha+1,\beta+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+k+2)} = \frac{(\alpha+k)^{!k}}{(\alpha+\beta+k+1)^{!k}}$$

Speciaal is: (vgl punt e)

$$\mu_1 = p$$

$$\mu_2 = p\,\frac{p\nu+1}{\nu+1}$$

$$\mu_3 = p\,\frac{(p\nu+1)(p\nu+2)}{(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$\mu_4 = p\,\frac{(p\nu+1)(p\nu+2)(p\nu+3)}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}$$

enz. Hieruit volgt:

$$\sigma^2 = \tilde{\mu}_2 = \mu_2 - \mu_1^2 = \frac{pq}{\nu+1}$$

$$\varkappa_3 = \tilde{\mu}_3 = \mu_3 - 3p\mu_2 + 2p^3 = -\frac{2pq(p-q)}{(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$\tilde{\mu}_4 = \mu_4 - 4p\mu_3 + 6p^2\mu_2 + 3p^4 = 3pq\,\frac{(\nu-6)pq+2}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}$$

$$\varkappa_4 = \tilde{\mu}_4 - 3\sigma^4 = \frac{6pq\{\nu(1-5pq)+(1-6pq)\}}{(\nu+1)^2(\nu+2)(\nu+3)}$$

$$\gamma_1 = \frac{\varkappa_3}{\sigma^3} = -\frac{2\sqrt{\nu+1}}{\nu+2}\,\frac{p-q}{\sqrt{pq}}$$

$$\gamma_2 = \frac{\varkappa_4}{\sigma^4} = \frac{6\{\nu(1-5pq)+(1-6pq)\}}{(\nu+2)(\nu+3)}$$

h. Karakteristieke fct:

Deze is een ontaarding van de hypergeometrische fct (zgn. confluente hypergeometrische fct):

$$Z_{B(p\nu,q\nu)}(\tau) = \frac{1}{B(p\nu,q\nu)}\int_0^1 e^{x\tau} x^{p\nu-1}(1-x)^{q\nu-1}\,dx =$$

$$=\sum_0^\infty {}_k \frac{\tau^k}{k!}\frac{(-p\nu)^{!k}}{(-\nu)^{!k}} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_0^\infty {}_k \frac{(-p\nu)^{!k}\,(-\frac{1}{\lambda})^{!k}}{(-\nu)^{!k}\;k!}(-\lambda\tau)^k =$$

$$=\lim_{\lambda\to 0} F(\tfrac{1}{\lambda}, p\nu\,;\nu\,;\lambda\tau) =$$

$$=\frac{1}{B(p\nu,q\nu)}\lim_{\lambda\to 0}\int_0^1 x^{p\nu-1}(1-x)^{q\nu-1}(1-x\lambda\tau)^{-\frac{1}{\lambda}}\,dx$$

zoals ook rechtstreeks uit de integraal af te leiden is.

i. Grensgeval $\nu\to 0$ p en q vast of tot eindige limiet naderend.

Voor $\nu\to 0$ gaat de verdeling in die van het alternatief $A_{(1-q;0,1)}$ over, zoals het gemakkelijkst aan de momenten of de cumulanten te zien is:

$$\mu_k = p\frac{(p\nu+k)^{!k}}{(\nu+k)^{!k}} \longrightarrow p \qquad (\text{vgl } \S 1,2)$$

Dit resultaat kan ook rechtstreeks verkregen worden door in f. (6) met $\alpha+1=p\nu$ en $\beta+1=q\nu$ tot de limiet voor $\nu\to 0$ over te gaan:

$$F_{B(p\nu,q\nu)}(x) = \frac{q-x}{(p\nu)!\,(q\nu)!}\nu!\, x^{p\nu}(1-x)^{q\nu} + F_{B(p\nu+1,q\nu+1)}(x) \qquad (0\leq x\leq 1)$$

dus, daar $F_{B(1,1)}(x)=\int_0^x dx = x$ is voor $0\leq x\leq 1$ en $=1$ voor $x\geq 1$

$$\lim_{\nu\to 0} F_{B(p\nu,q\nu)}(x) = q \qquad (0<x<1)$$

(voor x = o en x = 1 wordt $\lim\limits_{\nu\to 0} x^{p\nu}$ resp. $\lim\limits_{\nu\to 0}(1-x)^{q\nu}$ onbepaald).

j. Grensgeval $\nu\to\infty$:

Voor $\nu\to\infty$ en $\frac{\alpha}{\beta}\to c$ (c eindig) is de B -verdeling asymptotisch normaal, zoals op grond van de eerste cumulanten of invarianten te verwachten is:

$$\gamma_1 = O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right),\ \gamma_2 = O\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

Daar we de hogere cumulanten niet berekend hebben, is niet zeker, dat deze ook naar nul gaan. We kunnen echter het op bl. 80 (Whr 169) bewezene toepassen. Stellen we $\nu' = \nu-2$, $p'\nu' = p\nu-1$, $q'\nu' = q\nu-1$, dan bereikt

$x^{p'}(1-x)^{q'}$ een absoluut maximum bij ($x=p'$ / vgl. c; $\nu\to\infty$, dus $p'\nu'=\alpha>1$ en $q'\nu'=\beta>1$). Stellen we dus $x=p'+y$, $\varphi(y)=(p'+y)^{p'}(q'-y)^{q'}$, $\psi(y)=1$ dan is

$$\varphi(0)=p'^{p'}q'^{q'}\ ;\ \varphi'(0)=0\ ;-\frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)}=\gamma^2=\frac{1}{p'q'} \qquad {}^{1})$$

dus volgens bl. 80 (Whr.69):

$$\int_0^x u^{p\nu-1}(1-u)^{q\nu-1}du=\int_0^x\{u^{p'}(1-u)^{q'}\}^{\nu'}du=$$

$$=\int_{-p'}^{x-p'}\{(p'+y)^{p'}(q'-y)^{q'}\}^{\nu'}dy=p'^{p'\nu}q'^{q'\nu}\int_{-p'}^{x-p'}e^{-\frac{1}{2}\frac{\nu'}{p'q'}y^2+O(\nu'y^3)}dy=$$

$$=p'^{p'\nu}q'^{q'\nu}\sqrt{\frac{p'q'}{\nu'}}\int_{-\infty}^{(x-p')\sqrt{\frac{\nu'}{p'q'}}}e^{-\frac{1}{2}t^2+O\left(\frac{t^3}{\sqrt{\nu}}\right)}dt$$

Voor $x=1$ krijgt men dezelfde uitdrukking met $q'\sqrt{\frac{\nu'}{p'q'}}$ als bovengrens, die voor $\nu\to\infty$ naar $+\infty$ gaat. Het quatient is dus:

$$F_{B(p\nu,q\nu)}=F_N\left((x-p')\sqrt{\frac{\nu'}{p'q'}}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)\right)$$

als $x-p'=O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu'}}\right)=O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)$ is. Derhalve is $F_{B(p\nu,q\nu)}$

asymptotisch normaal. Voor gemiddelde en spreiding vinden we $p'=\frac{p\nu-1}{\nu-2}$ en $\sqrt{\frac{p'q'}{\nu'}}=\sqrt{\frac{(p\nu-1)(q\nu-1)}{(\nu-2)^3}}$ in plaats van de verwachte waarden p en $\sqrt{\frac{pq}{\nu+1}}$

Daar de verschillen echter $O\left(\frac{1}{\nu}\right)$ zijn geven ze voor $t=(x-p)\sqrt{\frac{\nu+1}{pq}}=$ $=y\sqrt{\frac{\nu+1}{pq}}$ een correctie $O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)$

Het heeft geen zin, deze verschillen in aanmerking te nemen, en de waarden p' en $\sqrt{\frac{p'q'}{\nu'}}$ als "beter" te beschouwen dan p en $\sqrt{\frac{pq}{\nu+1}}$ of $\sqrt{\frac{pq}{\nu}}$, daar we andere termen van dezelfde orde $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ verwaarloosd hebben. Wil men deze wel in aanmerking nemen, dan moet men $\varphi(y)$ tot en met de termen van de derde orde berekenen. Bij $\frac{\varphi(y)}{\varphi(0)}$ en $\ln\frac{\varphi(y)}{\varphi(0)}$ vindt men dan

$$\frac{1}{3!}y^3\frac{\varphi'''(0)}{\varphi(0)}+O(y^4)=\frac{1}{3}y^3\frac{(q-p)}{p^2q^2}+O(y^4)$$

---

[1]) Om verwarring te voorkomen gebruiken we hier γ^2 in plaats van de β^2 van bl. 80

daar $\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{p'}{p'+y} - \frac{q'}{q'-y}$

dus $\frac{\varphi''}{\varphi} - \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} = -\frac{p'}{(p'+y)^2} - \frac{q'}{(q'-y)^2}$

en $\frac{\varphi'''}{\varphi} - \frac{3\varphi''\varphi'}{\varphi^2} + \frac{2\varphi'^3}{\varphi^3} = \frac{2p'}{(p'+y)^3} - \frac{2q'}{(q'-y)^3}$

dus $\frac{\varphi'''(0)}{\varphi(0)} = \frac{2(q'-p')}{p'^2 q'^2} = \frac{2(q-p)}{p^2q^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ is.

Dit geeft bij $-\frac{1}{2}t^2$ een correctieterm $\frac{1}{3}t^3\frac{p-q}{\sqrt{pq\nu}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ terwijl ten gevolge van het verschil tussen p' en p, ν' en ν bij t een correctieterm.

$$t'-t = (x-p')\sqrt{\frac{\nu'}{p'q'}} - (x-p)\sqrt{\frac{\nu+1}{pq}} =$$

$$= (x-p)\sqrt{\frac{\nu+1}{pq}}\left\{\sqrt{\frac{pq(\nu-1)^3}{(p\nu-1)(q\nu-1)(\nu+1)}} - 1\right\} - \left(\frac{p\nu-1}{\nu-2} - p\right)\sqrt{\frac{\nu}{pq}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right) =$$

$$= -\frac{p-q}{\sqrt{pq\nu}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

optreedt, indien $x-p = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)$, dus $t = \mathcal{O}(1)$ is, daar de coëfficient van t $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ wordt.
Dit geeft met $\delta = -\frac{p-q}{\sqrt{pq\nu}}$ en $\varepsilon = \frac{1}{3}\frac{p-q}{\sqrt{pq\nu}}$

$$\int_{-\infty}^{t-\delta} e^{-\frac{1}{2}t^2 + t^3\varepsilon}\,dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t-\delta} e^{-\frac{1}{2}t^2}(1+t^3\varepsilon)\,dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

in plaats van $F_N(t)$, d.w.z. bij $F_N(t)$ een correctieterm

$$\frac{-\delta . e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} + \varepsilon\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}t^2}t^3\,dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\left(\varepsilon t^2 + 2\varepsilon + \delta\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

Het resultaat is dus als $t = \mathcal{O}(1)$ (dus niet te groot) is:

$$F_{B(p\nu,q\nu)} = F_N(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}(\varepsilon t^2 + 2\varepsilon + \delta) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

met $t = (x-p)\sqrt{\frac{\nu}{pq}}$

k. Grensgeval $\beta \to \infty$

Voor onbepaald toenemende β en begrensd blijvende α (en natuurlijk evenzo voor $\alpha \to \infty$ en β begrensd) gaat de bêta-verdeling in de gamma-verdeling over. Inderdaad is voor $\beta >> 1$ $(1-u)^\beta << 1$ behalve als $u << 1$ is. Dan is echter

$$(1-u)^\beta = e^{-\beta u + \mathcal{O}(\beta u^2)}$$

dus $$\int_0^x u^\alpha (1-u)^\beta du = \int_0^x u^\alpha e^{-\beta u + \mathcal{O}(\beta u^2)} du =$$

$$= \beta^{-\alpha-1} \int_0^{\beta x} t^\alpha e^{-t + \mathcal{O}(\frac{t^2}{\beta})} dt. \quad \text{Dus:}$$

$$\lim_{\beta\to\infty} F_{B(\alpha+1,\beta+1)}\left(\frac{x}{\beta}\right) = \lim_{\beta\to\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha e^{-t + \mathcal{O}(\frac{t^2}{\beta})} dt}{\int_0^\beta t^\alpha e^{-t+\mathcal{O}(\frac{t^2}{\beta})} dt}$$

dus $$\lim_{\beta\to\infty} F_{B(\alpha+1,\beta+1)}\left(\frac{x}{\beta}\right) = F_{\Gamma(\alpha+1)}(x)$$

of voor $\beta >> 1$

$$F_{B(\alpha+1,\beta+1)}(x) \approx F_{\Gamma(\alpha+1)}(\beta x).$$

l. Historische opmerkingen:

De bêta-verdeling is het eerst toegepast door Thomas Bayes († 1763, An essay towards solving a problem in the doctrine of chances, posthuum gepubliceerd door R. Price). Later is er door Laplace en anderen veelvuldig gebruik van gemaakt in verband met de zg. "inverse" problemen der whr, d.w.z. het bepalen van whrs op grond van waargenomen fq. Ondanks het feit, dat deze methode berust op een onvoldoend doordacht gebruik van het wh- begrip, zoals herhaaldelijk, in deze eeuw o.a. door R.A. Fisher, is aangetoond, en ondanks dat zij thans vervangen kan worden door de methode der betrouwbaarheidsgrenzen ("confidence-limits") van J. Neyman (1934) en E.S. Pearson, wordt zij ook thans nog wel gebruikt, o.a. door Harold Jeffreys (Theory of probability, 1939; Scientific Inference, 1937), echter op even aanvechtbare wijze als tevoren door andere auteurs. In de biometrika is de verdeling vooral ingevoerd door K.Pearson als eerste type van zijn systeem van verdelingskrommen. De toepassingsmogelijkheden hier worden uiteraard door de bezwaren tegen de methode der inverse w/ins niet beinvloed. Ten gevolge van punt k kan zij voor zeer kleine p en grote ν meestal door de, eveneens tot het systeem van Pearson behorende, Γ-verdeling vervangen worden.

n. Getransformeerde bêta-verdelingen.

Evenals bij de homogene verdeling is ook hier het geval van belang, dat voor $\underline{x}_{B(\alpha+1,\beta+1)}$ de verdelingfct $\underline{y}=F(\underline{x})$ van een willekeurig andere stochastische variabele gesubstitueerd wordt. Dan is nl.

$$dF(y)=\frac{1}{B(\alpha+1,\beta+1)}\,y^{\alpha}(1-y)^{\beta}\,dy=\frac{1}{B(\alpha+1,\beta+1)}\left\{F(x)\right\}^{\alpha}dF(x)\left\{1-F(x)\right\}^{\beta}$$

bij gehele $\alpha\geqq 0$ en $\beta\geqq 0$ de wh, dat bij een steekproef van $\alpha+\beta+1$ uit de verdeling van $\underline{x}$ α een kleinere en β een grotere waarde dan x hebben (enéén de waarde x zelf).

Voorts is de transformatie $\underline{x}_{B(\alpha+1,\beta+1)}=\underline{r}^2$ van belang, in het bijzonder voor de $\alpha=-\frac{1}{2}$ en $\beta=\frac{\nu-3}{2}$ met ν geheel $\geqq 2$. Dan is nl. als r symmetrisch verdeeld is:

$$dF(r)=\frac{1}{B(\frac{1}{2},\frac{\nu-1}{2})}(1-r^2)^{\frac{\nu-3}{2}}dr$$

de verdeling van Student voor de correlatiecoefficient ($-1\leqq r\leqq +1$). Stelt men hierin nog $z=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$, dan wordt voor $-\infty<z<+\infty$

$$dF(z)=\frac{1}{B(\frac{1}{2},\frac{\nu-1}{2})}\,\frac{dz}{(1+z^2)^{\nu/2}}$$

Dit is de verdeling van Student (The probable error of a mean, Biometrika 6 (1908) 1) voor de verhouding van het gemiddelde tot de spreiding van een steekproef ener normale $(0,\sigma)$-verdeling. Doorgaans wordt hierin nog $z=\frac{t}{\sqrt{\nu-1}}$ gesteld, daar t dan voor $\nu\to\infty$ asymptotisch normaal (0,1) in plaats van normaal $(0,\sqrt{\nu-1})$ verdeeld is.

8. Verdeling van Verhulst; symbool V
(P.F. Verhulst, 1938; Raymond Pearl and Lowell J. Reed, 1920).

a. Definitie door verdelingsfct:

$$F_V(x)=\frac{1+\operatorname{th}x}{2}$$

Gevolg: $F_V(x)=\frac{e^{x}}{2\operatorname{ch}x}=\frac{1}{1+e^{-2x}}$

b. Verdelingsdichtheid:

$$f_{\underline{v}}(x) = \frac{1}{2\,ch^2 x} = \frac{1}{1+ch\,2x}$$

c. Lineair getransformeerden:

Is $F_{\underline{x}}(x) = \dfrac{c}{a+e^{-bx}}$ dan is $\underline{x} = \frac{2}{b}(\underline{x}_v - \ln a)$; $c = a$

d. Karakteristieke fct:

Voor $|\Re\,\tau| < 2$ is met $1+e^{-2x} = y^{-1}$, dus $e^{x} = \left(\dfrac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$Z_{\underline{v}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau x}\, d\,\frac{1}{1+e^{-2x}} = \int_0^1 \left(\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{2}\tau} dy =$$

$$= B\left(\tfrac{1}{2}\tau+1, -\tfrac{1}{2}\tau+1\right) = \frac{(\frac{1}{2}\tau)!\,(-\frac{1}{2}\tau)!}{1!} = \frac{\frac{1}{2}\pi\tau}{\sin\frac{1}{2}\pi\tau}$$

$$\varphi_{\underline{v}}(t) = \frac{\frac{1}{2}\pi t}{sh\,\frac{1}{2}\pi t}$$

e. Momenten:

Uit de eigenschappen der veeltermen van Bernoulli volgt:

$$\frac{\frac{1}{2}t}{sh\,\frac{1}{2}t} = \sum_0^\infty{}_n\, B_n(\tfrac{1}{2})\,\frac{t^n}{n!} = 1 + \sum_1^\infty{}_m\, (-1)^m \left(1-2^{-2m+1}\right) B_m \frac{t^{2m}}{(2m)!}$$

waarin $B_n(x)$ het polynomium van Bernoulli van de n-de graad en B_m het m-de getal van Bernoulli is (vgl.punt 1,g). Dus ook

$$\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t} = 1 + \sum_1^\infty{}_k \left(1-2^{-2k+1}\right) B_k \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

Derhalve

$$\mu_{2k+1} = 0 \qquad (k \geq 0)$$

$$\mu_{2k} = \left(1-2^{-2k+1}\right)\pi^{2k} B_k \qquad (k \geq 1)$$

Speciaal: $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = \sigma^2 = \frac{\pi}{12}$; $\mu_4 = \tilde{\mu}_4 = \frac{7}{240}\pi^4$; $\mu_6 = \tilde{\mu}_6 = \frac{31}{1344}\pi^6$ enz.

f. Cumulanten, invarianten:

$$z_{\underline{v}}(\tau) = \ln \frac{\frac{1}{2}\pi\tau}{\sin\frac{1}{2}\pi\tau}$$

$$\frac{d}{d\tau} z_{\underline{v}}(\tau) = \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{\frac{1}{2}\pi\tau}{tg\,\frac{1}{2}\pi\tau}\right) = \sum_1^\infty{}_m\, B_m \frac{\pi^{2m}}{(2m)!}\,\tau^{2m-1} \quad \text{, dus}$$

$$z_{\underline{v}}(\tau) = \sum_1^\infty{}_m\, \frac{\pi^{2m} B_m}{2m}\,\frac{\tau^{2m}}{(2m)!} \quad \text{, dus}$$

$$\varkappa_{2m} = \frac{\pi^{2m} B_m}{2m} \;;\; \varkappa_{2m+1} = 0 \;;\; \gamma_{2m-2} = \frac{12^m B_m}{2m} \;;\; \gamma_{2m-1} = 0$$

Speciaal: $\varkappa_2 = \sigma^2 = \frac{\pi^2}{12}$; $\varkappa_4 = \frac{\pi^4}{120}$; $\varkappa_6 = \frac{\pi^6}{252}$;

$\gamma_2 = \frac{6}{5}$; $\gamma_4 = \frac{48}{7}$

Dit volgt ook uit $\varkappa_4 = \tilde{\mu}_4 - 3\tilde{\mu}_2$; $\varkappa_6 = \tilde{\mu}_6 - 15\tilde{\mu}_4\tilde{\mu}_2 + 30\tilde{\mu}_2^3$.

g. Geschiedenis en toepassing:

De Belg P.F. Verhulst, een leerling van A. Quetelet, heeft functies van de gedaante

$$G(t) = \frac{A + B\,e^{k(t-\tau)}}{1 + e^{k(t-\tau)}} \qquad (B > A > 0,\ k > 0)$$

als "groeikrommen" ingevoerd ter correctie van de voor de hand liggende en veelvuldig, o.a. door Malthus uitgesproken onderstelling, dat een bevolking als een exponentiële functie van de tijd toenam. Men komt tot deze onderstelling door aan te nemen, dat een bevolking in een constante tijd T verdubbelt. Is dan G (t) de grootte der bevolking op het tijdstip t, dan is G $(t + T) = 2$ G (t), waaruit volgt

$$G(t) = G(0)\,2^{t/T} = G(0)\,e^{kt} \quad \text{met } k = T^{-1}\ln 2 .$$

Verhulst merkte op, dat deze toename-fct onmogelijk juist kan zijn, daar in beperkte ruimte slechts een begrensde bevolking mogelijk was en voerde daarom fcts van de genoemde gedaante met A=o in, die voor $t \to \infty$ een eindige limiet B hebben. Van $t = -\infty$ tot $t \to +\infty$ stijgt G (t) monotoom van A tot B. Daar

$$G(t) = \frac{B+A}{2} + \frac{B-A}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{k(\tau - T)}{2}$$

is, wordt het verband met $F_V(x)$ verkregen als

$$G(t) = A + (B - A)\,F_V\left(\tfrac{k}{2}(t-\tau)\right)$$

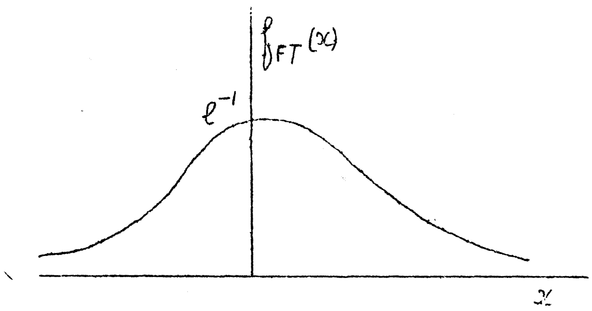
dus door zowel t als F_V lineair te transformeren. Verhulst heeft de kromme in 1845 de weinig zinvolle naam "logistische kromme" of "logistiek" gegeven; onder deze naam wordt zij ook thans nog wel gebruikt. De kromme is in 1920 door Pearl en Reed herontdekt; in 1922 bleek hun dat deze al door Verhulst gevonden was. Doordat het belang van de kromme door biologen vaak grovelijk overschat is, heeft men ook allerlei combinaties van twee of meer krommen van Verhulst aan empirische gegevens trachten aan te passen. Haar betekenis is echter niet groter dan die van andere verdelingskrommen.

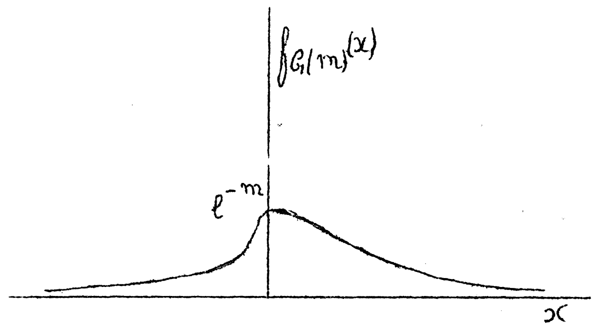
9. **Verdelingen van Fisher en Tippett en van Gumbel**, Symbolen FT en G.

a. Definitie door verdelingsdichtheid:

$$\left.\begin{aligned} f_{FT}(x) &= C\,e^{-x-e^{-x}} \\ f_G(x) = f_{G(m)}(x) &= C_m\,e^{-mx-me^{-x}} \end{aligned}\right\} \quad -\infty < x < +\infty$$

Opmerking: $x_{FT} = x_{G(1)}$; de krommen hebben hun maximum bij $x=0$ (modus).





b. Verdelingsfct: met $m e^{-u} = t$ is

$$F_{G(m)}(x) = C_m \int_{-\infty}^{x} e^{-mu - m e^{-u}}\, du =$$

$$= \frac{C_m}{m^m} \int_{m e^{-x}}^{\infty} e^{-t}\, t^{m-1}\, dt = 1 - F_{T(m)}(m e^{-x})$$

$$C_m = \frac{m^m}{(m-1)!} = \frac{m^{m+1}}{m!}$$

Speciaal: m = 1. $F_{FT}(x) = 1 - e^{-e^{-x}}$

c. Karakteristieke fct:

$$Z_{G(m)}(\tau) = \frac{m^m}{\Gamma(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau x - mx - m e^{-x}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_{0}^{\infty} e^{-t}\, t^{m-\tau-1}\, dt = \frac{\Gamma(m-\tau)}{\Gamma(m)} = \frac{(m-\tau-1)!^{(m-1)}}{(m-1)!} \quad (-\tau)!$$

Speciaal: $Z_{FT}(\tau) = (-\tau)!$

d. Cumulanten:

Met behulp van de Maclaurin-ontwikkeling van $\ln z!$:

$$\ln z! = -\gamma z + \sum_{k=2}^{\infty} \xi(k) \frac{(-z)^k}{k} \qquad \text{(Euler)}$$

waarin $\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0{,}577\ 215\ 665$

de constante van Euler-Mascheroni en

$$\xi(k) = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$ is,

vindt men

$$z_{G(m)}(\tau) = \sum_1^{m-1}{}_h \ln \frac{h-\tau}{\tau} + \ln(-\tau)! = -\sum_1^{m-1}{}_h \sum_1^{\infty}{}_k \frac{\tau^k}{k h^k} + \gamma\tau + \sum_2^{\infty}{}_k \xi(k)\frac{\tau^k}{k}$$

dus

$$\varkappa_{k,G(m)} = (k-1)!\left\{-\sum_1^{m-1}{}_h \frac{1}{h^k} + \xi(k)\right\} = (k-1)!\sum_m^{\infty}{}_h \frac{1}{h^k} \qquad \text{voor } k \geq 2$$

en

$$\varkappa_{1,G(m)} = \mu_{G(m)} = \gamma - \sum_1^{m-1}{}_h \frac{1}{h}$$

Men heeft dus:

$$\varkappa_{k,G(m)} = \varkappa_{k,FT} - (k-1)!\sum_1^{m-1}{}_h \frac{1}{h^k}$$

$$\mu_{FT} = \gamma = 0,5772\ldots$$

$$\varkappa_{k,FT} = (k-1)!\,\xi(k)$$

Speciaal is voor <u>even</u> k= 2h : $\xi(2h) = \frac{(2\pi)^{2h}}{2(2h)!}B_h$
waarin B_h het h-de getal van Bernoulli voorstelt, dus:

$\xi(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1,644934$; $\xi(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1,082323$;

$\xi(6) = \frac{\pi^6}{945} = 1,017343$, terwijl $\xi(3) = 1,202057$;

$\xi(5) = 1,036928$; $\xi(7) = 1,0083492$ is, enz. Dus:

$\sigma^2_{FT} = \frac{\pi^2}{6}$; $\varkappa_{3,FT} = 2\,\xi(3)$; $\varkappa_{4,FT} = \frac{\pi^4}{15}$; $\varkappa_{5,FT} = 24\,\xi(5)$;

$\varkappa_{6,FT} = \frac{8\pi^6}{63}$, dus o.a.

$\gamma_{1,FT} = 0,379847$; $\gamma_{2,FT} = \frac{36}{15} = 2,4$; $\gamma_{3,FT} = 7,17117$;

$\gamma_{4,FT} = \frac{192}{7} = 27,42857$

In vergelijking met de verdeling van Verhulst zijn 1^e de **cumulanten** van oneven orde $\neq 0$, daar de verdeling niet symmetrisch is, 2^e de invarianten van even orde veel groter, nl.

$$\frac{\gamma_{2k-2,FT}}{\gamma_{2k-2,V}} = \frac{\varkappa_{2k,FT}}{\varkappa_{2k,V}} \cdot \frac{\sigma_V^{2k}}{\sigma_{FT}^{2k}} = \frac{(2k-1)!\,\frac{1}{2}(2\pi)^{2k}B_k/(2k)!}{\pi^{2k}\,B_k/2k} \cdot \frac{(\pi^2/12)^k}{(\pi^2/6)^k} = 2^{k-1}$$

Voor m > 1 zijn de invarianten algebraisch minder eenvoudig voor te stellen, maar met behulp van

$$\varkappa_{k,G(m)} = (k-1)!\left\{\xi(k) - \sum_1^{m-1}{}_h \frac{1}{h^k}\right\}$$

gemakkelijk berekenbaar.

De uitdrukking

$$1-\frac{\kappa_{k,G(m)}}{\kappa_{k,FT}}=\frac{1}{\xi(k)}\sum_{1}^{m-1}h\,\frac{1}{h^k}$$

zou men de „onvolledige ξ-fct" kunnen noemen.

e. Verband met de verdeling van Verhulst:

De eenvoudige betrekking tussen de invarianten van de verdeling van Fisher en Tippett en die van Verhulst doet een algemene relatie tussen deze verdelingen vermoeden. We hebben:

$$\kappa_{2k+1,V}=0 \quad ; \kappa_{2k,V}=2^{-2k+1}\kappa_{2k,FT} \quad \text{dus}$$

$$\varkappa_V(\tau)=\varkappa_{FT}(\tfrac{1}{2}\tau)+\varkappa_{FT}(-\tfrac{1}{2}\tau)$$

d.w.z. het halve verschil van twee onafhankelijke variabelen, die volgens FT verdeeld zijn, is volgens V verdeeld. Dit volgt ook rechtstreeks uit de identiteit $z!\,(-z)!=\dfrac{\pi z}{\sin \pi z}$

dus $$Z_{FT}(\tau)\cdot Z_{FT}(-\tau)=Z_V(2\tau).$$

f. Gedrag voor $m\to\infty$:

De krommen zijn zeer onsymmetrisch en voor $m\to\infty$ niet asymptotisch normaal. Voor toenemende m worden ze integendeel steeds asymmetrischer.

g. Toepassing:

De verdelingen van $\underline{x}_{FT}$ en $\underline{x}_{G(m)}$ zijn verkregen als verdeling van de grootste resp. op m-1 na grootste waarden, die een stochastische variabele in een grote steekproef aanneemt, mits de verdeling, waaruit de steekproef genomen wordt aan zekere voorwaarden voldoet. Bij de verdelingen E,L, en V b.v. zijn deze voorwaarden vervuld. We komen hierop in het hoofdstuk over de steekproeven terug.

10. Verdeling van Makeham ; Symbool Mk.

a. Geschiedenis:

De verhouding $l(x)$ van het aantal overlevenden na een tijd x (doorgaans gemeten in jaren) van een groot aantal gelijktijdig geborenen tot dit aantal heeft A. de Moivre in 1724 door een lineaire fct van x trachten voor te stellen:

$$l(x)=1-\frac{x}{86}$$

In 1825 werd door B. Gompertz een "sterftewet" opgesteld, gebaseerd op de onderstelling, dat de sterfteintensiviteit $\mu(x)$, dat is het tegengestelde van de logarithmische afgeleide van $l(x)$, voor gehele x een meetkundige reeks vormde:

$$\mu(x) = \text{const.}\ c^{x}$$

dus een exponentiele fct van x is. Daaruit volgt (in de gebruikelijke notatie):

$$l(x) = k\, g^{c^{x}} \qquad \text{(wet van Gompertz).}$$

In 1860 werd deze wet door W.M. Makeham (evenals Gompertz een Amerikaan) gemodifieerd door bij $\mu(x)$ een constante op te tellen:

$$\mu(x) = A + B\, c^{x}$$

waaruit (eveneens in de gebruikelijke notatie) de (eerste) wet van Makeham volgt:

$$l(x) = k\,.\,s^{x}\,.\,g^{c^{x}}$$

Daarbij wordt k volgens de hier gevolgde normering uit $l(0) = 1$ bepaald: $k = 1/g$, terwijl s, g en c aan de empirische gegevens aangepast worden. Daar $\lim_{x\to\infty} l(x) = 0$ moet zijn, heeft $1 - l(x)$ het karakter van een verdelingfct.
Wh-terminologisch geformuleerd is $l(x)$ de wh, dat een geborene na x jaar nog in leven is, en $\mu(x)\Delta x$ (precieser $\int_0^{\Delta x}\mu(x+y)\,dy$) de wh, dat, als dit het geval is, hij in de eerstvolgende Δx jaren zal overlijden.

b. Verbetering van de notatie:

De gebruikelijke notatie is hoogst ondoelmatig.
Stel $s = e^{\alpha\gamma}$; $g = e^{-\beta}$; $c = e^{\gamma}$, dan wordt:

$$l(x) = e^{\alpha\gamma x - \beta(e^{\gamma x} - 1)}$$

$$(x \geqq 0)$$

$$\mu(x) = -\alpha\gamma + \beta\gamma e^{\gamma x}$$

Daar $l(x)$ monotoom afneemt, dus $\mu(x) > 0$ is voor alle $x > 0$, moet $\beta > \alpha > -\infty$ zijn, want $\gamma > 0$ daar voor $x \to +\infty$ $\mu(x)$ moet stijgen.
Voor de "dimensies" vinden we, als T de dimensie van een tijd en $[\varphi]$ de dimensie van φ betekent:

$$[x] = T \ ;\ [l(x)] = 1 \ ;\ [\mu(x)] = T^{-1} \ ;\ [\gamma] = T^{-1} \ ;\ [\alpha] = [\beta] = 1$$

Derhalve zijn α en β dimensieloze grootheden, dus invarianten.
We stellen $x' = x\gamma$, $\mu'(x) = \mu(x)/\gamma$, enz. (Dit betekent, dat $1/\gamma$ tot eenheid van tijd gekozen is). We noemen de hieruit verkregen $1 - l(x')$ de verdelingsfct van Makeham $F_{Mk}(x')$ en vinden dus:

$$F_{Mk}(x) = 1 - e^{\alpha x - \beta(e^{x} - 1)}$$

$$l(x) = 1 - F_{Mk}(\gamma x)$$

c. Verdelingsdichtheid:

Deze is

$$f_{Mk}(x) = (-\alpha + \beta e^{x}) e^{\alpha x - \beta(e^{x}-1)}$$

De"sterftedichtheid" $\theta(x) = -\frac{d}{dx} l(x) = \mu(x) . l(x)$ is dus, daar zij de dimensie

$[\theta(x)] = T^{-1}$ heeft :

$$\theta(x) = \gamma f_{Mk}(\gamma x)$$

Wh-terminologisch geformuleerd is $\theta(x) . \Delta x$ (precieser: $\int_x^{x+\Delta x} \theta(u) du$) de wh, dat een geborene tussen de leeftijden x en $x + \Delta x$ zal overlijden.

d. Modus:

De modus $\hat{x}$ zal de modale leeftijd (precieser: leeftijd van modale sterfte) genoemd worden. Meestal wordt in plaats daarvan de term "normale leeftijd" gebruikt. We vinden uit

$$0 = f'(\hat{x}) = \theta'(\hat{x}) \quad : \mu'(\hat{x}) = \{\mu(\hat{x})\}^2 \text{ , dus}$$

$$\beta e^{\hat{x}'} = (\beta e^{\hat{x}'} - \alpha)^2$$

$$\beta e^{\hat{x}'} = \alpha + \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1+4\alpha}$$

De voorwaarden voor een maximum luidt:

$$\mu''(x) < 2\mu^3(x) \text{ , dus } \beta e^{\hat{x}'} < 2(\beta e^{\hat{x}'} - \alpha)^3 \quad \text{of}$$

$2(\beta e^{\hat{x}'} - \alpha) > 1$. De oplossing met het +-teken geeft dus een maximum, de andere een minimum. De modus is dus

$$\hat{x}' = \ln \frac{2\alpha + 1 + \sqrt{1+4\alpha}}{2\beta}$$

terwijl de abscis $\check{x}$ van het minimum

$$\check{x}' = \ln \frac{2\alpha + 1 - \sqrt{1+4\alpha}}{2\beta} \quad \text{is}$$

Daar voor $\alpha > 0$ $\alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\alpha} < \alpha < \beta < \beta e^{x'}$ is, treedt het minimum alleen dan (bij een positieve leeftijd) op, als $\alpha < 0$ is. Voor de wet van Gompertz ($\alpha = 0$) wordt $\beta e^{\hat{x}'} = 1$ dus $\mu(\hat{x}) = \gamma$; γ heeft dus hier (zoals Gumbel heeft opgemerkt) de betekenis van de modale (d.w.z. bij de modale leeftijd behorende) sterfteintensiteit. (Doorgaans wordt ook hier de term "Normaal" in plaats van "modaal" gebruikt). Algemeen is

$$\mu(\hat{x}) = \gamma(1 + \sqrt{1+4\alpha}) \quad ; \quad \mu(\check{x}) = \gamma(1 - \sqrt{1+4\alpha})$$

Voorts is:

$$l(\hat{x}) = \left(\frac{\alpha + \frac{1}{2} + \sqrt{1+4\alpha}}{\beta}\right)^{\alpha} e^{\beta - \alpha - \frac{1}{2} - \sqrt{1+4\alpha}}$$

e. Karakteristieke fct:

$$Z_{Mk}(\tau) = -\int_0^\infty e^{\tau x}\, d\, e^{\alpha x - \beta(e^x - 1)} = 1 + \tau \int_0^\infty e^{\tau x + \alpha x - \beta(e^x - 1)}\, dx =$$

$$= 1 + \tau e^\beta \int_1^\infty e^{-\beta t}\, t^{\alpha+\tau}\, dt = 1 + \frac{\tau e^\beta}{\beta^{\alpha+\tau}} \int_\beta^\infty e^{-t}\, t^{\alpha+\tau}\, dt \ *$$

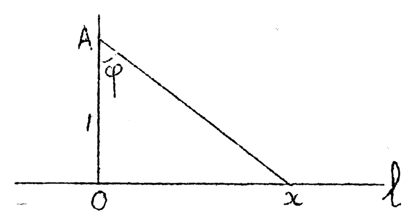
$$= 1 + e^\beta \frac{\tau}{\beta^{\alpha+\tau}} (\alpha+\tau)\ 4F_{\Gamma(\alpha+\tau+1)}(\beta)$$

De reeksontwikkeling van deze fct laten we achterwege.

. . .

11. Variabele van Cauchy. Symbool C.

a. Definitie: De wh, dat een door een punt A getrokken halve rechte in een hoek $\varphi < 2\pi$ ligt is evenredig met die hoek; de variabele x_c van Cauchy is de abscis van het snijpunt der halve rechte met een vaste, niet door A gaande rechte ℓ, gemeten met de afstand AO van A tot ℓ als eenheid, en vanuit O als oorsprong.



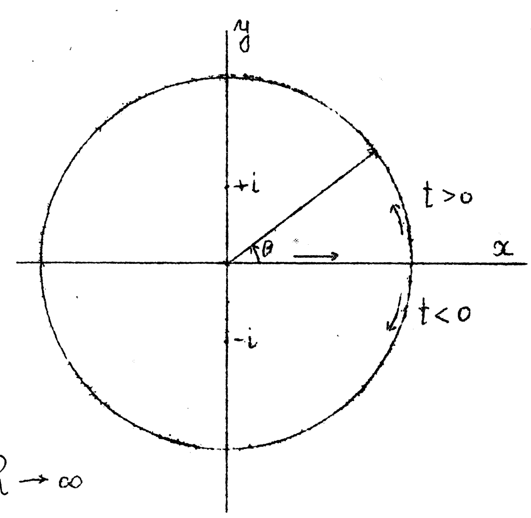
Derhalve is:

b. Verdelingsfct: $F_c(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x$

c. Verdelingsdichtheid: $f_c(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

d. Karakteristieke fct: $Z_c(\tau)$ bestaat alleen voor zuiver imaginaire $\tau = it$. Dan is:

$$\varphi_c(t) = Z_c(it) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{dx}{1+x^2}$$



Beschouw de integrand in het complexe $z = x + i\,y$ -vlak. Langs de halve cirkel $z = R\, e^{i\theta}$ $(0 < \theta < \pi)$ is

$$\frac{1}{\pi} \left| e^{itz} \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \frac{e^{-tR\sin\theta}}{\pi(R^2-1)} = O(R^{-2}) \text{ voor } R \to \infty$$

$$\text{dus } \frac{1}{\pi}\left|\int e^{itz}\frac{dz}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-tR\sin\theta}\,\frac{R\,d\theta}{R^2-1} \to 0 \quad \text{voor } R\to\infty$$

(daar voor deze halve cirkel steeds $t>0$ is).
Derhalve is $\varphi(t)$ het residu [1]) van de integrand in het punt $z = i.\,\mathrm{sgn}\,t$ [2]), dus $e^{-|t|}$:

$$\varphi_c(t) = e^{-|t|}$$

e. Momenten. Alle absolute momenten van een orde $\geqq 1$ zijn $+\infty$; de gewone momenten van even orde $\gtreqqless 2$ eveneens, die van oneven orde zijn onbepaald. De verdeling heeft ook geen semi-invarianten, daar $|t|$ niet in een machtreeks te ontwikkelen is. De divergentie van de momenten heeft ten gevolge, dat aanpassing van de verdelingskromme aan een empirische kromme niet met behulp van de momenten der laatstgenoemde (al zijn deze uiteraard eindig) kan geschieden. B.v. heeft R.A. Fisher in 1922 aangetoond, dat het gemiddelde van n waarnemingen deze verdeling niet nauwkeuriger bepaalt dan één enkele waarneming. Aanpassing kan wèl met behulp van mediaan, uiterste waarden, quantilen e.d. geschieden.

12. Variabele van Cantor. Symbool Cnt.

Deze variabele is een voorbeeld van de op blz. 22 genoemde variabelen, die nòch discreet verdeeld, nòch continu differentieerbaar zijn. F_{Cnt} kan zelfs in het geheel niet voorgesteld worden als een integraal, maar is wel continu.

We geven twee aequivalente definities, één van f_{Cnt} (definitie a) en één van F_{Cnt} (definitie b); de aequivalentie van de twee definities wordt in punt c bewezen.

a. Definitie a: Over het interval$\left(-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right)$ wordt trapsgewijze een totale massa 1 verdeeld.

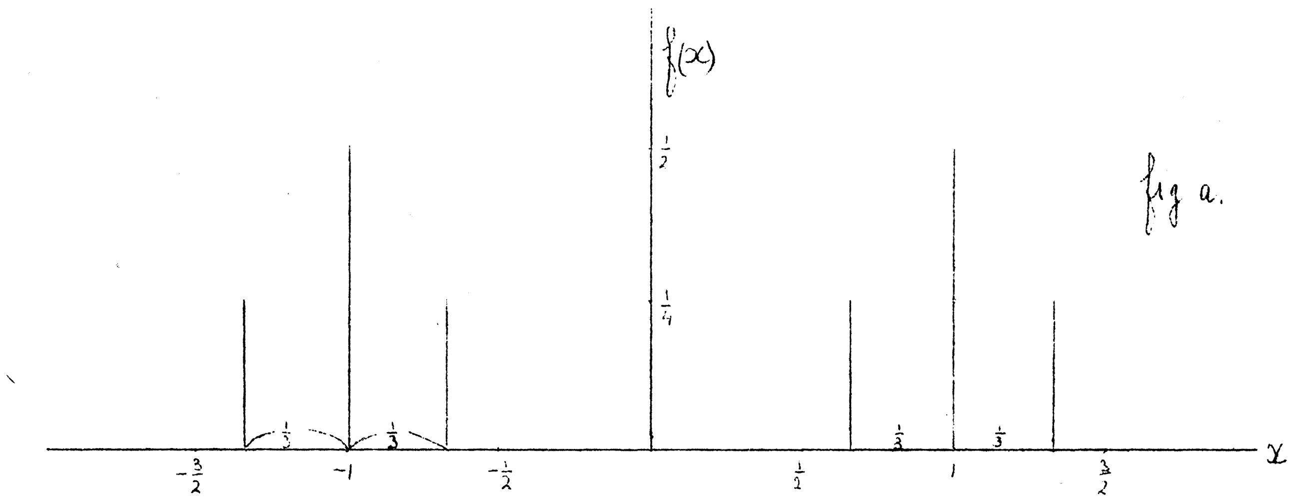
---

1) Het residu van een complexe fct $f(z)$ in een punt z_0 is, als $f(z)$ in de omgeving van z_0 regulier is, gedefinieerd als:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{O} f(z)\,dz$$

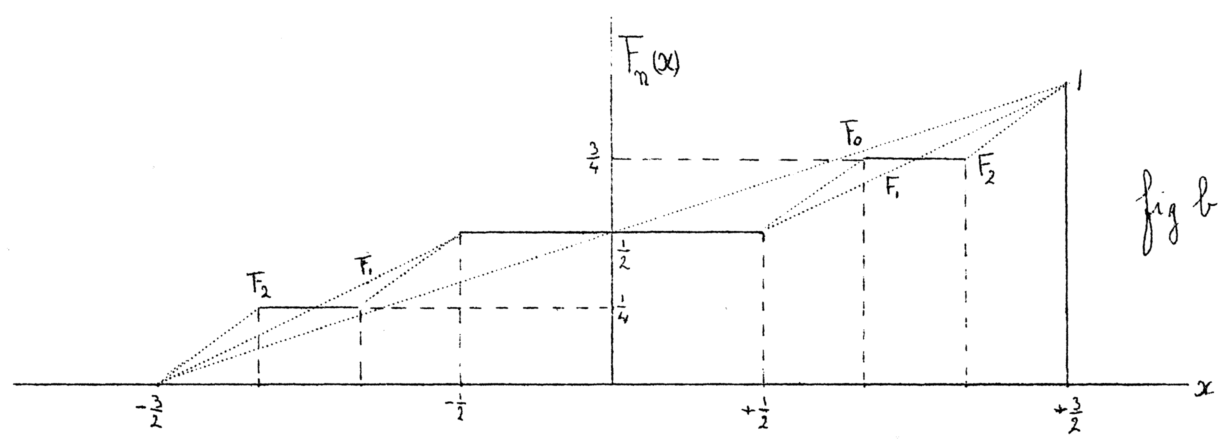
, waarin de integratieweg een kleine in positieve zin doorlopen gesloten kromme om het punt $z=z_0$ is, die geheel verloopt in het gebied, waar $f(z)$ regulier is. In de Laurent-ontwikkeling van $f(z)$ in z_0 is a_{-1} de coefficient van de term $(z-z_0)^{-1}$.

2) sgn t = signum t $= \begin{cases} 1 & \text{voor } t>0 \\ 0 & \text{voor } t=0 \\ -1 & \text{voor } t<0 \end{cases} = \iota(t) - \iota(-t)$ (vgl.bl.42, whr 131



Eerste trap: de totale massa wordt in twee gelijke delen verdeeld, die in de punten x = -1 en x = + 1 worden geplaatst.
Tweede trap: beide massa's worden in 2 gelijke delen verdeeld en deze worden over een afstand $\frac{1}{3}$ naar links resp. rechts verschoven.
n^e trap: iedere op de $(n-1)^e$ trap aanwezige massa wordt in twee gelijke delen verdeeld, die over een afstand 3^{-n+1} naar links resp. naar rechts worden verschoven.
De limiet voor $n \rightarrow \infty$ in de verdelingsdichtheid van $\underline{x}_{Cnt}$.

b. Definitie b: Men kan de verdeling ook definieren door F_{Cnt} te laten ontstaan als de limiet van een rij verdelingsfcts. F_n:



De gestippelde stukken van F_n zijn monotoon niet dalend, maar overigens willekeurig. De overeenstemming van de twee definities kan men aanschouwelijk op de volgende wijze inzien:

De massa's van de n^e trap van definitie a liggen allen boven punten gelegen in die horizontale stukken van F_{n+1} (van definite b), die nog niet horizontaal zijn bij F_n. Wordt een dergelijke massa (boven een punt met abscis p) bij overgang naar de volgende trap verdeeld en de delen naar links en rechts verschoven, dan ontstaat een interval met p als middelpunt, waarin bij de verdere verdelingen en verschuivingen van de massa's geen massa meer doordringt en wel precies dat interval om p,

waarin F_{n+1} (dus ook F_m voor $m > n+1$, dus ook F_∞) constant is.
Een exact bewijs van de aequivalentie vindt men in punt c. F_{Cnt} is als volgt uit definitie b af te leiden: nemen we de gestippelde stukken van F_n recht, dan is:

$$F_0(x) = \frac{1}{6}\left\{\chi(2x+3) - \chi(2x-3)\right\} \quad \text{met } \chi(x) = x \cdot \iota(x)$$
$$\text{dus } \chi(ax) = a \cdot \chi(x) \text{ voor } a > 0$$

$$F_1(x) = \frac{1}{4}\left\{\chi(2x+3) + \chi(2x-1) - \chi(2x-3) - \chi(2x+1)\right\}$$

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left\{F_n(3x+3) + F_n(3x-3)\right\}$$

$$F_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_{Cnt}(x)$$

c. Karakteristieke fct:
Uit definitie a volgt x_{Cnt} is de som van aftelbaar oneindig vele onafhankelijke variabelen x_{A_ν}, die verdeeld zijn volgens aequi-alternatieven $A_\nu = A\ (\frac{1}{2}; -3^{-\nu}, +3^{-\nu})$.
Daar (vgl. bl. 83, Whr 172)

$$\varphi_{A(\frac{1}{2};-3^{-\nu},+3^{-\nu})}(t) = \cos 3^{-\nu} t \qquad \text{is, is dus}$$

$$\varphi_{Cnt}(t) = \prod_0^\infty \cos 3^{-\nu} t$$

Uit definitie b volgt:

$$\varphi_0(t) = \int_{-\frac{3}{2}}^{+\frac{3}{2}} e^{itx}\, dF_0(x) = \frac{1}{3}\int_{-\frac{3}{2}}^{+\frac{3}{2}} e^{itx}\, dx = \frac{\sin \frac{3}{2}t}{\frac{3}{2}t}$$

en:

$$\varphi_{n+1}(t) = \int_{-\frac{3}{2}}^{+\frac{3}{2}} e^{itx}\, dF_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{2}}^{+\frac{3}{2}} e^{itx}\, dF_n(3x+3) + \frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{2}}^{+\frac{3}{2}} e^{itx}\, dF_n(3x-3) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-it}\int_{-\frac{3}{2}}^{+\frac{15}{2}} e^{\frac{1}{3}ity}\, dF_n(y) + \frac{1}{2} e^{it}\int_{-\frac{15}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{3}ity}\, dF_n(y) =$$

$$= \varphi_n\left(\frac{t}{3}\right) \cdot \cos t$$

Dus

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin \frac{1}{2}(3^{-n+1}t)}{\frac{1}{2}\cdot 3^{-n+1}t} \prod_{0}^{n-1} \cos 3^{-\nu} t$$

$$\varphi_\infty(t) = \prod_{0}^{\infty} \cos 3^{-\nu} t$$

De twee definities voeren dus tot dezelfde verdeling.
(Vgl. de éénduidigheidsstelling; bl. 70, whr bl. 159).

Ontwikkelen we $x + \frac{3}{2}$ in een ternale breuk:

$$x + \frac{3}{2} = \sum_{0}^{\infty} a_\nu . 3^{-\nu} \quad \text{met} \quad a_\nu = [3^\nu(x+\tfrac{3}{2})] - 3[3^{\nu-1}(x+\tfrac{3}{2})] = 0 \text{ of } 1 \text{ of } 2 \qquad ^{1)}$$

dan worden deze horizontale stukken gevormd door punten met abscis x, waarbij in de ternale ontwikkeling van x minstens één $a_n = 1$ is. Is a_n de eerste ontwikkelingscoefficiënt van x, die = 1 is, dan is dus voor deze x:

$$F_{m+1}(x) = F_{Cnt}(x) = S_m = \sum_{0}^{m} 2^{-\nu-1}\left[\frac{a_\nu + 1}{2}\right]$$

Treedt in de ternale ontwikkeling van x geen $a_n=1$ op, dan is

$$S_m \leqq F_{m+1}(x) \leqq S_m + 2^{-m-1}$$

zodat dus, samenvattend, geldt:

$$F(x) = \sum_{0}^{\infty} 2^{-\nu-1}\left[\frac{a_\nu + 1}{2}\right] \prod_{0}^{\nu-1} |a_i - 1| \qquad ^{2)}$$

met

$$a_\nu = [3^\nu(x+\tfrac{3}{2})] - 3[3^{\nu-1}(x+\tfrac{3}{2})]$$

$F_{Cnt}(x)$ is continu, daar $|F(x_1) - F(x_2)| < 2^{-n-1}$ is voor $|x_1 - x_2| < 3^{-n}$

e. Gedrag van $\varphi(t)$ voor $t \to \infty$:

Voor $t \to \infty$ oscilleert $\varphi(t)$ tussen eindige grenzen. Enerzijds is nl. $|\varphi(t)| \leqq 1$, anderzijds is voor $t = \pi$:

$$\varphi(\pi . 3^k) = \prod_{0}^{\infty} \cos(\pi . 3^{-\nu+k}) = \prod_{0}^{k} \cos(\pi . 3^i) \prod_{0}^{\infty} \cos(\pi . 3^{-\nu}) =$$

$$= (-1)^k \varphi(\pi)$$ voor iedere k, daar $\cos(\pi . 3^i) = -1$ is voor iedere i.

---

[1]) Bij deze wijze van ontwikkelen is het optreden van op 2 repeterend ternale breuken onmogelijk. Aan ieder getal is op deze wijze één en slechts één ternale breuk toegevoegd.

[2]) De factor $\prod_{0}^{\nu-1} |a_i - 1|$ is=1 zolang er geen $a_n = 1$ is opgetreden en = 0 nadat dit wel is gebeurd.

§ 3. De verdelingen van Pearson. Symbool P_I , P_{II} , enz.

Lit: KARL PEARSON, on the probable error of frequency-constants Biometrika 2 (1903) p. 273-281;
Tables for Statisticians and Biometricians, Cambridge 1914, 3rd ed. 1945.
W.P. ELDERTON, Frequency curves and correlation, London 1906, 3rd ed. 1938.

a. Definitie: Verdelingen van Pearson zijn die continu differentieërbare verdelingen, waarbij de logarithmische afgeleide van de verdelingsdichtheid (in haar definitie-interval) een rationale fct van x is, waarvan de teller lineair en de noemer quadratisch is:

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dx} = \frac{b_0 + b_1 x}{c_0 + 2c_1 x + c_2 x^2} \tag{1}$$

(Pearson beschouwt algemener krommen, waarbij de noemer van het rechterlid een willekeurige machtreeks in x is. Deze laten we hier buiten beschouwing). Als definitiegebied wordt zo mogelijk het gehele (eindige of oneindige) interval gekozen, waar $f(x)$ analytisch en >0 is. Wanneer dit door divergentie van $\int f(x)\,dx$ over dit gebied niet mogelijk is, moet het interval dienovereenkomstig beperkt (afgeknot) worden. Daar de meeste afgeknotte verdelingen niet van veel belang zijn, zullen we er slechts enkele behandelen. De mogelijkheid van uitbreiding van het definitiegebied voor die gevallen, waarin de analyticiteit alleen voor speciale (gehele) waarden van een exponent optreedt, zullen we buiten beschouwing laten.

b. Opmerkingen:

1. De definitie generaliseert de normale verdeling, daar voor

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad \text{geldt:}$$

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dx} = -x \qquad (b_0 = c_1 = c_2 = 0\ ;\ b_1 = -c_0 \neq 0)$$

2. De definitie is invariant tegenover (gehele) lineaire transformaties van x; deze kunnen gebruikt worden om nulpunten en schaal op eenvoudige ("natuurlijke") wijze aan de kromme aan te passen.

3. Zolang de teller lineair (met $b_1 \neq 0$) en de noemer continu (niet noodzakelijk quadratisch) is, heeft $\frac{df}{dx} = 0$ één oplossing $x = -b_0/b_1$; dit is (als aldaar de noemer $\neq 0$ is) een extremum

van $f(x)$, in de meeste gevallen een maximum, de modus.
Het lineair zijn van de teller leidt dus meestal tot unimodaliteit (het bezitten van één modus). Met quadratische teller zouden we bimodale krommen kunnen krijgen, enz.

c. Classificatie en integratie der differentiaalvergelijking.

1. Is $b_0 = b_1 = 0$, dus $\frac{f'(x)}{f(x)} = 0$ dan is $f(x)$ = constant, zodat we de homogene verdeling krijgen.(We noemen dit type H.) Beiderzijds afknotten is noodzakelijk; zonder beperking der algemeenheid kunnen we ons tot het interval tussen 0 en 1 beperken.

2. Is $c_1 = c_2 = 0$ dus $c_0 \neq 0$ en is $b_1 c_0 < 0$, dan is $\frac{f'(x)}{f(x)}$ een lineaire, dus $\ln f(x)$ een quadratische fct van x;
$\underline{x}$ is dan dus normaal verdeeld (type N)
Afknotting is niet nodig.
Voor $b_1 c_0 > 0$ zouden we een kromme transformeerbaar op $e^{+\frac{1}{2}x^2}$ krijgen, die bij $x = 0$ een minimum heeft en beiderzijds moet worden afgeknot.

3. Is $c_1 = c_2 = 0$ en $b_1 = 0$ dan is $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{b_0}{c_0}$ = constant, dus $\ln f(x)$ lineair; $-\frac{b_0}{c_0}\underline{x}$ is dan exponentieel verdeeld (Pearson type X). Eenzijdige afknotting is in dit geval noodzakelijk, de plaats waar dit gebeurt is van geen belang.

4. Is $c_2 = 0$, $c_1 \neq 0$, dan is

$$\frac{df}{f} = \frac{b_1}{2c_1}\,dx + \frac{2c_1 b_0 - c_0 b_1}{2c_1}\,\frac{dx}{2c_1 x + c_0}$$

$$\ln f = \frac{b_1}{2c_1}x + \frac{2c_1 b_0 - c_0 b_1}{2c_1}\ln|2c_1 x + c_0| + \text{const.}$$

$$f :: e^{\frac{b_1}{2c_1}x}\,.\,|2c_1 x + c_0|^{\frac{2c_1 b_0 - c_0 b_1}{4c_1^2}} \qquad {}^{1)}$$

Stel voor $b_1 \neq 0$ $\quad -y = \frac{b_1}{4c_1^2}(2c_1 x + c_0)$ dan is
$f :: e^{-y}\,|y|^{\omega}$ met $\omega = \frac{2c_1 b_0 - c_0 b_1}{4c_1^2}$.

---

1): :: betekent hier en verder: "is op een constante factor na gelijk aan".

Daar f (0) = 0 is wordt het definitiegebied door het punt y = 0 in tweeën gesplitst. Beperken we ons tot $y > 0$ dan krijgen we Pearson type III :

$$f :: e^{-y} y^{\omega} \qquad (y>0)$$

Dit is dus de Γ-verdeling. De convergentie van $\int_0^\infty f\,dy$ vereist $\omega > -1$. Is hieraan niet voldaan, dan is een eenzijdig afknotten noodzakelijk.

Voor $y<0$ zouden we, als we y door -y vervangen, krijgen

$$f :: e^{y} y^{\omega} \qquad (y>0)$$

Hierbij is afknotting altijd noodzakelijk. We laten dit type verder buiten beschouwing.

Is $b_1 = 0$ dan is f voor geen enkele waarde van ω over het gehele interval, waarvoor f gedefiniëerd is integreerbaar.

Dan is

$$f :: |2c_1 x + c_0|^{\frac{b_0}{2c_1}}$$

Dit leidt tot de typen VIII, IX, XI en LH, die uit type I en VI ontstaan door aan de parameters speciale waarden toe te kennen. Vgl. punt d, hoofdtype I; $\frac{df}{f}$ kan nl. op twee wijzen de gedaante $\frac{dx}{a+bx}$ aannemen, 1^e^ doordat $b_1 = c_2 = 0$ is en 2^e^ doordat $c_2 \neq 0$ is en de teller op de noemer deelbaar is.

Is $\bar{\omega} = \frac{b_0}{2c_1} < -1$ dan is links afknotten noodzakelijk.

Zij $0 < a+1 < |2c_1 x_0 + c_0| < \infty$ en $y = \frac{|2c_1 x + c_0| - (1+a)}{1+a}$ dan is

$$f :: (1+y)^{\bar{\omega}} \qquad (0 < y < \infty) \qquad \underline{\text{type XI}}$$

Is $\bar{\omega} = \frac{b_0}{2c_1} = -1$ dan is beiderzijds afknotten noodzakelijk.

Zij $0 < a < |2c_1 x + c_0| < b < \infty$ en $y = \left|\frac{2c_1 x + c_0}{a}\right|$ dan is

$$f :: \frac{1}{y} \qquad \left(1 < y < \beta = \frac{b}{a}\right) \qquad \underline{\text{type L H}}.$$

(Dit type wordt gewoonlijk niet onder de Pearson-verdelingen vermeld). L H is afkorting van "logarithmisch -homogeen". Door de transformatie

$y = \frac{\ln z}{\ln \beta}$ (dus $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{\ln\beta}$) gaat de verdeling nl. over in de homogene tussen 0 en 1.

Is $-1 < \frac{b_0}{2c_1} = \bar{\omega}$ en $b_0 \neq 0$ dan is rechts afknotten noodzakelijk.
Zij $0 < |2c_1 x + c_0| < a < \infty$ en $y = \left|\frac{2c_1 x + c_0}{a}\right|$ dan is

$f :: y^{\bar{\omega}} \quad (0 < y < 1)$ <u>Type VIII</u> voor $-1 < \bar{\omega} < 0$
<u>Type IX</u> voor $\bar{\omega} > 0$

Is $\frac{b_0}{2c_1} = \bar{\omega} = 0$ dan krijgen we weer de homogene verdeling (zie punt 1).

5. Zij verder dus $c_2 \neq 0$. Dan is

$$\frac{df}{f} = \frac{b_1}{2c_1} \cdot \frac{2(c_1 + c_2 x)\,dx}{c_0 + 2c_1 x + c_2 x^2} + \frac{dg}{g}$$

$$f(x) :: |c_0 + 2c_1 x + c_2 x^2|^{\frac{b_1}{2c_1}} \cdot g(x)$$

met

$$\frac{dg}{g} = \frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{c_2(c_2 x^2 + 2c_1 x + c_0)}\,dx = \frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{(c_2 x + c_1)^2 - \Delta}\,dx$$

$$\Delta = c_1^2 - c_0 c_2$$

Is nu:

<u>A</u>. $\Delta > 0$, dan is $\frac{2\sqrt{\Delta}}{\Delta - (c_2 x + c_1)^2} = \frac{1}{\sqrt{\Delta} - c_2 x - c_1} + \frac{1}{\sqrt{\Delta} + c_2 x + c_1}$

dus

$$\frac{dg}{g} = \frac{b_1 c_1 - b_0 c_2}{2c_2\sqrt{\Delta}} \left\{ \frac{c_2\,dx}{\sqrt{\Delta} + c_2 x + c_1} + \frac{c_2\,dx}{\sqrt{\Delta} - c_2 x - c_1} \right\}$$

of

$$g :: \left|\frac{\sqrt{\Delta} + c_2 x + c_1}{\sqrt{\Delta} - c_2 x - c_1}\right|^{\frac{b_1 c_1 - b_0 c_2}{2c_2\sqrt{\Delta}}}$$

en, daar $c_0 + 2c_1 x + c_2 x^2 :: (\sqrt{\Delta} + c_2 x + c_1)(\sqrt{\Delta} - c_2 x - c_1)$

$$f :: |\sqrt{\Delta} + c_2 x + c_1|^{\frac{b_1}{2c_2} + \frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{2c_2\sqrt{\Delta}}} \; |\sqrt{\Delta} - c_2 x - c_1|^{\frac{b_1}{2c_2} - \frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{2c_2\sqrt{\Delta}}}$$

Stelt men nu voor $(c_2 x + c_1)^2 < \Delta$ $\quad y = \frac{1}{2} + \frac{c_2 x + c_1}{2\sqrt{\Delta}}$

dan wordt dit:

$$f :: y^{\alpha}(1-y)^{\beta} \qquad (0 < y < 1)$$

dus de $\underline{B(\alpha+1, \beta+1)}$ verdeling (Pearson type I,II,XII)
met

$$\alpha = \frac{b_1}{2c_1} + \frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{2c_2\sqrt{\Delta}} \qquad \beta = \frac{b_1}{2c_2} - \frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{2c_2\sqrt{\Delta}}$$

De beperking $0 < y < 1$ volgt uit $(c_2 x + c_1)^2 < \Delta$ (voor $(c_2 x + c_1)^2 = \Delta$ wordt $f = 0$; vgl. punt a).

Voor $\alpha > -1$ en $\beta > -1$ is afknotting niet nodig.

De typen die ontstaan, als niet $\alpha > -1$ en $\beta > -1$ is, moeten allen afgeknot worden. We zullen deze typen niet behandelen.

Voor $(c_2 x + c_1)^2 > \Delta$, b.v. $c_2 x + c_1 > \sqrt{\Delta}$ echter stellen we b.v.

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{c_2 x + c_1}{2\sqrt{\Delta}}$$

Dan wordt dus:

$$f :: y^{\beta}(1+y)^{\alpha} \qquad (0 < y < \infty)$$

(Pearson type VI)

met dezelfde α en β. De convergentie van $\int_0^{\infty} f\,dx$ vereist

$\beta > -1$, $\alpha + \beta < -1$. Is hieraan voldaan, dan is afknotting niet nodig.

(Voor $c_2 x + c_1 < -\sqrt{\Delta}$ en $y = -\frac{1}{2} - \frac{c_2 x + c_1}{2\sqrt{\Delta}}$ krijgt men dezelfde verdeling met α en β verwisseld; convergentievoorwaarden dus: $\alpha > -1$ en $\alpha + \beta < -1$)

Stelt men nog $\frac{y}{1+y} = z$, $0 < z < 1$ dan wordt

$$f\,dx :: y^{\beta}(1+y)^{\alpha}\,dy :: z^{\beta}(1-z)^{-\alpha-\beta-2}\,dz$$

dwz.

$\frac{y}{1+y}$ is $B(\beta+1, -\alpha-\beta-1)$-verdeeld.

B. $\Delta = 0$ Dan is

$$\frac{dg}{g} = \frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{c_2} \cdot \frac{c_2\, dx}{(c_2 x + c_1)^2}$$

$$g :: e^{-\frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{c_2} \cdot \frac{1}{c_2 x + c_1}}$$

dus, daar thans $c_0 + 2c_1 x + c_2 x^2 :: (c_2 x + c_1)^2$ is :

$$f :: |c_2 x + c_1|^{\frac{b_1}{c_2}}\, e^{-\frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{c_2} \cdot \frac{1}{c_2 x + c_1}}$$

Voor $b_0 c_2 - b_1 c_1 = 0$ krijgen we weer de typen VIII, IX en XI (Zie punt 4).

Zij dus $b_0 c_2 - b_1 c_1 \neq 0$. Stelt men dan

$$\frac{c_2 (c_2 x + c_1)}{b_0 c_2 - b_1 c_1} = y$$

dan wordt

$$f :: e^{-\frac{1}{y}} |y|^{\frac{b_1}{c_2}}$$

Deze fct bezit voor y = 0 een discontinuïteit. Alleen voor $0 < y < \infty$ en $-\infty < \frac{b_1}{c_2} < -1$ behoeft niet afgeknot te worden. Dan is (Pearson type V) :

$$f :: e^{-\frac{1}{y}} y^{\frac{b_1}{c_2}} \qquad \left(y > 0\ ;\ -\infty < \frac{b_1}{c_2} < -1\right)$$

d.w.z. $\frac{1}{y}$ is $\Gamma\left(-\frac{b_1}{c_2} - 1\right)$-verdeeld (Waarom niet $\Gamma\left(-\frac{b_1}{c_1} + 1\right)$?).

C. $\Delta < 0$ Dan is:

$$\frac{dg}{g} = \frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{-\Delta} \cdot \frac{dx}{1 + \frac{(c_2 x + c_1)^2}{-\Delta}}$$

$$g :: e^{\frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{c_2 \sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{c_2 x + c_1}{\sqrt{-\Delta}}}$$

Stelt men dus $\frac{c_2 x + c_1}{\sqrt{-\Delta}} = y$ dan wordt

$$c_0 + 2c_1 x + c_2 x^2 :: 1 + y^2$$

dus

$$f :: (1 + y^2)^{\frac{b_1}{2c_2}}\, e^{\frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{c_2 \sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg} y}$$

(Pearson type IV, VII)

Daar y alle reële waarden kan doorlopen en arctg y daarbij begrensd blijft, is voor de convergentie van $\int_{-\infty}^{+\infty} f\,dx$ vereist, dat $\frac{b_1}{c_2} < -1$ is. Is $\frac{b_1}{c_2} \geqq -1$ dan moet aan beide zijden afgeknot worden.

d. Overzicht van de invariante exponenten en normaalvormen.

De in de verschillende typen optredende exponenten zijn invariant (t.w. ten opzichte van lineaire transformatie van x). Zij kunnen alle worden afgeleid uit de twee fundamentele invarianten

$$\lambda = \frac{b_1}{c_2}$$

$$\text{en } \omega = \frac{c_0 b_1^2 - 2c_1 b_1 b_0 + c_2 b_0^2}{4b_1(c_0 c_2 - c_1^2)} \quad {}^{1)}$$

In het bijzonder geldt dit voor de veelvuldig optredende invariant

$$\delta = -\frac{(b_0 c_2 - b_1 c_1)^2}{c_2^2(c_0 c_2 - c_1^2)}$$

waarvoor de identiteit $\delta = \lambda^2 - 4\lambda\omega$ gemakkelijk afgeleid kan worden.

Opgemerkt worde, dat als c_2 nul wordt en $c_1 \neq 0$ is, ω eindig blijft terwijl λ en δ oneindig worden. Verder bestaat er nog een verband tussen de coëfficienten van de differentiaalvergelijking

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{b_0 + b_1 x}{c_0 + 2c_1 x + c_2 x^2}$$

en de invarianten : noemen we de nulpunten van de noemer A_1 en A_2 en dat van de teller B , terwijl we het punt $x=\infty$ door N voorstellen, dan is de dubbelverhouding

$$(A_1 B ; A_2 N) = \frac{x_{A_1} - x_{A_2}}{x_{A_1} - x_N} : \frac{x_B - x_{A_2}}{x_B - x_N} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\delta}}{2\omega}$$

$$\left(\text{en } (A_2 B ; A_1 N) = \frac{\lambda \mp \sqrt{\delta}}{2\omega}\right).$$

Afleiding: stellen we

$\mu = (A_1 A_2 ; B N)$ dan is $\mu + \frac{1}{\mu} - 2 = -\frac{\lambda}{\omega}$

---

[1]) De ω van punt c,4 ontstaat hieruit door $c_2 = 0$ te stellen.

Uitgedrukt in deze invarianten krijgen we nu de volgende normaalvormen:

Hoofdtype I. ($|\sqrt{\delta}| < \lambda + 2 < \infty$ [1]) B-verdeling

$$f(x)\,dx = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}(\lambda+\sqrt{\delta})+1, \frac{1}{2}(\lambda-\sqrt{\delta})+1\right)}\, y^{\frac{1}{2}(\lambda+\sqrt{\delta})} (1-y)^{\frac{1}{2}(\lambda-\sqrt{\delta})} \qquad (0<y<1)$$

$$\frac{df}{f} = \frac{\frac{1}{2}(\lambda+\sqrt{\delta}) - \lambda y}{y - y^2}\, dy$$

Neventypen:

Type II = type I met $\delta = 0$ (symmetrisch; $\lambda + 2 > 0$).

Type XII = type I met $\lambda = 0$, $0 < |\sqrt{\delta}| < 2$

$$\frac{df}{f} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\delta}}{y - y^2}\, dy$$

Type VIII en IX $\lambda = \sqrt{\delta}$ (monomisch)

$$f(x)\,dx = (\lambda+1)\, y^{\lambda}\, dy \qquad (0<y<1)$$

(VIII voor $-1 < \lambda < 0$, IX voor $\lambda > 0$)

$$\frac{df}{f} = \frac{\lambda}{y}\, dy$$

Type VI ($-2+\sqrt{\delta} < \lambda < -1$) Reciproke B-verdeling

$$f(x)\,dx = \frac{1}{B\left(-\lambda-1, \frac{1}{2}(\lambda-\sqrt{\delta})+1\right)}\, y^{\frac{1}{2}(\lambda-\sqrt{\delta})} (1+y)^{\frac{1}{2}(\lambda+\sqrt{\delta})}\, dy \qquad (0<y<\infty)$$

en $(-2-\sqrt{\delta} < \lambda < -1)$

$$f(x)\,dx = \frac{1}{B\left(-\lambda-1, \frac{1}{2}(\lambda+\sqrt{\delta})+1\right)}\, y^{\frac{1}{2}(\lambda+\sqrt{\delta})} (1+y)^{\frac{1}{2}(\lambda-\sqrt{\delta})}\, dy \qquad (0<y<\infty)$$

Indien type I convergent is, is dit, als bovendien $\lambda < -1$ is, voor beide typen VI het geval. Is $\lambda < -1$ en $|\lambda+2| < |\sqrt{\delta}|$ dan is type I niet convergent (en moet dus afgeknot worden), terwijl één van twee typen VI wel convergeert (de keuze van het teken van $\sqrt{\delta}$ bepaalt welke van de twee dit is).

$$\frac{df}{f} = \frac{\frac{1}{2}(\lambda \mp \sqrt{\delta}) + \lambda y}{y + y^2}\, dy$$

---

[1]) $\sqrt{\delta}$ kortheidshalve in plaats van $\delta^{1/2}$, $>$, $=$ of < 0

Speciaal VI* ') $\delta = 0 \quad -2 < \lambda < -1$

$$f(x)\,dx = y^{\frac{1}{2}\lambda}(1+y)^{\frac{1}{2}\lambda}\,dy \qquad (0 < y < \infty)$$

en XI : $\lambda = +\sqrt{\delta} < -1$

$$f(x)\,dx = (\lambda+1)(1+y)^{\lambda}\,dy \qquad (0 < y < \infty)$$

Type L H : $\lambda = -\sqrt{\delta} = -1$

$$f(x)\,dx = \frac{1}{\ln\beta}\,\frac{dy}{y} \qquad (1 < y < \beta)$$

Hoofdtype IV $(-\infty < \lambda < -1 \quad ; \delta \leqq 0)$

$$f(x)\,dx = \frac{1}{F(-\lambda-2;\frac{1}{2}\sqrt{\delta})}(1+y^2)^{\frac{1}{2}\lambda}\,e^{\sqrt{-\delta}\,\mathrm{arctg}\,y}\,dy \qquad (-\infty < y < +\infty)$$

(de notatie $F(-\lambda-2,-\frac{1}{2}\sqrt{\delta})$ voor de constante factor is van Pearson afkomstig, vgl. punt f, type IV).

$$\frac{df}{f} = \frac{\sqrt{-\delta}+\lambda y}{1+y^2}\,dy$$

Neventypen:

Type VII = type IV met $\delta = 0$ (symmetrisch). Verdeling van Student.

Speciaal $\lambda = -2$, verdeling van Cauchy.

Hoofdtype III $(\lambda = \infty, \delta = \infty, \omega > -1)$ Γ-verdeling.

$$f(x)\,dx = \frac{1}{\Gamma(\omega+1)}\,e^{-y}\,y^{\omega}\,dy \qquad (0 < y < \infty)$$

$$\frac{df}{f} = \frac{\omega-y}{y}\,dy$$

Neventypen:

Type X = type III met $\omega = 0$ Exponentiële verdeling.

$$\frac{df}{f} = -dy$$

') Ook dit type wordt gewoonlijk in overzichten van de Pearson verdelingen niet aangetroffen. Pearson zelf heeft in zijn oorspronkelijke publicatie slechts de typen I, III, IV en N genoemd,

<u>Type V</u> $(-\infty < \lambda < -1\ ,\ \delta = \infty)$ <u>Reciproke Γ-verdeling</u>

(Deze ontstaat uit type III door de transformatie $y = \frac{1}{x}$).

$$f(x)\,dx = \frac{1}{\Gamma(-\lambda-1)}\, e^{-\frac{1}{y}}\, y^{\lambda}\, dy \qquad (0 < y < \infty)$$

$$\frac{df}{f} = \frac{1+\lambda y}{y^2}\, dy$$

Speciaal $\lambda = -1$. <u>Reciprook exponentiële verdeling</u>.

<u>Type N</u>. $(\lambda = \infty\ ,\ \delta$ onbepaald$,\ \omega = \infty)$ <u>Normale verdeling</u>.

$$f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy \qquad (-\infty < y < +\infty)$$

$$\frac{df}{f} = -y\,dy$$

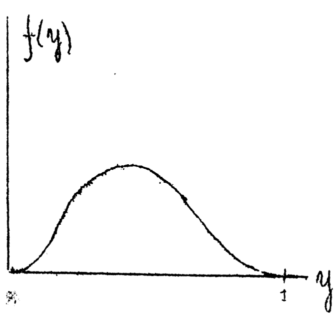
<u>Type H</u>. $(\lambda = \delta = 0\ ,\ \omega$ onbepaald$)$. <u>Homogene verdeling</u>.

$$f(x)\,dx = dy \qquad \frac{df}{f} = 0 \qquad (0 < y < 1)$$

e. <u>Overzicht over de typen</u>. [1]

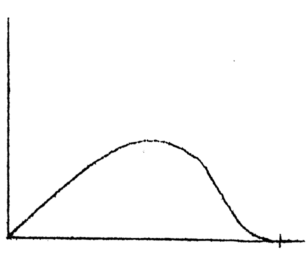
<u>Hoofdtype I</u>. B-verdeling [2]).

(1)



$$\left.\begin{array}{l} 2 < \lambda + \sqrt{\delta} \\ \text{en } 2 < \lambda - \sqrt{\delta} \end{array}\right\} \text{ dus } 2 < \lambda - |\sqrt{\delta}|$$

(2)



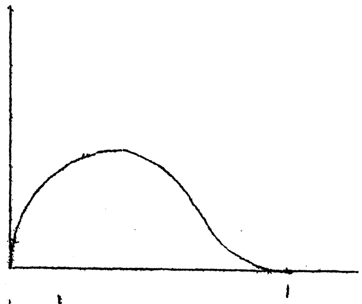
$$\left.\begin{array}{l} 2 = \lambda + \sqrt{\delta} \\ \text{en } 2 < \lambda - \sqrt{\delta} \end{array}\right\} \text{ dus } 2 - \lambda = \sqrt{\delta} < 0$$

----

[1]) de normaalvormen van de verdelingen vindt men in het vorig punt.

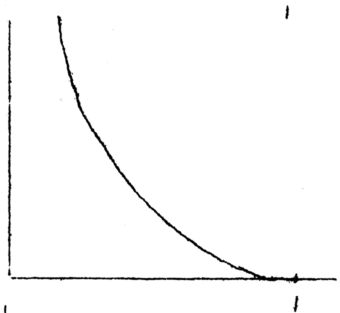
[2]) de hieronder geschetste typen (2), (3), (4), (5), (6) en (8) kunnen ook gespiegeld t.o.v. $x = \frac{1}{2}$ optreden.

(3)



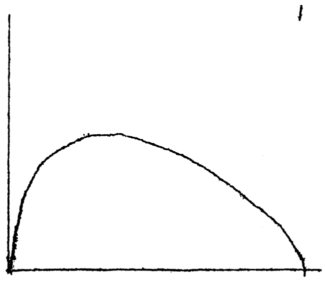
$$\left.\begin{array}{r} 0<\lambda+\sqrt{\delta}<2 \\ \text{en } 2<\lambda-\sqrt{\delta} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{dus } -\lambda<\sqrt{\delta}<2-\lambda<-\sqrt{\delta} \\ \text{of ook } -1+\sqrt{\delta}<1-\lambda<-|1+\sqrt{\delta}| \end{array}$$

(4)



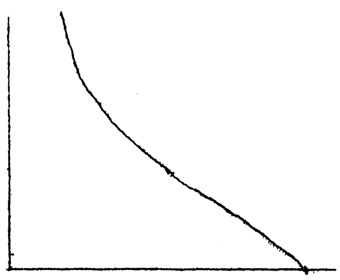
$$\left.\begin{array}{r} -2<\lambda+\sqrt{\delta}<0 \\ \text{en } 2<\lambda-\sqrt{\delta} \end{array}\right\} \text{dus } -2-\lambda<\sqrt{\delta}<-2+\lambda$$

(5)



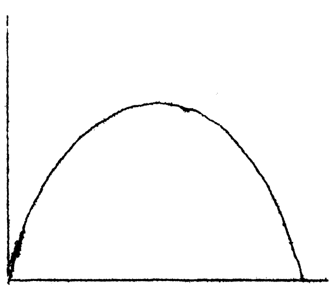
$$\left.\begin{array}{r} 0<\lambda+\sqrt{\delta}<2 \\ \text{en } 2=\lambda-\sqrt{\delta} \end{array}\right\} \text{dus } -1<\sqrt{\delta}=2-\lambda<0$$

(6)



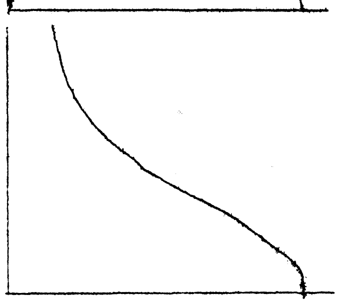
$$\left.\begin{array}{r} -2<\lambda+\sqrt{\delta}<0 \\ \text{en } 2=\lambda-\sqrt{\delta} \end{array}\right\} \text{dus } 0<\lambda=2+\sqrt{\delta}<1$$

(7)



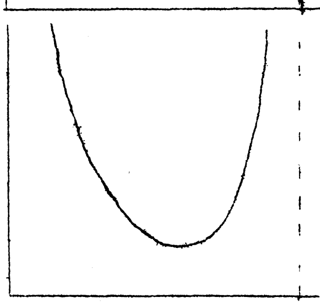
$$\left.\begin{array}{r} 0<\lambda+\sqrt{\delta}<2 \\ \text{en } 0<\lambda-\sqrt{\delta}<2 \end{array}\right\} \text{dus } |\sqrt{\delta}|<\min(\lambda,2-\lambda)$$

(8)



$$\left.\begin{array}{r} -2<\lambda+\sqrt{\delta}<0 \\ \text{en } 0<\lambda-\sqrt{\delta}<2 \end{array}\right\} \text{dus } |\lambda|<\min(-\sqrt{\delta},2+\sqrt{\delta})$$

(9)



$$\left.\begin{array}{r} -2<\lambda+\sqrt{\delta}<0 \\ \text{en } -2<\lambda-\sqrt{\delta}<0 \end{array}\right\} \text{dus } |\sqrt{\delta}|<\min(-\lambda,2+\lambda)$$

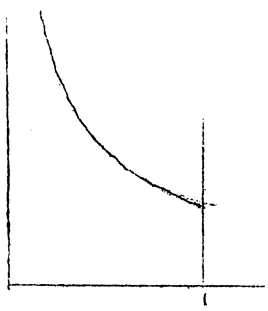
Type II: typen I (1), (7) en (9) symmetrisch; $\delta = 0$.

Type XII: $\lambda = 0 < |\sqrt{\delta}| < 2$. Speciaal geval $(\lambda = 0)$ van type I (8).

(Ook gespiegeld t.o.v. $x = \frac{1}{2}$).

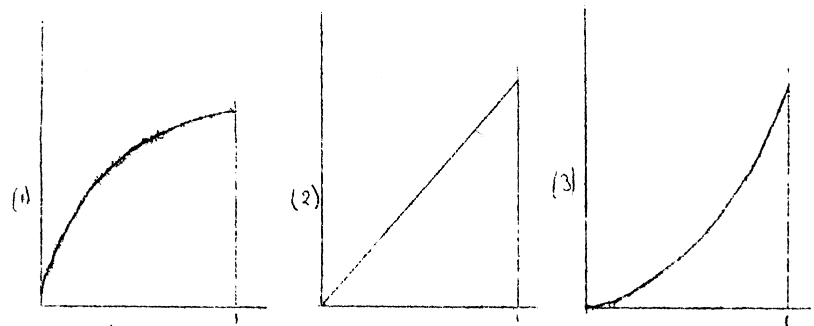
Type VIII en IX (monomisch)

VIII



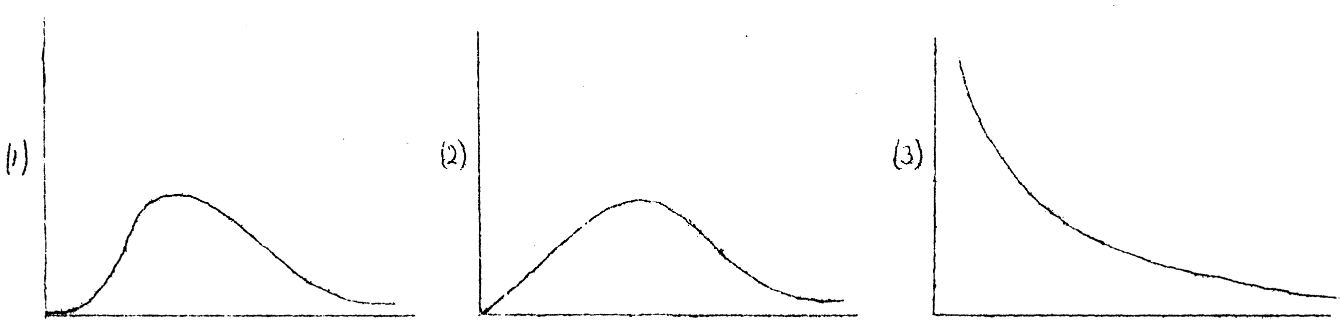
$-2 < \lambda = \sqrt{\delta} < 0$

IX



$0 < \lambda = \sqrt{\delta} < 2$ $\lambda = \sqrt{\delta} = 2$ $2 < \lambda = \sqrt{\delta}$

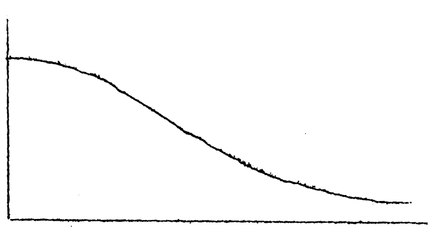
Type VI. (Reciproke B-verdeling. (de ongelijkheden onder de figuren gelden voor het eerste type VI; zie punt d).



$2 + \sqrt{\delta} < \lambda < -1$ $2 + \sqrt{\delta} = \lambda < -1$ $-2 + \sqrt{\delta} < \lambda < \min(-1, \sqrt{\delta})$.

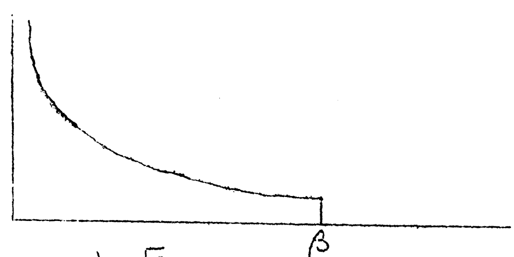
Type VI* $\delta = 0$ $-2 < \lambda < -1$ Speciaal geval van type VI (3).

Type XI



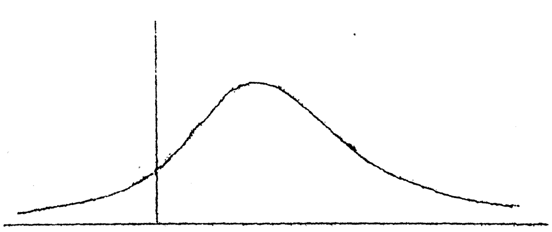
$\lambda = \sqrt{\delta} < -1$

Type LH



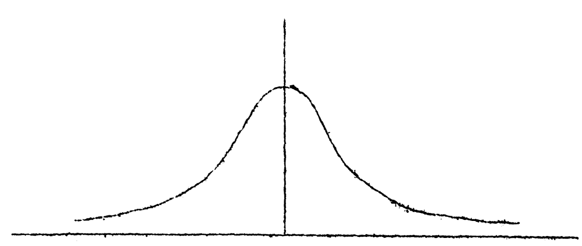
$\lambda = \sqrt{\delta} = -1$

Hoofdtype IV



$-\infty < \lambda < -1$ $\delta < 0$

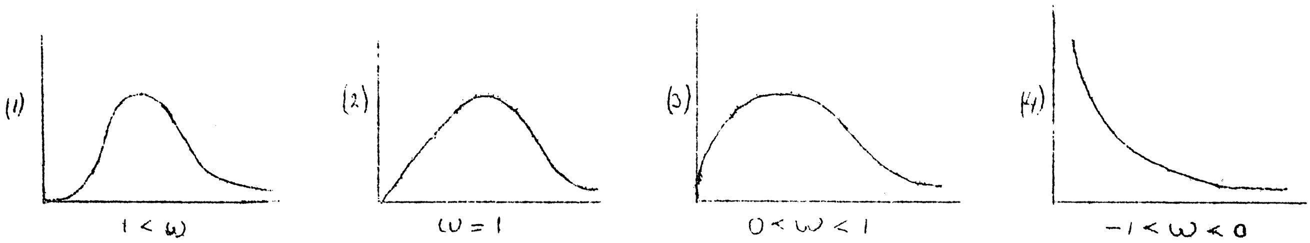
Type VII



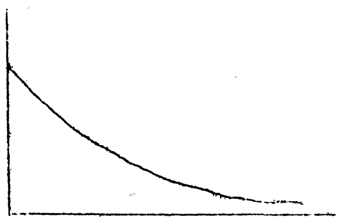
$-\infty < \lambda < -1$ $\delta = 0$ Student

Speciaal: $\lambda = -2$ Cauchy.

Hoofdtype III Γ - verdeling.

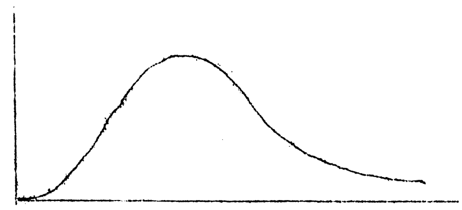


Type X Exponentiëel.



$\omega = 0$

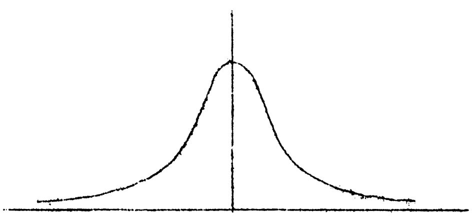
Type V Reciproke Γ-verdeling.



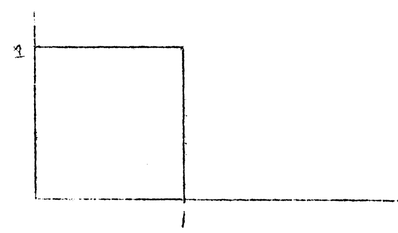
$-\infty < \lambda < -1$ $\delta = \infty$

Speciaal : $\lambda = -1$ reciprook exponentiëel

Type N Normale verdeling



Type H. Homogene Verdeling.



f. Overzicht notaties van Pearson.

In de Biometrika zijn enigszins andere notaties dan bovenstaande gebruikelijk, t.w. de door Pearson zelf ingevoerde. We zullen het verband tussen beide aangeven, daarbij telkens met y onze, met x Pearson 's variabele aanduidend.

Hoofdtype I. B-verdeling.

$$f(x) = \frac{1}{B(m_1+1, m_2+1)} \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2}}{(a_1+a_2)^{m_1+m_2+1}} \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{m_2}$$

$a_1 > 0$, $a_2 > 0$; $a_1 : a_2 = m_1 : m_2$ (oorsprong in modus) ; $-a_1 < x < a_2$

$$\underline{y} = \frac{x + a_1}{a_1 + a_2} \;; \quad \underline{x} = -a_1 + (a_1 + a_2)\, \underline{x}_{B(m_1+1,\, m_2+1)}$$

<u>Type II</u>. m voor $m_1 = m_2$, a voor $a_1 = a_2$;

$$2^{2m+1} B(m+1, m+1) = B(\tfrac{1}{2}, m+1). \quad \text{dus met } m > -1$$

$$f(x) = \frac{1}{a B(\frac{1}{2}, m+1)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m \qquad |x| < a$$

$$\underline{x} = -a + 2a\,\underline{x}_{B(m+1, m+1)} = a \sqrt{\underline{x}_{B(\frac{1}{2}, m+1)}}$$

<u>Type XII</u> m voor $m_1 = -m_2$, dus met $|m| < 1$

$$f(x) = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^m \frac{1}{(a_1 + a_2) B(1+m, 1-m)} \left(\frac{1 + \frac{x}{a_1}}{1 - \frac{x}{a_2}}\right)^m \qquad (-a_1 < x < a_2)$$

$$\underline{x} = -a_1 + (a_1 + a_2)\,\underline{x}_{B(1+m, 1-m)}$$

<u>Type IX</u> m voor m_1 ($m_2 = 0$), a voor a_1 ($a_2 = 0$):

$$f(x) = \frac{1+m}{a} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^m \qquad (-a < x < 0) \qquad m > 0$$

<u>Type VIII</u> m voor $-m_1$, a voor a_1 ($m_2 = a_2 = 0$):

$$f(x) = \frac{1-m}{a} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-m} \qquad (-a < x < 0) \qquad 0 < m < 1$$

<u>Type VI</u>

$$f(x) = \frac{a^{q_1 - q_2 - 1}}{B(q_1 - q_2 - 1, q_2 + 1)} x^{-q_1} (x - a)^{q_2} \qquad \left(1 < \frac{x}{a} < \infty\right) \qquad 0 < q_2 + 1 < q_1\ ^{1)}$$

$$\underline{y} = \frac{x - a}{a} \qquad \underline{x} = \frac{a}{\underline{x}_{B(q_1 - q_2 - 1, q_2 + 1)}}$$

<u>Type XI</u>. m voor q_1 ($q_2 = 0$) , b voor a

$$f(x) = (m-1)\, b^{m-1} x^{-m} \qquad \left(1 < \frac{x}{b} < \infty\right) \qquad m > 1$$

<u>Hoofdtype IV</u>

$$f(x) = \frac{1}{a F(2m-2, \nu)} \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-m} e^{-\nu \operatorname{arctg} \frac{x}{a}} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$F(2m-2, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + y^2)^{-m} e^{-\nu \operatorname{arctg} y}\, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-\nu\varphi} \cos^{2m-2}\varphi \, d\varphi \qquad (m > \tfrac{1}{2})$$

---

[1]) M.G. Kendall, The advanced theory of math. statistics I, 2nd ed. 1945, p. 140 vermeldt foutief $q_1 > q_2 - 1$

(De notatie $F(2m-2,\nu)$ is van Pearson. In de Engelse literatuur wordt $\tan^{-1}$ voor arctg geschreven ; in de oorspronkelijke publicatie van Pearson staat $\frac{r+2}{2}$ in plaats van m).

Type VII = Type IV met $\nu = 0$

$$F(2m-2,0) = B\left(\tfrac{1}{2}, m-\tfrac{1}{2}\right).$$

Hier geldt echter bovendien

$$|\underline{x}| = a\sqrt{\frac{\underline{x}_{B(\frac{1}{2},m-\frac{1}{2})}}{1-\underline{x}_{B(\frac{1}{2},m-\frac{1}{2})}}}$$

Hoofdtype III Γ-verdeling.

$$f(x) = \frac{p^{p+1}}{a\,e^{p}\,\Gamma(p+1)}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{p} e^{-\frac{px}{a}} \qquad \left(-1 < \frac{x}{a} < \infty\right) \quad p > -1$$

(oorsprong in modus)

$$\underline{y} = \frac{p}{a}(\underline{x}+a) \ ; \quad \underline{x} = -a + \frac{a}{p}\,\underline{x}_{\Gamma(p+1)} \qquad p = c\omega$$

Door de transformatie $x = b x' + c$ met $b > 0$ krijgen we

$$f(x) :: \left(1+\frac{x'}{a'}\right)^{p} e^{-\gamma x'} \qquad (-a' < x' < \infty)$$

met $a' = \frac{a+c}{b}$ en $\gamma = p \cdot \frac{b}{a}$ terwijl de modus nu is: $\hat{x}' = -\frac{c}{b}$

Type X Exponentieel . $p = 0$, σ voor $\frac{a}{p}$, $\sigma > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\, e^{-\frac{x}{\sigma}} \qquad (0 < x < \infty)$$

Type V.

$$f(x) = \frac{\gamma^{p-1}}{\Gamma(p-1)}\, x^{-p}\, e^{-\frac{\gamma}{x}} \qquad \left(0 < \frac{x}{\gamma} < \infty\right) \quad p = -\lambda$$

We zien dus, dat we behalve de normale verdeling (type N) alleen nog de typen I (B -verdeling), III (Γ -verdeling) en IV nodig hebben om alle typen te beheersen.

We geven tenslotte nog aan, hoe de invariante exponenten van Pearson met de onze samenhangen (zijn getallen a , a_1 , a_2 zijn niet invariant

Type		Karakterisering Hoofdtype	Neventype	convergentie voorwaarde
I	$m_{1,2}=\frac{1}{2}(\lambda\pm\sqrt{\delta})$	$\lambda\neq\infty$; $0\leqq\delta<\infty$ ω kan iedere waarde aannemen	–	$\lvert\sqrt{\delta}\rvert<\lambda+2$ of $\lambda(\omega+1)>-1$; $\lambda+2>0$
II	$m=\frac{1}{2}\lambda$	"	$\delta=0$; $\lambda\neq 0$; $\omega\neq 0$ en $\neq\infty$	$0<\lambda+2$ of $-1<2\omega$
XII	$m=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\delta}$	"	$\lambda=0$; $\omega=\infty$; $\delta\neq 0$	$0<\lvert\sqrt{\delta}\rvert<2$
VIII	$m=-\lambda$	"	$-1<\lambda=\sqrt{\delta}<0$; $\omega=0$	$-1<\lambda$
IX	$m=\lambda$	"	$\lambda=\sqrt{\delta}>0$; $\omega=0$	$-1<\lambda$
VI	$q_{1,2}=-\frac{1}{2}(\sqrt{\delta}\pm\lambda)$	"	–	$-\lvert\sqrt{\delta}\rvert<\lambda+2<1$
VI*	$q_{1,2}=\mp\frac{1}{2}\lambda$	"	$\delta=0$; $\lambda\neq 0$; $\omega\neq 0$ en $\neq\infty$	$-2<\lambda<-1$
XI	$m=q_1=-\lambda$	"	$\lambda=\sqrt{\delta}\neq 0$; $\omega=0$	$\lambda<-1$
LH	$m=q_1=-\lambda=1$	"	$\lambda=-\sqrt{\delta}=-1$; $\omega=0$	(afknotting)
IV	$m=-\frac{1}{2}\lambda$; $\nu=-\sqrt{-\delta}$	$\lambda\neq\infty$; $-\infty<\delta\leqq 0$; $\omega\neq 0$	–	$\lambda<-1$
VII	$m=-\frac{1}{2}\lambda$	"	$\delta=0$; $\lambda\neq 0$; $\omega\neq 0$ en $\neq\omega$	$\lambda<-1$
III	$p=\omega$	$\lambda=\delta=\infty$; $\omega\neq 0$	–	$\omega>-1$
X	–	"	$\omega=0$	(afknotting)
V	$p=-\lambda$	$\lambda\neq\infty$; $\delta=\infty$; $\omega=\infty$	–	$\lambda<-1$
N	–	$\lambda=\omega\neq\infty$; $\delta=\frac{0}{0}$	–	$c_0 b_1<0$
H	–	$\lambda=\delta=0$; $\omega=\frac{0}{0}$	–	(afknotting)

Met betrekking tot de systematiek moet opgemerkt worden, dat het gebruik van dezelfde letter m door Pearson b.v. bij type II, VIII, IX, XI, XII en IV (VII) niet gelukkig is, daar deze grootheden op geheel verschillende wijzen uit de invarianten worden afgeleid: m stelt soms λ , soms $-\lambda$, soms $\frac{1}{2}\lambda$, soms $-\frac{1}{2}\lambda$, soms $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\delta}$ voor. Hetzelfde geldt in nog hogere mate voor de letter p bij typen III en V. Ook is het weinig gelukkig, sommige speciale gevallen als afzonderlijke typen (nl. II, VIII, IX, XII, VII) in te voeren, temeer daar soms volkomen analoge gevallen (b.v. hier met VI* aangeduid) niet afzonderlijk beschouwd worden.

g. Lineaire transformaties.

Veranderen we nulpunt enschaal van de variabele door

$x = \alpha x' + \beta \quad (\alpha \neq 0)$ te stellen, dan wordt

$$\frac{df}{f} = \frac{\alpha(b_0 + b_1\beta + b_1\alpha x')}{c_0 + 2c_1\beta + c_2\beta^2 + 2\alpha(c_1 + c_2\beta)x' + c_2\alpha^2 x'^2}\, dx'$$

Dit is van de vorm (1) (zie punt a) met coëfficiënten $b_0', \ldots, c_2'$ gegeven door

$$b_1' = \alpha^2 \rho\, b_1 \qquad c_2' = \alpha^2 \rho\, c_2$$

$$b_0' = \alpha\rho(b_0 + b_1\beta) \qquad c_1' = \alpha\rho(c_1 + c_2\beta)$$

$$c_0' = \rho(c_0 + 2c_1\beta + c_2\beta^2)$$

waarin ρ een willekeurige evenredigheidsfactor $\neq 0$ kan zijn. Hieruit leidt men de volgende zgn. relatieve invarianten af, dat zijn grootheden, die op een (in de tweede kolom vermelde) factor na invariant zijn:

$$J_1 = c_0 b_1^2 - 2c_1 b_1 b_0 + c_2 b_0^2 \qquad J_1' = \alpha^4\rho^3 J_1$$

$$J_2 = c_1 b_1 - c_2 b_0 \qquad J_2' = \alpha^3\rho^2 J_2$$

$$J_3 = -\Delta = c_0 c_2 - c_1^2 \qquad J_3' = \alpha^2\rho^2 J_3$$

$$J_4 = c_2 \qquad J_4' = \alpha^2\rho\, J_4$$

$$J_5 = b_1 \qquad J_5' = \alpha^2\rho\, J_5$$

Het nul zijn dezer grootheden heeft een invariante betekenis, nl.

$J_1 = 0$: teller en noemer hebben een factor gemeen.
$J_2 = 0$: de (al dan niet reële) nulpunten van de noemer liggen symmetrisch t.o.v. het nulpunt van de teller.
$J_3 = 0$: de nulpunten van de noemer vallen samen.
$J_4 = 0$: minstens één nulpunt van de noemer ligt in het oneindige.
$J_5 = 0$: het nulpunt van de teller ligt in het oneindige.

Tussen de invarianten bestaat de belangrijke identiteit:

$$J_1 J_4 = J_2^2 + J_3 J_5^2$$

De fundamentele invarianten zijn nu

$$\lambda = \frac{j_5}{j_4} \qquad en \qquad \omega = \frac{j_1}{4 j_3 j_5}$$

waaruit volgt (vgl. ook d):

$$\delta = -\frac{j_2^2}{j_3 j_4^2} \; ; \; \delta - \lambda^2 = -\frac{j_1}{j_3 j_4} \; ; \; \delta - (\lambda+2)^2 = -\frac{j_1 + 4 j_3 (j_4 + j_5)}{j_3 j_4}$$

We laten aan de lezer over, de transformaties in α , β en ω uit te drukken, die tot de normaalvormen in de verschillende gevallen leiden.

We kunnen nu ook de invarianten λ en δ in de uit de cumulanten afgeleide invarianten uitdrukken. Dit geschiedt in het volgende punt.

h. Recursieformule voor de momenten.

De differentiaalvergelijking voor f luidt

$$(c_0 + 2c_1 x + c_2 x^2)\, df = (b_0 + b_1 x) f\, dx$$

Vermenigvuldig beide leden met x^k (k geheel ≥ 0) en integreer over het gehele definitie-interval. Integreer het linkerlid partiëel. Indien $x^{k+2} f$ (en dus ook $x^h f$, $h \leq k+2$) aan de grenzen van het interval verdwijnt, is

$$b_0 \mu_k + b_1 \mu_{k+1} = \int x^k (b_0 + b_1 x) f\, dx =$$

$$= \int x^k (c_0 + 2c_1 x + c_2 x^2)\, df$$

$$= \left[x^k (c_0 + 2c_1 x + c_2 x^2) f \right] - \int f k x^{k-1} (c_0 + 2c_1 x + c_2 x^2)\, dx - \int f x^k (2c_1 + 2c_2 x)\, dx =$$

$$= -\left\{ k c_0 \mu_{k-1} + 2k c_1 \mu_k + k c_2 \mu_{k+1} + 2c_1 \mu_k + 2c_2 \mu_{k+1} \right\}$$

dus

$$(b_1 + (k+2) c_2) \mu_{k+1} + (b_0 + 2(k+1) c_1) \mu_k + k c_0 \mu_{k-1} = 0$$

wanneer voor k = 0 de laatste term alsogeïntepreteerd wordt. Dit is een recurrente betrekking voor de momenten, waaruit deze (met behulp van $\mu_0 = 1$) successievelijk bepaald kunnen worden, als b_1/c_2 geen nega- geheel geval is. Is $-b_1/c_2 = m \geq 0$ en geheel, dan wordt μ_{m-1} oneindig (tenzij $c_0 = 0$ en tegelijk $b_0 + 2(k+1)c_1 = 0$, dus ($(b_0 - 2c_1) c_2 - 2 b_1 c_1 = 0$ is).

De eerste vier hiervan luiden

$$(b_1+2c_2)\mu_1+(b_0+2c_1) = 0$$

$$(b_1+3c_2)\mu_2+(b_0+4c_1)\mu_1+c_0 = 0$$

$$(b_1+4c_2)\mu_3+(b_0+6c_1)\mu_2+2c_0\mu_1 = 0$$

$$(b_1+5c_2)\mu_4+(b_0+8c_1)\mu_3+3c_0\mu_2 = 0 \quad {}^{1)}$$

i. Karakterisering door middel van de invarianten γ_1 en γ_2.

De verhoudingen der constanten b_0, b_1, c_0, c_1 en c_2 kunnen anderzijds door de eerste 4 momenten bepaald worden. Ter vereenvoudiging kiezen we de oorsprong in μ_1, en duiden de bijbehorende constanten met een ~ boven de letters aan. Dan is (k=0)

$$\tilde{b}_0+2\tilde{c}_1 = 0$$

Men heeft:

$$b_1 = \tilde{b}_1$$

$$c_2 = \tilde{c}_2$$

$$c_1 = \tilde{c}_1-\tilde{c}_2\mu_1$$

$$c_0 = \tilde{c}_0-2\tilde{c}_1\mu_1+\tilde{c}_2\mu_1^2$$

$$b_0 = \tilde{b}_0-\tilde{b}_1\mu_1$$

De overige vergelijkingen worden dan, uitgedrukt in de invarianten en σ:[2]

$$\tilde{c}_0 + \sigma^2(3\tilde{c}_2+\tilde{b}_1) = 0$$

$$4\tilde{c}_1 + \sigma\gamma_1(4\tilde{c}_2+\tilde{b}_1) = 0$$

$$3\tilde{c}_0 + 6\sigma\gamma_1\tilde{c}_1+\sigma^2(\gamma_2+3)(5\tilde{c}_2+\tilde{b}_1) = 0$$

Deze geven met de noemer $N = 10\gamma_2-12\gamma_1^2+12$

$$\frac{\tilde{c}_2}{\tilde{b}_1} = -\frac{2\gamma_2-3\gamma_1^2}{N}$$

$$\frac{2\tilde{c}_1}{\tilde{b}_1} = -\frac{\tilde{b}_0}{\tilde{b}_1} = -\sigma\gamma_1\frac{\gamma_2+6}{N}$$

$$\frac{\tilde{c}_0}{\tilde{b}_1} = -\sigma^2\frac{4\gamma_2-3\gamma_1^2+12}{N}$$

---

[1]) Deze betrekkingen gelden dan en slechts dan alle vier, als $x^5 f$ aan de uiteinden van het definitie-interval verdwijnt. Ditzelfde geldt voor alle betrekkingen die in punt i. uit deze vier recurrente betrekkingen worden afgeleid.

[2]) Meestal gebruikt men in dit verband β_1 en β_2 in plaats van γ_1 en γ_2; het verband is: $\beta_1 = \gamma_1^2 = \frac{\tilde{\mu}_3^2}{\sigma^6}$; $\beta_2 = \gamma_2+3 = \frac{\tilde{\mu}_4}{\sigma^4}$

We vinden dus

$$\lambda = \frac{\tilde{b}_1}{\tilde{c}_2} = -\frac{10\gamma_2 - 12\gamma_1^2 + 12}{2\gamma_2 - 3\gamma_1^2}$$

Vaak van nut is de hieruit volgende evenredigheid:

$$\frac{-2\gamma_2 + 3\gamma_1^2}{1} = \frac{10\gamma_2 - 12\gamma_1^2 + 12}{\lambda} = \frac{8\gamma_2 - 9\gamma_1^2 + 12}{\lambda + 1} = \frac{6(\gamma_2 - \gamma_1^2 + 2)}{\lambda + 2} =$$

$$= \frac{4\gamma_2 - 3\gamma_1^2 + 12}{\lambda + 3} = \frac{2(\gamma_2 + 6)}{\lambda + 4} = \frac{3(\gamma_1^2 + 4)}{\lambda + 5}$$

Tezamen met:

$$\frac{\tilde{b}_0/\sigma}{\gamma_1(\gamma_2 + 6)} = \frac{\tilde{b}_1}{10\gamma_2 - 12\gamma_1^2 + 12} = \frac{\tilde{c}_0/\sigma^2}{-(4\gamma_2 - 3\gamma_1^2 + 12)} = \frac{2\tilde{c}_1/\sigma}{-\gamma_1(\gamma_2 + 6)} = \frac{\tilde{c}_2}{-2\gamma_2 + 3\gamma_1^2}$$

geeft dit

$$\frac{\tilde{b}_0/\sigma}{\frac{1}{2}\gamma_1(\lambda + 4)} = \frac{\tilde{b}_1}{\lambda} = \frac{\tilde{c}_0/\sigma^2}{-(\lambda + 3)} = \frac{2\tilde{c}_1/\sigma}{-\frac{1}{2}\gamma_1(\lambda + 4)} = \frac{\tilde{c}_2}{1}$$

Voor δ vinden we

$$\delta = \frac{(\tilde{b}_0\tilde{c}_2 - \tilde{b}_1\tilde{c}_1)^2}{\tilde{c}_2^2(\tilde{c}_1^2 - \tilde{c}_0\tilde{c}_2)} = \frac{(\lambda + 2)^2}{1 - \frac{1}{\varkappa}}$$

waarin

$$\varkappa = \frac{\tilde{c}_1^2}{\tilde{c}_0\tilde{c}_2} = \frac{\gamma_1^2(\gamma_2 + 6)^2}{4(2\gamma_2 - 3\gamma_1^2)(4\gamma_2 - 3\gamma_1^2 + 12)}$$

het zgn. "kriterium" van K. Pearson is.
Voor δ geeft dit:

$$\delta = -\frac{\{6\gamma_1(\gamma_2 + 6)(\gamma_2 - \gamma_1^2 + 2)/(2\gamma_2 - 3\gamma_1^2)\}^2}{36\gamma_1^4 - \gamma_1^2(\gamma_2^2 + 84\gamma_2 + 180) + 32\gamma_2(\gamma_2 + 3)}$$

(de noemer is = $36(\gamma_2 - \gamma_1^2 + 2)^2 - (\gamma_2 + 6)^2(\gamma_1^2 + 4)$).

We kunnen ook anderzijds γ_1^2 en γ_2 in λ en δ uitdrukken:

$$1-\frac{1}{x}=\frac{(\lambda+2)^2}{\delta}$$

$$\gamma_1^2=\frac{-16x(\lambda+3)}{(\lambda+4)^2}=\frac{16(\lambda+3)}{(\lambda+4)^2}\,\frac{\delta}{(\lambda+2)^2-\delta}$$

$$\gamma_2+3=-3+\frac{3}{2}\,\frac{\lambda+4}{\lambda+5}(\gamma_1^2+4)=3\left\{\frac{\lambda+3}{\lambda+5}+8\,\frac{\lambda+4}{\lambda+5}\,\frac{\lambda+3}{(\lambda+4)^2}\,\frac{\delta}{(\lambda+2)^2-\delta}\right\}=$$

$$=\frac{3(\lambda+3)}{(\lambda+5)(\lambda+4)}\,\frac{(\lambda+4)(\lambda+2)^2-\delta(\lambda+4)}{(\lambda+2)^2-\delta}$$

Het linkerlid is $\frac{\tilde{\mu}_4}{\sigma^4}$ dus ≥ 0.

Om een overzicht te krijgen over de verschillende invarianten en de relaties daartussen, verdient het aanbeveling, in plaats van γ_1^2 en γ_2 de grootheden

$$\xi=\frac{\gamma_1^2}{4}+1 \qquad \text{en} \quad \eta=\frac{\gamma_2}{6}+1 \qquad {}^{1)}$$

in te voeren en daarin alle grootheden uit te drukken.
We vinden achtereenvolgens:

$$\gamma_1=\pm 2\sqrt{\xi-1} \qquad \gamma_2=6(\eta-1)$$

$$\frac{\xi}{\lambda+5}=\frac{\eta}{\lambda+4}=\frac{2\eta-\xi}{\lambda+3}=\frac{3\eta-2\xi}{\lambda+2}=\frac{5\eta-4\xi}{\lambda}=\frac{\xi-\eta}{1}$$

dus

$$\lambda=\frac{5\eta-4\xi}{\xi-\eta} \qquad {}^{2)}$$

Voor de gereduceerde coëfficiënten vinden we nog:

$$\frac{\tilde{b}_0/\sigma}{\pm\eta\sqrt{\xi-1}}=\frac{\tilde{b}_1}{5\eta-4\xi}=\frac{\tilde{c}_0/\sigma^2}{-2\eta+\xi}=\frac{\tilde{c}_1/\sigma}{\mp\frac{1}{2}\eta\sqrt{\xi-1}}=\frac{\tilde{c}_2}{\xi-\eta}$$

en voor de relatieve invarianten behoudens in de absolute invarianten

---

1) Dus $\xi=\frac{\beta_1}{4}+1$ en $\eta=\frac{\beta_2}{6}+\frac{1}{2}$.

2) Zoals reeds eerder opgemerkt geldt dit verband alleen als $x^5 f$ aan de grenzen van het definitie-interval verdwijnt. Het verband tussen ξ en γ_1 resp. η en γ_2 is hiervan uiteraard niet afhankelijk.

tegen elkaar wegvallende evenredigheids factoren:

$$y_5 = b_1 :: 5\eta - 4\xi$$

$$y_4 = c_2 :: \xi - \eta$$

$$y_3 = c_0 c_2 - c_1^2 :: -\tfrac{1}{4}\{\eta^2\xi - (3\eta - 2\xi)^2\}$$

$$y_2 = c_1 b_1 - c_2 b_0 :: \pm\tfrac{1}{2}(3\eta - 2\xi)\,\eta\sqrt{\xi - 1}$$

$$y_1 = c_0 b_1^2 - 2c_1 b_1 b_0 + c_2 b_0^2 :: (4\eta - 3\xi)\eta^2\xi - 2(3\eta - 2\xi)^3$$

. .

Hieruit worden direct de invarianten gevonden, t.w.

$$\lambda = \frac{5\eta - 4\xi}{\xi - \eta}$$ als boven en verder:

$$\omega = \frac{(4\eta - 3\xi)\eta^2\xi - 2(3\eta - 2\xi)^3}{-(5\eta - 4\xi)\{\eta^2\xi - (3\eta - 2\xi)^2\}}$$

$$\delta = \frac{(3\eta - 2\xi)^2\,\eta^2(\xi - 1)}{(\xi - \eta)^2\{\eta^2\xi - (3\eta - 2\xi)^2\}}.$$

Voorts is:

$$\varkappa = \frac{\eta^2(\xi - 1)}{4(\eta - \xi)(2\eta - \xi)}$$

dus

$$\varkappa - 1 = \frac{\eta^2\xi - (3\eta - 2\xi)^2}{4(\eta - \xi)(2\eta - \xi)}$$

Hieruit volgt nog:

$$\frac{\delta - (\lambda + 2)^2}{4} = \frac{(3\eta - 2\xi)^2(2\eta - \xi)}{(\eta - \xi)\{\eta^2\xi - (3\eta - 2\xi)^2\}} = \frac{(\lambda + 2)^2}{4(\varkappa - 1)}$$

en

$$\frac{\delta - \lambda^2}{4} = \frac{-\eta^2\xi(4\eta - 3\xi) + 2(3\eta - 2\xi)^3}{(\eta - \xi)\{\eta^2\xi - (3\eta - 2\xi)^2\}}$$

. . .

Voor $c_2 = 0$, d.w.z. $\xi = \eta$ wordt $\omega = \dfrac{2 - \xi}{\xi - 1}$

dus $\omega + 1 = \dfrac{1}{\xi - 1} > 0$, daar $\xi \gtrless 1$ is.

Uitgedrukt in de relatieve invarianten heeft men behalve de vroeger afleide identiteiten

$$\lambda = \frac{J_5}{J_4} \; ; \; -\delta = \frac{J_2^2}{J_3 J_4^2} \; ; -\delta + \lambda^2 = \frac{J_1}{J_3 J_4} \; ; \; -\delta + (\lambda+2)^2 = \frac{J_1 + 4J_3(J_4+J_5)}{J_3 J_4}$$

nog

$$\omega = \frac{J_1}{4 J_3 J_5} \quad ; \chi - 1 = \frac{J_3(J_5+2J_4)^2}{J_4\{J_1 + 4J_3(J_4+J_5)\}} \; ,$$

$$\frac{1}{\chi} - 1 = \frac{J_3(J_5+2J_4)^2}{J_2^2} = \frac{J_3(J_5+2J_4)^2}{J_1J_4 - J_3 J_5^2} \; ; \; \frac{1}{\chi} = \frac{J_4}{J_2^2}\{J_1 + 4J_3(J_4+J_5)\}$$

waarbij $J_1 + 4J_3(J_4+J_5) :: (3\eta - 2\xi)^2(\xi - 2\eta)$ is.

We zullen nu de verschillende mogelijkheden in een (ξ,η)-vlak nagaan. Daartoe schetsen we eerst de kromme $J_3 = 0$, waarlangs $\chi = 1$ en $\delta = \infty$ is. Dit is (zie fig. 1) een kubische kromme met vgl.

$$\eta^2 \xi = (3\eta - 2\xi)^2 \qquad \text{of, opgelost naar } \eta \; : \; \eta = \frac{2\xi}{3 \pm \sqrt{\xi}}$$

De kromme heeft een keerpunt in 0 met keerpuntsraaklijn $3\eta - 2\xi = 0$ en een rechtlijnige asymptoot $\xi = 9$. Verder een parabolische asymptoot $(\eta + 6)^2 = 4(\xi + 18)$ die men b.v. berekenen kan door $\xi = a\eta^2 + b\eta + c$ in de vgl. van de kromme in te vullen en de coëfficiënten van $\eta^6 \ldots\ldots \eta^2$ gelijk nul te stellen. (Dit betekent, dat men door het dubbeltellende oneigenlijke punt met $\eta = 0$ van de kromme die parabool ligt, die daar 5 punten met de kromme gemeen heeft). Het zesde snijpunt ($\xi = 9/4$, $\eta = 3$) vindt men dan uit het overblijvende eerste graads-gedeelte. De tak $\eta = \frac{2\xi}{3-\sqrt{\xi}}$ heeft een relatief maximum bij $\xi = 36$ $\eta = -24$. Men kan de parabolische asymptoot ook berekenen door η in een reeks naar $\sqrt{\xi}$ te ontwikkelen:

$$\eta = \frac{2\xi}{3 \pm \sqrt{\xi}} = \frac{\pm 2\sqrt{\xi}}{1 \pm \frac{3}{\sqrt{\xi}}} = \pm 2\sqrt{\xi}\left\{1 \mp \frac{3}{\sqrt{\xi}} + \frac{9}{\xi} \mp \ldots\right\} = \pm 2\sqrt{\xi} - 6 \pm \frac{18}{\sqrt{\xi}} \ldots$$

$$(\eta + 6)^2 = 4\xi + 72 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\right).$$

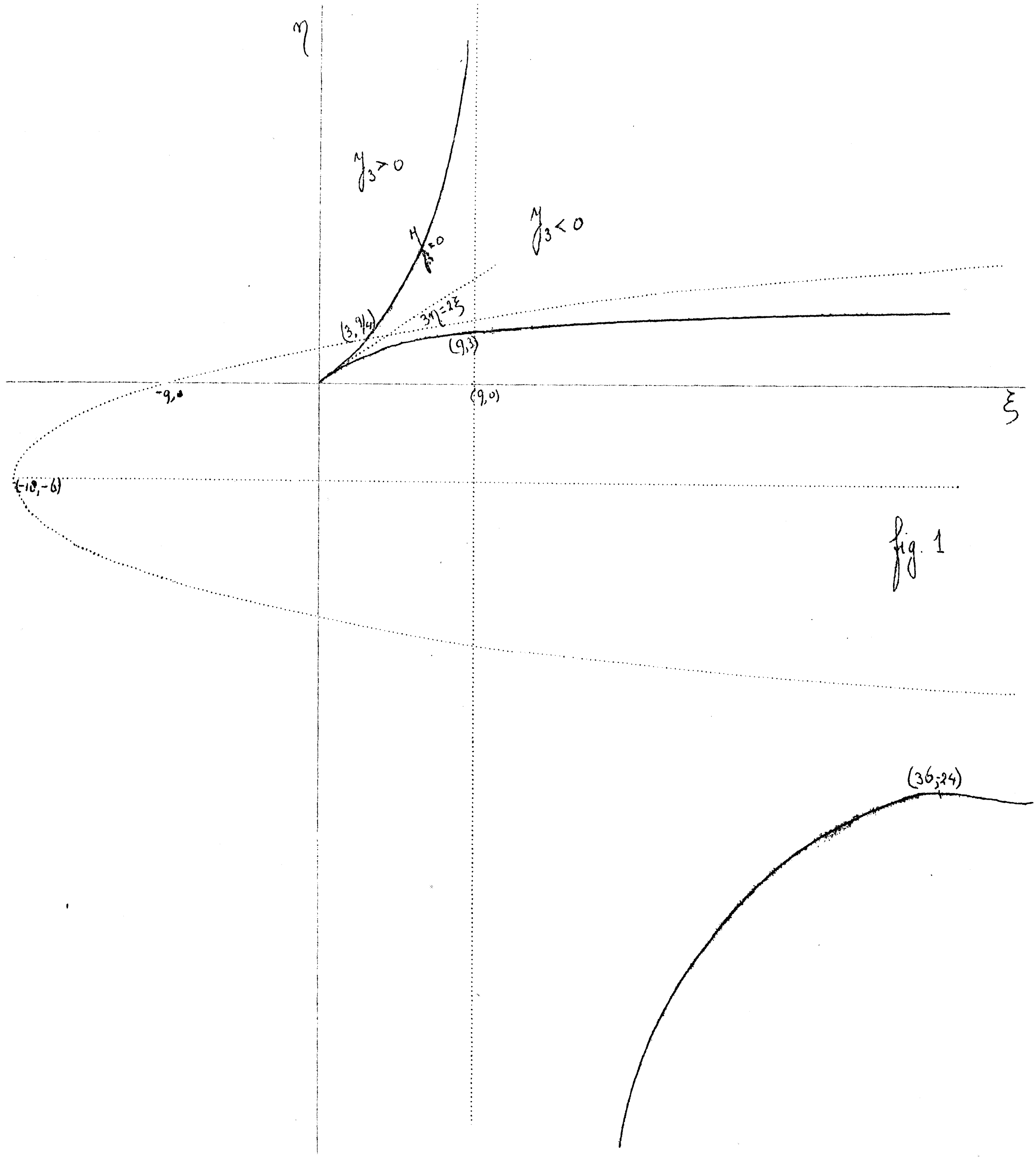


fig. 1

We zullen nu aantonen, dat slechts een relatief klein gedeelte van het vlak in aanmerking genomen behoeft te worden. Vooreerst volgt uit de definite van $\xi = \frac{1}{4}\gamma_1^2 + 1$, dat $\xi \geq 1$ is. Een tweede ongelijkheid kunnen we afleiden uit de algemene ongelijkheid voor de momenten (vgl. Whr pag. 92a

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{vmatrix} \geq 0$$

Reduceert men de momenten, dan volgt **na** deling door $\sigma^6 (>0)$

$$0 \leq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \gamma_1 \\ 1 & \gamma_1 & \gamma_2+3 \end{vmatrix} = \gamma_2 - \gamma_1^2 + 2$$

Gelijkheid wordt alleen voor een alternatief, dus voor geen continue verdeling bereikt. Dus:

$$\gamma_2 - \gamma_1^2 + 2 > 0$$

of

$$3\eta - 2\xi > 0$$

Derhalve hebben we alleen het gedeelte van het (ξ, η)-vlak nodig, waar

$$3\eta > 2\xi \geqq 2 \qquad \text{is.}$$

Uit $-\delta = \frac{J_2^2}{J_3 J_4^2}$ volgt, dat δ altijd het tegengestelde teken heeft van dat van J_3. We geven nu ook de belangrijkste waarden van λ in de figuur aan (fig.2). Voor λ vinden we nog de (uit het voorgaande voortvloeiende) ongelijkheid

$$\frac{\lambda + 2}{\lambda + 5} > 0 \quad \text{dus}$$

$$-\infty < \lambda < -2 \quad \text{of} \quad -5 < \lambda < +\infty$$ [1]

Verder vinden we (rekening houdend met $\eta > \frac{2}{3}\xi$), dat

$\chi = 0$ is voor $\xi = 1$

$0 < \chi < 1$ is voor $\max\left(\frac{2\xi}{3-\sqrt{\xi}}, \xi\right) < \eta$ en $1 < \xi < 9$

$\chi = 1$ is voor $\eta = \frac{2\xi}{3-\sqrt{\xi}}$

$1 < \chi < \infty$ is voor $\xi < \eta < \frac{2\xi}{3-\sqrt{\xi}}$

$\chi = \pm\infty$ is voor $\eta = \xi$

$-\infty < \chi < 0$ is voor $\frac{2}{3}\xi < \eta < \xi$

---

[1]) Vergelijk met de tabel uit punt f: de typen VI, XI, IV, VII, en V kunnen ook $-5 < \lambda < -2$ vertonen. Juist voor die waarden van λ echter gaan de recurrente betrekkingen tussen de momenten niet meer op, zodat het verband tussen λ en ξ en η verandert. De ongelijkheid $3\eta - 2\xi > 0$, die van deze recurrente betrekking onafhankelijk is, geldt voor alle verdelingen. In de figuren 2 en 3 zullen we slechts die waarden van λ aangeven, die uit de ξ en η volgen, als de recurrente betrekkingen gelden.

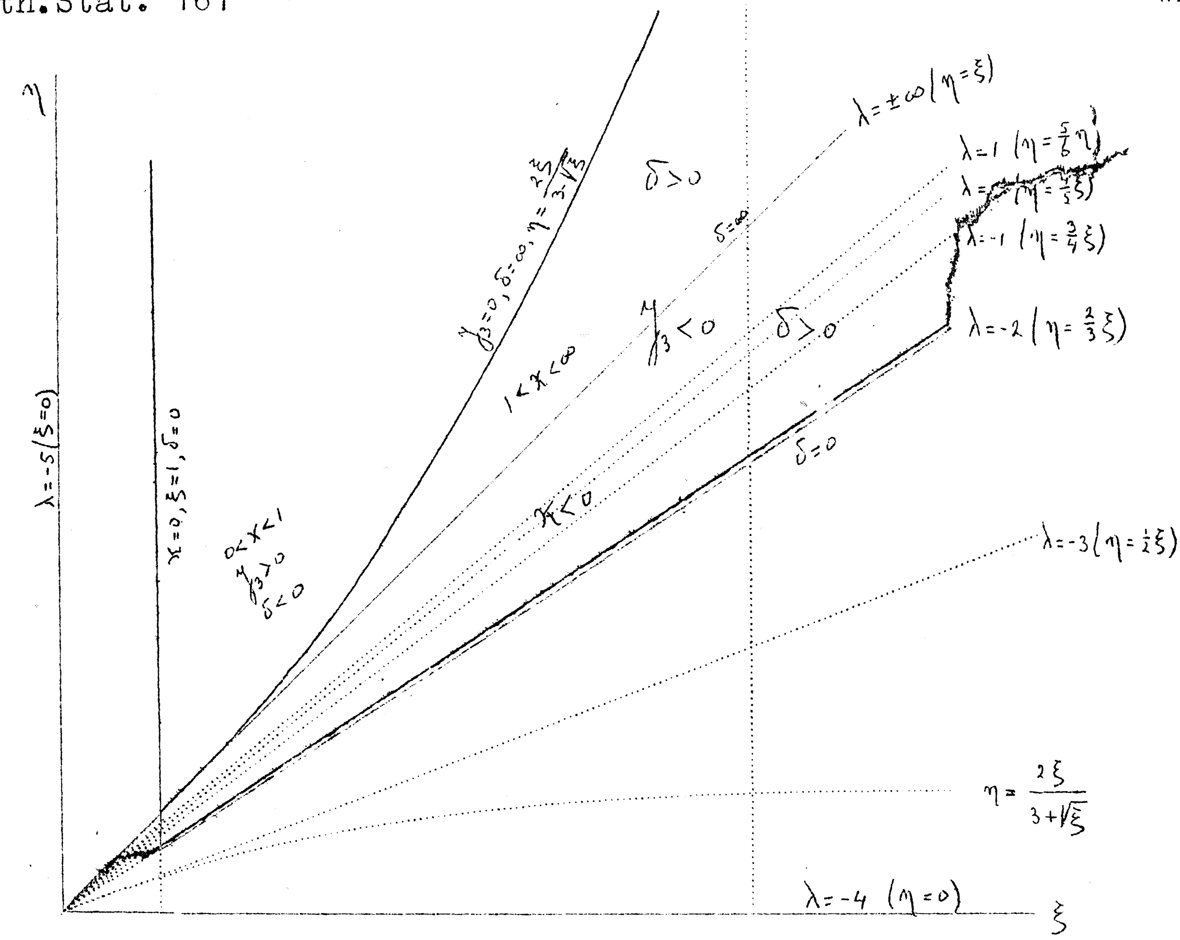


fig. 2

We geven nu de karakteriseringen der typen, uitgedrukt in de relatieve invarianten en in ξ en η en in $\varkappa$. Verder geven we de convergentievoorwaarden in de ξ en η en $\varkappa$ (berekend met behulp van de recurrente betrekkingen, uit de convergentievoorwaarden uitgedrukt in λ en δ). (Vgl. ook de tabel van punt f).

Voor alle typen geldt $3\eta > 2\xi \geqq 1$. Deze voorwaarde wordt in de tabel niet steeds herhaald en moet dus in de desbetreffende kolom steeds erbijgenomen worden.

Type	Karakterisering uitgedrukt in							extra voorw. nodig voor convergentie.
	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	ξ en η	$\varkappa$	
I			$-\infty \leq \gamma_3 < 0$	$\neq 0$		$\eta \neq \frac{2\xi}{3-\sqrt{\xi}}$	$\varkappa > 1$ of $\varkappa \leq 0$	$\frac{2}{3}\xi < \eta < \xi$; $\varkappa \leq 0$
II	$\neq 0$	0	"	"		" " $\xi = 1$ [1]	$\varkappa = 0$	
XII		$\neq 0$	"	"	0	" " $5\eta = 4\xi$	$\varkappa < 0$	
VIII	0		"	"	$\gamma_4\gamma_5 < 0$	" " $Q(\xi,\eta) = 0$ [2] en $5\eta < 4\xi$ of $\eta > \xi$	$\varkappa > 1$ of $\varkappa < 0$	$\frac{3}{4}\xi < \eta < \xi$ $\varkappa < 0$
IX	0		"	"	$\gamma_4\gamma_5 > 0$	" " $Q(\xi,\eta) = 0$ en $\frac{4}{5}\xi < \eta < \xi$	$\varkappa < 0$	
VI			"	"		" "	$\varkappa > 1$ of $\varkappa \leq 0$	$\eta > \xi$ of $\frac{2}{3}\xi < \eta < \frac{3}{4}\xi$
VI*	$\neq 0$	0	"	"		" " $\xi = 1$ [1]	$\varkappa = 0$	$\frac{2}{3}\xi < \eta < \frac{3}{4}\xi$
XI	0	$\neq 0$	"	"		" " $Q(\xi,\eta) = 0$	$\varkappa > 1$ of $\varkappa < 0$	$\eta > \xi$ of $\eta < \frac{3}{4}\xi$
LH	0		"	"	$\gamma_5 = -\gamma_4$	$Q(\xi,\eta) = 0$ en $4\eta = 3\xi$	$\varkappa = -\infty$	
IV	$\neq 0$		$\infty \geq \gamma_3 > 0$	"		" ; $\eta > \frac{2\xi}{3-\sqrt{\xi}}$	$0 \leq \varkappa < 1$	
VII	"	0	"	"		" " $\xi = 1$ [1]	$\varkappa = 0$	
III			$\neq 0$	0	$\neq 0$	$\xi = \eta = 1$	$\varkappa = \infty$	
X	0		"	"	"	$\xi = \eta = 1$	$\varkappa = \infty$	
V	$\neq 0$		"	$\neq 0$		$\xi \neq \eta$; $\eta = \frac{2\xi}{3-\sqrt{\xi}}$	$\varkappa = 1$	
N	$\neq 0$	0	0	0	$\neq 0$	$\xi = \eta = 1$	$\varkappa = \frac{0}{0}$	
H	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\xi = 1$; $\eta = \frac{4}{5}$	$\varkappa = 0$	

Hierin is $Q(\xi,\eta) = (4\eta - 3\xi)\eta^2\xi - 2(3\eta - 2\xi)^3$.

$Q(\xi,\eta) = 0$ is aequivalent met $\gamma_1 = 0$, met $\omega = 0$ en met $\delta = \lambda^2$ (als $\delta \neq \infty$ en $\lambda \neq \infty$).

---

[1]) niet $\eta = 0$, daar deze rechte geheel buiten het toegelaten gebied ligt; niet $3\eta = 2\xi$ omdat $3\eta > 2\xi$ is.

[2]) De betekenis van $Q(\xi,\eta)$ wordt verderop uitgelegd.

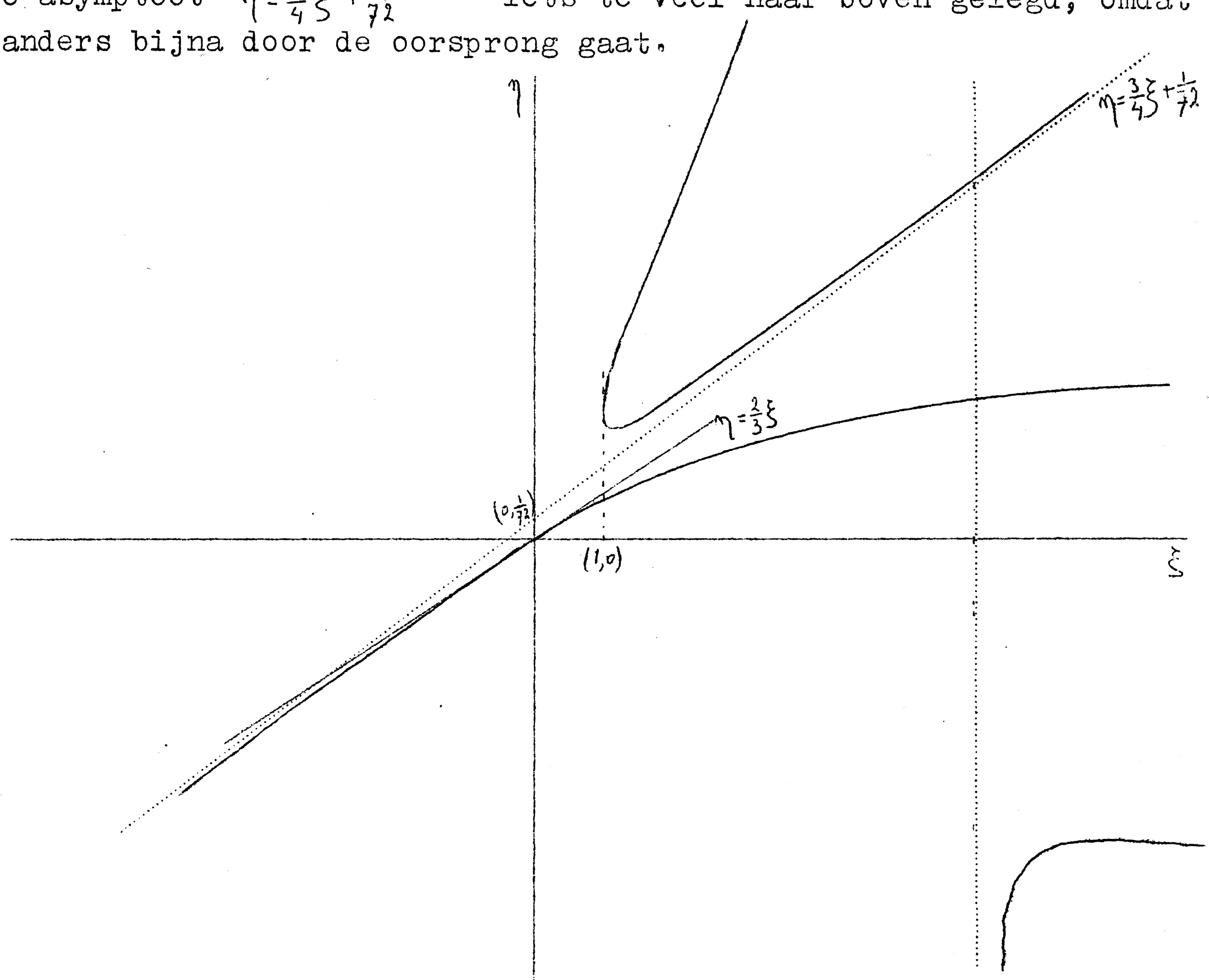
$0 = Q(\xi, \eta)$ is een biquadratische kromme met een drievoudig punt in O, waardoor een reële tak gaat met raaklijn $\eta = \frac{2}{3}\xi$, benevens twee complexe takken. Asymptoten zijn $\eta = \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{72}$ en $\xi = 13\frac{1}{2}$. De kromme raakt in $\eta = 0$ aan de oneigenlijke rechte. Substitueren we $\eta = \xi t$, dan krijgen we de rationale kromme

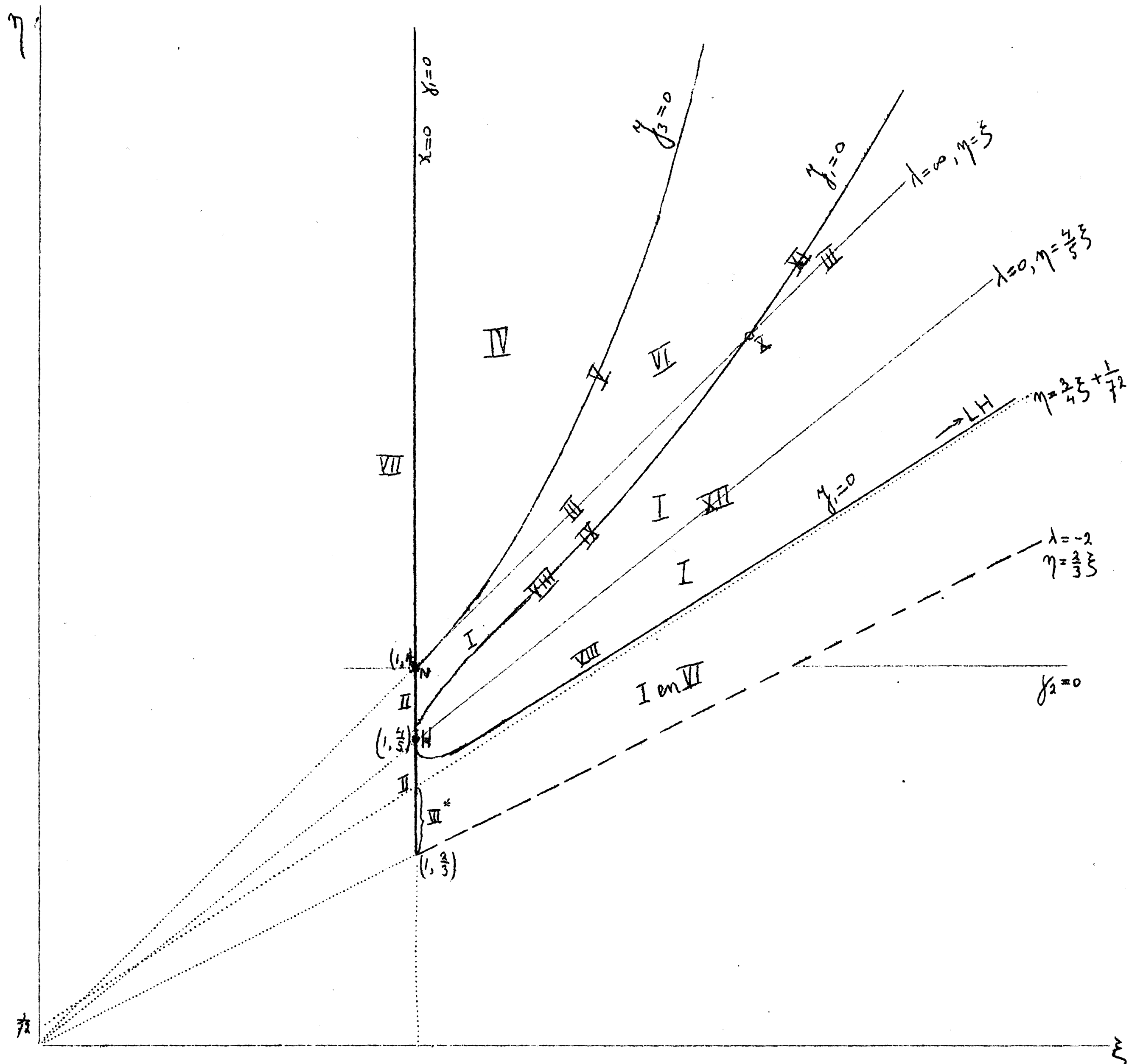
$$\xi = \frac{2(3t-2)^3}{t^2(4t-3)}$$

zodat dus $Q(\xi, \eta) = 0$ door de lijn $\eta = \xi t$ buiten O slechts in één punt gesneden wordt. De tak, die voor ons van belang is, die dus in het gebied $\xi \geqq 1$, $\eta > \frac{2}{3}\xi$ verloopt, raakt in het punt $(1, \frac{4}{5})$ aan $\xi = 1$ en gaat door het punt (2,2). Type VIII, IX, XI en L H liggen op $Q(\xi, \eta) = 0$ en wel resp. in de gebieden, waar $\frac{3}{4} < t < \frac{4}{5}$ (VIII), $\frac{4}{5} < t < 1$ (IX), $t > 1$ of $t < \frac{3}{4}$ (XI) is, terwijl L H gerepresenteerd wordt door het snijpunt van deze tak met de asymptoot

$$\eta = \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{72}.$$

We geven van deze kromme een schets. Voor de duidelijkheid van de figuur zijn daarbij de verhoudingen enigszins vrij behandeld. I.h.b. is de asymptoot $\eta = \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{72}$ iets te veel naar boven gelegd, omdat hij anders bijna door de oorsprong gaat.





We geven tenslotte de verschillende typen aan in een diagram in het (ξ,η)-vlak, d.i. behoudens een verschuiving der coördinaatassen en schaalverandering daarlangs, het (γ_1^2, γ_2)-vlak, Daarbij is voor die typen, die zonder afknotting convergent kunnen zijn, alleen het gebied aangegeven, waarbinnen voldaan is aan de convergentievoorwaarden en tevens aan de voorwaarde, die nodig is voor de recursieformules der eerste vier momenten. Uit de vorige figuur is dus alleen de bovenste tak nodig.

Opmerking: in de tekening in de lijn $\eta=\frac{3}{4}\xi$, die vlak onder asymptoot $\eta=\frac{3}{4}\xi+\frac{1}{72}$ loopt, wegens het geringe verschil met deze lijn niet getekend. Deze lijn (en niet de asymptoot) is de bovenste grens voor dit existentiegebied van type VI en VI*.

Litt. M. DUMAS, Sur les courbes de fréquence de K. Pearson, Biometrika 35 (1948) bl. 113-117.

Pearson-verdelingen als limiet van de verdeling van Eggenberger-Pólya.

Bij de verdeling van Eggenberger-Pólya (vgl. bl. 96, Whr 185 e.v.) hadden we (voor het geval van twee kenmerken)

$$P_{n_1,n_2} = \frac{\nu_1(\nu_1+\delta)\ldots\ldots(\nu_1+n_1\delta-\delta)\,.\,\nu_2(\nu_2+\delta)\ldots\ldots(\nu_2+n_2\delta-\delta)}{\nu(\nu+\delta)\ldots\ldots(\nu+n\delta-\delta)} \times \frac{n!}{n_1!\,n_2!}$$

dus, als $\Delta f(n_1, n_2) = f(n_1+1, n_2-1) - f(n_1, n_2)$ gesteld wordt:

$$\frac{\Delta P_{n_1,n_2}}{P_{n_1+1,n_2-1}} = 1 - \frac{P_{n_1,n_2}}{P_{n_1+1,n_2-1}} = -\frac{(\nu_2-\delta)n_1+\delta n_2+(\nu_2-\delta)-\nu_1 n_2}{\nu_1 n_2+n_1 n_2\delta} =$$

$$= -\frac{1}{n}\,\frac{(\nu_2-\delta)\frac{n_1}{n}+(\delta-\nu_1)\frac{n_2}{n}+\frac{\nu_2-\delta}{n}}{\frac{\nu_1}{n}\cdot\frac{n_2}{n}+\frac{n_1}{n}\cdot\frac{n_2}{n}\cdot\delta}$$

Stellen we $x = g\frac{n_1}{n}+h$, waarbij g en h van n, maar niet van n_1 mogen afhangen, dan is $\Delta x = \frac{g}{n}$ (daar $\Delta n_1 = 1$ is), $\frac{n_1}{n} = \frac{x-h}{g}$ en $\frac{n_2}{n} = \frac{g+h-x}{g}$.

Stel $\nu_1 = p\nu$ en $\nu_2 = q\nu$. Nu is:

$$\frac{1}{P_{n_1+1,n_2-1}}\cdot\frac{\Delta P_{n_1,n_2}}{\Delta x} = -\frac{n}{g}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{(\nu_2-\delta)\frac{x-h}{g}+(\delta-\nu_1)\frac{g+h-x}{g}+\frac{\nu_2-\delta}{n}}{\frac{\nu_1}{n}\,\frac{g+h-x}{g}+\frac{(x-h)(g+h-x)}{g^2}\,\delta} =$$

$$= \frac{\{h(\nu-2\delta)+g(p\nu-\delta)-(q\nu-\delta)n^{-1}g\}+(2\delta-\nu)x}{(g+h)(p\nu n^{-1}g-h\delta)+x\{-p\nu n^{-1}g+\delta(g+2h)\}-\delta x^2}.$$

Daar $P_{n_1+1,n_2-1} = \Delta F_{n_1,n_2}$ is zal, als voor $n\to\infty$ $\lim \frac{g}{n}P_{n_1+1,n_2-1} = f(x)$ eindig en continu is, deze de verdelingsdichtheid van de limiet der stochastische variabele $\underline{x}$, terwijl $\lim \frac{g}{n}\,\frac{\Delta P_{n_1+1,n_2-1}}{\Delta x}$, zo deze eindig en continu is, $= f'(x)$ wordt. De limiet van $\frac{1}{P_{n_1+1,n_2-1}}\,\frac{\Delta P_{n_1,n_2}}{\Delta x}$ is (onder genoemde onderstellingen) dus $\frac{f'(x)}{f(x)}$. Het rechterlid wordt, zo teller en noemer na deling door een passende van n afhankelijke factor voor $h \leqq x \leqq g+h$ eindige limieten hebben, het quotient van een lineaire en een quadratische fct van x, zodat bovenstaande gelijkheid in de differentiaalvergelijking van Pearson overgaat. We gaan de belangrijkste typen na, die daarbij kunnen voorkomen.

Daar de discriminant van de noemer voor iedere n positief of nul is, kan type IV niet verkregen worden. De overige typen ontstaan nu o.a. door de volgende limietovergangen voor $n \to \infty$ (waarbij een voorwaarde van de vorm a = b steeds vervangen mag worden door: $a \to b$ voor $n \to \infty$):

a. Normale standaardvariabele: $\delta = 0$, ν en p constant, $p\, q \neq 0$, $g = \sqrt{pqn}$ en $h = -p\sqrt{pqn}$. Er komt dan $\frac{f'}{f} = -x$ $(-\infty < x < +\infty)$ dus $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

b. Homogene variabele ($\frac{f'}{f} = 0$, $0 \leq x \leq 1$): $g = 1$, $h = 0$, $\nu = 2\delta =$ constant $p = \frac{1}{2}$.

c. B - verdeling (hoofdtype I; $\frac{f'}{f} = \frac{\alpha - (\alpha+\beta)x}{x(1-x)}$, $0 \leq x \leq 1$, dus $f(x) :: x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$) . Deze wordt b.v. verkregen door g=1, h=0, $p = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}$, $\frac{\nu}{\delta} = \alpha+\beta+2$, of, als $\alpha+\beta+2$ niet rationaal is: $\nu \to \infty$ en $\delta \to \infty$ en $\frac{\nu}{\delta} \to \alpha+\beta+2$ (ν en δ zijn geheel).

d. Γ-verdeling (hoofdtype III; $\frac{f'}{f} = \frac{\omega - x}{x}$, $0 \leq x < \infty$, $\omega > -1$, $f(x) :: e^{-x} x^{\omega}$). Deze wordt b.v. verkregen door teller en noemer door $-n^2$ te delen en dan $h = 0$, $\nu = n^2$, $p = \frac{1}{n^2}$, $g = n(\omega+1)$ en $\delta = \left[-\frac{n}{\omega+1}\right]$ te nemen.

Opmerking: men krijgt op analoge wijze als limiet van de verdeling van Eggenberger-Polya een discrete verdeling, als men g = n neemt. Het linkerlid wordt dan $1 - \frac{P(x)}{P(x+1)}$ Γdoor ν met $h = 0$, $p = \frac{\alpha}{n}$ en $n\frac{\delta}{\nu} \to 0$ de verdeling van Poisson, terwijl $h = m$, deling van teller en noemer door ν , $p = \frac{mp'}{nq'}$ en $\frac{\delta}{\nu} = \frac{p'}{nq'}$ de verdeling van Pascal (met whn p' en q' voor het alternatief; vgl. blz. 93, Whr 182) ontstaat. Zie ook bl. 102, Whr 191.

Γen voor $n \to \infty$ verkrijgen we na deling van teller en noemer

§ 4. Enkele andere klassen van Verdelingen.

1. Ontwikkeling volgens Gram-Charlier.

a. Daar in de mathematische statistiek veelvuldig verdelingen voorkomen, die slechts weinig van de normale verschillen, heeft men methoden gezocht, deze in reeksen te ontwikkelen, beginnende met een normale verdeling, en welker opeenvolgende termen afwijkingen daarvan met toenemende orde van kleinheid voorstellen.

De bekendste dezer methoden is van de Deense astronomen J.P.Gram (1879) en C.V.L. Charlier (1906) afkomstig.

Zij berust op het feit, dat

$$\left(-\frac{d}{dx}\right)^m e^{-\frac{1}{2}x^2} = H_m(x)\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

is, waarbij $H_m(x)$ een veelterm in x van de graad m is (Veeltermen van Hermite; Charles Hermite , 1822-1901).

Door m maal partiëel integreren vindt men voorts onmiddellijk

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau x}\left(-\frac{d}{dx}\right)^m e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \frac{\tau^m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau x}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \tau^m \cdot e^{\frac{1}{2}\tau^2}$$

Zijn c_m eindig vele constanten, dan is dus ook

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau x}\left\{\sum c_m\left(-\frac{d}{dx}\right)^m\right\} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \left\{\sum c_m \tau^m\right\} e^{\frac{1}{2}\tau^2} .$$

Ook voor een oneindige rij van c_m blijft deze betrekking geldig, mits de reeks in het rechterlid en de reeks der afgeleiden (in het linkerlid) gelijkmatig convergent zijn.

Zij nu F(x) een verdelingsfct, welker karakteristieke fct $\mathcal{Z}(\tau)$ analytisch is. Zij haar gemiddelde 0, en haar spreiding 1. Dan is

$$\mathcal{Z}(\tau) = e^{\frac{1}{2}\tau^2} \cdot \psi(\tau) \quad , \text{ waarin}$$

$$\psi(\tau) = e^{\frac{1}{6}\mathfrak{I}_3\tau^3 + \frac{1}{24}\mathfrak{I}_4\tau^4 + \ldots\ldots}$$

eveneens analytisch. Men heeft dus een ontwikkeling van de vorm

$$\psi(\tau) = \sum_{0}^{\infty}{}^{m}\; c_m \tau^m$$

die zeker in een strook om de imaginaire as in het complexe τ -vlak convergeert.

Dan is dus ook

$$\mathcal{J}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau x} \left\{ \sum c_m \left(-\frac{d}{dx}\right)^m \right\} e^{-\frac{1}{2}x^2} \, dx$$

Indien dus de reeks der afgeleiden convergeert en een continue fct $f(x).\sqrt{2\pi}$ voorstelt, is

$$\mathcal{J}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau x} f(x)\, dx$$

zodat f(x) ten gevolge van het eenduidigheidstheorema (vgl. bl. 70, Whr 159) de verdelingsdichtheid is. Men heeft dan dus

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sum c_m \left(-\frac{d}{dx}\right)^m \right\} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sum c_m H_m(x) \right\} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Symbolisch kan men ook schrijven:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{1}{3!}J_3\left(-\frac{d}{dx}\right)^3 + \frac{1}{4!}J_4\left(-\frac{d}{dx}\right)^4 + \cdots\cdots} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

b. Voor de eersten der coëfficiënten c_m vindt men

$$\sum c_m \tau^m = e^{\frac{1}{3!}J_3\tau^3 + \frac{1}{4!}J_4\tau^4 + \frac{1}{5!}J_5\tau^5 + \cdots\cdots} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3!}J_3\tau^3 + \frac{1}{2!(3!)^2}J_3^2\tau^6 + \frac{1}{(3!)^4}J_3^3\tau^9 + \cdots\cdots\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{4!}J_4\tau^4 + \frac{1}{2!(4!)^2}J_4^2\tau^8 + \frac{1}{3!(4!)^3}J_4^3\tau^{12} + \cdots\cdots\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{5!}J_5\tau^5 + \frac{1}{2!(5!)^2}J_5^2\tau^{10} + \frac{1}{3!(5!)^3}J_5^3\tau^{15} + \cdots\cdots\right) \times \cdots\cdots =$$

$$= 1 + \frac{J_3}{3!}\tau^3 + \frac{J_4}{4!}\tau^4 + \frac{J_5}{5!}\tau^5 +$$

$$+ \left(\frac{J_6}{6!} + \frac{J_3^2}{2!(3!)^2}\right)\tau^6 + \left(\frac{J_7}{7!} + \frac{J_3J_4}{3!4!}\right)\tau^7 + \left(\frac{J_8}{8!} + \frac{J_3J_5}{3!5!} + \frac{J_4^2}{2!(4!)^2}\right)\tau^8 +$$

$$+ \left(\frac{J_9}{9!} + \frac{J_4J_5}{4!5!} + \frac{J_3J_6}{3!6!} + \frac{J_3^3}{(3!)^4}\right)\tau^9 + \left(\frac{J_{10}}{10!} + \frac{J_3J_7}{3!7!} + \frac{J_4J_6}{4!6!} + \frac{J_5^2}{2!(5!)^2} + \frac{J_3^2J_4}{2!(3!)^2 4!}\right)\tau^{10} + \cdots\cdots$$

dus

$$c_o=1 \quad c_1=c_2=o \quad c_3=\frac{\mathcal{J}_3}{6} \quad c_4=\frac{\mathcal{J}_4}{24} \quad c_5=\frac{\mathcal{J}_5}{120}$$

$$c_6=\frac{1}{72}\left(\frac{\mathcal{J}_6}{10}+\mathcal{J}_3^2\right) \qquad c_7=\frac{1}{144}\left(\frac{\mathcal{J}_7}{35}+\mathcal{J}_3\,\mathcal{J}_4\right)$$

$$c_8=\frac{1}{144}\left(\frac{\mathcal{J}_8}{280}+\frac{\mathcal{J}_3\mathcal{J}_5}{3}+\frac{\mathcal{J}_4^2}{8}\right) \quad c_9=\frac{1}{144}\left(\frac{\mathcal{J}_9}{2520}+\frac{\mathcal{J}_3\,\mathcal{J}_6}{30}+\frac{\mathcal{J}_4\mathcal{J}_5}{20}+\frac{\mathcal{J}_3^3}{9}\right)$$

$$c_{10}=\frac{1}{288}\left(\frac{\mathcal{J}_{10}}{12600}+\frac{\mathcal{J}_3\,\mathcal{J}_7}{105}+\frac{\mathcal{J}_4\,\mathcal{J}_6}{60}+\frac{\mathcal{J}_5^2}{100}+\frac{\mathcal{J}_3^2\,\mathcal{J}_4}{6}\right)$$

Algemeen is

$$c_m=\sum_{h_3,h_4,\ldots,h_m}\ \prod_{3}^{m}\ \frac{\mathcal{J}_j^{\,h_j}}{h_j!\,(j!)^{h_j}}$$

gesommerd over alle $h_3,h_4,\ldots,h_m$ met $\sum_j j.h_j=m$.

Het is eenvoudiger c_m in de gereduceerde momenten uit te drukken dan in de cumulanten. Men heeft nl.

$$\psi(\tau)=e^{-\frac{1}{2}\tau^2}\,z(\tau)=\sum\frac{(-\frac{1}{2}\tau^2)^k}{k!}\sum\frac{\mu_\ell\,\tau^\ell}{\ell!}=\sum c_m\,\tau^m,$$

met

$$c_m=\sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}m]}\frac{(-\frac{1}{2})^k}{k!}\ \frac{\mu_{m-2k}}{(m-2k)!}, \qquad \text{waarbij}$$

$\mu_1=0 \quad \mu_2=1$ is. Dus

$$c_0=1 \quad c_1=c_2=0 \quad c_3=\frac{\mu_3}{3!} \quad c_4=\frac{\mu_4}{4!}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{\mu_4-3}{4!}$$

$$c_5=\frac{\mu_5}{5!}-\frac{\mu_3}{2.3!} \quad c_6=\frac{\mu_6}{6!}-\frac{\mu_4}{2.4!}+\frac{1}{24} \quad c_7=\frac{\mu_7}{7!}-\frac{\mu_5}{2.5!}+\frac{\mu_3}{4.2!3!}$$

$$c_8=\frac{\mu_8}{8!}-\frac{\mu_6}{2.6!}+\frac{\mu_4}{4.2!4!}-\frac{1}{128} \quad c_9=\frac{\mu_9}{9!}-\frac{\mu_7}{2.7!}+\frac{\mu_5}{4.2!5!}-\frac{\mu_3}{8.3!3!}$$

$$c_{10}=\frac{\mu_{10}}{10!}-\frac{\mu_8}{2.8!}+\frac{\mu_6}{4.2!6!}-\frac{\mu_4}{8.3!4!}+\frac{1}{960}$$

De constante term in $c_{2\ell}$ is $\dfrac{(-1)^{\ell-1}}{2^{\ell-1}(\ell-1)!\,2}\,\mu_2+\dfrac{(-1)^\ell}{2^\ell\,\ell\,!}$

hetgeen ten gevolge van $\mu_2=1$ in $\dfrac{(-1)^{\ell-1}}{2^\ell\,\ell(\ell-2)!}$ overgaat.

c. De polynomen van Hermite worden gevonden met behulp van de voortbrengende fct

$$e^{-\frac{1}{2}t^2+zt} = \sum_{0}^{\infty} H_n(z)\,\frac{t^n}{n!} \quad .$$

Stelt men het linkerlid voor door $\Phi(z,t)$ dan is $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = (z-t)\,\Phi$ waaruit de differentie-vergelijking

$$H_{n+1}(z) - z\,H_n(z) + n\,H_{n-1}(z) = 0$$

volgt, die als recurrente betrekking gebruikt kan worden om de H_n successievelijk te berekenen, waarbij men van de rechtstreeks berekende $H_1(z) = z$ (en de triviale $H_0(z) = 1$) gebruik maakt.
In plaats daarvan kan men ook de uit $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = t\,\Phi$ volgende betrekking

$$H_n'(z) = n\,H_{n-1}(z)$$

gebruiken, waaruit volgt, dat elke H_n door integratie van de voorgaande en vermenigvuldiging met n ontstaat, waarbij de integratieconstante 0 is voor oneven n en $(-1)^{\frac{1}{2}n}.1.3...(n-1)$ voor even n.

Men vindt aldus

$H_0\ (z) = 1$
$H_1\ (z) = z$
$H_2\ (z) = z^2 - 1$
$H_3\ (z) = z^3 - 3z$
$H_4\ (z) = z^4 - 6z^2 + 3$
$H_5\ (z) = z^5 - 10z^3 + 15z$
$H_6\ (z) = z^6 - 15z^4 + 45z - 15$
$H_7\ (z) = z^7 - 21z^5 + 105z^3 - 105z$
$H_8\ (z) = z^8 - 28z^6 + 210z^4 - 420z^2 + 105$
$H_9\ (z) = z^9 - 36z^7 + 378z^5 - 1260z^3 + 945\,z$
$H_{10}\ (z) = z^{10} - 45z^8 + 630z^6 - 3150z^4 + 4725z^2 - 945$
enz.

Algemeen vindt men door in de voortbrengende fct $e^{-\frac{1}{2}t^2}$ en e^{zt} in reeksen te ontwikkelen de ontwikkeling van $H_n(z)$ volgens Maclaurin:

$$H_n(z) = \sum_{0}^{[\frac{1}{2}n]} {}_j \left(-\tfrac{1}{2}\right)^j \frac{n!}{j!\,(n-2j)!}\, z^{n-2j}$$

een betrekking die gemakkelijk te onthouden is, doordat men haar in symbolische vorm

$$H_n(z) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}\right)^2} z^n$$

kan schrijven.

Met behulp van de aldus berekende H_m (z) en de c_m kan men dus de reeks - ontwikkeling van f(x) onmiddelijk opschrijven, als de invarianten bekend **zijn**. Voor het geval, dat de verdeling niet gestandaardiseerd is, vindt men algemeen:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_0^\infty{}^m \, . \, c_m H_m\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

d. Men kan deze reeksontwikkeling ook rechtstreeks bepalen zonder eerst de invarianten te berekenen. Daartoe maakt men gebruik van de zgn. "orthogonaliteitseigenschap" die de H_n (evenals verschillende andere in de analyse beschouwde klassen van veeltermen) bezitten. Zij luidt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = 0$$

als m $\neq$ n is. Om haar te bewijzen, is het voldoende m $<$ n te stellen. Dan is het

$$\text{linkerlid} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n H_m(x)\, dx = 0$$

zoals onmiddelijk door n maal **partiëel** integreren blijkt, als men nog opmerkt, dat de afgeleiden van hogere dan de m^e orde van een veelterm van de m^e graad = 0 zijn. Voor m = n vindt men evenzo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n H_n(x)\, dx = n!\sqrt{2\pi}$$

daar de coëfficiënt van z^n in H_n (z) gelijk aan 1 is. Men heeft dus:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = \begin{cases} n! & \text{als } m = n \text{ is} \\ 0 & \text{,, } m \neq n \text{ ,,} \end{cases}$$

Is nu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sum_0^\infty{}^m c_m H_m(x)$$

dan is dus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) H_n(x)\, dx = \sum_0^\infty{}^m \frac{c_m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = n!\, c_n$$

daar alle termen van de som verdwijnen behalve degene waarvoor m = n is. Ondersteld is daarbij, dat de verwisseling van sommatie en integratie geoorloofd is. Derhalve is c_n rechtstreeks te berekenen uit

$$c_n = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,H_n(x)\,dx$$

e. De reeksontwikkeling volgens Gram-Charlier heeft verschillende nadelen.

1^e. De in het bovenstaande onderstelde convergentievoorwaarden zijn slechts zelden vervuld. Wil men b.v.

$$f(x) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\beta^2}}$$

in een reeks met $\sigma = 1$ ontwikkelen, dan convergeert zij slechts als $\beta^2 < 2$ is.

2^e. Ook als asymptotische reeks is zij niet geschikt, wanneer f(x) de verdelingsdichtheid van de som van n onafhankelijke variabelen is, die volgens het centrale limiet-theorema asymptotisch normaal is. Voor grote n is dan $\varkappa_j = O(n)$ dus $\gamma_j = O(n^{1-\frac{1}{2}j})$ en $c_m = O(n^{-\frac{1}{2}j+[\frac{1}{3}j]})$, b.v. $c_3 = O(n^{-\frac{1}{2}})$, $c_4 = O(n^{-1})$, $c_5 = O(n^{-\frac{3}{2}})$, $c_6 = O(n^{-1})$, $c_7 = O(n^{-\frac{3}{2}})$, $c_8 = O(n^{-2})$, $c_9 = O(n^{-\frac{3}{2}})$, enz., d.w.z. de termen worden niet successievelijk kleiner. Men kan aan dit bezwaar tegemoetkomen door in plaats van de reeksontwikkeling volgens Gram-Charlier een reeksontwikkeling volgens Edgeworth toe te passen, die naar opeenvolgende machten van $n^{-\frac{1}{2}}$ voortschrijdt, en waarvan H. Cramér het asymptotische karakter bewezen heeft. We verwijzen voor deze reeksontwikkeling naar H. Cramér, Mathematical methods of statistics, 1946, p. 227-231.

3^e. Breekt men de reeks na een eindig aantal termen af, dan kunnen voor grote x negatieve waarden voor de approximatieve verdelingsdichtheden optreden. Deze approximaties kunnen dus zelf niet als verdelingsdichtheden beschouwd worden.

4^e. Al deze bezwaren hangen samen met het feit, dat men ontwikkelingen gebruikt, welker convergentie - als deze bestaat - voor toenemende |x| steeds slechter wordt. Dit is vooral ernstig, door-dat de gevolgtrekkingen die men wenst te maken, doorgaans op "staartintegralen" van f(x) voor grote |x| betrekking hebben. Tenzij f(x) sneller dan $e^{-\frac{1}{4}x^2}$ naar 0 gaat (dus zeer zeldzame gevallen uitgezonderd) zullen derhalve conclusies omtrent de staartintegralen, gebaseerd op de reeksontwikkeling, voor zeer grote x meestal volslagen fout zijn.

Om al deze redenen zijn conclusies gebouwd op de ontwikkeling volgens Gram-Charlier van zeer beperkte betrouwbaarheid. Het is veeleer verwonderlijk, dat er nog zo vele gevallen zijn, waarin een goede benadering wordt verkregen (vgl. b.v. M.G. Kendall, I p. 159). Dit hangt vermoedelijk wel samen met het feit, dat tengevolge van de geringe betrouwbaarheidseisen, die men gewend is in de mathematische statistiek te stellen (b.v. 95 %, soms 98 %, zelden 99 % of meer) slechts betrekkelijk kleine waarden van $\frac{x-\mu}{\sigma}$ optreden, waardoor de convergentie (resp. de aanvankelijke convergentie, die later in divergentie overgaat) nog vrij goed is, terwijl de negatieve waarden der fqn veelal klein blijven en/of buiten het beschouwde interval liggen.

2. Ontwikkeling B volgens Charlier.

a. Naar analogie van de ontwikkeling volgens Gram-Charlier (door laatstgenoemde "ontwikkeling A" genoemd), heeft Charlier een tweede reeksontwikkeling (B) opgesteld, die in soortgelijke relatie staat tot de verdeling van Poisson, als [de eerste tot de normale verdeling. Daar de variabele van Poisson slechts gehele waarden ≥ 0 aanneemt, moeten hierbij differenties in plaats van differentiaalquotiënten gebruikt worden.

Is f(x) een voor gehele x gedefinieerde fct, dan duiden we met $\Delta f(x)$ en $\Delta' f(x)$ [1]) de vooruit-, resp. teruglopende differenties aan:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$
$$\Delta' f(x) = f(x) - f(x-1)$$

Definiëren we verder: $\Delta^{h+1} f(x) = \Delta^h \Delta f(x)$ en $\Delta^0 f(x) = f(x)$ (en analoog voor de teruglopende differenties) dan is:

$$\Delta^m f(x) = \sum_0^m (-1)^j \binom{m}{j} f(x+m-j)$$
$$\Delta'^m f(x) = \sum_0^m (-1)^j \binom{m}{j} f(x-j)$$

We zullen hier de teruglopende differenties gebruiken.

Analoog met $\int_0^x \frac{df(y)}{dy} dy = f(x) - f(0)$ heeft men [2])

$$\sum_{y=0}^{x-1} \Delta f(y) = \sum_{y=1}^{x} \Delta' f(y) = f(x) - f(0)$$

terwijl de analoga van de Taylorreeks (in het geval van ontwikkelbaarheid), t.w.

$$f(a \pm h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\pm h \frac{d}{da}\right)^n}{n!} f(a) = e^{\pm h \frac{d}{da}} f(a)$$

hier triviaal worden (h geheel ≥ 0)

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{h} \binom{h}{n} \Delta^n f(a) = (1+\Delta)^h f(a)$$
$$f(a-h) = \sum_{n=0}^{h} (-1)^n \binom{h}{n} \Delta'^n f(a) = (1-\Delta')^h f(a)$$

De analogie komt dus formeel daardoor tot stand, dat h^n door $h^{!n}$, $\frac{d}{dx}$ door Δ resp. Δ' en $e^{\frac{d}{dx}}$ door $1+\Delta$ resp. $1-\Delta'$ vervangen wordt.

Analoog met $\left(\frac{d}{dx}\right)^k x^n = n^{!k} x^{n-k}$

heeft men

$$\Delta^k x^{!n} = n^{!k} x^{!(n-k)} \quad \text{en}$$
$$\Delta'^k x^{!n} = n^{!k} (x-k)^{!n-k}$$

---

[1]) Een preciesere notatie ware: $(\Delta f)(x)$, $(\Delta' f)(x)$

[2]) Let op de grenzen !

Daar iedere eindige som van veelvouden van factoriële machten van x een veelterm in x van dezelfde graad is en omgekeerd, is dus

$$\Delta^k f(x) = \Delta'^k f(x) = 0$$

als f(x) een polynoom in x van een graad $\leq$ k-1 is.

b. Neemt men speciaal $f(x) = P_x = e^{-\alpha} \frac{\alpha^x}{x!}$ (dus f(x) = 0 voor gehele $x < 0$), dan is

$$\Delta^m P_x = \sum_0^m j (-1)^j \frac{m^{!j}}{j!} e^{-\alpha} \frac{\alpha^{x-j}}{(x-j)!} =$$

$$= P_x \sum_0^m j \left(\frac{-1}{\alpha}\right)^j \frac{m^{!j} x^{!j}}{j!} = P_x K_x^{(m)}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$$

waarin $K_x^{(m)}(z) = \sum_0^m j \frac{m^{!j} x^{!j}}{j!} z^j$

een polynomium in x (en ook in z) van de graad m is. Polynomia van dit type zijn het eerst door E.E. Kummer beschouwd (Über die Hypergeometrische Reihe, Crelles Journ. f. Math., 15 (1836)p. 39-83 en 127-172, i.h.b. p. 138).

Zij ontstaan door limietovergang uit de hypergeometrische fct F(a,b;c;x) (vgl. pag. 90, Whr 179), waarvoor, als $|x| < 1$ is, geldt

$$F(-\alpha, -\beta; -\gamma; -x) = \sum_0^\infty n \frac{\alpha^{!n} \beta^{!n}}{n! \gamma^{!n}} x^n$$

Nu is $K_x^{(m)}(z) = \lim_{\gamma \to \infty} F(-m, -x; \gamma; \gamma z)$

daar $\lim_{\gamma \to \infty} \frac{\gamma^n}{\gamma^{!n}} = 1$ is voor iedere n. [1])

Met de polynomen van Laguerre [2])

$L_m^{\{x\}}(z) = \sum_0^m j \binom{m+x}{m-j} \frac{(-z)^j}{j!}$ bestaat het volgende verband:

$$L_m^{\{x\}}(z) = \frac{(-1)^m}{m!} K_{x+m}^{(m)}(-z)$$

---

[1]) De convergentievoorwaarde $|x| < 1$ en de verwisseling van limietovergang en sommatie van de reeks geven geen moeilijkheden, daar de reeks hier afbreekt.

[2])Vgl. b.v. G. Szegö, Orthogonal Polynomials, N.Y. 1939, bl. 96 e.v. Ook deze polynomen vindt men reeds l.c. bij Kummer.

De polynomen $K_x^{(m)}$ nemen hier de plaats in die de veeltermen van Hermite bij de ontwikkeling van Gram-Charlier bezetten. Men heeft speciaal:

$$K_x^{(0)}(z) = 1 \qquad K_x^{(1)}(z) = 1 + xz \qquad K_x^{(2)}(z) = 1 + 2xz + x(x-1)z^2$$

$$K_x^{(3)}(z) = 1 + 3xz + 3x(x-1)z^2 + x(x-1)(x-2)z^3 \text{, enz.}$$

Is $\psi(v) = \sum_0^\infty {}_m\, c_m v^m$ een machtreeks in v, dan is, mits de reeksen convergeren

$$\sum c_m \Delta'^m P_x = P_x \sum c_m K_x^{(m)}\left(-\frac{1}{\alpha}\right) \qquad \text{of symbolisch:}$$

$$\psi(\Delta')P_x = \sum c_m K_x^{(m)}\left(-\frac{1}{\alpha}\right).P_x$$

c. Vermenigvuldigt men $\Delta'^m P_x$ met $(1+v)^x$ en sommeert men over x, dan krijgt men, als de som door $Y_m(v)$ voorgesteld wordt:

$$Y_m(v) = \sum_0^\infty {}_x (1+v)^x \Delta'^m P_x = \sum_0^\infty {}_x (1+v)^x K_x^{(m)}\left(-\frac{1}{\alpha}\right) P_x =$$

$$= e^{-\alpha} \sum_0^\infty {}_x \sum_0^m {}_j (-1)^j \frac{m^{!j}}{j!(x-j)!}(1+v)^x \alpha^{x-j} =$$

$$= e^{-\alpha} \sum_0^\infty {}_y \sum_0^m {}_j (-1)^j \frac{m^{!j}}{j!\,y!}(1+v)^{y+j} \alpha^y =$$

$$= e^{-\alpha} \sum_0^\infty {}_y \frac{\alpha^y (1+v)^y}{y!} \sum_0^m {}_j (-1)^j \binom{m}{j}(1+v)^j =$$

$$= e^{-\alpha} e^{\alpha(1+v)} \{1-(1+v)\}^m = e^{\alpha v}(-v)^m$$

Is nu $\psi(v) = \sum_0^\infty {}_m\, c_m v^m$, dan is mits de reeksen in het tweede en vierde lid convergent zijn:

$$Y(v) = \sum_0^\infty {}_m c_m Y_m(v) = \sum_0^\infty {}_m c_m \sum_0^\infty {}_x (1+v)^x \Delta'^m P_x = e^{\alpha v} \sum_0^\infty {}_m c_m (-v)^m$$

of symbolisch:

$$Y(v) = \sum_0^\infty {}_x (1+v)^x \psi(\Delta')P_x = e^{\alpha v}\psi(-v)$$

Deze betrekking correspondeert met

$$Z(\tau) = \int e^{\tau x} \psi\left(-\frac{d}{dx}\right) \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx = e^{\frac{1}{2}\tau^2} \psi(\tau)$$

uit 1.a . Daarbij treedt $P_x = e^{-\alpha}\frac{\alpha^x}{x!}$ in de plaats van $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ en $1+v$ van e^τ . Nu is $Z(\ln(1+v))$ de voortbrengende fct van de <u>factoriële</u> momenten ener verdeling als $Z(\tau)$ haar karakteristieke fct is (vgl. Whr pag. 87). We zullen dus trachten deze met $Y(v)$ te vereenzelvigen, waarbij we voor de stochastische variabele alleen gehele waarden ≥ 0 met whn Q_x zullen toelaten. Dan is

$$Y(u) = Z\left(\ln(1+u)\right) = \sum_0^\infty {}_x (1+u)^x Q_x = \sum_0^\infty {}_k \frac{\mu_{!k}}{k!} u^k$$

Men kan dus hebben $$Q_x = \psi(\Delta')P_x$$

als $Y(u) = e^{\alpha u}\psi(-u)$, d.w.z. $\psi(-u) = e^{-\alpha u} Y(u)$ is.

Dan is echter:

$$\psi(-u) = \sum_0^\infty {}_l \frac{(-\alpha)^l}{l!} u^l \sum_0^\infty {}_k \frac{\mu_{!k}}{k!} u^k = \sum c_m (-u)^m$$

met

$$c_m = (-1)^m \sum_0^m {}_k \frac{\mu_{!k}\,(-\alpha)^{m-k}}{k!\,(m-k)!}$$

hetgeen overeenkomt met [1])

$$c_m = \sum_0^{[\frac{1}{2}m]} {}_k \frac{(-\frac{1}{2})^k}{k!} \frac{\mu_{m-2k}}{(m-2k)!} \qquad \text{uit 1.b.}$$

We vinden dus voor de gezochte whn Q_x , indien de reeks convergent is:

$$Q_x = \sum_0^\infty {}_m c_m \Delta'^m e^{-\alpha} \frac{\alpha^x}{x!} =$$

$$= \sum_0^\infty {}_m (-1)^m \left\{ \sum_0^\infty {}_k \frac{\mu_{!k}}{k!} \frac{(-\alpha)^{m-k}}{(m-k)!} \right\} K_x^{(m)}\left(-\frac{1}{\alpha}\right) e^{-\alpha} \frac{\alpha^x}{x!}$$

Hierin kunnen de polynomia $K_x^{(m)}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$ eens voor al bepaald worden, terwijl de $c_m = c_m(\alpha)$ van de factoriële momenten $\mu_{!k}$ der gezochte verdeling afhangen.

Deze uitdrukking voor Q_x komt overeen met

$$f(x) = \sum_0^\infty {}_m \left\{ \sum_0^{[\frac{1}{2}m]} {}_k \frac{\mu_{m-2k}}{(m-2k)!} \frac{(-\frac{1}{2})^k}{k!} \right\} H_m(x) \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{in 1.a.}$$

d. Evenals onder 1.d. kan men de ontwikkeling van Q_x rechtstreeks vinden met behulp van een stelsel orthogonaliteitsrelaties. We hebben nl.:

$$\Delta'\left\{u(x).v(x)\right\} = u(x).\Delta' v(x) + v(x-1).\Delta' u(x)$$

$$\Delta'^k\left\{u(x)\,v(x)\right\} = \sum_0^k {}_j \binom{k}{j} \left\{\Delta'^j u(x)\right\} \Delta'^{h-j} v(x-j)$$

en vinden dus door k maal partiëel naar x te sommeren:

----

[1]) Vervang in bovenstaande betrekking k door m - k.

$$\sum_0^\infty{}_x P_x K_x^{(m)}(-\tfrac{1}{\alpha}) K_x^{(l)}(-\tfrac{1}{\alpha}) = \sum_0^\infty{}_x K_x^{(l)}(-\tfrac{1}{\alpha}) \Delta'^m P_x =$$

$$= \sum_0^k{}_h (-1)^h \left[\Delta'^h K_x^{(l)}(-\tfrac{1}{\alpha}) . \Delta'^{m-h-1} P_{x-h} \right]_{-1}^{\infty} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \sum_0^\infty{}_x \Delta'^{k+1} K_x^{(l)}(-\tfrac{1}{\alpha}) . \Delta'^{m-k-1} P_{x-k-1}$$

Hierin stellen we $m \geqq l$ (voor $m < l$ m en l verwisselende) en we nemen $k = m - 1$. Dan komt er, daar de eerste term van het laatste lid gelijk nul is:

$$\sum_0^\infty{}_x P_x K_x^{(m)} K_x^{(l)} = (-1)^m \sum_0^\infty{}_x P_{x-m} \Delta'^m K_x^{(l)} ,$$

dus daar:

$$\Delta'^m K_x^{(l)} = 0 \quad \text{is voor} \quad m > l$$
$$\text{en} \quad = m!(-\alpha)^{-m} \quad \text{is voor} \quad m = l$$

geldt

$$\sum_0^\infty{}_x P_x K_x^{(m)}(-\tfrac{1}{\alpha}) K_x^{(l)}(-\tfrac{1}{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{voor } m \neq l \\ m!\,\alpha^{-m} & \text{voor } m = l \end{cases}$$

Uit deze orthogonaliteitsrelaties, tezamen met

$$Q_x = \sum_0^\infty{}_m c_m \Delta'^m P_x = \sum_0^\infty{}_m c_m K_x^{(m)}(-\tfrac{1}{\alpha}) . P_x$$

volgt nu:

$$\sum_0^\infty{}_x Q_x K_x^{(n)}(-\tfrac{1}{\alpha}) = \sum_0^\infty{}_x \sum_0^\infty{}_m c_m K_x^{(m)}(-\tfrac{1}{\alpha}) K_x^{(n)}(-\tfrac{1}{\alpha}) P_x =$$

$$= \sum_0^\infty{}_m c_m \sum_0^\infty{}_x P_x K_x^{(m)}(-\tfrac{1}{\alpha}) K_x^{(n)}(-\tfrac{1}{\alpha}) = n!\,\alpha^{-n} . c_n$$

waaruit de c_n te berekenen zijn.

e. In plaats van de Δ' kan men ook van de Δ gebruik maken (vgl. pt.a). De sommatiegrenzen worden dan iets minder overzichtelijk, maar verder treedt er geen wijziging op.

De reeksontwikkeling heeft dergelijke nadelen als die van Gram-Charlier (vgl. punt 1.e).

Dergelijke reeksontwikkelingen als hiergegeven zijn met behulp van de normale verdeling en de verdeling van Poisson kunnen voor iedere verdeling gegeven worden.

3. Transformatie van Khintchine.

a. De verdeling van Poisson is de limiet voor $n \to \infty$ van de som van n onafhankelijke stochastische variabelen, die elk slechts de waarden 0 en 1 kunnen aannemen, en wel met whn $1-\frac{\alpha}{n}$ resp. $\frac{\alpha}{n}$. A. Khintchine [1]) heeft deze verdeling gegeneraliseerd door de wh $\frac{\alpha}{n}$ zelf nog eens volgens een willekeurig gegeven verdelingsfct over de x-as te verdelen.

Zij $\Phi(y)$ een willekeurige verdelingsfect, y de bijbehorende variabele, en zij

$$F_{(n)}(x) = \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\iota(x) + \frac{\alpha}{n}\Phi(x) \qquad {}^{2)}$$

Dan neemt de bij $F_n(x)$ behorende variabele x de waarden uit elke vz die 0 niet bevat met $\frac{\alpha}{n}$ maal zo grote wh aan als y; x neemt voorts de waarde 0 aan met een wh $1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha}{n}p$, als y de waarde 0 met een wh p aanneemt.

Zij nu $\Phi_m(x)$ de m-voudig geïtereerde van $\Phi(x)$, dus (vgl. p. 81 Whr 170 en p. 69 Whr 158)

$$\Phi_m(x) = \int \Phi_{m-1}(x-\xi)\, d\Phi(\xi)$$

(Dit blijft voor m = 1 geldig, als men $\Phi_0(x) = \iota(x)$ stelt; $\Phi_1(x) = \Phi(x)$)
Zij voorts $F_{(n)m}(x)$ de m-voudig geïtereerde van $F_{(n)}(x)$.
Dan volgt onmiddelijk door volledige inductie:

$$F_{(n)m}(x) = \sum_0^m h \binom{m}{h}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^h \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{m-h} \Phi_h(x)$$

b. Ons doel is $\lim_{m\to\infty} F_{(m)m}(x)$ te bepalen. Dit geschiedt het eenvoudigst met behulp van continuiteitstheorema (vgl. p. 71 Whr 160), dat we op de karakteristieke functie met imaginair argument moeten toepassen, daar omtrent $\Phi(x)$ niet ondersteld is. Zij dus $Z_1(it) = \int e^{itx}\, d\Phi(x)$ de karakteristieke fct van $\Phi(x)$

$$Z^*_{(n)}(it) = \int e^{itx}\, dF_{(n)}(x)$$ die van $F_n(x)$ dan is

$$Z^*_{(n)}(it) = \left(1-\frac{\alpha}{n}\right) + \frac{\alpha}{n} Z_1(it)$$

Bij $F_{(n)m}(x)$ behoort de karakteristieke fct

$$\left\{Z^*_{(n)}(it)\right\}^n = \left\{1-\frac{\alpha}{n}\left(1-Z_1(it)\right)\right\}^n$$

----

[1]) Asymptotische Gesetze der Whr., Berlin 1933, Kap. 2.

[2]) We herinneren aan: $\iota(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } x \geq 0 \\ 0 & \text{,, } x < 0 \end{cases}$

dus bij $G(x) = \lim_{m \to \infty} F_{(m)m}(x)$

$$Z(it) = \lim_{m \to \infty} \{Z^{*}_{(m)}(it)\}^{m}$$

dus $\boxed{Z(it) = e^{-\alpha + \alpha Z_1 it}}$

Voor een variabele die éénwaardig en = 1 is, is $Z(it) = e^{it}$; deze leidt tot de verdeling van Poisson met karakteristieke fct

$$Z(it) = e^{-\alpha + \alpha e^{it}}$$

De verdeling van Khintchine ontstaat dus uit de bij $\Phi(t)$ behorende door deze[te] "Poissoniseren", d.w.z. door haar karakteristieke fct voor e^{it} in die van Poisson te substitueren. Men kan op dezelfde wijze niet slechts een willekeurige verdeling, maar ook een willekeurige collectie volgens Poisson transformeren. Is C haar collectieve kenmerk, dan is dat van haar getransformeerde:

$$C' = e^{-\alpha + \alpha C}$$

Het kan als $\lim_{m \to \infty} \{1 - \frac{\alpha}{m} + \frac{\alpha}{m} C\}^{m}$ verkregen worden en kan dus als mathematisch model gebruikt worden voor een groot aantal m onafhankelijke proeven, waarbij met een wh $\frac{\alpha}{m}$ resp. $1 - \frac{\alpha}{m}$ bepaald wordt, of een eventualiteit van C al dan niet zal plaatsgrijpen.

c. Om $G(x)$ te vinden schrijven we:

$$Z(it) = e^{-\alpha} \sum_{0}^{\infty} {}_n \frac{\alpha^n}{n!} \{Z_1(it)\}^n$$

Daar $\{Z_1(it)\}^n = \int e^{itx} \, d\Phi_n(x)$ is, heeft men dus

$$\boxed{G(x) = \sum_{0}^{\infty} {}_n e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} \Phi_n(x)}$$

waarin $\Phi_0(x) = \iota(x)$ (zie boven) is; de reeks is, wegens $0 \leq \Phi_n(x) \leq 1$ gelijkmatig convergent en mag dus (ook na vermenigvuldiging met e^{itx}) term voor term geïntegreerd worden.

d. Voorbeelden.

1. $\Phi(x)$ is verdelingsfct van een normale verdeling

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Dus $\Phi_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2n}}$

$$G(x) = \sum_{0}^{\infty} {}_n e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} \Phi_n(x) = e^{-\alpha} \iota(x) + \sum_{1}^{\infty} {}_n \frac{e^{-\alpha}}{\sqrt{2\pi n}} \frac{\alpha^n}{n!} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{n}} dy$$

dus $g(x) = G'(x) = \infty$ voor $x = 0$ en voor $x \neq 0$ is:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_1^\infty{}_n \, e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{n}}}{\sqrt{n}}$$

De reeks convergeert gelijkmatig, zelfs iets sneller dan die van de exponentiële fct. De semi-invarianten worden gevonden uit

$$Z(it) = -\alpha + \alpha e^{-\frac{1}{2}t^2} = \alpha \sum_1^\infty{}_h \frac{1}{h!} \left(-\frac{1}{2}\right)^h t^{2h}$$

t.w.

$$\kappa_{2h+1} = 0$$

$$\kappa_{2h} = \frac{(2h)!}{2^h . h!} \alpha = (2h-1)(2h-3) \ldots\ldots 3.1.\alpha$$

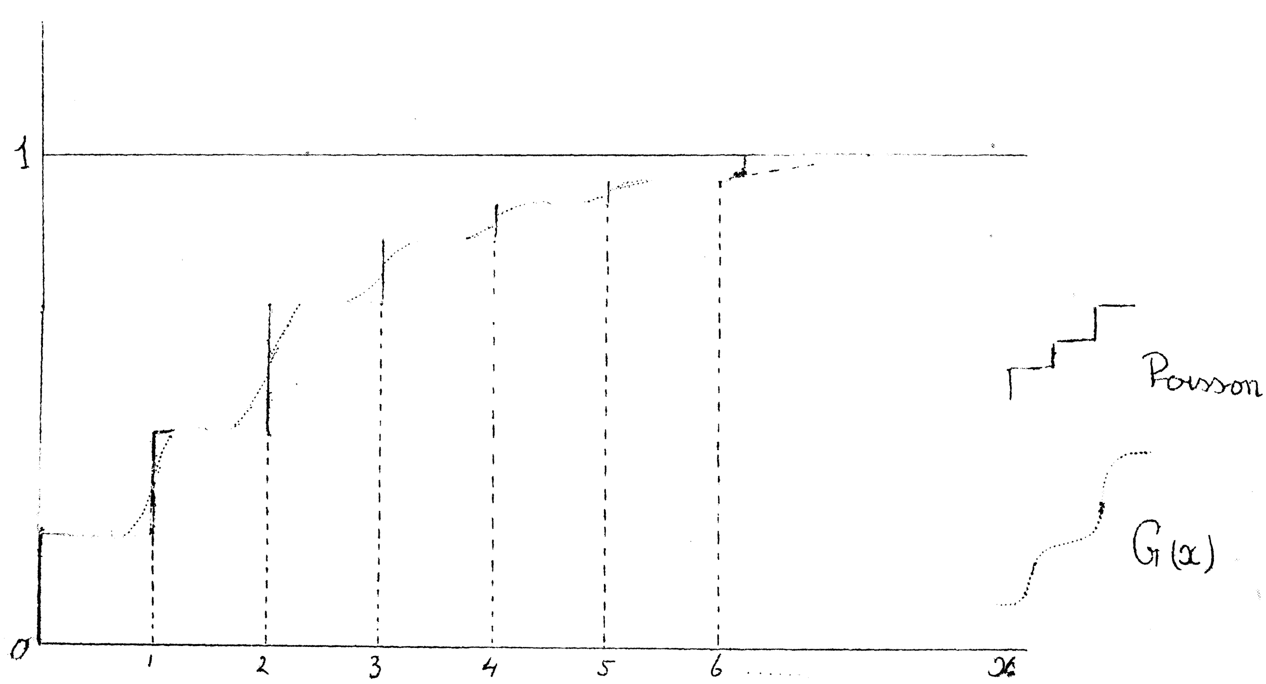
Speciaal $\sigma^2 = \alpha$. Het exces is $\gamma_2 = \frac{\kappa_4}{\sigma^4} = \frac{3}{\alpha}$. Voor kleine α worden de invarianten zeer groot, dus de afwijking van de normale (die ook voor eindige α reeds aanmerkelijk is) eveneens.

2. $\Phi(x)$ is normaal verdeeld met gemiddelde μ en spreiding $\sigma \ll |\mu|$ Dan is:

$$\Phi_n'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-n\mu)^2}{n\sigma^2}} \qquad \text{dus:}$$

$$G(x) = e^{-\alpha} \iota(x) + \sum_1^\infty{}_n \, e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-n\mu)^2}{n\sigma^2}} dy$$

Derhalve ontstaat $G(x)$ uit het diagram van de verdelingsfct van Poisson bij benadering (waarom ?) door ieder verticaal lijnstuk (behalve het eerste) te vervangen door de verdelingsfct van een normale verdeling met de abscis van dat lijnstuk als gemiddelde en met spreiding $\sigma\sqrt{n}$



3. $\Phi(x)$ is een alternatief, $Z_1(it) = p\,e^{ita} + q\,e^{itb}$

Dus $Z(it) = e^{-\alpha+\alpha(p\,e^{ita}+q\,e^{itb})} =$

$$= e^{-\alpha}\sum_0^\infty{}_l \sum_0^\infty{}_m \frac{\alpha^{l+m}}{l!\,m!}\, p^l q^m\, e^{it(la+mb)}$$

$$G(x) = e^{-\alpha}\sum_0^\infty{}_l \sum_0^\infty{}_m \frac{\alpha^{l+m}}{l!\,m!}\, p^l q^m\, \iota(x-la+mb) =$$

$$= e^{-\alpha}\sum_{la+mb\leq x}{}_{l,m} \frac{\alpha^{l+m}}{l!\,m!}\, p^l q^m$$

4. $\Phi(x)$ is homogeen verdeeld tussen 0 en 1:

$$\Phi(x) = x\,\iota(x) - (x-1)\,\iota(x-1)\ ,\quad Z_1(it) = \frac{e^{it}-1}{it}$$

Door volledige inductie bewijst men gemakkelijk

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{m!}\sum_0^m{}_h (-1)^h\binom{m}{h}(x-h)^m\,\iota(x-h)$$

($\Phi_m(x)$ bestaat uit m + 1 bogen van m^e graads parabolen, in de punten met gehele h aaneensluitend, en die daar een aanraking van de orde m - 1 hebben).

$$G(x) = e^{-\alpha}\sum_0^\infty{}_m \frac{\alpha^m}{m!\,m!}\sum_0^m{}_h (-1)^h\binom{m}{h}(x-h)^m\,\iota(x-h) =$$

$$= e^{-\alpha}\sum_0^\infty{}_h \frac{(-1)^h}{h!}\,\iota(x-h)\sum_h{}_m \frac{\alpha^m(x-h)^m}{m!\,(m-h)!} =$$

$$= e^{-\alpha}\sum_0^\infty{}_h \frac{(-1)^h}{h!}\left\{\alpha(x-h)\right\}^{\frac{1}{2}h} J_h\left(2\sqrt{\alpha(x-h)}\right)\,\iota(x-h)$$

waarin
$$J_h(z) = \sum_0^\infty{}_n \frac{(\frac{1}{2}z)^{h+2n}}{n!\,(n+h)!}$$

de fct van Bessel van de orde h voor imaginair argument (iz) voorstelt.

e. Toepasbaarheid.

De verdelingen van Khintchine worden toegepast wanneer een aantal objecten volgens Poisson verdeeld zijn, en aan elk daarvan een meetbaar kenmerk wordt waargenomen; de som van de waarden die dit kenmerk voor alle objecten bezit is dan volgens Khintchine verdeeld. Heeft men b.v. vetbolletjes in een oplossing die volgens Poisson met een gemiddelde α per volume-eenheid verdeeld zijn, en is de massa per vetbolletje $\underline{x}$ volgens $\Phi(x)$ verdeeld, dan is de totale massa per volume-eenheid volgens $G(x)$ verdeeld.

Een ander voorbeeld heeft men in de schadeverzekering. Is n de uitgebreidheid van een homogeen deel ener verzekeringsportefeuille (d.i. een deel, bestaande uit objecten met ongeveer gelijke schadekansen, b.v. fabrieken van eenzelfde type en grootte, personen met ongeveer gelijke ongevallen-risico's, e.d.) en is p (de "uitbrekingskans") de wh dàt bij een objectschade zal ontstaan, en $\Phi(x)$ (de "uitbreidingskans") de wh, dat, àls er aan een object schade ontstaat, deze hoogstens $\Phi(x)$ zal bedragen, dan is als p klein is ($= O(\frac{1}{n})$) en $pn = \alpha$ $G(x)$ (bij benadering) de wh dat de totale schade in het portefeuille-deel hoogstens x zal bedragen, verondersteld, dat de afzonderlijke schaden onderling onafhankelijk zijn.

Evenals bij de verdeling van Poisson (vgl. pag. 88, Whr 177) is α evenredig met de grootte der deelgebieden (volumina, tijdsduren, portefeuille-uitgebreidheden, enz.).

f. Generalisatie.

De transformatie van Khintchine kan gegeneraliseerd worden door de verdeling van Poisson te vervangen door een willekeurige verdeling, die uitsluitend gehele waarden ≥ 0 voor de variabele $\underline{n}$ toelaat. Is nl. P_n de wh dat $\underline{n}$ de waarde n aanneemt, en ondergaat de variabele $\underline{x}$ voor iedere in $\underline{n}$ bevatte eenheid een volgens $\Phi(y)$ verdeelde aangroeiing $\underline{y}$, dan is haar verdelingsfct evenals in punt c :

$$G(x) = \sum_0^\infty{}^n P_n \Phi_n(x)$$

Is $z_1(\tau) = \ln \int e^{\tau x} d\Phi(x)$ de (althans voor zuiver imaginaire gedefinieerde) entropische fct van $\underline{y}$, $z^*(\tau) = \ln \sum_0^\infty{}^n P_n e^{n\tau}$ die van $\underline{n}$, dan is de entropische fct $z(\tau)$ van $\underline{x}$

$$z(\tau) = z^*(z_1(\tau)),$$

daar

$$e^{z(\tau)} = \int e^{\tau x} dG(x) = \int e^{\tau x} \sum{}^n P_n d\Phi_n(x) =$$

$$= \sum{}^n P_n \int e^{\tau x} d\Phi_n(x) = \sum P_n e^{n z_1(\tau)} = e^{z^*(z_1(\tau))},$$

mits de verwisseling van sommatie en integratie veroorloofd is. Voor zuiver imaginaire τ is dit zeker het geval, daar $\sum P_n \Phi_n(x)$ dan zelf van begrensde variatie is, zodat integraal en reeks gelijkmatig convergeren.

De beperking, dat $\underline{n}$ alleen gehele waarden ≥ 0 mag aannemen, kan vervangen worden door een beperking voor $\underline{y}$. Zij α een willekeurige continu verdeelde variabele, die uitsluitend waarden ≥ 0 aanneemt,

$F^*(\alpha)$ haar verdelingsfct en $z^*(\tau)$ haar entropische fct. Zij voorts $F_\alpha(x)$ een continu van α afhangende klasse van verdelingsfcts, waarbij α alle (niet alleen de gehele) getallen ≥ 0 doorloopt, welker entropische fcts $z^*_\alpha(\tau)$ met α evenredig zijn

$$z^*_\alpha(\tau) = \alpha z^*_1(\tau)$$

Voorbeelden hiervan zijn de verdeling van Poisson met $z_\alpha(\tau) = \alpha(e^\tau - 1)$, de $\Gamma_{(\alpha)}$ - verdeling met $z_\alpha(\tau) = \alpha z_1(\tau)$, en de normale verdeling met gemiddelde 0 en spreiding $\sqrt{\alpha}$ $\left(z^*_\alpha(\tau) = \frac{1}{2}\alpha\tau^2\right)$ of met gemiddelde $\alpha\mu$ en spreiding $\sigma\sqrt{\alpha}$ $\left(z^*_\alpha(\tau) = \alpha(\mu\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau^2)\right)$

De variabele $\underline{x}$ zij zo gedefinieerd, dat als $\underline{\alpha}$ tussen α en $\alpha + d\alpha$ ligt, $\underline{x}$ volgens een $F_\beta(x)$ verdeeld zal zijn, waarbij β eveneens tussen α en $\alpha + d\alpha$ ligt. De verdelingsfct van $\underline{x}$ is dan

$$G(x) = \int dF^*(\alpha)\, F_\alpha(x)$$

en haar entropische fct $z(\tau)$ is gegeven door

$$e^{z(\tau)} = \int e^{\tau x}\, dG(x) = \int e^{\tau x} \int dF^*(\alpha)\, F_\alpha(x) =$$

$$= \int dF^*(\alpha) \int e^{\tau x}\, dF_\alpha(x) = \int dF^*(\alpha)\, e^{z_\alpha(\tau)} =$$

$$= \int dF^*(\alpha)\, e^{\alpha z_1(\tau)} = e^{z^*(z_1(\tau))}$$

waarbij de verwisselbaarheid der integraties wederom althans voor zuiver imaginaire τ vaststaat.

4. Orthogonale polynomen.

De methode van approximatie ener verdeling volgens Gram-Charlier en Charlier B kan tot een zeer ruime klasse van verdelingen worden uitgebreid.

Zij F(x) een verdelingsfct ener stochastische variabele, die niet (behoudens een wh nul) slechts eindig veel waarden aanneemt en waarvan alle momenten bestaan. Dan bestaat ook $\int P(x)\, d\, F(x)$ voor een willekeurig polynomium. We bepalen dan een rij van polynomia $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \cdots$ waarbij de index tevens de graad aangeeft, die de eigenschap

(1) $$\int P_m(x) . P_n(x)\, dF(x) = \delta_{mn}$$

bezitten. Gelden de gelijkheden alleen voor $n \neq m$, dan zijn de polynomia "orthogonaal". De gelijkheid voor m = n heet "normaliseringsvoorwaarde"; zij legt een multiplicatieve constante in $P_m(x)$ vast, die door de orthogonaliteit alleen niet bepaald kan worden. In plaats van "orthogonaal" en "genormaliseerd" zegt men veel "orthonormaal". (Dat is dus (1)).

Dit orthogonaliteitsbegrip is een generalisering van de onderlinge loodrechtheid van vectoren. Twee vectoren $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ en $\vec{y} \equiv (y_1, y_2, y_3)$ in de driedimensionale ruimte zijn loodrecht op elkaar, als $\sum_1^3 x_i y_i = 0$ is. Het quadraat van de lengte ("norm") van de vector $\vec{x}$ is: $\sum_1^3 x_i^2$ Voor n dimensies (n > 0, geheel) kan men deze definities geheel analoog handhaven. Generalisatie tot aftelbaar oneindig veel dimensies vindt plaats door als vectoren $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots)$ die coördinaatrijen toe te laten, waarvoor de norm, d.i. $\sum_1^\infty x_i^2$, eindig is. Orthogonaliteit wordt dan gedefinieerd door: $\sum_1^\infty x_i y_i = 0$. Vat men nu de waarden, die een reële functie g(x) (b.v. voor $0 \leq x \leq 1$) aanneemt, op als een generalisatie van de coördinaten van een vector, dan kan men als norm van g(x) nemen:

$$\int_0^1 g(x)^2\, dx$$

Orthogonaliteit van g(x) en h(x) wordt dan gedefinieerd door

$$\int_0^1 g(x) . h(x)\, dx = 0$$

Een laatste generalisatie bestaat daaruit, dat we d x vervangen door d F(x). Vergelijkingen (1) is dan verkregen. Stelt F(x) een discontinue verdeling voor, b.v. een verdeling met Q_x (whn) voor $x \geq 0$ geheel, dan gaat (1) over in:

$$\sum_0^\infty P_m(x)\, P_n(x)\, Q_x = \delta_{mn}$$

De afleiding van de polynomia $P_n(x)$ kan op de volgende wijze worden uitgevoerd:

Stelt men $P_n(x) = \sum_0^n k\, P_{nk}\, x^k$, dan kan men P_{nk}/P_{nn} bij gegeven n voor $k < n$ bepalen door dat voor alle $m < n$ $\int x^m P_n(x)\, dF(x) = 0$ moet zijn; P_{nn} wordt dan vastgelegd door: $\int \{P_n(x)\}^2 dF(x) = 1$

wanneer we nog afspreken $P_{nn} > 0$ te kiezen. Immers deze integraal kan niet nul zijn voor $P_{nn} \neq 0$, daar anders $\underline{x}$ "bijna zeker" slechts de n wortels van $P_n(x)$ zou aannemen. Men vindt op deze wijze

$$P_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & & x^n \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}}$$

met

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}$$

Dit is ook gemakkelijk rechtstreeks in te zien. Vermenigvuldigt men $P_n(x)$ namelijk met $x^m\, dF(x)$ $(0 \leq m \leq n-1)$ en integreert men, dan gaat de laatste rij van de tellerdeterminant over in één van de andere rijen, zodat de determinant komt te verdwijnen; voor $m = n$ daarentegen krijgt men Δ_n in de teller. Vermenigvuldiging met $P_{nn} = \Delta_{n-1}/\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}$ geeft dus 1.

In het bijzonder is $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = \frac{\tilde{x}}{\sigma}$,

$$P_2(x) = \frac{\sigma^2 \tilde{x}^2 - \tilde{\mu}_3 \tilde{x} - \sigma^4}{\sigma\sqrt{\sigma^2 \tilde{\mu}_4 - \tilde{\mu}_3^2 - \sigma^2}} = \frac{(\tilde{x}/\sigma)^2 - \gamma_1\, \tilde{x}/\sigma - 1}{\sqrt{\gamma_2 - \gamma_1^2 + 2}}$$

Zij nu $\gamma(x)$ een meetbare reële fct met integreerbaar quadraat, d.w.z. met $\mathcal{E}\gamma^2 = \int \{\gamma(x)\}^2 dF(x)$ eindig en zij $h_n(x) = \gamma(x) - \sum_0^n \gamma_m P_m(x)$ met constanten γ_m, die we nader bepalen door te eisen dat $\mathcal{E}\underline{h}_n^2$ zo klein mogelijk zij. Tengevolge van de orthogonaliteit is echter

$$\mathcal{E}\underline{h}_n^2 = \mathcal{E}\gamma^2 - 2\sum_0^n \gamma_m \int \gamma(x) . P_m(x)\, dF(x) + \sum_0^n \gamma_m^2$$

Door partiële differentiatie naar γ_m vinden we als voorwaarden voor het minimum de <u>niet van n afhangende</u> betrekkingen:

$$\gamma_m = \int \gamma(x)\, P_m(x)\, dF(x) ,$$

waardoor de waarde van het minimum $\mathcal{E}\underline{h}_n^2 = \mathcal{E}\gamma^2 - \sum_0^n \gamma_m^2$ wordt. De getallen γ_m heten de <u>ontwikkelingscoëfficienten van</u> $\gamma(x)$ met betrekking tot de $P_m(x)$.

Derhalve is $\sum_0^n \gamma_m^2 \leq \mathcal{E}\gamma^2$ voor iedere n, dus is $\sum_0^\infty \gamma_m^2$ convergent en $\leq \mathcal{E}\gamma^2$ (gegeneraliseerde "ongelijkheid van Bessel"). De reeks $\sum_0^\infty \gamma_m P_m(x)$ behoeft echter niet te convergeren; deze convergentie moet in de afzonderlijke gevallen onderzocht worden. Een quadratisch t.o.v. F(x) integreerbare fct $\gamma(x)$ zal gezegd worden tot de door $P_m(x)$ bepaalde functieklasse te behoren als $\sum_0^\infty \gamma_m^2 = \mathcal{E}\gamma^2$ (niet slechts $\leq$) is dus $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E} h_n^2 = 0$.

Dan is dus

$$\lim_{n\to\infty} \int \Big\{\gamma(x) - \sum_0^n \gamma_m P_m(x)\Big\}^2 dF(x) = 0$$

Men zegt dan, dat $\gamma(x)$ door de $h_n(x) = \sum_0^n \gamma_m P_m(x)$ quadratisch gemiddeld geapproximeerd wordt. Dit betekent echter niet, dat $\sum \gamma_m P_m(x)$ convergent is, en als zij convergent is, hoeft zij $\gamma(x)$ niet tot limiet te hebben.

Zij nu G(x) een verdelingsfct die 1^e^ constant is op ieder interval, waarop F(x) constant is en 2^e^ continu is in ieder punt waar F(x) continu is. Uit stelling 15 van Caput II, § 2 Whr pag. 68 volgt dan, dat er een fct $\gamma(x)$ bestaat, waarvoor

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \gamma(u)\, dF(u)$$

is. (Deze fct $\gamma(x)$ is niet ondubbelzinnig bepaald; zij kan b.v. op intervallen waar F(x) constant is willekeurig aangenomen, b.v. = 0 gekozen worden). In bepaalde gevallen kan $\gamma(x)$ met haar quadratisch gemiddelde approximatie door $\sum_0^\infty \gamma_m P_m(x)$ een approximatie

$$G(x) = \sum_0^\infty \gamma_m \int_{-\infty}^{x} P_m(x)\, dF(x)$$

en, als $dF(x) = f(x)\,dx$ en $dG(x) = g(x)\,dx$ is,

$$G(x) = \sum_0^\infty \gamma_m P_m(x) f(x)$$

corresponderen, waarbij $\gamma_m = \int P_m(x)\gamma(x)\, dF(x) = \int P_m(x)\, dG(x)$ is. Aan deze reeksontwikkeling zijn analoge bezwaren verbonden als reeds vroeger vermeld, t.w. zij behoeft niet te convergeren, en àls zij convergent is niet G(x) tot limiet te hebben; breekt men de reeks na n termen af, dan ontstaat een fct die niet noodzakelijk monotoon behoeft te zijn (dus niet noodzakelijk een wh-verdeling behoeft te bepalen). In het bijzonder is zeker geen approximatie te verwachten als G(x) b.v. de verdelingsfct van een monster uit een continue verdeling F(x) voorstelt, daar dan $\gamma(x)$ al niet bestaat.

Toch vermag een eindig beginstuk van de reeks voor G(x) soms wel een globaal beeld van deze fct te geven, al is niet bekend, onder welke voorwaarden en in welke precieze zin dit het geval zal zijn. Om deze reden wordt een dergelijke ontwikkeling met behulp van orthonormale veel/termen herhaaldelijk toegepast.

Opmerking: de verschillende aan $g(x)$ opgelegde voorwaarden gaan in andere over, als we in plaats van polynomen een andere klasse van fcts voor deze ontwikkeling gebruiken.

Voorbeelden:

a. Bij de normale verdeling $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ behoren de orthonormale polynomia

$$P_m(x) = \frac{H_m(x)}{\sqrt{m!}}$$

Vgl. § 4, 1 pag. 167 (Whr 256) en 170 (Whr 259).

$H_m(x)$ zijn de veeltermen van Hermite.

b. Bij de homogene verdeling tussen -1 en +1 behoren de orthonormale polynomia $P_m(x)\sqrt{\frac{2m+1}{2}}$, wanneer $P_m(x)$ de veeltermen van A.M. Legendre (1785), ook wel (zonale) bolfuncties genaamd, voorstellen:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n =$$

$$= \frac{1}{2^n\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{[\frac{1}{2}n]} (-1)^j \frac{(n-\frac{1}{2}-j)!}{j!(n-2j)!} (2x)^{n-2j} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{[\frac{1}{2}n]} (-1)^j \frac{(2n-2j)!}{j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j}$$

Speciaal: $P_1(x) = x$; $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$; $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$;

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$; $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$;

$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$

Deze polynomia moeten nog met $\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}, \ldots\ldots, \sqrt{\frac{13}{2}}$ vermenigvuldigd worden om genormaliseerd te zijn. Zij worden verkregen met behulp van de voortbrengende fct

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\, t^l$$

en voldoen aan de differentiaalvgl

$$(x^2-1)P_m''(x) + 2x\,P_m'(x) - m(m+1)P_m(x) = 0$$

aan de differentievgl

$$(m+1)P_{m+1}(x) - 2x(m+\tfrac{1}{2})P_m(x) + m\,P_{m-1}(x) = 0$$

en aan de differentie-differentiaalvgl.

$$\frac{x^2+1}{m+1} P_m'(x) + x P_m(x) = P_{m+1}(x)$$

Terwijl nog $P_m(-x) = (-1)^m P_m(x)$ is (zoals bij de orthogonale polynomia die bij een willekeurige symmetrische verdeling behoren eveneens het geval is).

c. Bij de verdeling van Laplace $f(x) = e^{-x}$ $(x>0)$ behoren de veeltermen van E. Laguerre (1879):

$$L_n(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n e^{-x} = \sum_0^n{}_k (-1)^{n-k} \frac{n^{!k}\, n^{!k}}{k!} x^{n-k} =$$

$$= (-1)^n \left\{ x^n - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2^2} x^{n-2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{3!} x^{n-3} + \dots\dots + (-1)^n n! \right\}$$

De polynomia $\frac{L_n(x)}{n!}$ zijn orthonormaal.

Speciaal is: $L_0(x) = 1$; $L_1(x) = -1+x$; $L_2(x) = x^2-4x+2$; $L_3(x) = -x^3+9x^2-18x+6$;

$L_4(x) = x^4-16x^3+72x^2-96x+24$; $L_5(x) = -x^5+25x^4-200x^3+600x^2-300x+120$;

$L_6(x) = x^6-36x^5+450x^4-2400x^3+7200x^2-4320x+720$

Hun voortbrengende fct is

$$\frac{e^{-x\frac{t}{1-t}}}{1-t} = \sum_0^\infty{}_n L_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

de differentiaal-, differentie- en differentie-differentiaalvgln zijn resp.

$$x L_n''(x) + (1-x) L_n'(x) + n L_n(x) = 0$$

$$L_{n+1}(x) - (2n+1-x) L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0$$

$$x L_n'(x) - n L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0$$

d. De bij de verdeling van Poisson $f(x) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^x}{x!}$ behorende orthogonale polynomen zijn, zoals in de vorige paragraaf is bewezen, de polynomen van Kummer:

$$K_x^{(m)}\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = \sum_0^m{}_k \frac{m^{!k}\, x^{!k}}{k!} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^k$$

Hun voortbrengende fct is

$$\sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{t^m}{m!} K_x^{(m)}\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = \sum_{0}^{\infty}{}_m \sum_{0}^{m}{}_j \binom{x}{j} \frac{t^m}{(m-j)!}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^j =$$

$$= \sum_{0}^{\infty}{}_j \sum_{j}^{\infty}{}_m \binom{x}{j} \frac{t^m}{(m-j)!}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^j = e^{-t} \sum_{0}^{\infty}{}_j \binom{x}{j}\left(-\frac{t}{\alpha}\right)^j =$$

$$= e^{-t}\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)^x$$

We kunnen deze bij de verdeling van Poisson behorende orthonormale polynomen ook verkrijgen door ze naar factoriële in plaats van naar gewone machten van x te ontwikkelen:

$$P_m(x) = \sum_{0}^{m}{}_k P_{mk}\, x^{!k}$$

We maken dan gebruik van de door volledige inductie naar h of k te bewijzen identiteit

$$x^{!h} = \sum_j \binom{k}{j} h^{!j} (x-k)^{!(h-j)}$$

waarvoor we ook kunnen schrijven

$$x^{!h}\, x^{!k} = \sum_j \frac{k^{!j} h^{!j}}{j!} x^{!(k+h-j)}$$

We weten reeds (pag. 87 Whr 176) dat bij de verdeling van Poisson $\mu_{!k} = \alpha^k$ is. De orthogonaliteitsvoorwaarde luidt voor $h \leq m-1$:

$$\int x^{!h} P_m(x)\, dF(x) = 0$$

Nu is

$$\int x^{!h} x^{!k}\, dF(x) = e^{-\alpha} \sum_{0}^{\infty}{}_x x^{!h} x^{!k} \frac{\alpha^x}{x!} =$$

$$= e^{-\alpha} \sum_{0}^{k}{}_j \frac{k^{!j} h^{!j}}{j!} \sum_{0}^{\infty}{}_x \frac{\alpha^x}{x!} x^{!(h+k-j)} = e^{-\alpha} \sum_{0}^{k}{}_j \frac{k^{!j} h^{!j}}{j!} \alpha^{h+k-j}, \text{ stel } = e^{-\alpha} \Lambda_{k,h}(\alpha)$$

Nu geldt voor de veeltermen van Laguerre volgens punt c:

$$L_n(x) = \sum_{0}^{n}{}_j \frac{n^{!j} n^{!j}}{j!} (-x)^{n-j} \quad , \text{ dus is:}$$

$$L_n^{(r)}(x) = \frac{d^r}{dx^r} L_n(x) = (-1)^r \sum_{0}^{n-r}{}_j \frac{n^{!j} n^{!(j+r)}}{j!} (-x)^{n-j-r} =$$

$$= (-1)^r \sum_{0}^{n-r}{}_j \frac{n^{!(n-r-j)} n^{!(n-j)}}{(n-r-j)!} (-x)^j = (-1)^r L_{n-r}^{\{r\}}(x)$$

waarin $L_n^{\{\alpha\}}(x)$ het op pag. 175 (Whr 266) ingevoerde gegeneraliseerde polynomium (van de graad n) van Laguerre is.
Dus

$$\Lambda_{k,h}(\alpha) = \Lambda_{h,k}(\alpha) = \sum_{0}^{\infty} \frac{k^{!j} h^{!j}}{j!} \alpha^{k+h-j} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{h!(-1)^{k-h}}{k!} L_k^{(k-h)}(-\alpha) \cdot \alpha^k & \text{als } k \geq h \\[2ex] \dfrac{k!(-1)^{h-k}}{h!} L_h^{(h-k)}(-\alpha) \cdot \alpha^h & \text{als } h \geq k \end{cases}$$

Deze polynomen laten zich dus in de afgeleiden van de veeltermen van Laguerre uitdrukken, waarbij evenwel de symmetrie verloren gaat. We hebben nu

$$\sum_{0}^{m} {}_k\, T_{mk} \Lambda_{k,h}(\alpha) = 0 \qquad (0 \leq h \leq m-1)$$

waaruit volgt, dat

$$P_m(x) = C \begin{vmatrix} 1 & \Lambda_{01}(\alpha) & \cdots\cdots & \Lambda_{0m}(\alpha) \\ \Lambda_{10}(\alpha) & \Lambda_{11}(\alpha) & \cdots\cdots & \Lambda_{1m}(\alpha) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Lambda_{m-1,0}(\alpha) & \Lambda_{m-1,1}(\alpha) & \cdots\cdots & \Lambda_{m-1,m}(\alpha) \\ 1 & x & & x^{!m} \end{vmatrix}$$

met $C = (\Delta_m \Delta_{m-1})^{-\frac{1}{2}}$, waarbij Δ_{m-1} de minor van $x^{!m}$ in bovenstaande determinant is.

e. Bij de Γ-verdeling $f(x) :: e^{-x} x^{\alpha}$ $(0 \leq x \leq 1)$ behoren de <u>gegeneraliseerde</u> veeltermen van <u>Laguerre</u>

$$L_n^{\{\alpha\}}(x) = \frac{e^x}{x^{\alpha} n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x} x^{n+\alpha}) =$$

$$= \sum_{0}^{n} {}_k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}$$

Na deling door $\left\{\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}\right\}^{\frac{1}{2}}$ zijn deze polynomen orthonormaal. Voor $\alpha = 0$ krijgt men de in punt c genoemde polynomen; Laguerre beschouwde alleen dit geval.

We hebben:

$$L_0^{\{\alpha\}}(x)=1\ ;\ L_1^{\{\alpha\}}(x)=-x+\alpha+1\ ;\ L_2^{\{\alpha\}}(x)=\tfrac{1}{2}x^2-(\alpha+2)x+\tfrac{1}{2}(\alpha+2)^{!2}\ ;$$

$$L_3^{\{\alpha\}}(x)=-\tfrac{1}{6}x^3+\frac{\alpha+3}{2}-\frac{(\alpha+3)^{!2}}{2}x+\frac{(\alpha+3)^{!3}}{6}\ ;$$

$$L_4^{\{\alpha\}}(x)=\tfrac{1}{24}x^4-\frac{\alpha+4}{6}x^3+\frac{(\alpha+4)^{!2}}{4}x^2-\frac{(\alpha+4)^{!3}}{6}x+\frac{(\alpha+4)^{!4}}{24}\ ;$$

$$L_5^{\{\alpha\}}(x)=-\tfrac{1}{120}x^5+\frac{\alpha+5}{24}x^4-\frac{(\alpha+5)^{!2}}{12}+\frac{(\alpha+5)^{!3}}{12}x^2-\frac{(\alpha+5)^{!4}}{24}x+\frac{(\alpha+5)^{!5}}{120}\ ;$$

$$L_6^{\{\alpha\}}(x)=\tfrac{1}{720}x^6-\frac{\alpha+6}{120}x^5+\frac{(\alpha+6)^{!2}}{48}x^4-\frac{(\alpha+6)^{!3}}{36}x^3+\frac{(\alpha+6)^{!4}}{48}x^2-\frac{(\alpha+6)^{!5}}{120}x+\frac{(\alpha+6)^{!6}}{720}$$

De voortbrengende fct wordt nu:

$$(1-t)^{-\alpha-1}e^{-\frac{tx}{1-t}}=\sum_0^\infty{}_h\, L_h^{\{\alpha\}}(x)\,t^h$$

Verder gelden de volgende betrekkingen:

$$n L_n^{\{\alpha\}}(x)=(-x+2n+\alpha-1)L_{n-1}^{\{\alpha\}}(x)-(n+\alpha-1)L_{n-2}^{\{\alpha\}}(x)\ ;$$

$$L_n^{\{\alpha\}}(x)=\binom{n+\alpha}{n}\lim_{\beta\to 0}F\left(-n,\beta;\alpha+1;\frac{x}{\beta}\right)$$

(waarin F de hypergeometrische fct is) en

$$\frac{d}{dx}L_n^{\{\alpha\}}(x)=-L_{n-1}^{\{\alpha+1\}}(x)$$

f. Bij de B -verdeling, naar het interval $-1<x<1$ getransformeerd

$$f(x)=\frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}B(\alpha+1,\beta+1)}(1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}$$

behoren (behoudens een normalisatiefactor $\binom{n+\alpha}{n}$) de veeltermen van C.G.J. Jacobi (1859), die door hypergeometrische fcts kunnen worden voorgesteld:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=F\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right)=$$

$$=\sum_0^n{}_j\,\frac{n^{!j}(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)\cdots\cdots(n+\alpha+\beta+j)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots\cdots(\alpha+j)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^j$$

g. Bij de verdeling van Bernoulli $f(x)=\binom{N}{x}p^x q^{N-x}$ $(p+q=1)$ behoren de orthonormale polynomen van M. Krawtchouk (1929):

$$p_n(x)=\binom{N}{n}^{-\frac{1}{2}}(pq)^{-n/2}\sum_0^n{}_j\,(-1)^{n-j}\binom{N-x}{n-j}\binom{x}{j}p^{n-j}q^j \qquad (n=1,\ldots\ldots,N)$$

Hiervoor geldt: $\lim\limits_{N\to\infty} p_n(x) = (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} H_n(z)$

met $x = [pN + z(2pqN)^{1/2}]$

en indien $\lim\limits_{N\to\infty} pN = \alpha$ geldt: $\lim\limits_{N\to\infty} p_n(x) = \dfrac{(-1)^n \alpha^{n/2}}{\sqrt{n!}} K_x^{(n)}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$

overeenkomende met de limietovergang van de verdeling van Bernoulli naar de normale verdeling resp. de verdeling van Poisson. De voortbrengende functie is:

$$(1+qt)^x (1-pt)^{N-x} = \sum_0^N {}_n \left\{\binom{N}{n}\right\}^{1/2} (pq)^{n/2} p_n(x) t^n$$

Men heeft

$$p_0(x) = 1 \; ; \; p_1(x) = x - Np \; ; \; p_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2(1-N)p-1}{2}x + \frac{N(N-1)}{2}p^2 \; ;$$

$$p_3(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{(2-N)p-1}{2}x^2 + \frac{(3N^2-9N+2)p^2+(3N-2)p+2}{6}x - \frac{N(N-1)(N-2)}{6}p^3 .$$

35. Meerdimensionale verdelingen. Pro memorie.

W

A

MATHEMATISCH CENTRUM

2e Boerhaavestraat 49

AMSTERDAM

Statistische Afdeling

Capita Selecta

Hoofdstuk IV

Monster- en toetsingstheorie

door

Prof.Dr.D.van Dantzig

pag.283-327

Hoofdstuk 4. Monster- en toetsingstheorie.

§ 1. Maximum Likelihood.

1. Het rechtstreekse probleem. Gegeven zij een vz ("populatie") van evn (eventualiteiten). (Elk daarvan kan uit een reeks of andere vz van eenvoudiger eventualiteiten bestaan). Op deze vz zijn 1 of meer kategorische systemen van kenmerken gegeven. Van elke combinatie dezer kenmerken zij de frequentie bekend. Men wenst de fqn van 1 of meer kenmerkcombinaties te kennen op een deelvz, die 1 of meer gegeven eigenschappen bezit (b.v. gegeven uitgebreidheid, gegeven fq voor 1 of meer andere kenmerkcombinaties).

Dit vraagstuk is in strikte zin alleen door rechtstreekse waarneming oplosbaar. Langs mathematische weg kan men alleen iets bereiken , als men de deelvzn aan zekere permutabiliteitseisen onderwerpt. B.v. de permutabiliteitseis, die het gevolg is van willekeurige permutabiliteit van alle eln der gegeven vz (die dan een collectie genoemd wordt, vgl. pag. 6). Daarbij zijn alle deelvzn van eenzelfde uitgebreidheid permutabel. (Het kan echter ook b.v. voorkomen, dat de gegeven vz uit 2 of meer collecties bestaat e.d.). De deelvz is dan een eigenlijke steekproef (cf "monster"); de oplossing van het vraagstuk wordt dan volgens hoofdst. III § 1, punt 5 (p. 89, Whr 178 e.v.) gevonden: men kan niet de fqn der gezochte kenmerkcombinaties zelf berekenen, maar wel de fqn ("whn" genoemd), waarmede deze fqn in de collectie van alle monsters met de gegeven eigenschappen voorkomen. In verband met zuiver wiskundige moeilijkheden wordt doorgaans de berekening voor eigenlijke monsters door die voor oneigenlijke (Bernoulliaanse, vgl. pag. 15 e.v.) vervangen d.w.z. men verwaarloost grootheden die tot nul naderen als de uitgebreidheid der collectie onbepaald toeneemt.

We beschouwen nu de ev "een te nemen monster zal bepaalde kenmerkcombinaties met bepaalde fqn vertonen". Voor elk dezer evn is volgens het voorgaande een wh berekend op grond van zekere permutabiliteits- (en/of onafhankelijkheids-) eisen. Deze evn vormen dus volgens pag. 27 (vgl. pag. 23 e.v.) een wh-veld. Nog altijd is daaruit echter geen enkele empirische uitspraak omtrent een bepaald te nemen experiment af te leiden. Dit kan in het geheel niet geschieden in de vorm van een uitspraak, inhoudende dat bepaalde verschijnselen "zullen" optreden, maar alleen in de som van een gedraggsregel voor menselijk handelen, die we in de vorm van een definitie kunnen geven: iemand wordt gezegd "in overeenstemming met de whr" te handelen, indien hij bij zijn pogingen een bepaald doel te bereiken vooraf slechts rekening houdt met evn, waarvan een wh gevonden is die minstens een bepaalde kleine waarde δ bezit. Hoe klein deze wh δ is, valt niet in het algemeen te zeggen. Deze waarde hangt o.a. af van karaktereigenschappen van de betrokken persoon en van de waarde die hij aan het bereiken van zijn doel toekent. We kunnen deze definitie in een axioma omzetten, door verder alleen rekening te houden met gevallen, waarin volgens deze gedragsregel gehandeld wordt.

(In de filosofische literatuur over de whr treedt een onderscheiding, overeenkomend met het niet dan al zich beperken tot gevallen, waarin volgens genoemde gedragsregel gehandeld wordt, op in de formulering van het verschil tussen "werkelijke" en "redelijke" verwachting van de betrokken persoon aangaande het gebeuren der ev).

De hier bedoelde grootheid δ is doorgaans zéér veel kleiner dan de in de statistiek gebruikte onbetrouwbaarheidsgrens ("level of significance"), ε , waarvoor meestal b.v. 0,01, 0,02 of 0,05 gekozen wordt. Zij hangt daarmede als volgt samen. In plaats van één enkele ev (i.c. het bezitten van bepaalde fqn van een bepaald te nemen monster), die dus zèlf al een deelcollectie van eenvoudiger evn was, beschouwt men daarvan een groot aantal n. Voor sommige daarvan zal later blijken, dat zij op grond van een bepaalde keuze van ε (b.v. 0,05) niet-verwacht en toch gebeurd zijn. De in de loop van de tijd werkelijk optredende reeks van te nemen monsters wordt nu als el emei nieuwe collectie beschouwd, bestaande uit alle eventuele reeksen die zouden kunnen optreden. Men kiest nu ε zodanig, dat in deze nieuwe collectie de reeksen waarbij onder m niet-verwachte resultaten meer dan $\varepsilon' m$ toch zouden gebeuren met een fq $\leq \delta$ voorkomen. Daarbij is ε' een getal dat strikt genomen iets groter is dan de onbetrouwbaarheidsgrens, maar in verband met de veelvuldige toepassingen, dus de grote waarden van n, daaraan gelijkgesteld kan worden. Keuze van een onbetrouwbaarheidsgrens ε betekent dus: geen rekening houden met de eventualiteit dat in een fractie van het aantal toepassingen die noemenswaard groter dan ε is, een niet-verwacht resultaat toch zal gebeuren.

2. Het indirecte probleem. Methode van Bayes-Laplace. We keren nu terug tot de uitgangscollectie, waaruit een monster genomen wordt. Als de fqn der kenmerkcombinaties in de uitgangscollectie (die we Γ noemen) bekend zijn, kan de wh van een stelsel fqn in het te nemen monster (dat we met Σ aanduiden) berekend worden. Veelal echter zijn de fqn in Γ niet bekend, en worden van een werkelijk genomen monster de fqn waargenomen. De vraag is dan, wat omtrent de fqn in Γ gezegd kan worden. Zuiver deductief niets dat niet triviaal is (zoals b.v. dat een fq in Γ niet $= 0$ kan zijn als het in Σ > 0 is, Γ eindig ondersteld).

Alvorens deze vraag nader te bespreken, zullen we ze in algemenen vorm stellen. In plaats van de aan een monster waar te nemen fqn beschouwen we algemener een eventueel waarnemingsresultaat $\mathcal{W}$, bestaande uit een aantal getallen, die van experiment tot experiment kunnen variëren. Het kan ook voorkomen, dat qualitatieve waarnemingen optreden, waarbij iedere waar te nemen qualiteit een eindig kategorisch systeem (b.v. k verschillende kleuren) doorloopt. Door de kenmerken van zulk een systeem te nummeren, en de waargenomen qualiteit door haar nummer te vervangen , is dit geval tot dat van de quantitatieve waarnemingen terug te brengen. Er behoeft dus niet afzonderlijk rekening mee gehouden te worden.

We onderstellen verder, dat op grond van bepaalde onderstellingen van elk waarnemingsresultaat $\mathcal{W}$ (van een bepaalde soort, onder bepaalde omstandigheden) een wh kan worden berekend. Deze onderstellingen vallen in twee groepen uiteen: 1° algemene, b.v. permutabiliteits- of onafhankelijkheidseisen, 2° bijzondere, en wel a) speciale aard van bepaalde fcts en b) speciale waarden van bepaalde in deze fcts nog optredende parameters. Bij de meeste toepassingen worden de algemene onderstellingen en ook de onder 2° a) genoemde bijzondere zonder voorbehoud aanvaard, terwijl men de onder 2° b) genoemde ter discussie stelt. En wel tracht men bij het inverse probleem iets omtrent de waarden dezer parameters uit het waarnemingsresultaat $\mathcal{W}$ af te leiden. Zodra men de onder 1° of 2° a) genoemde onderstellingen ter discussie stelt doet men dit, door een deel ervan in de vorm 2° b) te doen overgaan. (Wil men b.v. een onafhankelijkheidseis laten vallen, dan laat men een bepaald type van afhankelijkheid toe, door 1 of meer parameters bepaald, die b.v. in het geval van onafhankelijkheid de waarde 0 aannemen. Daarbij treedt een overgang als in punt 1 genoemd op, waarbij een nieuwe collectie gevormd wordt, welker eln b.v. oude collecties of vzn of deelvzn daarvan zijn.(Daardoor blijven ook daar - weliswaar gegeneraliseerde - algemene onderstellingen bestaan). We laten nu verder de onder 1° en 2° a) genoemde "vaste" onderstellingen onvermeld en duiden de onder 2° b) genoemde "variabele" (of "parametrische") onderstellingen tezamen met $\mathcal{H}$ ("hypothesen") aan.

Voor iedere specificatie $\mathcal{H}_0$ van $\mathcal{H}$ is dus volgens de onderstelling voor elk waarnemingsresultaat $\mathcal{W}$ een wh gedefinieerd, die gewoonlijk door $P[\mathcal{W} \mid \mathcal{H}_0]$ aangeduid wordt.[1]). Het inverse probleem in zijn algemene vorm luidt nu: als een bepaald waarnemingsresultaat $\mathcal{W}_0$ gegeven is zonder dat een specificatie $\mathcal{H}_0$ van $\mathcal{H}$ bekend is, iets omtrent de mogelijke specificatie $\mathcal{H}_0$ van $\mathcal{H}$ te zeggen.

De methode van Bayes-Laplace komt nu op de onderstelling, dat ook bij gebreke van waarnemingsmateriaal iedere eventualiteit een bepaald wh bezit. In casu wordt dit toegepast op de ev dat een bepaalde specialisering $\mathcal{H}_0$ der hypothesen zal blijken waar te zijn. Deze wh $P[\mathcal{H}_0]$ wordt de wh **a priori** van $\mathcal{H}_0$ genoemd. Men heeft dan:

$$P[\mathcal{W} \text{ en } \mathcal{H}_0] = P[\mathcal{H}_0]\, P[\mathcal{W} \mid \mathcal{H}_0]$$

maar ook

$$P[\mathcal{W} \text{ en } \mathcal{H}_0] = P[\mathcal{W}]\, P[\mathcal{H}_0 \mid \mathcal{W}]$$

waarin $P[\mathcal{H}_0 \mid \mathcal{W}]$ de zgn. wh a postriori van $\mathcal{H}_0$, de voorwaardelijke wh van $\mathcal{H}_0$ onder de voorwaarde $\mathcal{W}$ is. Derhalve is dus

$$P[\mathcal{H}_0 \mid \mathcal{W}] = \frac{P[\mathcal{H}_0]\, P[\mathcal{W} \mid \mathcal{H}_0]}{P[\mathcal{W}]}$$

Daarbij kan $P[\mathcal{W}]$ nog door

$$P[\mathcal{W}] = \sum_{\mathcal{H}} P[\mathcal{H}]\, P[\mathcal{W} \mid \mathcal{H}]$$

bepaald worden, daar alle hypothesen volgens onderstelling een kategorisch systeem vormen. (Indien $\mathcal{H}$ continu van één of meer parameters afhangt, moet de som door een integraal vervangen worden).

Hierin treden echter de onbekende whn $P[\mathcal{H}]$ op. Om deze te elimineren onderstelt Laplace, dat als geen gegevens aanwezig zijn, alle hypothesen gelijke whn bezitten ("indifferentie-principe"). Deze onderstelling is echter op niets gebaseerd. Zodra men de whr een empirische basis wil geven, moet men deze onderstelling interpreteren als: alle hypothesen zijn even vaak waar. Dit is echter in het algemeen aller-

[1]) Deze notatie is typografisch boven de vroeger door ons gebruikte $P[\mathcal{W}_{\mathcal{H}}]$ te verkiezen.

minst het geval. Eliminatie van $P[\mathcal{H}]$ op grond van het indifferentieprincipe is dus niet mogelijk. Wel kan men volgens R. von Mises in bepaalde gevallen asymptotisch voor grote monsteruitgebreidheden de $P[\mathcal{H}]$ elimineren. Tot empirisch toetsbare resultaten schijnt dit echter niet te kunnen leiden.

De methode van Bayes-Laplace, die reeds in 1842 door J. Fries aangevochten, en vooral door R.A. Fisher (1922) grondig gekritiseerd is, wordt desondanks soms nog gebruikt, b.v. door H. Jeffreys (1941). Wij zullen dit echter niet doen.

3. <u>Maximum likelihood</u>.

Indien men bij de methode van Bayes-Laplace de whn a priori $P[\mathcal{H}]$ zou kennen, zou iedere hypothese $\mathcal{H}$ op grond van $\mathcal{W}$ een bepaalde wh $P[\mathcal{H}|\mathcal{W}]$ bezitten. Men zou dan bij gegeven $\mathcal{W}$ de <u>waarschijnlijkste</u> hypothese $\mathcal{H}_0$ kunnen bepalen, d.i. degene waarvoor $P[\mathcal{H}_0|\mathcal{W}]$ maximaal is, dus $P[\mathcal{H}_0|\mathcal{W}] \geq P[\mathcal{H}|\mathcal{W}]$ voor iedere (toegelaten) $\mathcal{H}$.

Daar het resultaat evenwel van de onbekende whn $P[\mathcal{H}]$ afhangt heeft R.A. Fisher[1]) in 1922 een methode aangegeven, om op andere wijze <u>zonder onbekende whn $P[\mathcal{H}]$ in te voeren</u> bij iedere $\mathcal{W}$ een $\mathcal{H}$ te bepalen, die, zoal niet de waarschijnlijkste, dan toch in andere zin als "de beste" kan gelden. Hij vervangt daartoe de uitdrukking

'de wh van $\mathcal{W}$ indien $\mathcal{H}$ waar is'

door de uitdrukking

'de aannemelijkheid van $\mathcal{H}$ indien $\mathcal{W}$ waargenomen is',

d.w.z. hij definieert laatstgenoemde uitdrukking door de eerstgenoemde. Hij beschouwt nu die hypothese als "de beste" waarvoor deze "aannemelijkheid" (likelihood) zo groot mogelijk is. Duiden we deze met $\hat{\mathcal{H}}$ aan, dan is dus

$$P[\mathcal{W}|\hat{\mathcal{H}}] \geq P[\mathcal{W}|\mathcal{H}] \qquad (1)$$

voor iedere toegelaten $\mathcal{H}$. Anders gezegd: de aannemelijkste hypothese is diegene, die het gegeven waarnemingsmateriaal met de grootst mogelijke wh voortbrengt (d.w.z. met grotere wh dan iedere andere hypothese). Het is nodig op te merken, dat de aannemelijkheid van $\mathcal{H}$ indien $\mathcal{W}$ waargenomen is niet als een <u>wh</u> van $\mathcal{H}$ onder voorwaarde $\mathcal{W}$ te beschouwen is,

---

1) R.A. Fisher, On the mathematical foundations of theoretical statistics, Philosophical Transactions of the Royal Society A <u>222</u>, p. 309 - 368, 1922.

daar niet aan de hoofdeigenschappen der whn (zie pag. 14 en 15), b.v. de additiviteit voldaan is. Daarom heeft Fisher een nieuwe term "likelihood" (= 'aannemelijkheid') ter onderscheiding van "probability" (="wh") ingevoerd.

We beschouwen nu het geval, dat de eventuele waarnemingsresultaten beschreven worden door n stochastische variabelen $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$, die voor een speciaal waarnemingsresultaat de waarden $x_1, \ldots, x_n$ ~~aannemen,~~ en de toegelaten hypothesen door m parameters $\theta_1, \ldots, \theta_m$, die voor een speciale hypothese b.v. de waarden $\theta_{1,0}, \ldots, \theta_{m,0}$ aannemen. Dan is

$$P[\mathcal{W}|\mathcal{H}] = P[\underline{x}_1 = x_1 \text{ en} \ldots\ldots \text{en } \underline{x}_n = x_n | \theta_1 = \theta_{1,0} \text{ en} \ldots\ldots \text{en } \theta_m = \theta_{m,0}]$$

Het rechterlid korten we af door $P[x_1, \ldots\ldots, x_n | \theta_{10}, \ldots\ldots, \theta_{m0}]$
Zijn $\hat{\theta}_j$ de aannemelijkste parameterwaarden (j = 1,...,m), dan geldt bij definitie:

$$(2) \qquad P[x_1, \ldots\ldots, x_n | \hat{\theta}_1, \ldots\ldots, \hat{\theta}_m] \geq P[x_1, \ldots\ldots, x_n | \theta_1, \ldots\ldots \theta_m]$$

voor alle toegelaten $\theta_1, \ldots\ldots, \theta_m$. Indien de aannemelijkste parameterwaarden $\hat{\theta}_j$ door dit maximum-probleem bij gegeven x_i $(1 \leq i \leq n)$ ondubbelzinnig bepaald zijn, worden zij dus als eenwaardige fcts der x_i verkregen, die we door $t_j(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ voorstellen:

$$(3) \qquad \hat{\theta}_j = t_j(x_1, \ldots\ldots, x_n) \qquad (1 \leq j \leq m)$$

De rechterleden van (3) zijn fcts, die uitsluitend van de waargenomen grootheden x_i, niet van de onbekende parameters θ_j afhangen. We noemen zulke grootheden: statistische grootheden (Engels: statistics). Zij zijn ook stochastische grootheden: $\underline{t}_j = t_j(\underline{x}_1, \ldots\ldots, \underline{x}_n)$ wier verdelingsfct echter wel van de θ_j afhangt (d.w.z. eerst als de parameterwaarden θ_j gegeven zijn, bezitten de $\underline{t}_j(\underline{x}_i)$ een verdelingsfct en worden zij dus stochastische grootheden).

~~Indien de~~ stochastische variabelen $\underline{x}_i$ continu verdeeld zijn, zijn de $\hat{\theta}_j$ zeker niet door het maximum-probleem en de vorm waarin het tot dusverre gegeven is bepaald. Immers dan is de wh dat $\underline{x}_i$ de preciese waarden x_i aannemen altijd = 0, zodat het "maximum-probleem" (2) de vorm $0 \geq 0$ aanneemt.

Inderdaad leert de waarneming dan ook niet dat $\underline{x}_i = x_i$ is, maar slechts dat de x_i behoudens de waarnemingsonzekerheden $= x_i$ is. Beschouwt men $x_1, \ldots\ldots, x_n$ als coördinaten van een punt x ener n-dimensionale ruimte, de waarnemings(resultaten)-ruimte R_n, dan zijn $\underline{x}_1, \ldots\ldots, \underline{x}_n$ de coördinaten van een "stochastisch punt $\underline{x}$ " van deze ruimte, en niet de wh van $\underline{x} = x$, maar wel de wh dat $\underline{x}$ en een bepaald gebied $\mathcal{G}$ dezer ruimte ligt - hetgeen we door het symbool $\underline{x} \in \mathcal{G}$ aanduiden; $\in$ wordt gelezen als "ligt" in, of "behoort tot" - heeft een positieve wh. In casu kan men voor $\mathcal{G}$ een klein parallelotoop nemen, t.w. $x_1-\delta_1<\underline{x}_1<x_1+\delta_1, \ldots\ldots, x_n-\delta_n<\underline{x}_n<x_n+\delta_n$, waarin $\delta_1,\ldots,\delta_n$ de meet-onzekerheden aangeven. Korter geschreven: $|\underline{x}_i - x_i| < \delta_i$

Zoals steeds bij continue verdelingen veronderstellen we ook hier, dat de whn door een wh-dichtheid bepaald kunnen worden, welker logarithme gewoonlijk door $L(x_1,\ldots,x_n|\theta_1,\ldots,\theta_m)$ of korter door $L(x_1,\ldots,x_n|\theta_j)$ of door $L(x_i|\theta_j)$ voorgesteld wordt. In plaats van (2) krijgen we nu:

(2') $$P[\underline{x}\in\mathcal{G}\,|\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_m] \geqq P[\underline{x}\in\mathcal{G}\,|\theta_1,\ldots,\theta_m]$$

waarvoor we kunnen schrijven

(4) $$\int_{\mathcal{G}}\!\!\cdots\!\int e^{L(x_1,\ldots,x_n|\hat{\theta}_j)}\,dx_1\ldots dx_n \geqq \int_{\mathcal{G}}\!\!\cdots\!\int e^{L(x_1,\ldots,x_n)|\theta_j)}$$

Hiertoe is voldoende dat

(5) $$L(x_1,\ldots,x_n|\hat{\theta}_j) \geqq L(x_1,\ldots,x_n|\theta_j)$$

is voor alle θ_j en alle x_i . Dit maximum-probleem treedt nu in de plaats van (2), en heeft in vele gevallen een ondubbelzinnig bepaalde oplossing van de vorm (3), gedefinieerd voor alle $\underline{x}$ in het gebied der ruimte R_n waar de wh-dichtheid >0 is. We zullen ons verder tot dit gebied beperken, en aannemen, dat (5) in de vorm (3) oplosbaar is met eenwaardige t_j .

Indien - naar we verder onderstellen - $L(x_i|\theta_j)$ continu en 2 maal continu differentieerbaar van de parameter θ_j afhangt, voldoet de aannemelijkste schatting $\hat{\theta}_j$ aan de betrekkingen

(6) $$\frac{\partial L}{\partial \theta_j} = 0 \qquad (1 \leqq j \leqq n) \quad \text{voor } \theta_j = \hat{\theta}_j$$

terwijl de quadratische vorm

$$\sum_1^m{}_j \sum_1^m{}_k \;\xi_j \xi_k \frac{\partial^2 L}{\partial\theta_j \partial\theta_k}$$

voor $\theta_j = \hat{\theta}_j$ negatief definiet moet zijn (d.w.z. <0 voor alle reële $\xi_1,\ldots\ldots,\xi_m$ uitgezonderd $\xi_1 = \ldots\ldots = \xi_m = 0$).

5. Hoofdeigenschappen der aannemelijkste schatting bij grote monsters.

We onderstellen nu verder, dat $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ onderling onafhankelijke stochastische grootheden zijn, alle met dezelfde verdelingsfct. Voorts dat deze een verdelingsdichtheid $f(x|\theta)$ bezit, die van één onbekende parameter θ afhangt. Volkomen analoge resultaten als hier zullen worden afgeleid blijven gelden 1° als er meer dan één onbekende parameter optreedt 2° als $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ uit $\frac{1}{2}n$ onafhankelijke paren, $\frac{1}{3}n$ onafhankelijke tripels, algemeen n/h onafhankelijke h-tallen stochastische grootheden bestaat, waarbij elk h-tal een zelfde verdelingsdichtheid bezit. We onderstellen, dat θ willekeurige waarden uit een interval kan aannemen, ("toegelaten parameterwaarden"); $f(x|\theta)$ is dan > 0 voor alle x uit een of meer intervallen, die nog van θ kunnen afhangen. Indien dit laatste het geval is, onderstellen we echter dat $f(x|\theta)$ in de eindpunten van voldoend hoge graad 0 wordt, op-dat deze interval-eindpunten geen bijdrage geven tot de voorkomende integralen.

Dan is

$$L(x_1, \ldots, x_n|\theta) = \ln f(x_1|\theta) + \ldots + \ln f(x_n|\theta)$$

of, als we

$$(7) \qquad \varphi(x, \theta) = \ln f(x|\theta)$$

stellen (voor alle x waarvoor $f > 0$ is, en alleen deze beschouwen we):

$$(8) \qquad L(x_1, \ldots, x_n|\theta) = \sum_1^n \varphi(x_i, \theta)$$

De aannemelijkste schatting wordt nu gevonden uit

$$\left.\begin{array}{ll} (9) & \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ (10) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0 \end{array}\right\} \text{ voor } \theta = \hat{\theta}$$

(waarbij we, zo er meerdere oplossingen zijn het absolute maximum moeten kiezen). Volgens Fisher heeft zij enkele belangrijke eigenschappen, die we thans zullen formuleren en bewijzen (Fisher's eigen "bewijzen" zijn onexact).

We beschouwen daartoe algemeen een rij van statistische grootheden $u_n(x_1, \ldots, x_n)$, die elk op grond van de verdeling der $\underline{x}_i$ voor iedere (toegelaten) θ een verdelingsfct bezitten. We zullen doorgaans[*] regulier zijn, d.w.z. een eindig 2e moment (dus ook een eindig absoluut 1e en gewoon 1e moment) bezitten. De waarde van θ op grond waarvan een verwachting berekend wordt vermelden we zo nodig als index bij het symbool $\mathcal{E}$ voor de verwachting:

$$\mathcal{E}\, u_n(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) = \mathcal{E}_\theta\, u_n(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) = \int \cdots \int u_n(x_1, \ldots, x_n) f(x_1|\theta) \cdots f(x_n|\theta)\, dx_1 \ldots dx_n$$

[*] van de statistische grootheden onderstellen, dat zij voor iedere toegelaten θ

We noemen dan de statistische grootheid $\underline{u}_n$ een zuivere [1]) schatting voor de parameter θ, indien voor iedere n en voor iedere toegelaten θ

(11) $$\mathcal{E}_\theta\, u_n(\underline{x}_1,\ldots\ldots,\underline{x}_n) = \theta$$

is. D.wz. de "ware" parameter waarde is gelijk aan de verwachting van $\underline{u}_n$. Is dit slechts in de limiet voor $n \to \infty$ het geval, d.w.z. is

(12) $$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\theta\, u_n(\underline{x}_1,\ldots\ldots,\underline{x}_n) = \theta,$$

dan hete $\underline{u}_n$ een asymptotisch zuivere schatting voor θ.

We noemen $\underline{u}_n$ een bruikbare [2]) schatting van θ als $\underline{u}_n$ voor $n \to \infty$ bijna zeker naar θ convergeert, d.w.z. als er bij iedere positieve ε en η een N te vinden is met

(12a) $P[|\underline{u}_n - \theta| < \varepsilon | \theta] > 1-\eta$ voor iedere $n > N$.

We zullen verder een statistische grootheid $\underline{t}_n$ een doeltreffendste schatting van θ noemen, indien zij zuiver is, d.w.z.

(13) $$\mathcal{E}_\theta\, t_n(\underline{x}_1,\ldots\ldots,\underline{x}_n) = \theta$$

en onder alle zuivere schattingen $\underline{u}_n$ de kleinste spreiding bezit:

(14) $$\mathcal{E}_\theta \{t_n(\underline{x}_1,\ldots\ldots,\underline{x}_n)-\theta\}^2 \leq \mathcal{E}_\theta \{u_n(\underline{x}_1,\ldots\ldots,\underline{x}_n)-\theta\}^2$$

(voor alle θ en voor alle $\underline{u}_n$ die aan (11) voldoen). Tengevolge van (11) en (13) is (14) aequivalent met

(15) $$\mathcal{E}_\theta \{t_n(\underline{x}_1,\ldots\ldots,\underline{x}_n)^2\} \leq \mathcal{E}_\theta \{u_n(\underline{x}_1,\ldots\ldots,\underline{x}_n)^2\}$$

Voorts zullen we t_n een asymptotisch doeltreffendste [3]) schatting van θ noemen, indien zij asymptotisch zuiver is, d.w.z.

(16) $$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\theta\, t_n(\underline{x}_1,\ldots\ldots,\underline{x}_n) = \theta$$

en onder alle bruikbare schattingen $\underline{u}_n$ een voor $n \to \infty$ tot de kleinst mogelijke waarde naderende spreiding bezit; preciser:

(17) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2_{(\theta)}\underline{t}_n}{\sigma^2_{(\theta)}\underline{u}_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{E}_\theta\{t_n(\underline{x}_1,\ldots\ldots,\underline{x}_n) - \mathcal{E}_\theta\, t_n(\underline{x}_1,\ldots\ldots,\underline{x}_n)\}^2}{\mathcal{E}_\theta\{u_n(\underline{x}_1,\ldots\ldots,\underline{x}_n) - \mathcal{E}_\theta\, u_n(\underline{x}_1,\ldots\ldots,\underline{x}_n)\}^2} \leq 1$$ [4])

---

[1]) Engels: unbiased.

[2]) Engels: consistent

[3]) Engels: efficient

[4]) Indien de limiet van het linker lid niet bestaat, moet hiervoor de limes superior genomen worden. We laten dit echter buiten beschouwing.

Daar $n\sigma^2_{t_n}$ een eindige limiet heeft, is dit aequivalent met

(18) $$\lim_{n\to\infty} n\sigma^2_{t_n} \leqq \lim_{n\to\infty} n\sigma^2_{u_n}$$

(voor alle θ en voor alle $\underline{u}_n$ die aan (12) voldoen).

De voorwaarden (13) en (14) voor schattingen van parameters zijn het eerst door A.A. Markoff [1]) opgesteld; in het algemeen bestaat er echter geen statistische grootheid die er aan voldoet. De zwakkere (n.l. slechts asymptotisch geldende) voorwaarden (16) en (17) zijn van R.A. Fisher afkomstig, evenals de uitspraak dat de aannemelijkste schatting deze eigenschappen bezit. Voorts betoogt Fisher, dat voor grote n

$-\mathcal{E}_\theta \dfrac{\partial^2 L}{\partial\theta^2} \approx \dfrac{1}{\sigma^2_{(\theta)t_n}}$ is, waarbij $\sigma^2_{(\theta)t_n}$ het linkerlid van (14) voorstelt. Deze uitspraak kan gepreciseerd worden tot

(19) $$\lim_{n\to\infty} \sigma^2_{(\theta)t_n} \cdot \mathcal{E}_\theta \frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2} = -1$$

en zal de eigenschap der "asymptotische complementariteit" genoemd worden om redenen die in het volgende punt uiteengezet zullen worden.

Alvorens dit alles te preciseren en te bewijzen, merken we op, dat een willekeurige [2]) fct van een stochastische grootheid $\underline{x}$ zelf ook een stochastische grootheid is. In het bijzonder is dit met de logarithme van de verdelingsdichtheid het geval. En wel heeft $\varphi(\underline{x},\theta)$ bij iedere hypothese θ_0 een verdelingsfct, in het bijzonder bij θ zelf.

We onderstellen nu omtrent $\varphi(x,\theta)$:

A. 1. <u>$\varphi(x,\theta)$ is voor iedere toegelaten θ en voor iedere [3]) reële x gedefinieerd en tweemaal continu partiëel naar θ differentieerbaar</u>.

We duiden de partiële afgeleiden naar θ aan door stippen boven de letter (fluxie-symbool, door Newton ingevoerd voor differentiatie naar de tijd, maar hier gebruikt zonder dat θ de tijd behoeft voor te stellen):

$$\dot\varphi = \dot\varphi(x,\theta) = \frac{\partial\varphi(x,\theta)}{\partial\theta} \quad ; \quad \ddot\varphi = \ddot\varphi(x,\theta) = \frac{\partial^2\varphi(x,\theta)}{\partial\theta^2}$$

---

1) Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2e druk (1912), vertaald door H. Liebmann, 1912.

2) meetbare

3) Is φ alleen voor $x_1(\theta) < x < x_2(\theta)$ gedefinieerd, dan treden in de bewijzen geringe wijzigingen op.

A. 2. De stochastische grootheden $\dot\varphi(\underline{x},\theta)$ en $\ddot\varphi(\underline{x},\theta)$ zijn bij de hypothese θ regulier; eerstgenoemde is voor geen toegelaten θ bijna zeker 0.

Volgens definitie zijn dus

(20) $$\mathcal{E}_\theta\, \dot\varphi(\underline{x},\theta)^2 = \int\left\{\frac{\partial\varphi(x,\theta)}{\partial\theta}\right\}^2 e^{\varphi(x,\theta)}\,dx = \alpha^2 = \alpha(\theta)^2 > 0$$

en

(21) $$\mathcal{E}_\theta\, \ddot\varphi(\underline{x},\theta)^2 = \int\left\{\frac{\partial^2\varphi(x,\theta)}{\partial\theta^2}\right\}^2 e^{\varphi(x,\theta)}\,dx = \beta^2 = \beta(\theta)^2$$

eindig. Dus ook $\mathcal{E}_\theta|\dot\varphi(\underline{x},\theta)|$ en $\mathcal{E}_\theta|\ddot\varphi(\underline{x},\theta)|$ en a fortiori $\mathcal{E}_\theta\,\dot\varphi(\underline{x},\theta)$ en $\mathcal{E}_\theta\,\ddot\varphi(\underline{x},\theta)$ zelf zijn eindig.

We bewijzen nu eerst het

Lemma

(22) $$\mathcal{E}_\theta\,\dot\varphi(\underline{x},\theta) = 0$$

(23) $$\mathcal{E}_\theta\,\ddot\varphi(\underline{x},\theta) = -\alpha^2$$

Bewijs. Men heeft

$$\frac{d}{d\theta}\int e^{\varphi(x,\theta)}\,dx = \int\frac{\partial\varphi(x,\theta)}{\partial\theta}\,e^{\varphi(x,\theta)}\,dx$$

daar de integraal in het rechterlid convergeert en een continue fct van θ voorstelt, zodat de differentiatie onder het integraalteken kan geschieden. De integraal in het linkerlid is echter $= \int f(x,\theta)\,dx = 1$, dus haar afgeleide is = 0, hetgeen (22) bewijst. Evenzo vindt men door de integraal in het rechterlid nogmaals te differentiëren:

$$\int\frac{\partial^2\varphi(x,\theta)}{\partial\theta^2}\,e^{\varphi(x,\theta)}\,dx + \int\left\{\frac{\partial\varphi(x,\theta)}{\partial\theta}\right\}^2 e^{\varphi(x,\theta)}\,dx = 0$$

hetgeen (23) bewijst (vgl. (20)).

Voorts herinneren we aan de ongelijkheid van Bienaymé-Tchebycheff, die voor een reguliere stochastische grootheid $\underline{u}$, toegepast op het moment van de tweede orde, inhoudt dat voor iedere $a > 0$

(24) $$P[|\underline{u} - \mathcal{E}\underline{u}| \geq t] \leq \frac{\sigma_{\underline{u}}^2}{t^2}$$

Zijn nu $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$ reguliere stochastische grootheden, alle met dezelfde verdelingsfct, dan is ook

(25) $$\overline{\underline{u}_i} = \frac{1}{n}\sum_1^n \underline{u}_i$$

regulier met $\mathcal{E}\,\overline{\underline{u}_i} = \mathcal{E}\underline{u}_1 = \cdots = \mathcal{E}\underline{u}_n$ $(zeg = \mu)$ en $\sigma^2_{\overline{\underline{u}_i}} = \frac{1}{n}\sigma^2_{\underline{u}_1} = \cdots = \frac{1}{n}\sigma^2_{\underline{u}_n}$ $(zeg = \frac{1}{n}\sigma^2)$. Tezamen met (24) geeft dit

(26) $$P[|\overline{\underline{u}_i} - \mu| \geq t\sigma] \leq \frac{1}{nt^2}$$

De wh dat het gemiddelde der $\underline{u}_i$ meer dan een constant getal van de verwachting van elke $\underline{u}_i$ afwijkt gaat dus voor $n \to \infty$ met n^{-1} naar 0.

We kunnen (26) ook uitdrukken door te zeggen dat $|\overline{\underline{u}_i} - \mu| < t\sigma$ is behoudens een wh $\leq \frac{1}{nt^2}$ of ook, als we $\frac{1}{nt^2} = \delta$ stellen, dat $|\overline{\underline{u}_i} - \mu| < \frac{\sigma}{\sqrt{n\delta}}$ behoudens een wh $\leq \delta$. Voeren we de afkorting svpr in voor de uitdrukking "behoudens een wh $\leq$ " (latijn: salva probabilitate), dan kunnen we voor (26) dus ook schrijven

(27) $$|\overline{\underline{u}_i} - \mu| < \frac{\sigma}{\sqrt{n\delta}} \qquad \text{svpr } \delta$$

Voorts herinneren we aan de stelling van Laplace-Liapounof, die voor dit geval inhoudt (vgl. pag. 77, Whr p. 188) dat $\overline{\underline{u}_i}\sqrt{n}$ asymptotisch normaal is met gemiddelde $\mu\sqrt{n}$ en spreiding σ, dus:

(28) $$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{(\overline{\underline{u}_i} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \leq x\right] = F_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

Hieruit volgt voor de limiet van het linkerlid van (26) de scherpere grens $\frac{2}{n}\left(1 - F_N(t)\right)$

We onderstellen nu verder:

B. 1. Voor ieder natuurlijk getal n bestaat een voor iedere (toegelaten θ) stochastische grootheid $\underline{t}_n = t_n(\underline{x}_1, \ldots\ldots, \underline{x}_n)$ [2] (waarbij $t_n(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ een voor alle reële x gedefiniëerde reële fct is), zodanig dat voor iedere (toegelaten) θ en alle $x_1, \ldots, x_n$ geldt:

(29) $$\sum_1^n \varphi(x_i, t_n(x_1, \ldots\ldots, x_n)) \geq \sum_1^n \varphi(x_i, \theta)$$

Deze onderstelling houdt dus de existentie in van de aannemelijkste schatting $\underline{t}_n$ en eist dat zij voor iedere (toegelaten) θ een verdelingsfct bezit. Tengevolge van de differentieerbaarheidsonderstelling A.1 is dan ook

(30) $$\sum_1^n \dot\varphi(x_i, t_n(x_1, \ldots, x_n)) = 0$$

(31) $$\sum_1^n \ddot\varphi(x_i, t_n(x_1, \ldots, x_n)) \leq 0$$

Tenslotte onderstellen we:

B. 2. De stochastische grootheden $\underline{t}_n$ zijn regulier. Het tweede (en dientengevolge ook het eerste [1])) moment van $\underline{t}_n$ blijft voor iedere (toegelaten) θ voor $n \to \infty$ begrensd.

(32) $$\mathcal{E}\underline{t}_n^2 \leq C_1^2(\theta) \qquad \text{dus ook } |\mathcal{E}\underline{t}_n| \leq C_1$$

We kunnen zonder beperking $C_1 \geq 1$ aannemen.

Deze voorwaarde kan hier ook vervangen worden door de ogenschijnlijk zwakkere: Bij iedere ε bestaat een $M(\varepsilon, \theta) > 0$

---

[1]) Voor iedere stochastische grootheid x is n.l. $|\mathcal{E}\underline{x}| \leq \mathcal{E}|\underline{x}| \leq \sqrt{\mathcal{E}\underline{x}^2}$ Uit (32) volgt dus $|\mathcal{E}\underline{t}_n| \leq C_1$

[2]) die tot het interval van toegelaten θ-waarden behoort

zodat voor voldoend grote n gelijkmatig in n geldt:

(32*) $$P\left[\,|t_n| \geqq M(\varepsilon,\theta)\right] \leqq \varepsilon$$

(Vgl. de volgende voetnoot).
We zullen nu onder de onderstellingen A.1, A.2, B.1, B.2, enkele stellingen bewijzen.

I. We passen de middelwaardestelling

(33) $$\psi(t_n) = \psi(\theta) + (t_n - \theta)\,\dot\psi(\theta')$$

waarin θ' tussen θ en t_n ligt:

(34) $$\theta' = (1-\vartheta)\theta + \vartheta t_n \quad (0<\vartheta<1)$$

toe op $\psi(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{i}\ \dot\varphi(x_i,\theta)$ en $t_n = t_n(x_1,\dots\dots,x_n)$
Het linkerlid is dan 0 wegens (30). Dus

(35) $$0 = \frac{1}{n}\sum^{i} \dot\varphi(x_i,\theta) + (t_n-\theta)\cdot\frac{1}{n}\sum^{i}\ddot\varphi(x_i,\theta') \,.$$

Voorts bedenken we dat $\mathcal{E}_\theta\,\dot\varphi$ wegens (22) nul is, en passen we (27) toe. Dan is dus, daar $\sigma^2_{\dot\varphi} = \mathcal{E}_\theta\,\dot\varphi^2 = \alpha(\theta)^2 > 0$ is (20) voor iedere $\delta>0$, iedere θ, iedere n :

(36) $$\left|\frac{1}{n}\sum^{i}\dot\varphi(\underline{x}_i,\theta)\right| < \frac{\alpha(\theta)}{\sqrt{n\delta}} \qquad \text{svpr } \delta$$

(D.w.z. de ongelijkheid geldt voor alle monsters met uitzondering van een vz van monsters $x_1,\dots\dots,x_n$ die tezamen een wh $\leqq\delta$ hebben; daarbij is de wh steeds op grond van de parameterwaarde θ bepaald). We kunnen zonder beperking $\delta \leqq 1$ kiezen.

De eerste term in het rechterlid van (35) is dus "waarschijnlijk" (nl. behoundens een wh $\leqq\delta$) $= \mathcal{O}(\,n^{-1/2}\,)$. Om iets dergelijks ook van $t_n-\theta$ te kunnen beweren moeten we aantonen, dat de factor $\frac{1}{n}\sum^{i}\ddot\varphi(\,x_i\,,\theta'\,)$ waarmede deze grootheid vermenigvuldigd wordt "waarschijnlijk" niet te dicht bij 0 kan komen.

Stond er θ in plaats van θ', dan ware dit gemakkelijk. Immers $\mathcal{E}_\theta\,\ddot\varphi(\underline{x},\theta) = -\alpha(\theta)^2$ volgens (23), dus is volgens (27) en (24)

(37) $$\left|\frac{1}{n}\sum^{i}\ddot\varphi(\underline{x}_i,\theta) + \alpha(\theta)^2\right| < \frac{\beta(\theta)}{\sqrt{n\delta}} \qquad \text{svpr } \delta$$

Kiest men dus $n \geqq \frac{4\beta(\theta)^2}{\alpha(\theta)^4}\,\delta^{-1}$ dan is

(38) $$\frac{1}{n}\sum^{i}\ddot\varphi(\underline{x}_i,\theta) < \frac{\beta(\theta)}{\sqrt{n\delta}} - \alpha(\theta)^2 < -\tfrac{1}{2}\alpha(\theta)^2 < 0 \qquad \text{svpr } \delta$$

Voor θ' in plaats van θ is het bewijs iets omslachtiger. Vooreerst volgt ten gevolge van B.2 uit de ongelijkheid van Bienaymé voor alle n

$$|\underline{t}_n - \mathcal{E}_\theta \underline{t}_n| < \delta^{-1/2} \sigma_{\underline{t}_n} \leqq \delta^{-1/2} C_1 \qquad \text{svpr } \delta$$

Stelt men dus

$$|\theta| + 2\delta^{-1/2} C_1 = C_2$$

dan wordt behoudens de zelfde wh (zie (34)):

(39)
$$|\theta' - \theta| < |\underline{t}_n - \theta| \leqq |\underline{t}_n - \mathcal{E}_\theta \underline{t}_n| + |\mathcal{E}_\theta \underline{t}_n - \theta| \leqq \delta^{-1/2} C_1 + |\mathcal{E}_\theta t_n| + |\theta| \leqq$$
$$\leqq (1+\delta^{-1/2}) C_1 + \theta \leqq C_2 \qquad \text{svpr } \delta$$

Nu heeft voor alle toegelaten θ' met $|\theta' - \theta| \leqq C_2$ $\alpha(\theta')^2$ een positief minimum α_0^2 en $\beta(\theta')$ een eindig maximum β_0.

Passen we nu (27) toe op $\frac{1}{n}\sum_i \ddot{\varphi}(\underline{x}_i, \theta')$, de whn echter nog steeds met θ berekend dan vinden we analoog met (37) en (38):

(37*) $$\left|\frac{1}{n}\sum_i \ddot{\varphi}(\underline{x}_i, \theta') + \alpha(\theta')^2\right| < \frac{\beta(\theta')}{\sqrt{n\delta}} \qquad \text{svpr } \delta$$

(38*) $$\frac{1}{n}\sum_i \ddot{\varphi}(\underline{x}_i, \theta') < \frac{\beta(\theta')}{\sqrt{n\delta}} - \alpha(\theta')^2 \leqq \frac{\beta_0}{\sqrt{n\delta}} - \alpha_0^2 \leqq -\frac{1}{2}\alpha_0^2 < 0$$
$$\text{svpr } 2\delta$$

mits thans $n \geqq \frac{4\beta_0^2}{\alpha_0^4 \delta}$ is. We moeten thans een wh 2δ voorbehouden, daar er een vz monsters met wh $\leqq \delta$ kan zijn, waarvoor (26) niet geldt en een (eventueel andere) vz met wh $\leqq \delta$ waarvoor (39) niet geldt.[1]

Uit (35), (36) en (38) volgt, thans slechts behoudens een wh $\leqq 3\delta$:

(40) $$|\underline{t}_n - \theta| = \frac{\left|\frac{1}{n}\sum_i \dot{\varphi}(\underline{x}_i, \theta)\right|}{-\frac{1}{n}\sum_i \ddot{\varphi}(\underline{x}_i, \underline{\theta}')} < \frac{2\alpha(\theta)}{\alpha_0^2 \sqrt{n\delta}} \qquad \text{svpr } 3\delta$$

Hiermede is dus bewezen, dat "waarschijnlijk" (behoudens een wh $\leqq 3\delta$) $|t_n - \theta| < \frac{C_3}{\sqrt{n\delta}} = O(n^{-1/2})$ is, waarbij $C_3 = 2\alpha(\theta)\alpha_0^{-2}$ is. Laat men nu $n \to \infty$ gaan, dan geldt, daar C_1, C_2, C_3 niet van n afhangen (daartoe is onderstelling B.2 resp. 32* nodig!) dat behoudens een wh $\leqq 3\delta$ / $\lim_{n\to\infty} |\underline{t}_n - \theta| = 0$ d.w.z. $\lim_{n\to\infty} \underline{t}_n = \theta$ is. Deze limesrelatie hangt echter niet van δ af. Daar voor <u>iedere</u> δ slechts een wh $\leqq 3\delta$ voorbehouden behoeft te worden geldt zij dus behoudens een wh 0:

(41) $$\lim_{n\to\infty} \underline{t}_n = \theta \qquad \text{svpr } 0$$

Anders geschreven:

(42) $$\boxed{P\left[\lim_{n\to\infty} \underline{t}_n = \theta \mid \theta\right] = 1}$$

---

[1]) In plaats van uit (32) kan (38) ook uit (32*) geconcludeerd worden: $|t_n| < M(\delta, \theta)$ svpr δ ; $|\underline{t}_n - \theta| < M(\delta, \theta) + |\theta|$ svpr δ waaruit (39) en (38*) volgt, als we thans $C_2 = M(\delta, \theta) + |\theta|$ stellen en α_0 en β_0 als in de tekst bepalen.

Het is dus "bijna zeker" dat lim $\underline{t}_n = \theta$ is.

Er zijn monsterreeksen aan te geven, waarvoor $\underline{t}_n$ geen limiet of een limiet $\neq 0$ heeft, maar deze hebben voor $n \to \infty$ alle tezamen slechts een wh 0. Convergentie, die slechts behoudens een wh 0 behoeft te gelden, wordt "convergence en probabilité" genoemd; we kunnen hiervoor ook "bijna zekere convergentie" zeggen.

Op grond van de onderstellingen A.1, A.2, B.1, en B.2 is dus bewezen:

Stelling 1. De aannemelijkste schatting $\underline{t}_n$ van een parameter convergeert bijna zeker tot de ware waarde van die parameter, dus is een bruikbare schatting.

II. We voegen nu aan de onderstellingen toe:
A.3 Het spreidingsquadraat $\alpha(\theta)^2$ van $\dot{\varphi}$ is een continu-differentieerbare fct van θ.

Deze onderstelling kan ook vervangen worden door: Het derde moment van $\dot{\varphi}$ bestaat, waaruit A.3 volgt.

We kunnen dan verdere door Fisher aangegeven eigenschappen van $\underline{t}_n$ bewijzen, en wel door de ongelijkheid (37^*) wat meer uit te buiten dan in (38^*) gedaan is.

We resumeren daartoe enige reeds gevonden resultaten, waarbij we kortheidshalve de afkorting:

$$(43) \qquad \underline{L}(\theta) = L(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n \mid \theta) = \sum_1^n \varphi(\underline{x}_i, \theta) \qquad \text{(vgl. (8))}$$

invoeren. Vooreerst

$$(35) \qquad \underline{t}_n - \theta = \frac{\dot{\underline{L}}(\theta)}{-\ddot{\underline{L}}(\theta')} = \alpha^{-2} \cdot \frac{\dot{\underline{L}}(\theta)}{n} + \underline{R}_n$$

met

$$(44) \qquad \underline{R}_n = -\frac{\dot{\underline{L}}(\theta)}{n} \left\{ \alpha(\theta)^2 + \frac{\ddot{\underline{L}}(\theta)}{n} \right\} \Big/ \alpha(\theta)^2 \frac{\ddot{\underline{L}}(\theta)}{n}$$

Voorts:

$$(36) \qquad \left| \frac{\dot{\underline{L}}(\theta)}{n} \right| < \frac{\alpha(\theta)}{\sqrt{n\delta}} \qquad \text{svpr } \delta$$

$$(37^*) \qquad \left| \alpha(\theta')^2 + \tfrac{1}{n} \ddot{\underline{L}}(\theta') \right| < \frac{\beta(\theta')}{\sqrt{n\delta}} \leq \frac{\beta_0}{\sqrt{n\delta}} \qquad \text{svpr } \delta$$

$$(38^*) \qquad -\tfrac{1}{n} \ddot{\underline{L}}(\theta') > \tfrac{1}{2} \alpha_0^2 \qquad \text{svpr } \delta$$

Uit (39) en (40) concluderen wij voorts:

$$(40) \qquad |\theta' - \theta| < |\underline{t}_n - \theta| < \frac{C_3}{\sqrt{n\delta}} \qquad \text{svpr } 3\delta$$

met $C_3 = 2\alpha(\theta).\alpha_0^{-2}$, en uit A.3:

(45) $\left|\alpha(\underline{\theta}')^2 - \alpha(\theta)^2\right| < |\underline{\theta}' - \theta|.C_n$

waarbij C_n een bovengrens voor $\frac{d}{d\theta''}\alpha(\theta'')^2$ is voor alle θ'' waarvoor $|\theta'' - \theta| < \frac{C_3}{\sqrt{n\delta}}$ is. Uit (40) en (45) volgt dan:

$$\left|\alpha(\underline{\theta}')^2 - \alpha(\theta)^2\right| < \frac{C_4.C_n}{\sqrt{n\delta}} \qquad \text{svpr } 3\delta$$

dus tezamen met (37*):

$$\left|\alpha(\theta)^2 + \tfrac{1}{n}\ddot{\underline{L}}(\theta')\right| < \frac{C_5}{\sqrt{n\delta}} \qquad \text{svpr } 4\delta$$

met $C_5 = \beta_0 + C_3.C_n$. Deze ongelijkheid tezamen met (36) en (38*) geeft

(46) $|\underline{R}_n| < \frac{C_6}{n.\alpha(\theta)}$ svpr 7δ

met . $C_6 = \frac{2C_5}{\alpha_0^2\delta}$

Tenslotte herinneren we aan de stelling van Laplace-Liapounof (28), die we op $\underline{u}_i = \dot{\varphi}(\underline{x}_i, \theta)$ toepassen, zodat wegens (22) en (20) $\mu = 0$ en $\sigma = \alpha$ wordt.
Wegens (43) is dus $\frac{\dot{\underline{L}}(\theta)}{\alpha\sqrt{n}}$ asymptotisch normaal (0,1) verdeeld. Tengevolge van (35) en (46) verschilt $(\underline{t}_n - \theta)\alpha\sqrt{n}$ hiervan "waarschijnlijk" (behoudens wh $\leq 7\delta$) slechts "weinig" (hoogstens $C_6/\sqrt{n}$). Als dus $(\underline{t}_n - \theta)\alpha\sqrt{n}$ tussen twee willekeurige grenzen a en b ligt, ligt $\dot{\underline{L}}(\theta)/\alpha\sqrt{n}$ svpr 7δ tussen $a - C_6.n^{-1/2}$ en $b + C_6.n^{-1/2}$, dus

(47) $P\left[a \leq (\underline{t}_n - \theta)\alpha\sqrt{n} \leq b\right] \leq P\left[a - C_6.n^{-1/2} \leq \frac{\dot{\underline{L}}(\theta)}{\alpha\sqrt{n}} \leq b + C_6.n^{-1/2}\right] + 7\delta$

Als anderzijds $\dot{\underline{L}}(\theta)/\alpha\sqrt{n}$ tussen $a + C_6.n^{-1/2}$ en $b - C_6.n^{-1/2}$ ligt, ligt $(\underline{t}_n - \theta)\alpha\sqrt{n}$ svpr 7δ tussen a en b . D.w.z.

(48) $P\left[a \leq (\underline{t}_n - \theta)\alpha\sqrt{n} \leq b\right] \geq P\left[a + C_6.n^{-1/2} \leq \frac{\dot{\underline{L}}(\theta)}{\alpha\sqrt{n}} \leq b - C_6.n^{-1/2}\right] - 7\delta$

De eerste termen in de rechterleden van (47) en (48) hebben voor $n \to \infty$ beide tot limiet $(2\pi)^{-1/2}\int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$, d.w.z. voor voldoend grote n verschillen zij daarvan hoogstens δ . De (aan elkaar gelijke) linkerleden verschillen er dus hoogstens 8δ van:

(49) $\left|P\left[a \leq (\underline{t}_n - \theta)\alpha n^{1/2} \leq b\right] - (2\pi)^{-1/2}\int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\right| \leq 8\delta$

voor voldoende grote n. Daar dit voor iedere $\delta >$ 0 geldt, is dus

(50) $$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\left[a \leq (\underline{t}_n - \theta)\alpha n^{1/2} \leq b\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2}dx}$$

d.w.z. $(t_n - \theta)\,\alpha\, n^{1/2}$ is asymptotisch normaal (0,1).

Hiermede **is** dus bewezen op grond van A.1, A.2, A.3, B.1 en B.2:

Stelling 2. De aannemelijkste schatting t_n van een parameter θ is asymptotische normaal met (asymptotisch) gemiddelde θ en (asymptotische) spreiding $1/\alpha\sqrt{n}$.

In het bijzonder geldt dus de eigenschap der asymptotische zuiverheid

(16) $$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\theta \underline{t}_n = \theta$$

en is (vgl. (23) en (43)):

(19) $$\lim_{n\to\infty} n\,\sigma^2_{(\theta)\underline{t}_n} = \frac{1}{\alpha(\theta)^2}$$

waarin

(22) $$\alpha(\theta)^2 = \sigma^2_{(\theta)\dot{\underline{\varphi}}} = \mathcal{E}_\theta\, \dot{\varphi}(\underline{x},\theta)^2$$

is.

Interessant is het "complementaire" karakter dat (19) tussen $\underline{t}_n$ en $\dot{\varphi}(\underline{x},\theta)$ legt; het product van hun spreidingen bij een monster van de uitgebreidheid **n** is ongeveer $1/\sqrt{n}$. We zullen daarom de betrekking (19) of ook de daarmede aequivalente

(50) $$\lim_{n\to\infty} n\,\sigma^2_{(\theta)\underline{t}_n}\ \sigma^2_{(\theta)\dot{\varphi}(\underline{x},\theta)} = 1$$

de eigenschap van asymptotische complementariteit noemen.

Voor n = 1 kan deze conclusie wegens het limes karakter niet gebruikt worden. Men kan echter elementair bewijzen, dat voor iedere continu differentieerbare verdeling met $f(x) = e^{\varphi(x)}$ het product van de spreidingen van $\underline{x}$ en $\varphi'(\underline{x})$, waarin $\varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx}$ de afgeleide naar x (niet naar een parameter) van $\varphi(x)$ is, mits slechts $x f(x)$ aan de eindpunten van het interval dat $\underline{x}$ doorloopt verdwijnt, = 1 is.[1] Derhalve kunnen $\underline{x}$ en $\varphi'(\underline{x})$ niet beide met willekeurig kleine nauwkeurigheid bepaald worden. Deze betrekking is volkomen analoog met de in de quantumtheorie bestaande onnauwkeurigheidsrelatie van W. Heisenberg tussen een coördinaat en de bijbehorende impulsie.

----

[1] Men heeft namelijk algemeen: $|\mathcal{E}\,\underline{x}\,\underline{y}| \leq \sigma_{\underline{x}}\,\sigma_{\underline{y}}$. Neem $\underline{y} = \varphi'(\underline{x})$. Dan is $\mathcal{E}\,\underline{x}\,\varphi'(\underline{x}) = \int x\,\varphi'(x)\,e^{\varphi(x)}dx = \int x\,d\,e^{\varphi x} = [x\,f(x)] - \int f(x)\,dx = -1$ mits $x f(x)$ aan de integratiegrenzen nul is. Dus is $1 = |-1| \leq \sigma_{\underline{x}}\,\sigma_{\varphi'(\underline{x})}$

Het hier verkregen resultaat (stelling 2) is onder een weinig (maar niet wezenlijk) andere onderstellingen het eerst door J.L. Doob bewezen.[1] Het hier gegeven bewijs is iets eenvoudiger, daar Doob van stellingen uit de zgn. "ergodentheorie" gebruik maakt .

----

[1]) J.L.Doob, Probability and Statistics, Transactions Am. Mathematical Soc. 36, p. 759 - 775, 1934.

III. In het bovenstaande is nog niet bewezen, dat de aannemelijkste schatting tevens de asymptotisch doeltreffendste is, d.w.z. dat

(17) $$\lim_n \sup \sigma^2_{t_n} / \sigma^2_{\underline{u}_n} \leq 1$$

is voor iedere rij van statistische[2]) grootheden $\underline{u}_n$, die asymptotische zuiver is, waarvoor dus geldt:

(16) $$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\theta \underline{u}_n = \theta$$

We zullen nog iets meer onderstellen: $\mathcal{E}_\theta(\underline{u}_n - \theta)$ is een fct van θ , die voor $n \to \infty$ voor iedere toegelaten θ naar 0 gaat. We zullen onderstellen, dat dit "glad" geschiedt, d.w.z. dat ook de afgeleide naar θ naar 0 gaat, en tevens dat de differentiatie naar θ onder het integraal (dus het $\mathcal{E}$-)teken kan geschieden. Dus:

(51) $$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{d\theta} \mathcal{E}_\theta (\underline{u}_n - \theta) = 0$$

Nu is:
$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{E}_\theta \underline{u}_n = \frac{d}{d\theta} \int u_n e^{L(x_1,\ldots\ldots,x_n;\theta)} dx_1 \ldots\ldots dx_n =$$
$$= \mathcal{E}_\theta \underline{u}_n \dot{L}(\underline{x}_1,\ldots\ldots,\underline{x}_n;\theta) = \mathcal{E}_\theta \underline{u}_n \dot{\underline{L}}(\theta)$$

terwijl
$$\mathcal{E}_\theta \dot{\underline{L}}(\theta) = \sum \mathcal{E}_\theta \dot{\varphi}(\underline{x}_i,\theta) = n \, \mathcal{E}_\theta \dot{\varphi}(\underline{x},\theta) = 0$$
is volgens lemma 1 en $\frac{d}{d\theta}\mathcal{E}_\theta \theta = \frac{d\theta}{d\theta} = 1$ is.

----

[2]) Wezenlijk is, dat de $\underline{u}_n$ statistisch zijn, d.w.z. niet van θ afhangen, daar men anders door $\underline{u}_n = \theta$ te kiezen het linkerlid van (17) oneindig zou kunnen maken.

Dus wordt (51):

(52) $$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\theta (\underline{u}_n - \theta)\dot{\underline{L}}_n(\theta) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\theta\, \underline{u}_n \dot{\underline{L}}_n(\theta) = 1$$

Voorts zullen we de onderstellingen A.1, A.2, A.3 nog iets verscherpen, zonder dit nader te precizeren, waardoor de hieronder optredende resttermen $\underline{R}_{n1},\ldots,\underline{R}_{nn}$ eerste momenten bezitten, die voor $n\to\infty$ als $n^{-3/2}$ naar 0 gaan.

Volgens de reeks van Taylor met restterm is

$$\underline{L}(\underline{t}_n) = \underline{L}(\theta) + (\underline{t}_n-\theta)\dot{\underline{L}}(\theta) + \tfrac{1}{2}(\underline{t}_n-\theta)^2\ddot{\underline{L}}(\theta) + \underline{R}_{n1} =$$
$$= \underline{L}(\theta) + (\underline{t}_n-\theta)\dot{\underline{L}}(\theta) - \tfrac{1}{2}(\underline{t}_n-\theta)^2 n\,\alpha(\theta)^2 + \underline{R}_{n2}$$

(vgl. (35)). Ook is

$$\underline{L}(\theta) = \underline{L}(\underline{t}_n) - \tfrac{1}{2}(\underline{t}_n-\theta)^2\, n\,\alpha(\theta)^2 + \underline{R}_{n3}$$

daar $\dot{\underline{L}}(\underline{t}_n) = 0$ is ten gevolge van de definitie der aannemelijkste schatting. Derhalve is

$$(\underline{t}_n-\theta)\dot{\underline{L}}(\theta) - n\,\alpha(\theta)^2(\underline{t}_n-\theta)^2 = -\underline{R}_{n3} - \underline{R}_{n2}$$

Nemen we van beide leden de verwachting, en daarvan de limiet voor $n \to \infty$, dan gaat het rechterlid volgens onderstelling in 0 over, terwijl de tweede term in het linkerlid in $-\lim_{n\to\infty} \sigma^2_{\underline{t}_n}\cdot n\alpha^2 = -1$ overgaat. Dus is wegens $\theta\,\mathcal{E}_\theta \dot{\underline{L}}(\theta) = n\theta\,\mathcal{E}_\theta \dot{\psi}(\theta)$

(53) $$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\theta(\underline{t}_n-\theta)\dot{\underline{L}}(\theta) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\theta\, \underline{t}_n \dot{\underline{L}}(\theta) = 1$$

Eveneens volgens de ontwikkeling van Taylor is

$$\underline{L}(\underline{u}_n) = \underline{L}(\theta) + (\underline{u}_n-\theta)\dot{\underline{L}}(\theta) - \tfrac{1}{2}(\underline{u}_n-\theta)^2 n\,\alpha(\theta)^2 + R_{n4}$$

Volgens de definitie van $\underline{t}_n$ is $\underline{L}(\underline{u}_n) \leq \underline{L}(\underline{t}_n)$.
Derhalve is

$$0 \leqq \underline{L}(\underline{t}_n) - \underline{L}(\underline{u}_n) = (\underline{t}_n - \underline{u}_n)\dot{\underline{L}}(\theta) - \tfrac{1}{2} n\alpha^2\{(\underline{t}_n-\theta)^2 - (\underline{u}_n-\theta)^2\} + \underline{R}_{n2} - \underline{R}_{n4}$$

Nemen we weer van beide leden de verwachting en daarvan de limiet, dan gaat de laatste term in het laatste lid volgens onderstelling en de eerste term in het laatste lid volgens (52) en (53) in 0 over. We vinden dus

$$0 \leqq \lim_{n\to\infty}\{\mathcal{E}\underline{L}(\underline{t}_n) - \mathcal{E}\underline{L}(\underline{u}_n)\} = 0 + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \lim_{n\to\infty} n(\sigma^2_{\underline{u}_n} - \sigma^2_{\underline{t}_n}) + 0$$

of

$$\lim_{n\to\infty}(n\sigma^2_{\underline{u}_n} - n\sigma^2_{\underline{t}_n}) \geqq 0$$

hetgeen te bewijzen was.

De stelling, dat de aannemelijkste schatting de asymptotisch doeltreffendste is, is door B.L. van der Waerden onder zeer beperkende voorwaarden bewezen (b.v. dat $\underline{x}$ normaal verdeeld is met gemiddelde θ) (1946, niet in druk verschenen). Het volgt voor het geval dat $\underline{u}_n$ asymptotisch normaal ondersteld is uit een resultaat over betrouwbaarheidsintervallen van S.S. Wilks (Ann. M.Stat. 9, 1938), en zonder deze beperking uit een generalisatie daarvan door A. Wald (aangekondigd in Bull. Am. M. Soc. 1940).

De voor de hier gegeven bewijzen aan de verdelingen opgelegde voorwaarde houden slechts zwakke beperkingen in; in de meeste veelvuldig voorkomende gevallen zijn zij vervuld. Door wat grotere complicatie van de bewijzen toe te laten kunnen zij nog wel enigszins worden verzwakt, zoals bij de bewijzen uit de Amerikaanse school het geval is.

Fisher noemt

$$E = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\alpha\sigma^2_{\underline{u}_n}} \tag{54}$$

(zo deze limiet bestaat) de asymptotische doeltreffendheid ("efficiency") van de statistische grootheid $\underline{u}_n$, voor schatting van een parameter θ (N.B. $\alpha = \alpha(\theta)$, $\sigma^2_{\underline{u}_n} = \sigma^2_{(\theta)\,\underline{u}_n}$). Ten gevolge van stelling 2 kan het hier bewezen resultaat ook als volgt geformuleerd worden:

Stelling 3. Onder de bovengenoemde voorwaarden is de asymptotische doeltreffendheid van iedere statistische grootheid ter schatting van een parameter ≤ 1.

De praktische betekenis van E is de volgende. Heeft men een monster van de uitgebreidheid n, en wil men daaruit een parameter θ schatten, en wordt de reciproke spreiding der schattende statistische grootheid als maat voor de nauwkeurigheid der schatting aangezien, dan is deze maat bij gebruikmaken van de aannemelijkste schatting voor grote n ongeveer $\alpha\sqrt{n}$, bij gebruikmaken van een andere schatting met asymptotische doeltreffendheid E ongeveer $\sqrt{E}.\alpha\sqrt{n}$. Zij is dus evengroot alsof men bij gebruikmaken van de aannemelijkste schatting slechts En waarnemingen gebruikt had. Om een zelfde nauwkeurigheid der schatting te bereiken (op bovenstaande wijze gemeten) kan men dus bij gebruikmaken van de aannemelijkste schatting met E maal zoveel waarnemingen volstaan als men bij de minder doeltreffende (met doeltreffendheid E) nodig gehad zou hebben.

6. Verdere eigenschappen van aannemelijkste schattingen.

We onderstellen verder, dat aan alle in het vorige punt genoemde voorwaarden voldaan is. De aannemelijkste schatting t_n van een parameter θ is dus bijna zeker convergent naar θ, 2° asymptotisch normaal, 3° asymptotisch zuiver, 4° asymptotisch doeltreffendst terwijl lim $n\sigma^2_{t_n} = \alpha^{-2} = 1/\sigma^2_{\varphi(x,\theta)}$ is. Zij voorts u_n een andere asymptotisch zuivere statistische grootheid met asymptotische doeltreffendheid

$$E = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\alpha^2\sigma^2_{u_n}} \tag{54}$$

I. Dan geldt volgens Fisher [1])

Stelling 4. Is ρ_n de correlatiecoëfficient van t_n en u_n, dan is

$$\lim \rho_n = \sqrt{E} \tag{55}$$

Bewijs. Zij k een reëel getal. Beschouw de statistische grootheid

$$z_n = k\,u_n + (1-k)\,t_n$$

Dan is ook z_n asymptotisch zuiver en

$$\sigma^2_{z_n} = k^2\sigma^2_{u_n} + 2k(1-k)\,\sigma_{u_n}\sigma_{t_n}\rho_n + (1-k)^2\sigma^2_{t_n}$$

$$\lim n\alpha^2\sigma^2_{z_n} = \frac{k^2}{E} + 2k(1-k)\frac{\lim \rho_n}{\sqrt{E}} + (1-k)^2$$

Het rechter lid ~~=~~ is 1 voor k = 0, is $= E^{-1} \geq 1$ voor $k=1$, en moet voor alle k ≧ 1 zijn. Het neemt voor $k = \dfrac{\sqrt{E}(\sqrt{E} - \lim \rho_n)}{E - 2\sqrt{E}\lim \rho_n + 1}$ het minimum $\dfrac{1-(\lim \rho_n)^2}{1-2\sqrt{E}\lim \rho_n + E^2} = \left\{1 + \dfrac{(\sqrt{E} - \lim \rho_n)^2}{1-(\lim \rho_n)^2}\right\}^{-1}$ aan. Dit kan alleen $\geqq 1$ zijn (daar steeds $\rho_n^2 \leqq 1$ is), als $\lim \rho_n = \sqrt{E}$ is, hetgeen te bewijzen was.

Daar nu aan (26) voldaan is, is de minimaliserende waarde van k nul, dus $z_n = t_n$. Fisher concludeert hieruit (l.c. p. 705): "...if we have an efficient statistic and an efficient estimate of the same parameter, the best use we can make of these two values, at any rate with large samples, will be to ignore the latter entirely. Any compound of the two will be less efficient than A". Dit laatste is alleen voor lineaire combinaties van de twee schattingen bewezen. Bovendien geldt de redenering alleen 1° asymptotisch voor $n \to \infty$, 2° voor zoverre geen andere overwegingen dan de doeltreffendheid gelden, dus b.v. als een experiment ontworpen moet worden, waarbij grotere uitgebreidheid dan nodig is zeer kostbaar is. Is echter

----

[1]) R.A. Fisher, Theory of statistical estimation, Proceedings Cambridge Philosophical Society 22, p. 700-725, 1925.

het experiment reeds gedaan, en (zoals vaak voorkomt) zo ruw, dat grote mathematische nauwkeurigheid weinig zin heeft, dan kan ter besparing van rekenwerk veelal zeer wel met een minder doeltreffende schatting volstaan worden, die tot weinig rekenwerk leidt.

Opmerking 1. Fisher definieert z_n direct met de de aangegeven waarde voor k, waarbij hij tussen ρ_n en $\lim \rho_n$ niet onderscheidt. Dus door

$$(E - 2\sqrt{E}\,\rho_n + 1)\, z_n = \sqrt{E}\,(\sqrt{E} - \rho_n)\, u_n + (1 - \rho_n)\, t_n \;.$$

Dan kan echter niet betoogd worden, dat $\lim n\alpha^2\sigma^2_{z_n} \geq 1$ zijn moet, daar z_n dan geen statistische grootheid is. (Immers ρ_n en E hangen evenals α van θ af!) Om dezelfde reden is de grootheid $(u_n\sqrt{E} - \rho_n t_n)/(\sqrt{E} - \rho_n)$ die asymptotisch zuiver en asymptotisch ongecorreleerd is met t_n in het algemeen geen statistische grootheid.

Opmerking 2. In het bewijs is reeds ondersteld, dat $\lim \rho_n$ bestaat. Het bewijs kan echter evenzo voor een willekeurige deelrij $n_1, n_2, \ldots\ldots$ der natuurlijke getallen gevoerd worden, waarop ρ_n wèl een limiet heeft. Daar èlk van deze limieten dan $= E$ moet zijn, volgt hieruit de existentie van $\lim \rho_n$ ook.

Corollarium. De correlatiecoefficient tussen twee asymptotisch doeltreffendste schattingen is = + 1.

Bewijs: Neem E = 1.

II. Zij $\eta = \eta(\theta)$ een eenwaardige continue fct van θ, waaruit θ bij iedere η (uit een bepaald interval) ondubbelzinnig kan worden opgelost: $\theta = \theta(\eta)$. Zij $f(x, \theta(\eta)) = f_1(x, \eta)$, $\varphi(x, \theta(\eta)) = \varphi_1(x, \eta)$, enz. Zij $y_n(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ de bij η behorende aannemelijkste schatting. Dan is

$$(56) \qquad y_n(x_1, \ldots\ldots, x_n) = \eta(t_n(x_1, \ldots\ldots, x_n))$$

d.w.z. y_n is dezelfde fct van t_n als η van θ is. M.a.w.

Stelling 5. De bepaling van de aannemelijkste schatting is invariant ten aanzien van een-eenduidige continue transformaties van de parameter.

Bewijs. Volgens onderstelling is voor alle $\theta = \theta(\eta)$, dus ook voor alle η :

$$\sum \varphi_1(x_i, \eta(t_n)) = \sum \varphi(x_i, t_n) \geq \sum \varphi(x_i, \theta(\eta)) = \sum \varphi_1(x_i, \eta)$$

Daar de bovenste grens in het linkerlid werkelijk bereikt wordt, is dit dus het maximum, d.w.z. aan (56) is voldaan.

Het komt dus op hetzelfde neer of men, b.v. bij het bepalen van de parameters ener normale verdeling, de aannemelijkste schatting zoekt van σ^2, dan wel van σ en deze quadrateert. Wel zal echter in het algemeen de "snelheid" waarmede een schatting tot de parameterwaarde nadert voor een fct van θ van die voor θ verschillen. Men heeft nl.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} = \dot\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \text{ dus } \mathcal{E}_\eta\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\right)^2 = \dot\theta^2 \mathcal{E}_\theta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2, \text{ dus } \lim_{n\to\infty} n\,\sigma^2_{(\eta)\,\underline{y}_n} = \theta^{-2} \lim_{n\to\infty} n\,\sigma^2_{(\theta)\,\underline{x}_n}$$

<u>Opmerking</u>: Dezelfde invariantie bestaat ten aanzien van ééneenduidige **en van** θ onafhankelijke transformaties van de variabele $\underline{x}$. Zij nl. $\underline{x} = x(\underline{y})$ een dergelijke transformatie en $\underline{y} = y(x)$ haar omkering en zij $f_1(y|\theta)$ de verdelingsdichtheid van $\underline{y}$, dan is

$$f_1(y|\theta) = f(x|\theta)\,\frac{dx}{dy}$$

en

$$L(x_1, \ldots\ldots, x_n, \theta) = L_1(y(x_1), \ldots\ldots, y(x_n), \theta) + \sum \ln \frac{dy(x)}{dx}$$

De tweede term van het rechterlid is echter onafhankelijk van θ en heeft dus geen invloed op de plaats van het maximum.

III. De doeltreffendheid van een statistische grootheid $\underline{u} = u_n(\underline{x}_1, \ldots\ldots, \underline{x}_n)$ kan volgens Fisher (1925) nog op een andere wijze uitgedrukt worden. Zij $\underline{u}$ asymptotisch normaal en asymptotisch zuiver, en zij $\psi = \psi_n(u_n, \theta)$ de logarithme van haar verdelingsdichtheid, $\mu_u = \mu_{\underline{u}_n}(\theta)$ haar gemiddelde en $\sigma_u = \sigma_{\underline{u}_n}(\theta)$ haar spreiding. Dan is

(56) $$\psi = -\frac{1}{2}\frac{(u-\mu_u)^2}{\sigma_u^2} - \frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma_u^2 + R$$

waarin

(57) $$\lim_{n\to\infty} \mu_u = \theta, \quad \lim_{n\to\infty} n\sigma_u^2 = \frac{1}{\alpha^2 E} \qquad (E = E(\theta) = \text{asymptotische doeltreffendheid})$$

terwijl R behoudens een kleine wh naar 0 gaat. We onderstellen dat de limietovergangen (57) "glad" zijn als fcts van θ, d.w.z. dat de overeenkomstige limietovergangen verkregen door naar θ te differentiëren, ook geldig zijn

(58.1) $$\lim_{n\to\infty} \dot\mu_u = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\dot\sigma_u}{\sigma_u} = -\frac{\dot\alpha}{\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\dot E}{E}$$

terwijl we omtrent $R = R_n(u, \theta)$ een gladheids- en kleinheidsvoorwaarde in de vorm

(58.2) $$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}\,\frac{\ddot R_n}{n} = 0$$

onderstellen ($\dot\alpha$ en $\dot E$ worden, evenals α en E zelf, eindig ondersteld).

Dan volgt uit (56):

$$\dot{\psi} = \frac{u-\mu_u}{\sigma_u}\frac{\dot{\mu}_u}{\sigma_u} + \frac{(u-\mu_u)^2}{\sigma_u^2}\frac{\dot{\sigma}_u}{\sigma_u} - \frac{\dot{\sigma}_u}{\sigma_u} + \dot{R}$$

$$-\ddot{\psi} = \frac{\dot{\mu}_u^2}{\sigma_u^2} - \frac{(u-\mu_u)}{\sigma_u}\frac{\ddot{\mu}_u}{\sigma_u} + 4\frac{(u-\mu_u)}{\sigma_u}\frac{\dot{\mu}_u}{\sigma_u}\frac{\dot{\sigma}_u}{\sigma_u} +$$

$$-\frac{(u-\mu_u)^2}{\sigma_u^2}\frac{\ddot{\sigma}_u}{\sigma_u} + 3\frac{(u-\mu_u)^2}{\sigma_u^2}\frac{\dot{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2} + \frac{\ddot{\sigma}_u}{\sigma_u} - \frac{\dot{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2} - \ddot{R}$$

Nemen we van beide leden de verwachting, dan is wegens $\mathcal{E}(\underline{u}-\mu_u)=0$ en $\mathcal{E}(\underline{u}-\mu_u)^2=\sigma_u^2$:

$$-\mathcal{E}\ddot{\underline{\psi}} = \frac{\dot{\mu}_u^2}{\sigma_u^2} + 2\frac{\dot{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2} + \mathcal{E}\ddot{R}$$

<u>Opmerking</u>: De voorwaarde van asymptotische normaliteit is sterker dan noodzakelijk. Zij kan vervangen worden door de tweede vergelijking (57) en (58.2).

Delen we beide leden door n en nemen we dan de limiet voor $n\to\infty$, dan krijgen we wegens (57), (58):

(59) $$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\mathcal{E}\ddot{\underline{\psi}} = \alpha^2$$

M.a.w. voor grote n is

(60) $$-\mathcal{E}\ddot{\underline{\psi}} \approx n\alpha^2 E$$

Is nu $\underline{z}_1,\ldots\ldots,\underline{z}_k$ een bij iedere toegelaten θ continu stochastisch stelsel grootheden met gezamelijke verdelingsdichtheid $g(z_1,\ldots\ldots,z_k|\theta)$, dan noemt Fisher

(61) $$-\mathcal{E}_\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln g(\underline{z}_1,\ldots\ldots,\underline{z}_k|\theta)$$

(in de onderstelling dat deze grootheid bestaat) de <u>hoeveelheid informatie</u>, die (met betrekking tot de parameter θ) in dit groothedenstelsel vervat is. Zij is altijd ≥ 0 , immers

(62) $$-\mathcal{E}_\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln g = -\int dz_1\ldots\ldots dz_k\, g\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln g = -\frac{\partial}{\partial\theta}\int dz_1\ldots\ldots dz_k\, g\,\frac{\partial \ln g}{\partial\theta} + \int dz_1\ldots\ldots dz_k\,\frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\partial \ln g}{\partial\theta} = \mathcal{E}\left(\frac{\partial \ln g}{\partial\theta}\right)^2$$

daar $\int dz_1\ldots dz_k\, g\,\frac{\partial \ln g}{\partial\theta} = \int dz_1\ldots dz_k\,\frac{\partial g}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\int dz_1\ldots dz_k\, g = 0$ is.

Zij heeft bovendien de belangrijke eigenschap, <u>additief</u> te zijn bij bijeenvoeging van stochastische <u>onafhankelijke</u> groothedenstelsels. Is nl. $\underline{z}_1',\ldots\ldots,\underline{z}_l'$ een dergelijk stelsel met verdelingsdichtheid g' , onafhankelijk van de vorige, dan is de verdelingsdichtheid van de $k+l$ grootheden tezamen $g(z_1,\ldots\ldots,z_k|\theta)\,g'(z_1',\ldots\ldots,z_l'|\theta) = g\,g'$, dus de hoeveelheid informatie daarin vervat:

(63) $-\mathcal{E}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln gg' = -\mathcal{E}\frac{\partial^2 \ln g}{\partial\theta^2} - \mathcal{E}\frac{\partial^2 \ln g'}{\partial\theta^2}$

De hoeveelheid informatie, vervat in één enkele waarneming van de grootheid $\underline{x}$ met verdelingsdichtheid $f = e^{\varphi}$ ¹) is volgens (23)

(23) $-\mathcal{E}\ddot{\varphi} = \mathcal{E}\dot{\varphi}^2 = \alpha^2$

Die vervat in een monster van n onafhankelijke waarnemingen is dus exact $n\alpha^2$.

Volgens (60) is dus de hoeveelheid informatie, vervat in de statistische grootheid $\underline{u}_n$ alléén, voor n ≫ 1 ongeveer $n\alpha^2 E$. De hoeveelheid informatie, vervat in een willekeurige statistische grootheid, die aan de gestelde eisen voldoet, is dus asymptotisch hoogstens gelijk aan die vervat in het gehele monster, en men kan bewijzen, dat dit - in verband met de onderlinge afhankelijkheid die verschillende grootheden $\underline{u}_n$ in het algemeen bezitten, vgl. ook pag. - voor een <u>willekeurig stelsel</u> van statistische grootheden, die alleen van $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ afhangen, het geval is, mits aan analoge voorwaarden als in het begin van III genoemd voldaan is. Daarentegen is de hoeveelheid informatie, vervat in de aannemelijkste schatting $\underline{t}_n$ van θ alléén, asymptotisch reeds gelijk aan die vervat in het gehele monster.

Fisher's tweede definitie van de "doeltreffendheid" E_n ener statische grootheid $\underline{u}_n$, fct van $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ alleen (of van meer van zulke grootheden tezamen) is nu: E_n is de verhouding van de hoeveelheid informatie vervat in $\underline{u}_n$, tot die vervat in het gehele monster, d.w.z.

(64) $E_n = \dfrac{\mathcal{E}\ddot{\psi}}{n\mathcal{E}\ddot{\varphi}}$

Terwijl de asymptotische overeenstemming der beide definities, t.w.

(65) $E = \lim E_n$

alleen onder beperkende voorwaarden voor $\underline{u}_n$ bewezen is, handhaaft Fisher de nieuwe defintie ook als daaraan niet voldaan is, in het bijzonder voor kleine monsters. Op te merken valt, dat echter nog <u>niet</u> bewezen is, dat $E_n \leq 1$ moet zijn. Dit kan echter op grond van (64), of wat daarmede aequivalent is:

(64) $E_n = \dfrac{\mathcal{E}\dot{\psi}^2}{n\mathcal{E}\dot{\varphi}^2} = \dfrac{\mathcal{E}\dot{\psi}^2}{\mathcal{E}\dot{L}^2}$

----

¹) Deze wordt door Fisher ook wel de "intrinsic accuracy" van $f(x)$ genoemd.

onafhankelijk van (65) zeer eenvoudig geschieden. Zelfs blijft dit geldig, als men de voorwaarde, dat $x_1, \ldots, x_n$ onderling stochastisch onafhankelijk zijn laat vallen; nodig is slechts dat $z_1, \ldots, z_k$ eenwaardige fcts van $x_1, \ldots, x_n$ alléén zijn, die (in analytische, niet noodzakelijk in stochastische zin) onderling onafhankelijk zijn. ')

Daarmede is Fisher's gebruik van de intuïtief sterk aansprekende term " hoeveelheid informatie" en "doeltreffendheid" volledig gerechtvaardigd. Resumerende hebben we namelijk:

De hoeveelheid informatie, vervat in een stelsel stochastische grootheden $z_1, \ldots, z_k$, die bij iedere toegelaten θ een gezamelijke verdelingsdichtheid bezitten is $\geqq 0$; zij is additief bij bijeenvoeging van twee zulke stelsels die stochastisch onafhankelijk zijn; zijn $z_1, \ldots, z_k$ eenwaardige fcts van n andere grootheden $x_1, \ldots, x_n$ alleen (deze kunnen al dan niet stochastisch afhankelijk zijn), dan is de hoeveelheid informatie, vervat in $z_1, \ldots, z_k$ hoogstens gelijk aan die vervat in $x_1, \ldots, x_n$. De verhouding E_n dezer hoeveelheden is dus een getal tussen 0 en 1, de"doeltreffendheid" van het stelsel $z_1, \ldots, z_k$; de doeltreffendheid van de aannemelijkste schatting alleen al heeft onder vrij zwakke voorwaarden 1 tot limiet voor $n \to \infty$.

IV. De theorie van de aannemelijkste schatting is, in de vorm waarin we deze ontwikkeld hebben, nog aan een aantal restricties gebonden, die met geringe wijzigingen grotendeels kunnen worden opgeheven. Deze zijn:

1. De onderstelling, dat bij iedere waarneming slechts één stochastische grootheid $\underline{x}$ wordt waargenomen;
2. De onderstelling dat de bij de verschillende waarnemingen waargenomen grootheden $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ alle dezelfde verdelingsfct bezitten;
3. De onderstelling dat de verschillende waarnemingen stochastisch onafhankelijk zijn;

') Zijn nl. $z_{k+1}, \ldots, z_n$ onderling van $z_1, \ldots, z_k$ onafhankelijk eenwaardige fcts van $x_1, \ldots, x_n$, zo dat de functionaaldeterminant Δ van $x_1, \ldots, x_n$ naar $z_1, \ldots, z_n$ overal $\neq 0$ (b.v. overal > 0) is, dan is

$$\dot\psi = \frac{\int\cdots\int \dot L\, e^L \Delta\, dz_{k+1} \ldots dz_n}{\int\cdots\int e^L \Delta\, dz_{k+1} \ldots dz_n} = \mathcal{M} \dot L$$

het gemiddelde van $\dot L$ behorende bij de verdeling met $e^{-\psi} e^L \Delta\, dz_{k+1} \ldots dz_n$, $\left(e^{\psi} = \int\cdots\int e^L \Delta\, dz_{k+1} \ldots dz_n\right)$. Dus is $\dot\psi^2$ hoogstens gelijk aan het overeenkomstige gemiddelde van $\dot L^2$: $(\mathcal{M} \dot L)^2 \leqq \mathcal{M} \dot L^2$.

Dit blijft zo als men met e^{ψ} (d.i. de noemer van $\dot\psi$) en met $dz_1 \ldots dz_k$ vermenigvuldigt en integreert. Dit geeft echter

$$\mathcal{E} \dot\psi^2 \leqq \mathcal{E} \dot L^2 \qquad \text{d.w.z.} \quad E_n = \frac{\mathcal{E} \dot\psi^2}{\mathcal{E} \dot L^2} \leqq 1$$

4. De beperking tot continue (differentieerbare) verdelingsfcts;
5. De beperking tot één onbekende parameter.

Indien bij iedere waarneming 2 of meer grootheden b.v. $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ worden waargenomen, wordt de verdelingsdichtheid $f(x/\theta)$ vervangen door $f(x,y,z/\theta)$ (terwijl het integraalelement dx uiteraard door $dx\,dy\,dz$ vervangen wordt). De theorie blijft overigens onveranderd.

Indien de verdelingsfcts der opeenvolgende waarnemingen kunnen verschillen, maar alle op bekende wijze van een gemeenschappelijke parameter θ afhangen, zij (b.v. voor telkens twee waargenomen $\underline{x}, \underline{y}$) $f_k(x_k, y_k/\theta)$ de verdelingsdichtheid van de k-de waarneming.
De verdelingsdichtheid van het monster is dan

$$e^{L(x_1,y_1;\ldots\ldots;x_n,y_n;\theta)} = \prod_{k}^{n} f_k(x_k, y_k|\theta),$$

terwijl het integraalelement $dx_1 dy_1 \ldots dx_n dy_n$ is. Indien bovendien de waarnemingen stochastisch afhankelijk kunnen zijn, zal men $f_k(x_k, y_k|\theta)$ door de voorwaardelijke verdelingsdichtheid van de k-de waarneming bij gegeven voorafgaande waarnemingen moeten vervangen, dus door een fct van de vorm $f_k(x_k, y_k|\theta; x_1, y_1; \ldots\ldots; x_{k-1}, y_{k-1})$.
De bewijzen zijn gevoerd in de speciale onderstelling, dat deze fct niet van $x_1, \ldots\ldots, y_{k-1}$ en van k afhangt. Deze onderstelling is voornamelijk gebruikt om te bewijzen, dat L' asymptotisch normaal is en kan dan ook vervallen, indien de asymptotische normaliteit van L' (benevens de nodige "gladheids"-voorwaarden) behouden blijft.

Ook de beperking tot continue differentieerbare verdelingsfcts is van weinig betekenis. Zij is voornamelijk gemaakt omdat zij het vaakst voorkomt, en gebruikt voor de definitie van $\varphi(x,\theta) = \ln f(x|\theta)$. Deze fct φ wordt gebruikt voor het differentiëren naar θ van de verwachting van verschillende stochastische grootheden b.v. $u(\underline{x},\theta)$, die ook van θ kunnen afhangen, nl.

$$(66) \qquad \frac{d}{d\theta}\,\mathcal{E}\,u(\underline{x},\theta) = \mathcal{E}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}u(\underline{x},\theta) + \dot{\varphi}(\underline{x},\theta)\,u(\underline{x},\theta)\right\}$$

Bij een discrete verdeling, waarbij $\underline{x}$ dus aftelbaar veel waarden aanneemt met whn P_x, blijft (66) geldig als men eenvoudig $\varphi_x = \ln P_x$ neemt. Dit zou bij een continue verdeling overeenkomen met $\varphi = \ln f + \ln dx$, waarbij de tweede term voor $dx \to 0$ naar $-\infty$ zou gaan, maar deze term heeft op (66) geen invloed, daar hij toch niet van θ afhangt, weshalve men bij continue verdelingen

$\varphi = \ln f$ en bij discrete $\varphi = \ln P$ kan nemen.

De beperking ten slotte tot één enkele parameter kan eveneens worden opgeheven, maar vereist behalve een wijziging in de bewijzen der resultaten ook een wijziging in hun formulering. Wegens het veelvuldig gebruik zetten we deze nog kort uiteen, waarbij we eenvoudigheidshalve de overige beperkingen gehandhaafd denken.

We beschouwen dus wederom n stochastisch onafhankelijke waarnemingen $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ van een grootheid $\underline{x}$, die bij gegeven waarden van k parameters $\theta_\lambda (\lambda = 1, \ldots, r)$ een verdelingsdichtheid $f(x|\theta_1, \ldots, \theta_r) = e^{\varphi(x, \theta_1, \ldots, \theta_r)}$ bezit. In plaats van $\dot{\varphi}$ treedt hier $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_\lambda}$, waarvoor we φ^λ schrijven, en in plaars van $\ddot{\varphi}$ $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_\lambda \partial \theta_\mu} = \varphi^{\lambda\mu}$. We hebbendan analoog met (22) en (23)

$$\mathcal{E} \varphi^\lambda = 0 \tag{67}$$

$$(\varphi^{\lambda\mu} = \varphi^{\mu\lambda})$$

$$-\mathcal{E} \varphi^{\lambda\mu} = \mathcal{E} \varphi^\lambda \varphi^\mu = \alpha^{\lambda\mu} \tag{68}$$

(voor $r = 1$ treedt hier α^{11} in plaats van de vroegere α^2). De analoog gedefinieerde grootheden L^λ en $L^{\lambda\mu}$ zijn, strikt genomen, overbodig. De onderstelling $\alpha^2 > 0$ wordt hier vervangen door de eis, dat de matrix $\alpha^{\lambda\mu}$ positief definiet is; haar determinant is dan > 0 . In plaats van $1/\alpha^2$ treedt hier de reciproke matrix $A_{\lambda\mu}$ van $\alpha^{\lambda\mu}$. Deze heeft in de μ-de rij en de λ-de kolom het quotient van de algebraische minor van $\alpha^{\lambda\mu}$ en de determinant dezer getallen.

In plaats van één schattende grootheid $\underline{t}_n = t_n(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ (voor iedere n) treden er hier k: $\underline{t}_{n\lambda} = t_{n\lambda}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ t.w. die waarden $\hat{\theta}_\lambda$ der θ_λ die L maximaal maken. Onder analoge onderstellingen als te voren kan men dan bewijzen:

A. De aannemelijkste schattingen $\underline{t}_{n\lambda}$ convergeren bijna zeker naar de overeenkomstige ware parameterwaarden θ_λ ("bruikbaarheid");

B. Hun verwachtingen $\mathcal{E}\underline{t}_{n\lambda}$ convergeren naar de overeenkomstige θ_λ ("asymptotische zuiverheid");

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}\underline{t}_{n\lambda} = \theta_\lambda \tag{69}$$

C. Zij zijn (gezamelijk) asymptotisch normaal verdeeld met een covariantiematrix $T_{n\lambda\mu}$ die na vermenigvuldiging met n tot $A_{\lambda\mu}$ convergeert (vgl. met stelling 2):

$$\lim_{n\to\infty} n\, T_{n\lambda\mu} = \lim_{n\to\infty} n\, \mathcal{E}(\underline{t}_{n\lambda} - \mathcal{E}\underline{t}_{n\lambda})(\underline{t}_{n\mu} - \mathcal{E}\underline{t}_{n\mu}) = A_{\lambda\mu} \tag{70}$$

("complementariteit").

D. Is $U_{n\lambda\mu}$ de covariantiematrix van een asymptotisch zuiver stelsel statistische grootheden $u_{n\lambda}$ die alleen van $x_1, \ldots, x_n$ afhangen, dan is $\lim_{n\to\infty} n(U_{n\lambda\mu} - T_{n\lambda\mu})$ positief definiet of semi-definiet ("asymptotische doeltreffendstheid");

E. Is $u_n^{\lambda\mu}$ de reciproke matrix van $U_{n\lambda\mu}$ (zo deze bestaat), en definieert men de doeltreffendheid van de $u_{n\lambda}$ door

(71) $$E_n = \frac{1}{rn} \sum_{1}^{r} \sum_{1}^{r} {}^{\mu} A_{\lambda\mu} u_n^{\lambda\mu}$$

dan is $0 \leq E_n \leq 1$, en voor de aannemelijkste schatting $\lim_{n\to\infty} E_n = 1$.

7. <u>Draagwijdte der theorie</u>.

Hoewel thans de belangrijkste resultaten der theorie van R.A. Fisher voor een zeer uitgebreide klasse van gevallen juist bevonden zijn is het toch gewenst, ons rekenschap te geven van de draagwijdte van de theorie.

Afgezien van het geenszins denkbeeldige gevaar - we zullen er nog voorbeelden van geven -, dat men de theorie toepast in gevallen waarin zij niet geldt, bestaat het voornaamste bezwaar tegen de meeste toepassingen der theorie daarin, dat men, na aannemelijkste waarde van een parameter berekend te hebben, deze nu ook inderdaad "aanneemt", d.w.z. doet alsof deze de ware is - we onderstellen immers in deze gehele paragraaf dat er een ondubbelzinnig bepaalde ware waarde bestaat - terwijl men toch weet dat deze er in het algemeen van zal afwijken. Voor verdere berekeningen die men op de hypothetische parameter waarde wil baseren - en slechts met dit doel wordt deze immers bepaald - wordt dus de afwijking van de aannemelijkste waarde van de ware volledig verwaarloosd. Men geeft er zich dan geen rekenschap van, of de aannemelijkste waarde wel voldoende "aannemelijk" is, en laat de mogelijkheid dat de ware waarde met een slechts weinig minder aannemelijke overeenstemt volledig buiten beschouwing. Een zuiverder methode krijgt men, wanneer men de aannemelijkste schatting maar op <u>alle</u> waarden die - in een nader te preciseren zin van dit begrip - "voldoende aannemelijk" zijn. In de nieuwere statistische methoden, zoals in de theorie der betrouwbaarheidsgrenzen, gaat men dan ook inderdaad deze richting uit, al stuit een consequente toepassing ervan voor alsnog doorgaans op te grote mathematische moeilijkheden.

Voorts zijn praktische belangrijke beperkingen der theorie daarin gelegen, 1° dat zij alleen asymptotisch voor $n \to \infty$

geldige, dus practisch slechts voor grote n vrij nauwkeurige resultaten geeft, 2° dat zij alleen op problemen toepasbaar is, die tot het schatten van een parameterwaarde herleid kunnen worden, terwijl het type der verdelingsfct als volledig vaststaand moet worden aangenomen, 3° dat de aannemelijkste schatting doorgaans bepaald is als oplossing ener impliciete vgl. welker oplossing doorgaans op grote, vaak onoverkomelijke wiskundige moeilijkheden stuit.

Desondanks is de methode in vele gevallen - vooral wanneer de boven bedoelde zuiverder methoden niet uitvoerbaar zijn - zeer wel bruikbaar, en doet juist de moeilijkheid, Fisher's resultaten exact te formuleren en te bewijzen, de bewondering voor zijn geniale intuitie bij beperkte wiskundige kennis slechts stijgen.

8. Toepassingen.

a. Schatting van het gemiddelde ener normale verdeling bij gegeven spreiding. Daar deze gegeven is, kan zij zonder beperking (door haar als maateenheid te kiezen) = 1 genomen worden.

$$f(x|\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}$$

$$\varphi(x,\theta)=-\tfrac{1}{2}(x-\theta)^2-\tfrac{1}{2}\ln 2\pi$$

$$\dot\varphi=x-\theta\,,\quad \ddot\varphi=-1\,,\quad \alpha(\theta)^2=\mathcal{E}(\underline{x}-\theta)^2=1\;(\text{hier onafhankelijk van }\theta)$$

$$L=-\tfrac{1}{2}\sum^{i}(x_i-\theta)^2-\tfrac{n}{2}\ln 2\pi$$

$$\dot L=\sum^{i}(x_i-\theta)=n(m-\theta)\,,\quad m=\tfrac{1}{n}\sum^{i}x_i$$

Dus $\underline{\hat\theta}=\underline{t}_n=\underline{m}$, $\mathcal{E}\,\underline{m}=\mu$, $\sigma^2_{\underline{m}}=\frac{1}{n}$ dus $n\sigma^2_{\underline{m}}=\frac{1}{\alpha^2}$. Deze betrekkingen gelden hier exact reeds voor eindige n. Bovendien is hier $\underline{m}$ exact (niet slechts asymptotisch voor $n\to\infty$) normaal verdeeld. Immers de karakteristieke fct van een normaal (μ,σ)-verdeelde variabele $\underline{x}$ is $Z_{\underline{x}}(\tau)=e^{\mu\tau+\frac{1}{2}\sigma^2\tau^2}$, die van $\underline{s}_n=\sum^{i}\underline{x}_i$ als de $\underline{x}_i$ onderling onafhankelijk zijn en normaal (μ,σ), is $Z_{\underline{s}_n}(\tau)=\{Z_{\underline{x}}(\tau)\}^n=e^{n\mu\tau+\frac{1}{2}n\sigma^2\tau^2}$, en die van $\underline{m}=n^{-1}\underline{s}_n$ is $Z_{\underline{s}_n}(n^{-1}\tau)=e^{\mu\tau+\frac{1}{2}\sigma^2 n^{-1}\tau^2}$; $\underline{m}$ is dus normaal $(\mu,\sigma^2 n^{-1})$ verdeeld.

b. Schatting van de spreiding ener normale verdeling met gegeven gemiddelde (dat zonder beperking = 0 genomen kan worden). We schatten liever $\theta=\sigma^2$

$$f(x|\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2/\theta}$$

$$L=-\frac{1}{2\theta}\sum x_i^2-\frac{n}{2}\ln 2\pi\theta=-\frac{n}{2}\left(\frac{m_2}{\theta}+\ln 2\pi\theta\right)$$

waarin $m_2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2$ het tweede moment (t.o.v. 0) is.

$$\dot{L} = \frac{n}{2}\left(\frac{m_2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}\right)$$

dus $\dot{L} = 0$ voor $\hat{\theta} = m_2$. De aannemelijkste schatting is dus m_2 ; niet zoals men wellicht zou verwachten $s^2 = m_2 - m_1^2$ (Dit komt doordat gegeven is, dat het ware gemiddelde 0 is, zodat m_1 daarvan een slechtere schatting is). Gaat men in de ruimte der x_i tot poolcoördinaten over, dan is $r = \sqrt{\sum x_i^2} = \sqrt{n m_2}$ terwijl men over $n-1$ hoekcoördinaten kan integreren, daar deze in de integrand e^L niet voorkomen. Na de integratie is het integraalelement

$$C_1(\theta)\, e^L\, r^{n-1}\, dr = \frac{C_1(\theta)}{\sqrt{(2\pi\theta)^n}}\, e^{-\frac{n}{2}\frac{m_2}{\theta}} \sqrt{n m_2}^{\,n-1}\, d\sqrt{n m_2} =$$

$$= C_2(\theta)\, e^{-u}\, u^{\frac{n-2}{2}}\, du \qquad \left(u = \frac{n m_2}{2\theta} > 0\right)$$

Bij integratie over u van 0 tot ∞ moet dit 1 geven, dus $C_2(\theta) = \frac{1}{\frac{n-2}{2}!}$ Verder is:

$$\mathcal{E}\hat{\theta} = \mathcal{E} m_2 = \mathcal{E}\frac{1}{n}\sum x_i^2 = \mathcal{E} x^2 = \theta$$

De schatting $\hat{\theta}$ is dus (niet slechts asymptotisch) zuiver. Voorts is

$$\mathcal{E}\hat{\theta}^2 = \frac{1}{\frac{n-2}{2}!}\int_0^\infty \left(\frac{2\theta}{n}\right)^2 e^{-u}\, u^{\frac{n}{2}+1}\, du = \frac{n+2}{n}\theta^2$$

$$\sigma_{\hat{\theta}}^2 = \frac{n+2}{n}\theta^2 - \theta^2 = \frac{2}{n}\theta^2$$

Inderdaad is $\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}\right)$, dus $\mathcal{E}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4\theta^4}\left(\tilde{\mu}_4 - 2\theta\tilde{\mu}_2 + \theta^2\right) = \frac{1}{2\theta^2} = \alpha(\theta)^2$ daar bij de normale verdeling $\tilde{\mu}_4 = 3\sigma^4 (= 3\theta^2)$ is. Dus $n\sigma_{\hat{\theta}}^2 = \frac{1}{\alpha^2}$ geldt ook hier exact, en niet slechts asymptotisch.

Hadden we $\theta' = \sigma$ in plaats van $\theta = \sigma^2$ geschat, dan zou evenzo gevonden zijn: $\hat{\theta}' = \sqrt{m_2}$. We hadden dan $\mathcal{E}\hat{\theta}'^2 = \theta'^2$ exact, maar

$$\mathcal{E}\hat{\theta}' = \mathcal{E}\sqrt{m_2} = \frac{1}{\frac{n-2}{2}!}\int_0^\infty \theta'\sqrt{\tfrac{2}{n}u}\; e^{u}\, u^{\frac{n-2}{2}}\, du = \frac{\sqrt{\frac{2}{n}}\,\theta'}{\frac{n-2}{2}!}\,\frac{n-1}{2}!$$

gevonden, hetgeen niet exact $= \theta'$ is, (zodat) deze schatting slechts asymptotisch zuiver is. Daar hier $\alpha'(\theta')^2 = \frac{2}{\theta'^2}$ gevonden wordt en

$$\lim_{n\to\infty} n\sigma_{\hat{\theta}'}^2 = \lim_{n\to\infty} n\left\{\theta'^2 - (\mathcal{E}\hat{\theta}')^2\right\} = \frac{1}{\alpha'(\theta')^2} = \frac{\theta'^2}{2}$$

moet zijn, is voor $n \gg 1$

$$\frac{\mathcal{E}\hat{\theta}'}{\theta'} = \sqrt{\frac{2}{n}}\,\frac{\frac{n-1}{2}!}{\frac{n-2}{2}!} \approx \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \approx 1 - \frac{1}{4n}$$

hetgeen/ nl. met de formule van Stirling:

$$\ln z! = z\ln z - z + \tfrac{1}{2}\ln 2\pi z + \tfrac{1}{12z} + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{z^2}\right)$$

/ ook direct

(voor grote z) gevonden kan worden. Afgezien van de correctie term $\frac{1}{4n}$ kan men dit resultaat nog eenvoudiger aldus bereiken:

$$\frac{\frac{n-1}{2}!}{\frac{n-2}{2}!} \approx \frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n-1}{2}!} \approx \sqrt{\frac{\frac{n-1}{2}!}{\frac{n-2}{2}!} \cdot \frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n-1}{2}!}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$$

Men heeft dus

$$\mathcal{E}\,\underline{\hat{\theta}}' \approx \theta' \sqrt{1-\frac{1}{2n}}\ , \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}\,\underline{\hat{\theta}}' = \theta'$$

(asymptotische zuiverheid). Ook is hier noch $\hat{\theta}$ noch $\hat{\theta}'$ exact (bij eindige n) normaal verdeeld.

c. Schatting van gemiddelde en spreidingsquadraat ener normale verdeling

$$f(x/\theta_1\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\theta_1)^2}{\theta_2}}$$

$$\varphi = -\frac{1}{2}\frac{(x-\theta_1)^2}{\theta_2} - \frac{1}{2}\ln 2\pi\theta_2$$

$$\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1} = \frac{x-\theta_1}{\theta_2}\ , \quad \varphi_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{(x-\theta_1)^2}{\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2}\right\}$$

$$\alpha^{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}\,\underline{\varphi_1} & \mathcal{E}\,\underline{\varphi_1\varphi_2} \\ \mathcal{E}\,\underline{\varphi_1\varphi_2} & \mathcal{E}\,\underline{\varphi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_2^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\theta_2^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{n}\sum \varphi_1(x_i) = \frac{m-\theta_1}{\theta_2}\ , \quad \frac{1}{n}\sum \varphi_2(x_i) = \frac{1}{2}\left\{\frac{s^2+(m-\theta_1)^2}{\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2}\right\}$$

daar $\sum(x_i-\theta_1)^2 = ns^2 + n(m-\theta_1)^2$, waarin $m = \frac{1}{n}\sum x_i$, $s^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)^2$ is.

$$\hat{\theta}_1 = m\ , \quad \hat{\theta}_2 = s^2 + (m-\hat{\theta}_1)^2 = s^2$$

In tegenstelling tot probleem b. vinden we hier dus niet het ongereduceerde maar het gereduceerde moment van de orde 2.

$$\mathcal{E}\,\underline{\hat{\theta}_1} = \mathcal{E}\,\underline{m} = \theta_1\ , \quad \mathcal{E}\,\underline{\hat{\theta}_2} = \mathcal{E}\,\underline{s}^2 = \frac{n-1}{n}\theta_2$$

We zien dus dat $\hat{\theta}_1 = m$ en niet $\hat{\theta}_2$ maar $\frac{n}{n-1}\hat{\theta}_2 = \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i-m)^2$ reeds voor eindige n zuiver is. (Asymptotisch is ook $\hat{\theta}_2$ zelf zuiver, daar lim $(n-1)/n = 1$ is). Daarom wordt doorgaans aan $\frac{n}{n-1}s^2$ boven s^2 als schatting van $\theta_2 = \sigma^2$ de voorkeur gegeven, hoewel laatstgenoemde de aannemelijkste schatting is. In verband met de mogelijkheid van verwarring is het niet aan te bevelen om, zoals vaak gedaan wordt, in plaats van het spreidingsquadraat $s^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-m)^2$ van het monster, de zuivere schatting van het spreidingsquadraat $\sigma^2 = \mathcal{E}(\underline{x}-\mu)^2$ met het symbool s^2 aan te duiden. Wij houden ons, evenals o.a. Kendall en Cramèr aan de notatie $s^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-m)^2$.

Om de spreidingsmatrix te berekenen, merken we op, dat bij normale steekproeven $\underline{m}$ en $\underline{s}^2$ onderling onafhankelijk verdeeld zijn, en wel $\underline{m}$ normaal $(\mu, \sigma n^{-1/2})$ en $-\frac{n}{2}\frac{s^2}{\sigma^2}$ volgens de $\Gamma(\frac{n-1}{2}) = \frac{n-3}{2}!$ - verdeling. (Bewijs zie hierna).

Daaruit volgt (vgl. pag. 113 - Whr 202) dat het spreidingsquadraat van $\frac{n}{2}\frac{s^2}{\sigma^2}$ $\frac{n-1}{2}$, dus dat van $\underline{s}^2$ $2\frac{n-1}{n^2}\sigma^4$ is. Derhalve is

$$\sigma_{\hat{\theta}_\lambda \hat{\theta}_\mu} = \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_1} & \sigma_{\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2} \\ \sigma_{\hat{\theta}_2 \hat{\theta}_1} & \sigma_{\hat{\theta}_2 \hat{\theta}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_2 n^{-1} & 0 \\ 0 & 2(n-1)n^{-2}\theta_2^2 \end{pmatrix}$$

en

$$\lim_{n\to\infty} n\,\sigma_{\hat{\theta}_\lambda \hat{\theta}_\mu} = \begin{pmatrix} \theta_2 & 0 \\ 0 & 2\theta_2^2 \end{pmatrix}$$

Dit is inderdaad de reciproke matrix van $\alpha^{\lambda\mu}$.

Het bewijs van bovenstaande bewering aangaande de verdeling van de steekproefspreiding s^2 van steekproeven uit een normale verdeling verloopt als volgt:

Het el van de verdelingsfct van een normaal (μ, σ) monster is [1])

$$:: e^{-\frac{1}{2}\sum\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}} dx_1 \dots dx_n = e^{-\frac{n}{2}\frac{s^2+(m-\mu)^2}{\sigma^2}} dx_1 \dots dx_n$$

We kiezen als coördinaten m, s en $n-2$ hoeken, die tezamen een el $d\Omega_{n-2}$ van een $(n-2)$-dimensionale sfeer met straal 1 vormen. Dan is $dx_1 \dots dx_n :: dm.s^{n-2}ds\,d\Omega_{n-2}$. Over deze hoeken kan geintegreerd worden, daar de integrand er niet van afhangt. We krijgen dan een el

$$:: e^{-\frac{n}{2}\frac{s^2+(m-\mu)^2}{\sigma^2}} dm\, s^{n-2}ds :: dF_{N(0,1)}\left(\frac{m-\mu}{\sigma}\right) . dF_{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\left(\frac{n}{2}\frac{s^2}{\sigma^2}\right)$$

hetgeen te bewijzen was.

Substitueren we in de gevonden aannemelijkste schattingen

$$\hat{\theta}_1 = \underline{m} = \frac{1}{n}\sum_i \underline{x}_i \quad , \hat{\theta}_2 = s^2 = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - m^2$$

$n=1$, dan krijgen we, $\underline{x}$ voor $\underline{x}_1$ schrijvende:

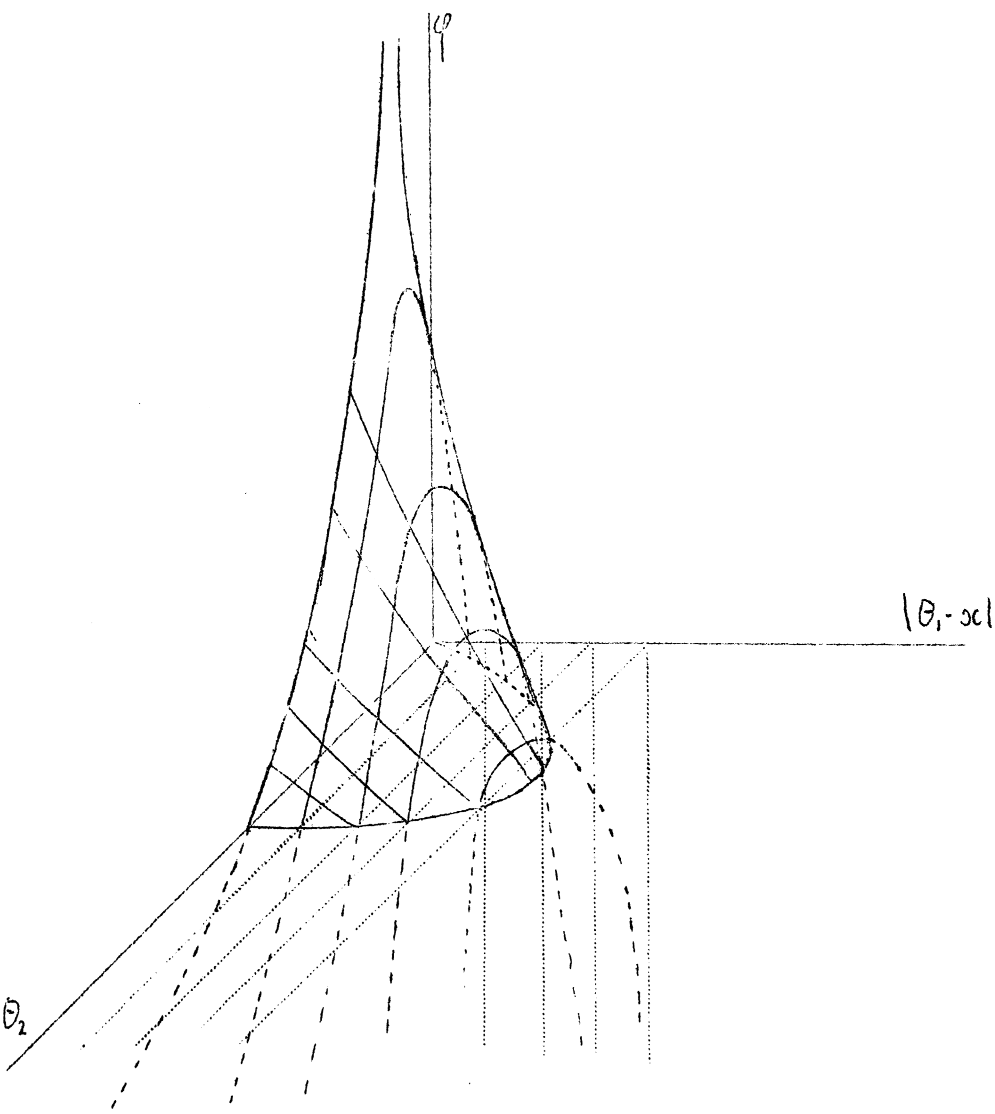
$$\underline{\hat{\theta}}_1 = \underline{x} \quad , \underline{\hat{\theta}}_2 = 0$$

De aannemelijkste schatting uit één waarneming ware dus: voor het gemiddelde de gevonden waarde, voor de spreiding 0. Dit houdt de hypothese in, dat de variabele éénwaardig verdeeld is (vgl. p. 81, Whr 170), d.w.z. geen andere dan de gevonden waarde (behoudens een wh 0) kan voorkomen. Dit is natuurlijk een conclusie, die wel niemand uit één waarneming

---

[1]) Symbool :: betekent: is op een constante na gelijk aan.

zou trekken. Echter is de conclusie onjuist, daar de gevonden waarden L, d.i. in dit geval φ niet maximaal, maar onbepaald maken (teller en noemer van de eerste **breuk** worden beide 0, de tweede term wordt $+\infty$). De waarde waartoe φ nadert als men θ_1 tot x en θ_2 tot 0 laat naderen hangt af van de weg in het (θ_1, θ_2)-vlak, waarlangs dit geschiedt. Neemt men eerst $\theta_2 = 0$, $\theta_1 \neq x$, dan wordt $\varphi = -\infty$; neemt men eerst $\theta_1 = x$, $\theta_2 \neq 0$ en dan $\theta_2 \to 0$, dan wordt $\varphi = +\infty$. Er kan dus geen maximum optreden. Voor $n = 1$ bestaat er dus geen "eigenlijk" aannemelijkste schatting (d.w.z. een waarbij de verdeling normaal, dus $\theta_2 \neq 0$ blijft). Bij elke schatting $(\theta_{10}, \theta_{20})$ is de schatting $(x, \frac{1}{2}\theta_{20})$ zo $\theta_{20} > 0$ en (x, ε) zo $\theta_{20} = 0$, $\theta_{10} \neq x$ en $\varepsilon > 0$ is, aannemelijker (Vgl. figuur).



d. Schatting van het gemiddelde ener verdeling van Poisson.

$$P_{\underline{x}} = e^{-\alpha}\frac{\alpha^{\underline{x}}}{\underline{x}!}$$

$$L = \sum_{i}^{n} \ln P_{\underline{x}_i} = -n\alpha + \sum \underline{x}_i \ln\alpha - \sum \ln \underline{x}_i! = n(\underline{m}\ln\alpha - \alpha) - \sum \ln \underline{x}_i!$$

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha} = n(\underline{m}\,\alpha^{-1} - 1)$$

De aannemelijkste schatting is dus $\hat{\alpha} = \underline{m}$ mits $\underline{m} > 0$ is. Deze is (zoals altijd als $\underline{m}$ μ schat) zuiver, en het spreidingsquadraat is α/n .

e. Schatting van de parameter p ener verdeling van Bernoulli.

$$P_{\underline{x}} = \binom{N}{\underline{x}} p^{\underline{x}} q^{N-\underline{x}}$$

$$L = \sum^i (\underline{x}_i \ln p + (N-\underline{x}_i)\ln q) + \sum^i \ln \binom{N}{\underline{x}_i} = n(\underline{m} \ln p/q + N \ln q) + \sum^i \ln\binom{N}{\underline{x}_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = n\left(\frac{m}{p} - \frac{N-\underline{m}}{q}\right)$$

Dus

$$\underline{\hat{p}} = \frac{\underline{m}}{N} \quad , \quad \underline{\hat{q}} = 1 - \frac{\underline{m}}{N}$$

f. Schatting van een plaatsbepalende parameter door gemiddelde of mediaan.

Zij gegeven een 3 maal continu differentiëerbare verdelingsfct $F_0(x)$, met dichtheid $f_0(x) = e^{\varphi_0(x)}$, $f(x|\theta) = f_0(x-\theta)$, terwijl verder de in het begin van § 5 pag. 201 (Whr 290) gemaakte onderstellingen over de waarde van $f(x)$ aan de uiteinden van het interval, dat x doorloopt, uiteraard eveneens gelden (i.h.b. zal gebruikt worden, dat $x f(x)$ aan de uiteinden van het interval naar nul gaat). Dan is $L = \sum \varphi_0(x_i - \theta)$, $\dot{L} = -\sum \varphi_0'(x_i - \theta)$. De oplossing van de vgl. $\sum \varphi_0'(\underline{x}_i - \underline{\hat{\theta}}) = 0$ naar $\underline{\hat{\theta}}$ is meestal praktisch niet uitvoerbaar. Men zal dan een andere schatting voor θ toepassen, b.v. het gemiddelde m of als $n = 2r+1$ oneven is de mediaan $\underline{c}$ (ook wel centrale waarde genoemd) van het monster. Voor het gemiddelde μ en de mediaan γ der gegeven verdeling geldt

$$\mu = m_0 + \theta \qquad \gamma = c_0 + \theta$$

wanneer

$$m_0 = \mathcal{E}_0 \underline{x} = \int e^{\varphi_0(x)} dx$$

en c_0 bepaald uit

$$F_0(c_0) = \tfrac{1}{2} \ ,$$

bekende getallen zijn.

We willen de asymptotische doeltreffendheid van $\underline{m} - m_0$ resp. $\underline{c} - c_0$ als schattingen van θ bepalen.

Het gemiddelde $\underline{m}$ is asymptotisch normaal met verwachting μ en spreiding $\sigma/\sqrt{n}$, waarin σ de spreiding van $\underline{x}$ is, die bij alle waarden dezelfde en bij $\theta = 0$ gegeven, dus bekend is:

$$\lim n\, \sigma^2_{\underline{m} - m_0} = \lim n\, \sigma^2_{\underline{m}} = \sigma^2$$

Voorts is $\dot{\underline{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_0(\underline{x}-\theta) = -\varphi_0'(\underline{x}-\theta)$, dus

$$\mathcal{E}_\theta \dot{\underline{\varphi}}^2 = \int e^{\varphi_0(x-\theta)} \varphi_0'(x-\theta)^2 \, dx = \mathcal{E}_0 \varphi_0'^2 = \alpha^2$$

onafhankelijk van θ . De asymptotische doeltreffendheid van $\underline{m} - m_0$ is dus

$$E_{\underline{m}} = \frac{1}{\sigma^2 \alpha^2}$$

Om de asymptotische doeltreffendheid van de mediaan te bepalen volgen we de methode van blz. 217 (Whr 306). We zullen daarbij gebruik maken van een stelling die van Laplace afkomstih is en die in de hier te gebruiken formulering inhoudt: is de logarithme $\psi(x)$ van de verdelingsdichtheid van de gedaante $n\psi_1(x) + \psi_2(x)$; heeft $\psi_1(x)$ een absoluut maximum bij $x = x_0$, waar ψ_1 2 maal continu differentieerbaar is (zodat $\psi_1'(x_0) = 0$, $\psi_1''(x_0) \leq 0$ is) en is $\psi_1''(x_0) \neq 0$, $\psi_2(x_0)$ eindig (speciaal $e^{\psi_2(x)} \neq 0$ voor $x = x_0$), dan is $\underline{x}$ asymptotisch normaal met gemiddelde x_0 en spreiding $\{-n\psi_1''(x_0)\}^{-1/2}$. (Immers behoudens een kleine wh is $\psi(x) \approx n\psi_1(x_0) + \psi_2(x_0) - \frac{n}{2}(x-x_0)^2(-\psi_1''(x_0))$)

We onderstellen n oneven, en wel $= 2r+1$. Het el van de verdelingsfct van de mediaan $\underline{c}$ is dan

$$e^{\psi(c)} dc = \frac{1}{B(r+1, r+1)} F(c)^r \, dF(c) \, (1-F(c))^r$$

dus

$$\psi(c) = r \ln F(c)(1-F(c)) + \varphi(c)$$

Hierin is de eerste term $O(n)$, de tweede $O(1)$. De afgeleide van de eerste term is $r\left\{\frac{1-2F(c)}{F(1-F)}\right\} f(c)$ dus $= 0$ voor $F(c) = \frac{1}{2}$

dus voor $c = \gamma = c_0 + \theta$. De tweede afgeleide is

$$r\left(\frac{1-2F}{F(1-F)} f' - \frac{(1-2F)^2}{F^2(1-F)^2} f^2 - \frac{2}{F(1-F)} f^2\right)$$

dus $= -8r\, f(\gamma)^2 = -8r\, f_0(c_0)^2$ voor $c = \gamma$. Volgens bovengenoemde stelling is $\underline{c}$ dus asymptotisch normaal met gemiddelde γ en spreiding $\{8r\, f_0(c_0)^2\}^{-1/2}$, d.w.z. daar $n = 2r \approx 2r+1$ is:

$$\lim n\, \sigma^2_{\underline{c}-c_0} = 1/4 f_0(c_0)^2$$

en de asymptotische doeltreffendheid is

$$E_{\underline{c}} = \frac{4 f_0(c_0)^2}{\alpha^2}$$

Voor de verhouding der asymptotische doeltreffendheden vinden we dus

$$\frac{E_{\underline{c}}}{E_{\underline{m}}} = 4\sigma^2 f_0(c_0)^2$$

Voor een normale verdeling $(0,\sigma)$

$$f_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2/\sigma^2} \quad , m_0 = c = 0 \ , \ f_0(c_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

dus $\qquad \dfrac{E_c}{E_m} = \dfrac{2}{\pi} \approx 0,64$

Daar hier $E_m = 1$ is, is de asymptotische doeltreffendheid van de mediaan hier $\approx 0,64$.

Voor de exponentiële verdeling is

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x+\theta} & x > \theta \\ 0 & x < \theta \end{cases} \ ; \quad f_0(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \ ; \quad F_0(x) = 1 - e^{-x} \quad (x>0)$$

$$\varphi_0'(x) = -1 \ ; \quad m_0 = 1 \ ; \quad c_0 = \ln 2 \ ; \ \alpha^2 = \mathcal{E}_0\, \varphi_0'(\underline{x})^2 = 1 \ ; \ \sigma^2 = \mathcal{E}_0 \underline{x}^2 = 1;$$

$$f_0(c_0) = \tfrac{1}{2} \ , \quad \text{dus} \qquad E_m = \frac{1}{\sigma^2\alpha^2} = 1$$

$$E_c = 1$$

De schatting $\underline{\theta} = \underline{m} - 1$ en $\underline{\theta} = \underline{c} - \ln 2$ zijn dus beide asymptotisch doeltreffendst; eerstgenoemde is tevens de aannemelijkste.

Voor de verdeling van Cauchy is

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2} \ ; \ f_0(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \ ; \quad \varphi_0 = -\ln(1+x^2) - \ln\pi \ ;$$

$$\varphi_0' = \frac{-2x}{1+x^2} \quad ; \ \alpha^2 = \mathcal{E}\varphi_0'^2 = \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}$$

Derhalve is wegens $c_0 = 0 \ , \ f_0(c_0) = \frac{1}{\pi}$

$$E_c = \frac{8}{\pi^2} \approx 0,81$$

De mediaan heeft hier dus een asymptotische doeltreffendheid $\approx 0,81$ (Fisher heeft de doeltreffendheid ook voor eindige n met behulp van fcts van Bessel berekend; voor $n=1$ is $E_{n,c} = 1$, voor $n=5$ en $n=7$ $E_{n,c} \approx 0,70$, voor $n=11$ $0,71$; de asymptotische waarde 0,81 wordt zeer langzaam benaderd).

Anderzijds is hier (volgens Fisher) $\sigma = \infty$ dus de asymptotische doeltreffendheid van het gemiddelde van een monster is 0. Inderdaad heeft het gemiddelde van een monster van Cauchy precies dezelfde verdeling als één enkele waarneming; de doeltreffendheid van $\underline{m}$ is dus precies $1/n$ (terwijl er n waarnemingen zijn, wordt door het gebruikmaken van het gemiddelde geen grotere precisie voor de bepaling van θ bereikt dan met één enkele waarneming reeds zou geschieden).

g. Schatting van plaats- en schaal-bepalende parameters ener symmetrische verdeling door twee symmetrische quantilen.

We gaan uit van verdeling met dichtheid $f_0(x)$ als boven, die we bovendien symmetrisch onderstellen. Zij nu

$$f(x/\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta} f_0\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

(waarom de factor $1/\beta$?) We denken de waarnemingen $x_1, \dots\dots, x_n$ volgens stijgende grootte gerangschikt, en bepalen de $(\ell+1)$-de en de $(n-\ell)$-de, die we met x_1 resp. x_2 aanduiden. Zij $m=n-2-2\ell$ het aantal tussen x_1 en $x_2\,(>x_1)$ gelegen waarnemingen. We onderstellen dat m en ℓ met n onbeperkt toenemen. We schatten α door

$$\underline{a} = \tfrac{1}{2}(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)$$

en β door

$$\underline{b} = \frac{1}{2C}(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)$$

waarin C een nader te bepalen numerieke constante is.

We hebben

$$\varphi = \varphi_0\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) - \ln\beta$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -\frac{1}{\beta}\varphi_0'\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \quad ; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = -\frac{x-\alpha}{\beta^2}\varphi_0'\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) - \frac{1}{\beta}$$

Dus de op pag. 221 (Whr 310) (68) met $\alpha^{\lambda\mu}$ aangeduide matrix is

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 & \mathcal{E}_{\alpha,\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \\ \mathcal{E}_{\alpha,\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} & \mathcal{E}_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2 \end{pmatrix}$$

Stellen we $\underline{y} = \frac{\underline{x}-\alpha}{\beta}$, dan kunnen wij hiervoor schrijven

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0,1}\varphi_0'^2\beta^{-2} & 0 \\ 0 & (-1+\mathcal{E}_{0,1}\underline{y}^2\varphi_0'^2)\beta^{-2} \end{pmatrix}$$

daar $\mathcal{E}_{0,1}\underline{y}\varphi_0'^2$ en $\mathcal{E}\varphi_0'^2$ gelijk nul zijn wegens de symmetrie van de verdeling en

$$\mathcal{E}_{0,1}\underline{y}\varphi_0' = \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_0'(y)e^{\varphi_0(y)}dy = \Big[y e^{\varphi_0(y)}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varphi_0(y)}dy = -1 \quad \text{is}$$

is dus

$$A_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\beta^2}{\mathcal{E}_{0,1}\varphi_0'^2} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{\mathcal{E}_{0,1}\underline{y}^2\varphi_0'^2 - 1} \end{pmatrix}$$

Het element der verdelingsfct van $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ is

$$:: F_1^{l} \, dF_1 (F_2 - F_1)^m \, dF_2 (1-F_2)^l$$

waarin kortheidshalve voor $\nu=1$ en $\nu=2$

$$F(x_\nu) = F_0\left(\frac{x_\nu-\alpha}{\beta}\right) = F_0(y_\nu) = F_\nu$$ gesteld is.

De logarithme harer verdelingsdichtheid is dus

$$\psi = l \ln F_1(1-F_2) + m \ln(F_2-F_1) + f_1 + f_2 + \text{const.}$$

Analoog met de stelling van Laplace, onder f genoemd, bepalen we het maximum van de termen $\theta(n)$, dat zijn de eerste twee. Differentiatie naar y_1 en y_2 geeft voor de (met een index 0 aangeduide) waarden, die bij het maximum van ψ behoren:

$$\frac{l f_{10}}{F_{10}} - \frac{m f_{10}}{F_{20}-F_{10}} = 0 \qquad \frac{-l f_{20}}{1-F_{20}} + \frac{m f_{20}}{F_{20}-F_{10}} = 0$$

of ($f_1 f_2 \neq 0$ onderstellende):

$$\frac{F_{10}}{l} = \frac{F_{20}-F_{10}}{m} = \frac{1-F_{20}}{l}, \text{ dus } = \frac{1}{n-2} = \frac{1}{m+2l}$$

Derhalve $F_{10} = \frac{l}{m+2l}$, $F_{20} = \frac{m+l}{m+2l}$ Tengevolge van de symmetrie is voor deze waarden ook $f_{10} = f_{20}$, zegge $= f_0$

Tweede differentiatie en substitutie van de bij het maximum behorende waarden geeft, daar b.v.

$$\frac{\partial}{\partial y_1} f_1\left(\frac{l}{F_1} - \frac{m}{F_2-F_1}\right) = f_1'\left(\frac{l}{F_1} - \frac{m}{F_2-F_1}\right) - f_1^2\left(\frac{l}{F_1^2} + \frac{m}{(F_2-F_1)^2}\right)$$

in het maximum $= -f_0^2(n-2)^2\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right)$ wordt, voor de matrix der tegengesteldender tweede afgeleiden, (die positief definiet is):

$$\begin{pmatrix} f_0^2(n-2)^2 \frac{m+l}{ml} & -f_0^2(n-2)^2 m^{-1} \\ -f_0^2(n-2)^2 m^{-1} & f_0^2(n-2)^2 \frac{m+l}{ml} \end{pmatrix}$$

Bij ontwikkeling van ψ naar y_1 en y_2 in het punt (y_{10}, y_{20}) ontstaat dus als quadratisch gedeelte (op het teken na)

$$\tfrac{1}{2} f_0^2 \frac{(n-2)^2}{ml}\left[(m+l)\{(y_1-y_{10})^2 + (y_2-y_{20})^2\} - 2l(y_1-y_{10})(y_2-y_{20})\right]$$

Voeren we hierin $\underline{a}$ en $\underline{b}$ in met behulp van de formules

$$\underline{x}_1 = \underline{a} - \underline{b}c \,;\; \underline{x}_2 = \underline{a} + \underline{b}c \,;\; y_\nu = \frac{x_\nu-\alpha}{\beta} \,;\; -y_{10} = y_{20} = y_0$$

(waarin y_0 bepaald is door $F_0(y_0) = \frac{n \cdot l}{n-2}$) dan komt er

$$(\underline{y}_1 - y_{10})^2 + (\underline{y}_2 - y_{20})^2 =$$

$$= \left(\frac{\underline{x}_1 - \alpha}{\beta} + y_0\right)^2 + \left(\frac{\underline{x}_2 - \alpha}{\beta} - y_0\right)^2 = \frac{1}{\beta^2}\left[(\underline{a} - \alpha - \underline{b}C + \beta y_0)^2 + (\underline{a} - \alpha + \underline{b}C - \beta y_0)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\beta^2}\left[(\underline{a} - \alpha)^2 + (\underline{b}C - \beta y_0)^2\right]$$

en $(\underline{y}_1 - y_{10})(\underline{y}_2 - y_{20}) = \frac{1}{\beta^2}\left[(\underline{a} - \alpha)^2 - (\underline{b}C - \beta y_0)^2\right]$

De lineaire termen in $\underline{a} - \alpha$ en $\underline{b}C - \beta y_0$ verdwijnen, hetgeen betekent, dat lim $\mathcal{E}\,\underline{a} = \alpha$ is (wat reeds voor $\mathcal{E}\,\underline{a}$ zelf geldt) en lim $\mathcal{E}(\underline{b}C - \beta y_0) = 0$, d.w.z. lim $\mathcal{E}\,\underline{b} = \frac{\beta y_0}{C}$ is.
Teneinde te bereiken, dat $\underline{b}$ asymptotisch zuiver is als schatting van β zal dus $C = y_0$ genomen moeten worden.
Het quadratisch gedeelte van ψ wordt nu dus (op het teken na)

$$\frac{f_0^2}{\beta^2}\,\frac{(n-2)^2}{ml}\left[(m+2l)(\underline{b}C - \beta y_0)^2 + m(\underline{a} - \alpha)^2\right]$$

en hierbij behoort als matrix van de tweede afgeleide:

$$2n\,\frac{f_0^2}{\beta^2}\,\frac{(n-2)^2}{ml}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & (m+2l)y_0^2 \end{pmatrix}$$

Dit is de reciproke matrix van $U_{n\lambda\mu}$, dus de $u_n^{\lambda\mu}$ van (71) pag. 222 (Whr 311). Voor de asymptotische doeltreffendheid vinden we dus

$$E = \lim \frac{1}{2n}\sum^{\lambda}\sum^{\mu} A_{\lambda\mu}\,u_n^{\lambda\mu} = \lim \frac{2}{2n}\,f_0^2\,\frac{(n-2)^2}{ml}\left\{\frac{m}{\mathcal{E}_{a,1}\,\varphi_0'^{\,2}} + \frac{(n-2)\,y_0^2}{\mathcal{E}_{0,1}\,y^2\,\varphi_0'^{\,2} - 1}\right\}$$

Daar in de afleiding hiervan reeds termen $O(\frac{1}{n})$ verwaarloosd zijn, is dit niet de exacte doeltreffendheid bij eindge n, maar reeds de asymptotische, zodat het geen zin heeft, $n-2=m+2l$ nog van n te blijven onderscheiden.

In de onderstelling, dat l/n en m/n bij $n \to \infty$ constant blijven (of eindige limieten hebben) zien we dus, dat $(\underline{a} - \alpha)\beta^{-1}\sqrt{n}$ en $(\underline{b}\beta^{-1} - 1)\sqrt{n}$ asymptotisch normaal en asymptotisch onafhankelijk verdeeld zijn met spreidingsquadraten

$$\frac{1}{2}\,\frac{lm}{n^2 f_0^2} \quad \text{resp.} \quad \frac{3}{2}\,\frac{l}{n y_0^2 f_0^2}$$

en gemiddelden, die asymptotisch nul zijn. Voor de asymptotische doeltreffendheid kunnen we ook schrijven:

$$E = f_0^2 \, \frac{n}{l} \left\{ \frac{1}{\mathcal{E}_{01} \varphi_0'^2} + \frac{\frac{n}{m} y_0^2}{\mathcal{E}_{01} \underline{y}^2 \varphi_0'^2 - 1} \right\}$$

Passen we dit resultaat speciaal op de normale verdeling toe, dan is

$$\underline{\varphi}_0 = -\tfrac{1}{2} \underline{y}^2 - \tfrac{1}{2} \ln 2\pi \qquad \underline{\varphi}_0' = -\underline{y}$$

$$\mathcal{E}_{0,1} \underline{\varphi}_0'^2 = 1 \qquad \mathcal{E}_{0,1} \underline{y}^2 \underline{\varphi}_0'^2 = 3$$

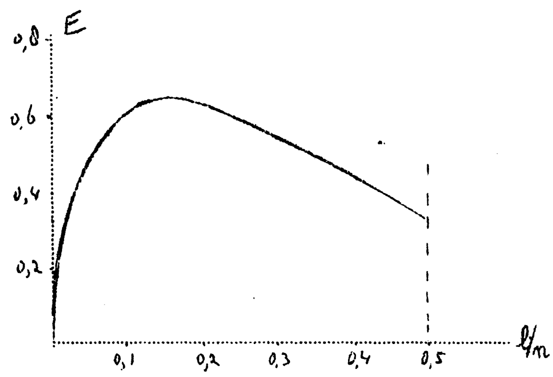
dus $E = \dfrac{f_0^2}{l/n} \left\{ 1 + \dfrac{y_0^2}{2m/n} \right\}$

Voor het eerste en negende decile b.v. is $\lim \frac{l}{n} = 0,1$; $\lim \frac{m}{n} = 0,8$; $y_0 \approx 1,2815$; $f_0 \approx 0,1754$, dus $E \approx 0,6235$

We vinden op deze wijze:

l/n	$m+l/n$	E	l/n	$m+l/n$	E
0,001	0,999	0,0654	0,1	0,9	0,6235
0,005	0,995	0,1820	0,14	0,86	0,6406
0,01	0,99	0,2671	0,142	0,858	0,6407
0,015	0,985	0,3277	0,15	0,85	0,6405
0,02	0,98	0,3746	0,2	0,8	0,6232
0,025	0,975	0,4128	0,3	0,7	0,5415
0,03	0,97	0,4447	0,4	0,6	0,4330

E bezit dus in de buurt van l/n = 0,142 een maximum.



h. <u>Schatting van de parameters ener rechte ijklijn.</u>

Gemeten zijn n paren grootheden x_i, y_i (punten P_i , in een (x,y)-vlak, $i=1,\ldots\ldots,n$). Gegeven is, dat bij elke meting een meetfout in y optreedt, zodat alle y_i <u>met gelijke spreidingen normaal</u> en onafhankelijk van elkaar verdeeld zijn om hun verwachtingen, de zgn. "ware waarden" η_i , en dat deze lineair af-

hangen van de x_i (waarvan aangenomen wordt, dat de gemeten met de ware waarden exact overeenstemmen). Gevraagd wordt, de coëfficiënten der lineaire fct te schatten.
De grootheden $y_i - \alpha - \beta(x_i - \bar{x})$ met $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$ bezitten dus volgens de onderstelling alle eenzelfde normale verdelingsfct. Hierin zijn de x_i, dus ook $\bar{x}$, bekende, α en β en de spreiding σ onbekende parameters. Nu is

$$L = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum^i \left(y_i - \alpha - \beta(x_i - \bar{x})\right)^2 - \frac{n}{2}\ln 2\pi\sigma$$

$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ en $\hat{\sigma}^2$ worden bepaald uit de vergelijkingen:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=\hat{\alpha}} = \frac{1}{\hat{\sigma}^2}\sum^i \left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}(x_i - \bar{x})\right) = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \beta}\right]_{\beta=\hat{\beta}} = \frac{1}{\hat{\sigma}^2}\sum^i (x_i - \bar{x})\left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}(x_i - \bar{x})\right) = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \sigma^2}\right]_{\sigma^2=\hat{\sigma}^2} = \frac{1}{2\hat{\sigma}^4}\sum^i \left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}(x_i - \bar{x})\right)^2 - \frac{n}{2\hat{\sigma}^2} = 0$$

Uit de eerste hiervan volgt, daar $\sum^i (x_i - \bar{x}) = 0$ is:
$\hat{\alpha} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$; uit de tweede vervolgens

$$\hat{\beta} = \frac{\sum^i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum^i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

en uit de derde

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{s_y^2 s_x^2 - s_{xy}^2}{s_x^2}$$

Vervolgens beschouwen we het geval, dat ook in de abcsis een meetfout optreedt, evenals in de ordinaat normaal en onafhankelijk verdeeld voor ieder punt $(x_i y_i)$ en met spreiding σ_1, terwijl de spreiding van de meetfout in de ordinaat-richting σ_2 bedraagt. Dan is, als nu van ieder gevonden punt $(x_i y_i)$ onderstellen, dat het een waarneming is van een "waar" punt (ξ_i, η_i), waarbij $\eta_i = \alpha + \beta\xi_i$ is:

$$L = -\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum^i (\xi_i - x_i)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum(\eta_i - y_i)^2 - \frac{1}{2}n\ln 2\pi\sigma_1^2 - \frac{1}{2}n\ln 2\pi\sigma_2^2$$

Beschouwt men hierin ξ_i ($i = 1, \ldots, n$), σ_1, σ_2, α en β als onbekende parameters en differentieert men L partiëel naar deze parameters, dan vormen de partiële afgeleiden, gelijk nul gesteld, een stelsel van $n+4$ vergelijkingen met $n+4$ onbekenden en men is geneigd deze te gaan oplossen, om de aannemelijkste schatting van al deze parameters te berekenen. Dit is echter nutteloos, daar het maximum dat men op die wijze zou vinden, geen absoluut maximum kan zijn. Immers door σ_1 klein te nemen en $\sum_i(\xi_i - x_i)^2$ door keuze van de ξ_i eveneens klein te maken, zodat de eerste term van L eindig blijft, terwijl de derde naar $+\infty$ gaat, kan men, daar de tweede en vierde term voor constante $\sigma_2 \neq 0$ eindig zijn, L willekeurig groot maken, dus zeker ook groter dan het gevonden maximum. Daar de voor de aannemelijkste schattingen geldende eigenschappen bewezen zijn met behulp van het gegeven, dat de aannemelijkste schatting een absoluut maximum voor L geeft, zijn deze bewijzen in dit geval niet geldig, zodat men, als men de parameters toch schat door berekening uit de vergelijkingen, die door differentiëren van L = 0 ontstaan, niet weet welke eigenschappen de zo verkregen schattingen bezitten.

Men ziet echter, dat L niet meer willekeurig groot kan worden, als b.v. $\sigma_2 = k\,\sigma_1$ is met constante $k > 0$. Immers dan gaat de tweede term naar $-\infty$, daar men de η_i niet meer vrij kiezen mag als de ξ_i al gekozen zijn, zodat $L \to -\infty$. Men zou dus verwachten, dat toevoeging van een dergelijk gegeven het boven besproken bezwaar zou opheffen. Wij zullen dit als volgt nagaan: substitueer $\sigma_2 = k\,\sigma_1$ in L:

$$L = -\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum(\xi_i - x_i)^2 - \frac{1}{2k^2\sigma_1^2}\sum(\eta_i - y_i)^2 - n\ln 2\pi\sigma_1^2 - n\ln k$$

met

$$\eta_i = \alpha + \beta\,\xi_i$$

We beschouwen nu eerst β, k en σ_1^2 als gegeven en zoeken de aannemelijkste schatting voor ξ_i $(i = 1,\dots,n)$ en α.

We verkrijgen dan:

$$(1)\qquad \left[\frac{\partial L}{\partial \xi_i}\right]_{\xi_i = \hat{\xi}_i} = -\frac{1}{\sigma_1^2}(\hat{\xi}_i - x_i) - \frac{\beta}{k^2\sigma_1^2}(\hat{\alpha} + \beta\hat{\xi}_i - y_i) = 0$$

$$(2)\qquad \left[\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right]_{\alpha = \hat{\alpha}} = -\frac{1}{k^2\sigma_1^2}\sum(\hat{\alpha} + \beta\hat{\xi}_i - y_i) = 0$$

Uit (1) en (2) volgt $\sum(\hat{\xi}_i - x_i) = 0$ dus $\bar{\hat{\xi}}_i = \bar{x}$ en daar we voor (2) kunnen schrijven $\hat{\alpha} + \beta\bar{\hat{\xi}} - \bar{y} = 0$ is de aannemelijkste schatting van α: $\hat{\alpha} = \bar{y} - \beta\bar{x}$.

Voor (1) kunnen we schrijven:

$$(3) \qquad \sum (\eta_i - y_i)^2 = \frac{k^4}{\beta^2} \sum (\hat{\xi}_i - x_i)^2 .$$

Ook volgt, als we voor η_i schrijven $\hat{\alpha} + \beta \hat{\xi}_i$

$$(\hat{\xi}_i - x_i)\left(1 + \frac{\beta}{k^2}\right) = -\frac{\beta}{k^2}\left(\hat{\alpha} + \beta x_i - y_i\right)$$

na enige omvorming. Dit wordt door substitutie van $\hat{\alpha} = \bar{y} - \beta \bar{x}$:

$$(4) \qquad \hat{\xi}_i - x_i = \frac{\beta(\tilde{y}_i - \beta \tilde{x}_i)}{\beta^2 + k^2}$$

met $\tilde{y}_i = y_i - \bar{y}$ en $\tilde{x}_i = x_i - \bar{x}$

Substitutie van (3) en (4) in de uitdrukking voor L geeft:

$$(5) \qquad L = -\frac{1}{2\sigma_1^2} \frac{\sum(\tilde{y}_i - \beta x_i)^2}{\beta^2 + k^2} - n \ln 2\pi\sigma_1^2 - n \ln k$$

Hierin kunnen alleen β en σ_1^2 nog variëren. De $\hat{\xi}_i$ en $\hat{\alpha}$ zijn constant, bepaald door de voorwaarden voor het maximum (1) en (2). Bij variatie van β blijft $\frac{\sum(\tilde{y}_i - \beta x_i)^2}{\beta^2 + k^2}$ begrensd. Blijft over te onderzoeken of de vorm $-\frac{1}{\sigma_1^2} - \ln \sigma_1^2$ naar boven begrensd is bij variatie van σ_1^2. Stel $\frac{1}{\sigma_1^2} = x$, dan moet

$$U = -x + \ln x$$

naar boven begrensd zijn. Nu is

$$\frac{dU}{dx} = -1 + \frac{1}{x} \gtrless 0 \quad \text{als } x \lesseqgtr 1$$

U heeft dus een extreem bij x = 1, dit is een absoluut maximum. Hiermee is het gestelde aangetoond.

Nemen we nu σ_1^2 variabel, dan vinden we voor de aannemelijkste schatting van σ_1^2 uit (5) en:

$$(6) \qquad \left[\frac{\partial L}{\partial \sigma_1^2}\right]_{\sigma_1^2 = \hat{\sigma}_1^2} = \frac{1}{2\hat{\sigma}_1^4} \frac{\sum(\tilde{y}_i - \beta\tilde{x}_i)^2}{\beta^2 + k^2} - \frac{n}{\hat{\sigma}_1^2} = 0 \quad :$$

$$(7) \qquad \hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{2n} \frac{\sum(\tilde{y}_i - \beta\tilde{x}_i)^2}{\beta^2 + k^2} = \frac{1}{2} \frac{\beta^2 s_x^2 - 2\beta s_{xy} + S_y^2}{\beta^2 + k^2} .$$

L wordt:

$$(8) \qquad L = -n - n \ln 2\pi \hat{\sigma}_1^2 - n \ln k .$$

Nemen we nu ook β variabel, dan vinden we de aannemelijkste schatting van β uit

$$(9) \qquad \left[\frac{\partial L}{\partial \beta}\right]_{\beta = \hat{\beta}} = -n \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \hat{\sigma}_1^2\right]_{\beta = \hat{\beta}} = 0$$

dus uit: $\frac{\partial}{\partial\beta}\hat{\sigma}_1^2 = 0$

Nu is:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\beta s_x^2 - s_{xy}}{\beta^2 + k^2} - \frac{\beta(\beta^2 s_x^2 - 2\beta s_{xy} + s_y^2)}{(\beta^2 + k^2)^2}$$

zodat $\hat{\beta}$ opgelost moet worden uit de vergelijking

$$s_{xy}\hat{\beta}^2 + (k^2 s_x^2 - s_y^2)\hat{\beta} - k^2 s_{xy} = 0$$

die twee wortels β_1 en β_2 heeft.
Uit het verband (7) tussen σ_1^2 en β blijkt, dat σ_1^2 een begrensde fct van β is, zodat één van deze wortels σ_1^2 maximaal en de andere σ_1^2 minimaal maakt. De wortel, die σ_1^2 minimaal maakt, maakt L, die nu alleen nog maar van σ_1^2 afhangt, maximaal, zodat ook $\hat{\beta}$ éénduidig bepaald is. Inderdaad is dus, bij constante $k > 0$, de methode der maximum-likelihood op dit probleem toepasbaar.
Beschouwen wij echter ook k als onbekende parameter, dan zien wij uit de laatste vergelijking (8) voor L, dat voor $k \to 0$ $L \to \infty$ gaat, zodat er geen absoluut maximum kan optreden; dit komt dan ook overeen met het invoeren van σ_1 en σ_2 als onbekende parameters, zoals aan het begin van deze beschouwing besproken is.

Voor $n = 2$ treedt een complicatie op, analoog met het aan het eind van punt c behandelde geval. Dan wordt nl. $\sigma_1^2 = 0$ daar 2 punten altijd op een rechte lijn liggen. Twee punten zijn dus bij gegeven σ_2/σ_1 niet voldoende voor het vinden van een aannemelijkste schatting van alle andere parameters. Dit komt doordat de teller van de breuk met noemer $-2\sigma_1^2(\beta^2+k^2)$ in de oorspronkelijke uitdrukking voor L (d.i. de som van de eerste twee termen) t.w. $\sum(x_i - \xi_i)^2 + \sum(y_i - \alpha - \beta\xi_i)^2$ uit 2n termen bestaat; om deze alle 0 te maken zijn 2n onbekende parameters nodig; er zijn er echter n+2 (t.w. $\xi_1, \ldots, \xi_n, \alpha, \beta$) beschikbaar. Voor $n = 2$ kan dus de teller inderdaad 0 worden, voor $n > 2$ is dit in het algemeen niet mogelijk.

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
AMSTERDAM.

Statistische Afdeling

Capita Selecta

Hoofdstuk V

Monster- en toetsingstheorie
(II)

door

Prof.Dr.D.van Dantzig

pag.328-359

Hoofdstuk 5 - Monster- en toetsingstheorie II.

§1. Betrouwbaarheidsintervallen en toetsing van hypothesen.

1. We hebben reeds op pag.222 (whr 311) opgemerkt, dat het fundamenteelste bezwaar van Fisher's Maximum-Likelihood-methode daarin bestaat, dat men de "aanneemlijkste" parameterwaarde ook inderdaad "aanneemt", d.w.z. de verdere berekeningen uitvoert als ware zij de "ware". Dit nu zal in het algemeen niet het geval zijn. Zelfs zal het alleen bij uitzondering het geval zijn, en, als men de meet-onnauwkeurigheden buiten beschouwing laat slechts met wh 0. Immers bij een continu verdeelde variabele (en daartoe beperken wij ons voor het ogenblik, evenals in het grootste deel van hoofdstuk 4) is ook de "aanneemelijkheidsfct" $L(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n \mid \theta) = \sum^i \varphi(\underline{x}_i \mid \theta)$ continu verdeeld. De wh, dat zij een bepaalde waarde aanneemt, is dus 0. Dit geldt in het bijzonder ook voor de maximale waarde. In het land der "blinden" (een wh 0 bezittende) parameterschattingen kan het koningschap van de aanneme:lijkste dus niet op éénogigheid berusten.

We hebben dus gezien, dat

$$P\left[t(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n) = \theta \mid \theta\right] = 0$$

is voor <u>iedere</u> continu verdeelde fct $t(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)$, in het bijzonder voor de aanneme lijkste schatting. Dit is niet meer exact het geval, als men rekening houdt met de meetonnauwkeurigheden der $\underline{x}_i$, waardoor de getallen x_i, dus ook $t(x_1,\dots,x_n)$ in klein intervallen overgaan, terwijl ook θ slechts met een beperkte nauwkeurigheid als "ware" waarde kan worden gedefinieerd. De wh van $\underline{t} = \theta$ wordt dan niet 0, maar zeer klein (en dés te kleiner naarmate men t in meer decimalen berekent!) De "conclusie" uit een statistisch experiment dat $\theta = t(x_1,\dots,x_n)$ zal zijn, zal dus bijna altijd fout zijn!

2. De mogelijkheid om conclusies te trekken, die doorgaans goed zijn kan - in het gunstigste geval, t.w. als de verdere onderstellingen inderdaad vervuld zijn - alleen dáárdoor verwezenlijkt worden, dat men minder pretendeert, met name dat men niet beweert voor θ een bepaalde waarde gevonden te hebben, maar slechts volhoudt dat θ in een te berekenen interval ligt. In plaats van één fct $t(x_1,\dots,x_n)$ zal men er dus twee definiëren, b.v. $t_1(x_1,\dots,x_n)$ en $t_2(x_1,\dots,x_n)$, waarbij b.v. de tweede steeds groter is dan de eerste, en men zal dus slechts concluderen, dat $t_1(x_1,\dots,x_n) \leq \theta \leq t_2(x_1,\dots,x_n)$ is. (<u>Hoe</u>

t_1 en t_2 bepaald kunnen worden, zullen we verderop bespreken).

Als nu $x_1,\dots,x_n$ niet aan een bepaald experiment ontleend worden, maar stochastisch variabel zijn (d.w.z. als men alle mogelijke resultaten van het experiment tezamen beschouwt, b.v. doordat men de berekeningen uitvoert vòòrdat het experiment genomen is), zal de ongelijkheid

$$t_1(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n) \leqq \theta \leqq t_2(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)$$

een bepaalde wh bezitten. We zullen dit niet bewijzen, maar slechts vermelden, dat algemeen, als $u_1,\dots,u_m$ willekeurige (meetbare) fcts van n variabelen $x_1,\dots,x_n$ en $c_1,\dots,c_m$ willekeurige constanten zijn, en als $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$ tezamen een wh-verdeling bezitten (b.v. doordat ze elk afzonderlijk een wh-verdeling bezitten en onafhankelijk zijn), dat dan het stelsel ongelijkheden

$$u_1(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n) \leqq c_1, \quad \dots$$
$$\dots \quad u_m(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n) \leqq c_m$$

tezamen een bepaalde wh bezit. (N.B. Dit volgt niet onmiddellijk uit het feit dat elk der ongelijkheden afzonderlijk een bepaalde wh bezit, daar niet gegeven is, dat de linkerleden stochastisch onafhankelijk zijn). Passen we dit toe op het geval

$m = 2$, $u_1 = t_1$, $u_2 = -t_2$, $c_1 = \theta$, $c_2 = -\theta$, dan krijgen we

$$t_1(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n) \leqq \theta$$
$$-t_2(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n) \leqq -\theta$$

hetgeen tezamen aequivalent is met

$$t_1(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n) \leqq \theta \leqq t_2(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)$$

Deze ongelijkheid heeft dus voor iedere keuze der fcts t_1 en t_2 een bepaalde wh.

3. Alvorens hierop door te gaan, is het nuttig een analoog geval van het rechtstreekse probleem te bespreken. Onderstellen we, dat bekend is dat een stochastische variabele $\underline{x}$ een bepaalde verdelingsfct bezit, b.v. N(0,1) verdeeld is. Zijn ξ_1 en $\xi_2 > \xi_1$ twee willekeurige reële getallen, dan heeft de ongelijkheid

$$\xi_1 \leqq \underline{x} \leqq \xi_2$$

een bepaalde wh. B.v. is voor $\xi_1 = -1{,}7$ en $\xi_2 = +2{,}3$ $P\left[-1{,}7 \leqq \underline{x} \leqq +2{,}3\right] = 0{,}94470$. Dit is dus de wh dat een stochastische grootheid $\underline{x}$ in een constant interval (ξ_1, ξ_2) ligt. Dit blijft zo, als $\underline{x}$ een verdelingsfct bezit, die van een parameterwaarde θ afhangt, waarvan ook ξ_1 en ξ_2 kunnen afhangen.

Dan is eveneens

$$P[\xi_1(\theta) \leq x \leq \xi_2(\theta) \mid \theta] = \beta$$

de wh dat een stochastische grootheid $\underline{x}$ in een constant interval ligt, daar immers θ een (al dan niet bekende) bepaalde getallenwaarde bezit.

In het door ons beschouwde geval echter is

$$P[\underline{t}_1 \leq \theta \leq \underline{t}_2 \mid \theta] = \beta$$

de wh dat het stochastische interval $(\underline{t}_1, \underline{t}_2)$ het constante getal θ bevat. In het eerste geval krijgt men dus bij variantie van het experiment bij gelijkblijvende parameterwaarde een groot aantal punten x, waaraan ongeveer een fractie β in het interval (ξ_1, ξ_2) ligt. In het tweede geval een groot aantal intervallen (t_1, t_2), waarvan ongeveer een fractie β het punt θ bevat. (Natuurlijk kan men ook algemeen whn $P[\underline{t}_1 \leq \underline{y} \leq \underline{t}_2 \mid \theta]$ beschouwen, waar zowel $\underline{y}$ als de intervalgrenzen stochastisch zijn).

4. We definiëren nu volgens J. Neyman: een stochastisch interval $(\underline{t}_1, \underline{t}_2)$, waarin $t_1 = t_1(x_1, \ldots, x_n)$ en $t_2 = t_2(x_1, \ldots, x_n)$ statistische grootheden zijn, heet een betrouwbaarheidsinterval voor de parameter θ met de betrouwbaarheidsdrempel β (of de onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 1 - \beta$) als

$$P[t_1(x_1, \ldots, x_n) \leq \theta \leq t_2(x_1, \ldots, x_n) \mid \theta] = 1 - \alpha$$

is voor alle toegelaten parameterwaarden θ.
Evenzo zullen we - al is deze terminologie minder gebruikelijk - een constant interval (ξ_1, ξ_2) een betrouwbaarheidsinterval voor de stochastische grootheid $\underline{x}$ met de betrouwbaarheidsdrempel $1-\alpha$ noemen, als

$$P[\xi_1 \leq x \leq \xi_2] = 1 - \alpha$$

5. Ons doel zal nu zijn, de conclusies uit de experimenten op zodanige wijze te formuleren, dat ze "meestal" juist zijn. We kunnen zo daartoe de vorm $\underline{t}_1 \leq \theta \leq \underline{t}_2$ geven, die svpr α $(\alpha = 1 - \beta)$ geldt, en α voldoend klein kiezen. (Veelal kiest men $\alpha = \frac{1}{20}$.)
Dit houdt in, dat we ongeveer 5% onjuiste conclusies toelaten. We merken op, dat deze fractie alleen nog betrekking heeft op de parameterschattingen; als we daaruit weer prognosen s v p r $\frac{1}{20}$ afleiden, moeten we op een totale onbetrouwbaarheid van 10% verdacht zijn, en ook dit nog slechts als de algemene onderstellingen vervuld zijn. De werkelijke onbetrouwbaarheid zal heel vaak ver boven de 10% liggen.

Eigenlijk is de bewering dat θ tussen $\underline{t}_1$ en $\underline{t}_2$ ligt svpr α nog niet geheel verantwoord, doordat we algemene onderstellingen ingevoerd hebben, b.v. dat de waarnemingen 1° onafhankelijk zijn, 2° alle dezelfde verdelingsfct bezitten en 3° dat deze van het beschouwde type is. Onze conclusie behoort dan te zijn: de onderstellingen, dat de voorwaarden 1°, 2° en 3° vervuld zijn en dat 4° θ niet in het interval $(\underline{t}_1, \underline{t}_2)$ligt tezamen worden verworpen svpr α. Doordat de berekeningen altijd op een of meer onderstellingen van het genoemde type gebaseerd zijn, kunnen we geen enkele statische hypothese (zelfs svpr α) bewijzen; alleen een hypothese svpr α verwerpen, waarbij de verwerping op het gehele complex van onderstellingen betrekking heeft. (B.v. zou het zeer wel kunnen voorkomen, dat de verwerping 4° een veel grotere onbetrouwbaarheid zou hebben als 2° en 3° wèl vervuld waren, maar 1° niet).

We merken nog op, dat het bij discontinue (b.v. discrete) verdelingen in het algemeen niet mogelijk zal zijn, te bereiken dat $P\left[\underline{t}_1 \leq \theta \leq \underline{t}_2 \mid \theta\right]$ gelijk aan $1 - \alpha$ wordt. Voor het verwerpen svpr α is dit echter ook niet nodig; daartoe is reeds voldoende, dat deze wh $\geq 1 - \alpha$ wordt. Anderzijds zal men er echter wel naar streven, deze wh zo weinig mogelijk van $1 - \alpha$ te laten verschillen, daar anders het interval waarin θ svpr α ligt zo groot kan worden, dat men er voor verdere conclusies niets meer aan heeft. B.v. geldt, als θ zelf een wh is, altijd $P\left[\,0 \leq \theta \leq 1 \mid \theta\right] = 1$ (de stochastische grootheden $\underline{t}_1$ en $\underline{t}_2$ zijn dan univalent; ze nemen svpr 0 slechts de waarde 0 resp. 1 aan), hetgeen triviaal is. (Bij willekeurige θ geldt hetzelfde voor $\underline{t}_1 = -\infty$, $\underline{t}_2 = +\infty$).

6. Resumerend kunnen we dus vaststellen: als $\underline{t}_1 = t_1(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ en $\underline{t}_2 = t_2(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ $(\underline{t}_1 < \underline{t}_2)$ een betrouwbaarheidsinterval met de betrouwbaarheidsdrempel $1 - \alpha$ insluiten, dan worden op grond van een experiment, waarbij $\underline{x}_1 = x_1, \ldots, \underline{x}_n = x_n$ is waargenomen, alle parameterwaarden θ verworpen, die niet in het interval $(t_1(x_1,\ldots,x_n), t_2(x_1,\ldots, x_n))$ liggen. Van de waarden θ, die wèl in dit interval liggen kan men alleen zeggen, dat ze (op grond van de gedane keuze van $\underline{t}_1$ en $\underline{t}_2$) niet-verworpen of acceptabel zijn. Het is echter zeer wel mogelijk, dat sommige dezer niet-verworpen waarden θ bij een andere keuze van $\underline{t}_1$ en $\underline{t}_2$ wèl verworpen (resp. verworpen waarden geaccepteerd) zouden worden. Anderzijds behoort men alle verdere berekeningen, b.v. voorspellingen, op alle niet-verworpen parameterwaarden te baseren. (Wij wijzen er nog uitdrukkelijk op, dat de fcts $t_1(x_1,\ldots, x_n)$ en $t_2(x_1,\ldots, x_n)$ voor alle mogelijke waarnemingsresultaten $x_1,\ldots, x_n$ en zonder gebruikmaken van de uitslag van het onderhavige experiment vastgelegd moeten zijn).

Vaak echter wordt dit niet gedaan. In het bijzonder als er een speciale parameterwaarde Θ_0 is, voor welke de verdeling tot eenvoudiger berekenbare resultaten leidt dan de andere waarden Θ. Men noemt dan de hypothese $\Theta = \Theta_0$ wel de **nulhypothese** en rekent daarmede verder, zolang deze waarde niet-verworpen is. Hoewel deze handelwijze veelal onvermijdelijk is, doordat men er niet in slaagt voor $\Theta \neq \Theta_0$ de benodigde integraties uit te voeren, is het gewenst, voor zoverre dit mogelijk is, deze minder kritische methode te vermijden. Uiteraard zal men daarbij het belang van een grotere zekerheid tegen de omvang der berekeningen afwegen.

7. Men kan een nulhypothese ook op kritische wijze gebruiken, namelijk om deze te verwerpen. Men brengt dan de conclusie die men uit de experimenten hoopt te kunnen trekken in de vorm: een bepaalde nulhypothese is niet vervuld, dus b.v. $\Theta \neq \Theta_0$. Men bepaalt dan onafhankelijk van de uitslag van het experiment, twee stochastische grootheden $\underline{t}_1$ en $\underline{t}_2$, die dus voor alle mogelijke waarnemingsresultaten $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ gedefinieerd moeten zijn, maar die nu wèl van Θ_0 (hetwelk immers een bepaald gegeven getal is) en (als altijd) ook van α mogen afhangen, zodanig dat

$$P\left[\underline{t}_1 \leq \Theta_0 \leq \underline{t}_2 \mid \Theta_0\right] = 1-\alpha \quad (\text{of } \geq 1-\alpha)$$

is. Zijn nu $x_1, \dots, x_n$ de waargenomen waarden, en vindt men dat Θ_0 niet in het interval $(t_1(x_1, \dots, x_n), t_2(x_1, \dots, x_n))$ ligt, dan wordt de nulhypothese verworpen.

Op analoge wijze kan men trachten hypothesen als $\Theta \geq \Theta_0$ of $\Theta \leq \Theta_0$ te verwerpen.

§ 2. Voorbeelden.

1. Betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde ener normale verdeling met gegeven spreiding.

We kunnen zonder beperking $\sigma = 1$ nemen. Daar dan $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ $N(\mu, 1)$-verdeeld zijn, is $\underline{m} = n^{-1} \sum \underline{x}_i$ $N(\mu, n^{-1})$-verdeeld ').

Zij nu voor een willekeurig reëel getal $\beta \geq 0$ en ≤ 1 ξ_β de waarde van een N(o,1)-verdeelde variabele, waarvoor de "staart" de wh β heeft, dus

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_\beta}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \beta$$

') Bewijs: $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ hebben alle de karakteristieke fct $Z(\tau) = e^{\mu\tau + \frac{1}{2}\tau^2}$. Dus $\underline{S} = \sum \underline{x}_i$ heeft de karakteristieke fct $\{Z(\tau)\}^n = e^{n\mu\tau + \frac{1}{2}n\tau^2}$ en $\underline{m} = n^{-1} \times \underline{S}$ heeft de karakteristieke fct $\{Z(\frac{\tau}{n})\}^n = e^{\mu\tau + \frac{1}{2}n^{-1}\tau^2}$.

Is dan α gegeven $(0<\alpha<1)$ en is β willekeurig zo gekozen, dat $0 \leq \beta \leq \alpha$ is, dan is, daar $(\underline{m}-\mu)\sqrt{n}$ $N(0,1)$ verdeeld is, $P[(\underline{m}-\mu)\sqrt{n} \geq \xi_{\alpha-\beta}|\mu] = \alpha-\beta$ en $P[(\underline{m}-\mu)\sqrt{n} \leq -\xi_\beta|\mu] = \beta$, dus

$$P[-\xi_\beta \leq (\underline{m}-\mu)\sqrt{n} \leq \xi_{\alpha-\beta}|\mu] = 1-\alpha$$

of

$$P[\mu - n^{-\frac{1}{2}}\xi_\beta \leq \underline{m} \leq \mu + n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\alpha-\beta}|\mu] = 1-\alpha$$

Bij gegeven μ zouden dus $\mu - n^{-\frac{1}{2}}\xi_\beta$ en $\mu + n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\alpha-\beta}$ een (constant) betrouwbaarheidsinterval voor de stochastische variabele $\underline{m}$ vormen. Hier is echter μ onbekend. De gevonden wh kan echter ook geschreven worden in de vorm

$$P[\underline{m} - n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\alpha-\beta} \leq \mu \leq \underline{m} + n^{-\frac{1}{2}}\xi_\beta|\mu] = 1-\alpha$$

(Let op de plaatsverwisseling van ξ_β en $\xi_{\alpha-\beta}$). M.a.w. $\underline{m}-n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\alpha-\beta}$ en $\underline{m}+n^{-\frac{1}{2}}\xi_\beta$ begrenzen een betrouwbaarheidsinterval voor μ.

Dit geldt nog altijd voor iedere toegelaten keuze van β. Veelal zal men een symmetrisch interval kiezen, door $\alpha-\beta=\beta$, d.w.z. $\beta=\frac{1}{2}\alpha$ te nemen. Dan is dus

$$\underline{m} - n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\frac{1}{2}\alpha} \leq \mu \leq \underline{m} + n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\frac{1}{2}\alpha} \qquad \text{svpr } \alpha$$

Men kan echter ook $\beta = 0$ nemen. Daar $\xi_0 = +\infty$ is, heeft men dan

$$\underline{m} - n^{-\frac{1}{2}}\xi_\alpha \leq \mu \qquad \text{svpr } \alpha$$

(linkszijdig begrensd interval). Evenzo voor $\beta=\alpha$:

$$\mu \leq \underline{m} + n^{-\frac{1}{2}}\xi_\alpha \qquad \text{svpr } \alpha$$

De keuze van β hangt af van het doel van het onderzoek; zij moet echter onafhankelijk van de gedane waarneming geschieden. We gaan daarop in $\oint 3$ nader in, maar merken voorlopig vast het volgende op. Wil men b.v. op grond van de niet-verworpen waarden van μ verdere berekeningen uitvoeren, dan kan het van nut zijn, een zo kort mogelijk betrouwbaarheidsinterval te hebben. Men kan gemakkelijk bewijzen, dat dit het symmetrische is ($\beta=\frac{1}{2}\alpha$). Wil men de nulhypothese $\mu=0$ verwerpen, dan kan men dit met $\beta=\frac{1}{2}\alpha$ doen als de voor $\underline{m}$ gevonden waarde m aan de ongelijkheid $|m| > n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\frac{1}{2}\alpha}$ voldoet. Wil men aantonen dat $\mu>0$ moet zijn (natuurlijk svpr α), dan zal men de hypothese $\mu \leq 0$ trachten te weerleggen. Men neemt dan $\beta=0$ en vindt op grond van de hypothese $\mu \leq 0$: $\underline{m} - n^{-\frac{1}{2}}\xi_\alpha \leq \mu \leq 0$ svpr α. De hypothese $\mu \leq 0$ is dus svpr α weerlegd als de voor $\underline{m}$ gevonden waarde m voor geen enkele $\mu \leq 0$ aan deze ongelijkheid voldoet, dus als

$$m > n^{-\frac{1}{2}}\xi_\alpha$$

is.

Evenzo kan men als $m < - n^{-\frac{1}{2}} \xi_\alpha$ is de hypothese $\mu \geq 0$ als svpr α weerlegd beschouwen.

N.B. We herinneren er aan, dat deze weerlegging alleen geldt als aan de andere hypothesen voldaan is. In het laatste geval b.v. kan uit $m < - n^{-\frac{1}{2}} \xi_\alpha$ alleen svpr α geconcludeerd worden, dat de gegeven waarnemingen niet een stelsel stochastische grrotheden vormen die 1° onafhankelijk zijn, 2° alle normaal verdeeld zijn, 3° alle met dezelfde μ, 4° alle met dezelfde σ, 5° met $\sigma = 1$ en 6° met $\mu \geq 0$. M.a.w. de conclusie svpr α houdt in, dat als men b.v. weet dat 1°, 2°, 3° en 5° wèl vervuld zijn, hetzij $\mu < 0$ hetzij $\sigma \neq 1$ (en wel $\sigma > 1$) is svpr α.

2. Spreiding bij gegeven gemiddelde (normale verdeling).

Zonder beperking kunnen we $\mu = 0$ nemen. Dan is $n s^2/\sigma^2$ verdeeld als χ^2 met n-1 vrijheidsgraden (vgl. p. 115, Whr 204), d.w.z. $\frac{n}{2} s^2/\sigma^2$ is $\Gamma(\frac{n-1}{2})$-verdeeld. Definieert men $t_\alpha = \frac{1}{2}\chi^2_\alpha$ door $1 - F_{\Gamma(\frac{n-1}{2})}(t_\alpha) = \alpha$, dan is dus voor $0 \leq \beta \leq \alpha$ $P[n s^2/\sigma^2 \geq \chi^2_{\alpha-\beta}] = \alpha - \beta$.

Voorts is $P[n s^2/\sigma^2 \leq \chi^2_{1-\beta}] = \beta$, dus $P[\chi^2_{1-\beta} \leq n s^2/\sigma^2 \leq \chi^2_{\alpha-\beta}] = 1-\alpha$.

M.a.w. bij gegeven σ is $(\chi_{1-\beta}\sigma/\sqrt{n}, \chi_{\alpha-\beta}\sigma/\sqrt{n})$ een betrouwbaarheidsinterval voor $\underline{s}$, en bij gegeven $\underline{s} = s$ is $(s\sqrt{n}/\chi_{\alpha-\beta}, s\sqrt{n}/\chi_{1-\beta})$ een betrouwbaarheidsinterval voor σ, beide behorende bij de onbetrouwbaarheidsdrempel. α.

De keuze van β hangt wederom van het doel van het ondenzoek af. Daar $t_0 = \chi_0 = +\infty$, $t_1 = \chi_1 = 0$ is, kan men voor een willekeurige gegeven waarde σ_0, b.v.

als $s \geq n^{-\frac{1}{2}} \sigma_0 \chi_\alpha$ is, svpr α $\sigma \leq \sigma_0$ verwerpen ($\beta = 0$)

" $s \leq n^{-\frac{1}{2}} \sigma_0 \chi_{1-\alpha}$ is, svpr α $\sigma \geq \sigma_0$ verwerpen ($\beta = \alpha$).

M.a.w. men kan (o.a.) svpr α hetzij $\sigma \leq n^{\frac{1}{2}} s/\chi_\alpha$, hetzij $\sigma \geq n^{\frac{1}{2}} s/\chi_{1-\alpha}$ verwerpen. Voor willekeurige (maar vast gekozen) β kan men svpr α zowel $\sigma \leq n^{\frac{1}{2}} s/\chi_{\alpha-\beta}$ als $\sigma \geq n^{\frac{1}{2}} s/\chi_{1-\beta}$ verwerpen. Op de beweegredenen, die tot de keuze van een bepaalde β leiden, wordt verderop uitvoeriger ingegaan.

3. Verdeling van Bernoulli (steekproef uit alternatief).

Zij m = f n het aantal keren dat het kenmerk met wh p bij trekkingen gevonden is. Dan is (vgl. pag. 18)

$$P[m_1 \leq \underline{m} \leq m_2 | p] = \sum_{m_1}^{m_2} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Kiest men nu $m_1(p)$ voldoend klein opdat $\sum_{0}^{m_1(p)-1} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \beta \leqq \alpha$ en $m_2(p)$ voldoend groot opdat $\sum_{m_2(p)+1}^{n} \binom{n}{h} p^h q^{n-h} = \gamma \leqq \alpha - \beta$ is, dan is

$$P\left[m_1(p) \leqq \underline{m} \leqq m_2(p) \mid p \right] \geqq 1-\alpha$$

(Doordat de verdeling discreet is, kan men hier in het algemeen niet bereiken dat het rechterlid $= 1-\alpha$ wordt bij gegeven α.) Daar $m_1(p)$ steeds geheel is, zal deze fct van p bij continu toenemende p telkens over een interval constant blijven en dan sprongsgewijze veranderen. Ditzelfde zal met β het geval zijn. De grootte van de sprong is bepaald als men de wijze van veranderen van β vastlegt, b.v. eist dat β zo dicht mogelijk bij (maar beneden) α of bij $\frac{1}{2}\alpha$ blijft. Tracht men nu p uit de vergelijking $m_1(p) = n f$ als fct van f op te lossen, dan zal f alleen tussen k/n en $(k+1)/n$ kunnen veranderen, terwijl p een waarde heeft, waar $m_1(p)$ zulk een sprong uitvoert, terwijl bij $f = k/n$ p over een geheel interval kan variëren. M.a.w. de oplossing, die we met $p_2(f)$ aanduiden is op elk der intervallen $k/n < f < (k+1)/n$ constant en bij nf = geheel discontinu. Vgl. fig. 1, waar $\gamma = 0$ genomen is. (Men heeft b.v. $m_1(p) = 0$ zolang $q^n > \alpha$, dus $p < 1-\alpha^{\frac{1}{n}}$ is,

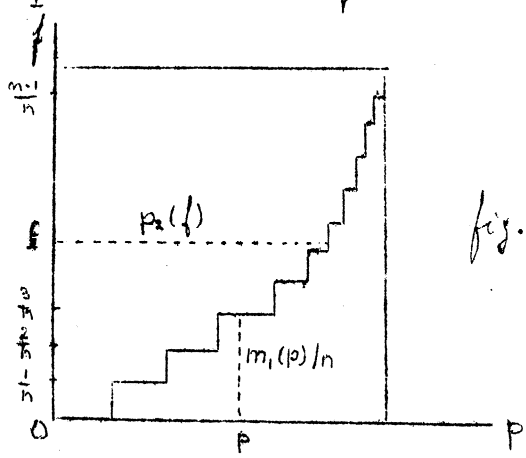


fig. 1

$m_1(p) = 1$ zolang $q^n \leqq \alpha$ maar $q^n + npq^{n-1} > \alpha$ is, enz; ten slotte $m_1(p) = n$ zolang $1-p^n \leqq \alpha$ of $p \geqq (1-\alpha)^{\frac{1}{n}}$ is. In het algemeen worden de grenzen $p(f)$ gevonden als wortels van n-de graads vgln in p. Anderzijds is $m_1(p)$ voor gegeven p bepaald als het grootste gehele getal, waarvoor $\sum_{0}^{m_1(p)-1} \binom{n}{h} p^h q^{n-h} \leqq \alpha$ is). Een analoge discussie geldt voor $m_2(p)$, benevens de oplossing $p = p_1(f)$ van de vgl $m_2(p) = nf$ (als we $\gamma \neq 0$ kiezen). Vgl. fig. 2, waar $\gamma > \beta$ gekozen is.

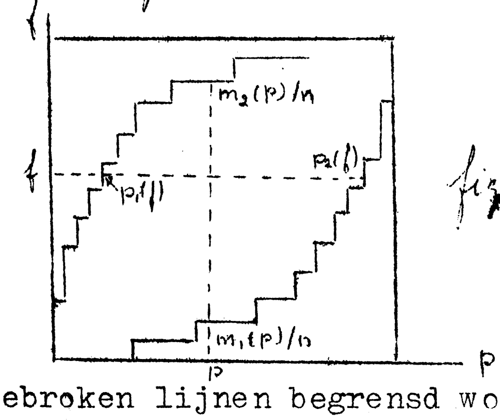


fig. 2

De voorwaarde

$$m_1(p)/n \leqq f \leqq m_2(p)/n$$

is $\underline{\text{aequivalent}}$ met de eis, dat het punt (p,f) in het gedeelte van het eenheidsvierkant ligt, dat door de beide veelvuldig gebroken lijnen begrensd wordt, en dus op grond van de definities van $p_1(f)$ en $p_2(f)$ óók $\underline{\text{aequivalent}}$ met de voorwaarde

$$p_1(f) \leqq p \leqq p_2(f)$$

Derhalve is

$$P\left[m_1(p)/n \leq \underline{f} \leq m_2(p)/n \right] \geq 1-\alpha$$

aequivalent met

$$P\left[p_1(\underline{f}) \leq p \leq p_2(\underline{f}) \right] \geq 1-\alpha$$

Derhalve is $(p_1(f),\ p_2(f))$ een betrouwbaarheidsinterval voor p met een onbetrouwbaarheidsdrempel die niet constant is, maar in de buurt van en hoogstens gelijk aan α blijft.

Is n zeer groot, dan is $\underline{f}$ bij benadering normaal, en wel $N(p, \sqrt{pq/n})$ verdeeld. Dus dan is

$$m_1(p) \approx np - \xi_\beta \sqrt{pqn} \quad , \quad m_2(p) \approx np + \xi_{\alpha-\beta} \sqrt{pqn}$$

Men moet dus de benaderde vgln

$$p - \xi_\beta \sqrt{pq/n} \approx f \quad \text{resp.} \quad p + \xi_{\alpha-\beta} \sqrt{pq/n}$$

oplossen. De eerste geeft $\xi_\beta^2\, pq/n \approx (f-p)^2$ of

$$p^2(n+\xi_\beta^2) - 2p(nf + \tfrac{1}{2}\xi_\beta^2) + f^2 n \approx 0 \qquad \text{dus}$$

$$p \approx \frac{nf + \frac{1}{2}\xi_\beta^2 + \xi_\beta \sqrt{nf(1-f) + \frac{1}{4}\xi_\beta^2}}{n + \xi_\beta^2}$$

(Waarom niet $\pm$?) Daar ξ_β constant is, kan dit voor $n \to \infty$ door $p \approx f + \xi_\beta \sqrt{f(1-f)/n}$ vervangen worden. (Dit kan eenvoudiger afgeleid worden door op te merken, dat in nulde benadering $p \approx f$, in eerste benadering $(p-f)^2 \approx \xi_\beta^2\, p(1-p)/n$, dus ook $\approx \xi_\beta^2 f(1-f)/n$ is, waaruit de benaderde waarde voor p direct door worteltrekking volgt).

We hebben dus gevonden:

$$p_2(f) \approx f + \xi_\beta \sqrt{f(1-f)/n}$$

en evenzo vindt men

$$p_1(f) \approx f - \xi_{\alpha-\beta} \sqrt{f(1-f)/n}$$

De gebroken lijnen gaan over in twee ellipsbogen. Voor het geval $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ zelfs in twee bogen van <u>dezelfde</u> ellips, nl.

$$p^2\left(1 + \frac{1}{n}\xi_{\frac{1}{2}\alpha}^2\right) - 2p\left(f + \frac{1}{2n}\xi_{\frac{1}{2}\alpha}^2\right) + f^2 = 0$$

We merken op, dat deze door de punten (0,0) en (1,1) gaat en in deze punten aan de lijn p = 0 resp. p = 1 raakt (vgl. fig. 3). Zij steekt dus buiten het eenheidsvierkant uit. Voor zeer kleine $p > 0$ wordt f negatief, en voor $p \approx 1$ wordt $f > 1$. Echter was f gedefinieerd als m/n met $0 \leq m \leq n$ (m geheel). <u>Hoe kan dat</u>??

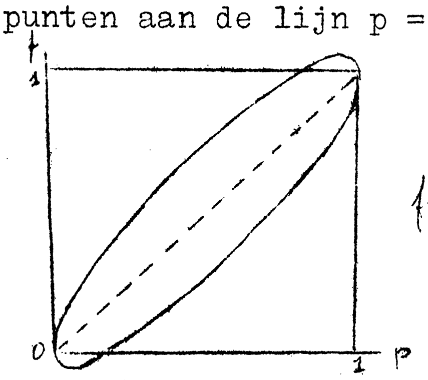


fig. 3

Voor kleinere n, d.w.z. als men n^{-1} niet meer wil verwaarlozen, worden de berekeningen door het optreden der gebroken lijnen vrij onoverzichtelijk. Voor dit geval zijn o.a. door B.L. van der Waerden ') benaderingen gegeven, waarnaar we de lezer verwijzen.

§ 3. Fouten van de tweede soort.

1. We beschouwen, evenals aan het eind van § 1 een speciale hypothese, bepaald door een parameterwaarde θ_0. Om de gedachten te bepalen zullen we soms voorbeeld 1 van § 2 beschouwen, waar $\theta = \mu$ $\theta_0 = 0$ is.

In de onderstelling dat we twee fcts $t_1(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ en $t_2(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ gevonden hebben, waarvoor - alleen voor $\theta = \theta_0$ -

$$P\left[t_1(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) \leqq \theta_0 \leqq t_2(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) \mid \theta_0\right] = 1-\alpha_0 \qquad '')$$

is, en dat we de hypothese $\theta = \theta_0$ op grond van een experiment, waarbij $\underline{x}_i = x_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ gevonden is, verwerpen, als θ_0 buiten het interval $(t_1(x_1,\ldots,x_n),\ t_2(x_1,\ldots,x_n))$ligt, hebben we een wh α_0, dat deze conclusie fout zal zijn. We verwachten dus, als we steeds deze verwerpingsmethode volgen, dat in een fractie α_0 van de gevallen deze conclusie fout zal zijn. Zulk een fout, t.w. het verwerpen van een hypothese als zij waar is, wordt een fout van de eerste soort genoemd.

Het kan echter zijn, dat niet θ_0 maar een andere parameterwaarde θ de ware is. Dan is er óók een zeker wh dat θ_0 verworpen zal worden. Zij

$$P\left[t_1 \leqq \theta_0 \leqq t_2 \mid \theta_1\right] = 1-\alpha \qquad '')$$

dan is dus α de wh dat θ_0 verworpen wordt, als θ waar is. Voor $\theta = \theta_0$ wordt natuurlijk $\alpha = \alpha_0$. We kunnen ook een "fout van de tweede soort" maken, t.w. θ_0 aanvaarden (preciezer: niet-verwerpen), terwijl zij niet waar is, in het bijzonder als θ de ware waarde is. De wh dat dit zal gebeuren is volgens bovenstaande gelijkheid $1-\alpha$. We hebben de wh op een fout van de eerste soort op α_0 ($\alpha_0 \leqq \alpha$) gefixeerd. Het is uiteraard gewenst, dat ook de kans op een fout van de tweede soort klein is.

We kunnen deze "kleinheids"-eis op verschillende manieren preciseren. In de eerste plaats kan het voorkomen, dat we behalve in

----

') Vgl. B.L. van der Waerden, Vertrauensgrenzen für unbekannte Wahrscheinlichkeiten, Ber.Ver. Sächs.Akad.Wiss. Leipzig 91 (1939) p. 213-228.

'') De onbetrouwbaarheidsdrempel zullen we in dit geval met α_0 i.p.v. α (zoals in de vorige paragrafen) aangeven; α krijgt hier een enigszins gewijzigde betekenis.

de nulhypothese Θ_0 in een speciale alternatieve hypothese Θ belang stellen, d.w.z. dat we slechts één andere waarde van Θ (t.w. Θ) wensen te beschouwen. We zeggen dan, dat we de hypothese Θ_0 toetsen "tegen" de hypothese Θ. In dat geval zullen we de vrijheid die ons in de keuze van het betrouwbaarheidsinterval overblijft, wanneer we alleen eisen, dat de kans op een fout van de eerste soort $= \alpha_0$ is, benutten om de kans op een fout van de tweede soort minimaal te maken. Onze beide eisen zijn dus

$$\begin{cases} P[\underline{t}_1 \leq \Theta_0 \leq \underline{t}_2 \mid \Theta_0] = 1-\alpha_0 \\ P[\underline{t}_1 \leq \Theta_0 \leq \underline{t}_2 \mid \Theta] \quad \text{is minimaal.} \end{cases}$$

2. Passen we dit toe op voorbeeld 1 van §2, dan is $\underline{t}_1 = \underline{m} - n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\alpha_0-\beta}$, $\underline{t}_2 = \underline{m} + n^{-\frac{1}{2}}\xi_\beta$, waarbij we nog over β kunnen beschikken. Voorts is $\mu_0 = 0$. Dus

$$P[\underline{m} - n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\alpha_0-\beta} \leq 0 \leq \underline{m} + n^{-\frac{1}{2}}\xi_\beta \mid 0] = 1-\alpha_0$$

Onder een alternatieve hypothese μ daarentegen is

$$1-\alpha = P[\underline{m} - n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\alpha_0-\beta} \leq 0 \leq \underline{m} + n^{-\frac{1}{2}}\xi_\beta \mid \mu] =$$

$$= P[\underline{m} - n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\alpha_0-\beta} + \mu \leq \mu \leq \underline{m} + n^{-\frac{1}{2}}\xi_\beta + \mu \mid \mu] =$$

$$= P[-\xi_\beta - \mu\sqrt{n} \leq (\underline{m}-\mu)\sqrt{n} \leq \xi_{\alpha_0-\beta} - \mu\sqrt{n} \mid \mu] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\xi_\beta - \mu\sqrt{n}}^{\xi_{\alpha_0-\beta}-\mu\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx .$$

We hebben nog de vrije beschikking over β. Om $1-\alpha$ minimaal te maken differentiëren we b.v. naar β:

$$-\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{ \frac{\partial \xi_{\alpha_0-\beta}}{\partial\beta}\, e^{-\frac{1}{2}(\xi_{\alpha_0-\beta}-\mu\sqrt{n})^2} + \frac{\partial\xi_\beta}{\partial\beta}\, e^{-\frac{1}{2}(\xi_\beta+\mu\sqrt{n})^2} \right\}$$

Nu is

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi_\beta}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \beta$$

dus, door naar β te differentiëren:

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\xi_\beta^2}\,\frac{\partial\xi_\beta}{\partial\beta} = 1 \qquad \frac{\partial\xi_\beta}{\partial\beta} = -\sqrt{2\pi}\, e^{+\frac{1}{2}\xi_\beta^2}$$

Evenzo:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi_{\alpha_0-\beta}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \alpha_0-\beta , \qquad \frac{\partial\xi_{\alpha_0-\beta}}{\partial\beta} = +\sqrt{2\pi}\, e^{+\frac{1}{2}\xi_{\alpha_0-\beta}^2}$$

We vinden dus:

$$-\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} = e^{-\frac{1}{2}\mu^2 n}\left(e^{\xi_{\alpha_0-\beta}\,\mu\sqrt{n}} - e^{-\xi_\beta\,\mu\sqrt{n}}\right)$$

Dit is = 0 als $\xi_{\alpha_0-\beta} = -\xi_\beta$, dus $\alpha_0-\beta = 1-\beta$ of $\alpha_0 = 1$ is, een waarde voor α_0 die het zinloos is te kiezen. Daar steeds $\alpha_0 < 1$ (zelfs $\alpha_0 \ll 1$) gekozen wordt, is steeds $\xi_{\alpha_0-\beta} > \xi_{1-\beta} = -\xi_\beta$, dus als $\mu > 0$ is $+\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial\beta} > 0$ en als $\mu < 0$ is $+\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial\beta} < 0$. M.a.w. $1-\alpha$ is voor $\mu > 0$ een toenemende en voor $\mu < 0$ een afnemende fct van β en bereikt haar minimum bij de grootste resp. de kleinste toegelaten waarde van β, di. $\beta = 0$ resp. $\beta = \alpha_0$. We zien dus dat we, als we $\mu = 0$ tegen een waarde van μ die > 0 is willen toetsen, de wh van een fout van de tweede soort zo klein mogelijk maken door $\beta = 0$, d.i. het interval $\underline{m} > + n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\alpha_0}$ als voorwaarde voor verwerping ¹) te nemen, en als we $\mu = 0$ tegen een $\mu < 0$ willen toetsen door $\underline{m} < -n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\alpha_0}$ als voorwaarde voor verwerping ¹) te nemen, in beide gevallen dus een éénzijdig onbegrensd interval. Dit is uiteraard allerminst verrassend.

3. Als we Θ_0 niet tegen een bepaalde alternatieve hypothese Θ willen toetsen, zullen we alle waarden $\Theta \neq \Theta_0$ moeten toelaten. Dan is α een fct van Θ. Wanneer Θ tot Θ_0 nadert zal de kans op een fout van de tweede soort tot $1-\alpha_0$, dus in het algemeen een grote waarde naderen. M.a.w. als de ware waarde slechts weinig van Θ_0 verschilt, is het vrij zeker dat Θ_0 niet verworpen wordt, hoewel zij niet de ware waarde is. Anders gezegd: de toetsingsmethode staat niet toe, vlak bij Θ_0 gelegen waarden van Θ_0 te onderscheiden. Zij zal in het algemeen des te beter geacht kunnen worden, naarmate het gebied van waarden die zij wèl van Θ_0 kan onderscheiden groter is.

In ieder geval is wel het minste wat men kan verlangen, dat de wh van verwerpen van Θ_0 zodra Θ_0 niet de ware waarde is groter is dan wanneer zij dit wèl is. Nu is de kans op verwerpen van Θ_0 als Θ de ware waarde is $= \alpha$. We zullen dus eisen, dat α als fct van Θ beschouwd, haar minimum bereikt voor $\Theta = \Theta_0$. Is dit het geval, dan heet de toets zuiver (Engels: unbiased).

4. Passen we dit weer toe op voorbeeld 1 van § 2. dan moeten we nu van de uitdrukking

$$1-\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\xi_\beta - \mu\sqrt{n}}^{\xi_{\alpha_0-\beta} - \mu\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

het maximum zoeken als fct van μ (nu niet van β), en de toets zal zuiver zijn als dit bij $\mu = 0$ bereikt wordt.

---

¹) De "kritische zône" volgens de in § 4 te behandelen algemene theorie.

Nu is

$$-\frac{\partial\alpha}{\partial\mu} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{n}\left(e^{-\frac{1}{2}(\xi_{\alpha_0-\beta}-\mu\sqrt{n})^2} - e^{-\frac{1}{2}(\xi_{\beta}+\mu\sqrt{n})^2}\right)$$

of $$\frac{\partial\alpha}{\partial\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{n}\, e^{-\frac{1}{2}\mu^2 n}\left(e^{-\frac{1}{2}\xi^2_{\alpha_0-\beta}+\xi_{\alpha_0-\beta}\mu\sqrt{n}} - e^{-\frac{1}{2}\xi^2_{\beta}-\xi_{\beta}\mu\sqrt{n}}\right)$$

Het rechter lid wordt 0 als

$$-\tfrac{1}{2}\xi^2_{\alpha_0-\beta}+\xi_{\alpha_0-\beta}\mu\sqrt{n} = -\tfrac{1}{2}\xi^2_{\beta}-\xi_{\beta}\mu\sqrt{n}$$

is, of $$2(\xi_{\alpha_0-\beta}+\xi_{\beta})\mu\sqrt{n} = \xi^2_{\alpha_0-\beta}-\xi^2_{\beta}$$

of $$\mu\sqrt{n} = \tfrac{1}{2}(\xi_{\alpha_0-\beta}-\xi_{\beta})$$

Voorts is voor $\mu\sqrt{n} \gtrless \frac{1}{2}(\xi_{\alpha_0-\beta}+\xi_{\beta})$ het rechter lid van $\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}$ ook $\gtrless$ 0, d.w.z. α bereikt zijn minimum bij $\mu = \frac{1}{2\sqrt{n}}(\xi_{\alpha_0-\beta}-\xi_{\beta})$. Dit moet, wil de toets zuiver zijn, $\mu = 0$ zijn, dus $\xi_{\beta} = \xi_{\alpha_0-\beta}$ of $\beta = \alpha_0-\beta$, d.w.z. $\beta = \frac{1}{2}\alpha_0$. Het <u>symmetrische</u> betrouwbaarheidsinterval is dus in dit geval het zuivere.

Zodra we een onsymmetrisch interval kiezen, b.v. met $\beta < \frac{1}{2}\alpha_0$, dus $\alpha_0-\beta > \beta$, dus $\xi_{\alpha_0-\beta} < \xi_{\beta}$, wordt het minimum van α bij een $\mu \neq 0$ (in dit geval < 0) bereikt, d.w.z. als 0 de ware waarde is, is de kans dat we 0 als ware waarde verwerpen nog groter dan wanneer $\mu = \mu_{min} = -\frac{1}{2\sqrt{n}}(\xi_{\beta}-\xi_{\alpha_0-\beta})$ (of een dicht daarbij gelegen waarde) de ware waarde is. Dit wordt veraanschouwelijkt door fig. 1 - 5, waar we als abscis de ware waarde μ kiezen, en als ordinaat de wh α dat 0 verworpen wordt.

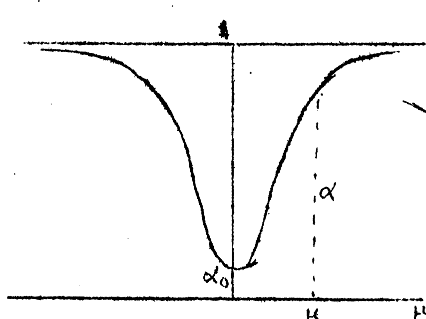


fig 1 $\beta = \frac{1}{2}\alpha_0$

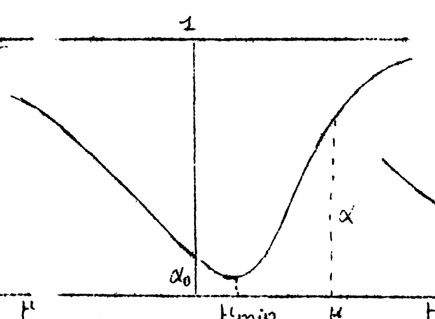


fig 2 $\beta > \frac{1}{2}\alpha_0$

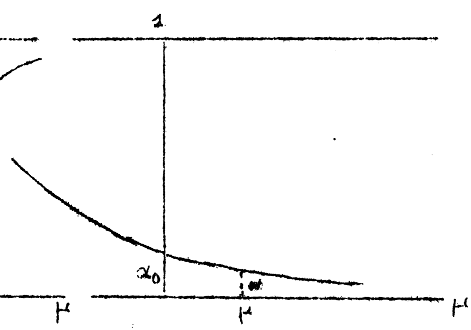


fig 3 $\beta = \alpha_0$

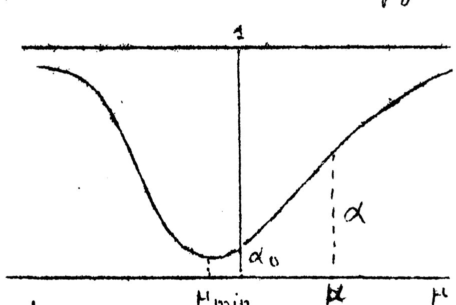


fig 4 $\beta < \frac{1}{2}\alpha_0$

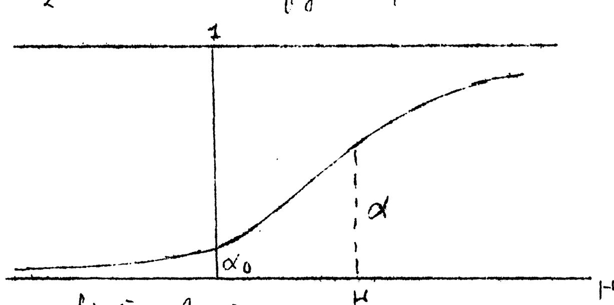


fig 5 $\beta = 0$

We merken nog op, dat voor $\beta = 0$ $-\xi_\beta = -\infty$, dus

$$1-\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi_{\alpha_0}-\mu\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

de normale verdelingsfct voor de waarde $\xi_{\alpha_0} - \mu\sqrt{n}$ wordt. Zij is dus $= \frac{1}{2}$ voor $\xi_{\alpha_0} - \mu\sqrt{n} = 0$, d.i. $\mu = \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{\alpha_0}$.

Het minimum van α (zie fig. 5) wordt dan eerst bij $\mu = -\infty$ bereikt (in overeenstemming met $2\mu\sqrt{n} = \xi_{\alpha_0} - \xi_0 = -\infty$). Evenzo is voor $\beta = \alpha_0$ α zelf de normale verdelingsfct voor de waarde $-\xi_\beta - \mu\sqrt{n}$.

5. We kunnen nog vragen naar een maat voor het onderscheidingsvermogen voor een zuivere toets. Dit zal, althans voor waarden die dicht bij de ware gelegen zijn, des te groter zijn, naarmate α vanuit zijn minimum bij Θ_0 naar beide zijden steiler oprijst, dus naarmate de tweede afgeleide $\partial^2\alpha / \partial\Theta^2$ voor $\Theta = \Theta_0$ groter is.

De functie $\alpha = \alpha(\Theta)$ zal het onderscheidingsvermogen (Engels: Power) van de toets genoemd worden; de grootheid

$$S = \left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\Theta^2}\right)_{\Theta=\Theta_0}$$

haar sterkte. In het beschouwde voorbeeld was

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\mu} = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\mu^2 n}\left(e^{-\frac{1}{2}\xi^2_{\alpha_0-\beta} + \xi_{\alpha_0-\beta}\mu\sqrt{n}} - e^{-\frac{1}{2}\xi^2_\beta - \xi_\beta\mu\sqrt{n}}\right) =$$

$$= 2\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\mu^2 n - \frac{1}{2}\xi^2_{\frac{1}{2}\alpha_0}}\, \operatorname{sh} \xi_{\frac{1}{2}\alpha_0}\mu\sqrt{n}$$

daar de toets zuiver ondersteld is.

Om $\frac{\partial^2\alpha}{\partial\mu^2}$ voor $\mu = \mu_{min}$ te bepalen behoeft de factor $e^{-\frac{1}{2}\mu^2 n}$ niet gedifferentieerd te worden, daar haar afgeleide met de factor tussen haakjes, die in het minimum 0 is, vermenigvuldd wordt. Dus

$$S = \left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\mu^2}\right)_{\mu=\mu_{min}} = \left(\frac{2n}{\sqrt{2\pi}}\, \xi_{\frac{1}{2}\alpha_0}\, e^{-\frac{1}{2}\mu^2 n - \frac{1}{2}\xi^2_{\frac{1}{2}\alpha_0}}\, \operatorname{ch} \xi_{\frac{1}{2}\alpha_0}\mu\sqrt{n}\right)_{\mu=0} =$$

$$= \frac{2n}{\sqrt{2\pi}}\, \xi_{\frac{1}{2}\alpha_0}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2_{\frac{1}{2}\alpha_0}}$$

Zonder hier zuiverheid te onderstellen zou men hier

$$\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\left(\xi_{\alpha_0-\beta} + \xi_\beta\right) e^{-\frac{1}{8}(\xi_{\alpha_0-\beta} + \xi_\beta)^2}$$

gevonden hebben, dus dezelfde uitdrukking met $\frac{1}{2}(\xi_\beta + \xi_{\alpha_0-\beta})$ (d.i. de halve lengte van het betrouwbaarheidsinterval) in plaats van $\xi_{\frac{1}{2}\alpha_0}$.
Aan deze uitdrukking zie we niet veel, behalve dat ze met n even-

redig is. Ze kan echter gebruikt worden om verschillende toetsen met elkaar vergelijken. Hier hebben we namelijk t_1 en t_2 uitsluitend met behulp van het steekproef<u>gemiddelde</u> bepaald. Men zou echter ook andere grootheden, b.v. de steekproefmediaan of een bepaald quantilen gemiddelde kunnen gebruiken, en hun scherpte - als ze zuiver zijn - met de hier gevondene vergelijken (vgl. de volgende paragrafen).

6. Resumerende kunnen we dus vaststellen.

Zijn $\underline{t}_1$ en $\underline{t}_2 > \underline{t}_1$ twee statistische grootheden, en bestaat de toets daarin, dat we een parameterwaarde θ_0 verwerpen als zij <u>buiten</u> het interval ($\underline{t}_1$, $\underline{t}_2$) valt dat bij de waargenomen waarden behoort, dan is

1°. de grootheid $\alpha_0 = 1 - P[\underline{t}_1 \leq \theta_0 \leq \underline{t}_2 \mid \theta_0]$ de wh van een fout van de eerste soort (ten onrechte verwerpen);

2°. de grootheid $1 - \alpha_0$ de <u>betrouwbaarheidsdrempel</u> (wh van terecht niet-verwerpen);

3°. de grootheid $1 - \alpha = P[\underline{t}_1 \leq \theta_0 \leq \underline{t}_2 \mid \theta]$ de wh van een fout van de tweede soort (ten onrecht niet-verwerpen);

4°. de grootheid α het <u>onderscheidingsvermogen</u> (wh van terecht verwerpen);

5°. de toets <u>zuiver</u> als α haar minimum bereikt voor $\theta = \theta_0$;

6°. de <u>scherpte</u> van de toets, als deze zuiver is, de waarde die $\partial^2\alpha / \partial\theta^2$ voor $\theta = \theta_0$ aanneemt.

7. De hier weergegeven resultaten zijn een bijzonder geval van de algemene toetsingstheorie die door J. Neyman en Egon Pearson ontwikkeld '), en sindsdien door vele auteurs nader uitgewerkt is ").

') J. Neyman, Basic ideas and some results of the theory of testing statistical hypotheses, Jrn. Roy. Stat. Soc. <u>105</u> (1942) 292-327.

") Zie b.v. A. Wald, On the principles of statistical inference, Notre Dame, Indiana 1942.

§ 4. Algemene toetsingstheorie

We zullen thans enige hoofdpunten uit de algemene theorie van Jerzy Neyman, later uitgewerkt door Neyman en Pearson ') behandelen.

1. We beschouwen evenals in hoofdstuk 4, pag 199 (Whr pag. 298) een verzameling van mogelijke waarnemingsresultaten. Ieder waarnemingsresultaat zal doorgaans daarin bestaan, dat een aantal (n) variabele grootheden $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ bepaalde getallenwaarden $x_1, \ldots, x_n$ aannemen. Voorts beschouwen we een vz van hypothesen $\mathcal{H}$, b.v. gekarakteriseerd door m parameters $\theta_1, \ldots, \theta_m$, die voor een bepaalde hypothese $\mathcal{H}_0$ de waarden $\theta_{10}, \ldots, \theta_{m0}$ aannemen. En we onderstellen dat voor iedere (tot de vz behorende) hypothese de waarnemingsresultaten een bepaalde wh-verdeling bezitten. Duiden we kortheidshalve een n-tal getallen $x_1, \ldots, x_n$ met een enkele letter x en een m-tal getallen $\theta_1, \ldots, \theta_m$ met een enkele letter θ aan (eventueel voorzien van een index 0), en is W een bepaalde vz van waarnemingsresultaten dan is dus voor iedere θ de wh $P[\underline{x} \in W | \theta]$ bepaald. (We herinneren eraan, dat het symbool $\in$ betekent: 'is een element van' of, korter, 'behoort tot'). Evenals vroeger onderstellen we, dat onder de mogelijke parameterstelsels θ één (en slechts één) voorkomt, dat als "het ware" beschouwd kan worden, m.a.w. dat één der hypothesen "in werkelijkheid" vervuld is. De algemene toetsingstheorie dient om na te gaan, of dit met een bepaald gekozen hypothese θ_0 al dan niet het geval is.

Het vereenvoudigt vaak het spreken, als we voor de vz van waarnemingsresultaten een meerdimensionaal-meetkundige terminologie invoeren. We noemen dan een stelsel van n reële getallen $x_1, \ldots, x_n$ een <u>punt</u> van een n-dimensionale ruimte ("steekproef-ruimte") dat we met x ") aanduiden. De n-dimensionale ruimte zelf duiden we met R_n aan. Een stelsel punten dat lineair van één parameter λ afhangt: $x_i = a_i + \lambda b_i$ ($i = 1, \ldots, n$; a_i en b_i gegeven) noemen we een <u>rechte</u> in R_n; zulk een stelsel dat lineair van 2 parameters afhangt ($x_i = a_i + \lambda b_i + \mu c_i$) een <u>plat vlak</u> in R_n, enz. Algemeen heet een stelsel punten dat lineair van k parameters afhangt een $\underline{R_k}$ in R_n. Zulk een stelsel bestaat uit de oplossingen van $n-k$ lineair-onafhankelijke lineaire vgln in de n variabelen x_i. Een R_0 is een punt. In het bijzonder wordt een R_{n-1} in R_n

---

') J. Neyman and W.S. Pearson, Contributions to the theory of testing statistical hypotheses, Statistical Research Memoirs I, p. 1-37 (1936) II, p. 25-57 (1938)
J. Neyman, Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability, Phil. Trans. Royal Soc. 236 A p. 333-380 (1937).

") In de literatuur wordt hiervoor vaak de letter E ("event-point") gebruikt.

dus bestaande uit de oplossingen van één lineaire vgl $\sum p_i x_i - q = 0$ waarbij niet alle p_i nul zijn, vaak een hypervlak genoemd. Alleen een R_{n-1} verdeelt de R_n in twee delen (gebieden); in alle punten van het ene gebied is het linker lid $\psi(x)$ d.i. $\sum p_i x_i - q$ van de vgl positief, in het andere gebied negatief. Ook een niet-lineaire maar continue fct $\psi(x)$ verdeelt de R_n in twee gebieden '), bestaande uit de punten waar $\psi(x) > 0$ resp. $\psi(x) < 0$ is.

De vz van de punten waar $\psi(x) = 0$ is, wordt nu niet meer een 'vlakke ruimte' R_{n-1} maar een 'gekromde ruimte' genoemd en met V_{n-1} ((n-1)-dimensionale varieteit) aangeduid. Zij is de gemeenschappelijke begrenzing van de twee bovengenoemde gebieden. Het eerste (en analoog het tweede) dezer gebieden wordt afgesloten door er de punten van zijn begrenzing aan toe te voegen; het afgesloten gebied bestaat dus uit de punten waar $\psi(x) \geq 0$ is.

We kunnen hier ook de massa-geometrische terminologie invoeren. De wh dat x in een bepaalde vz ligt, noemen we dan de over die vz verdeelde massa. Iedere hypothese bepaalt dan een massa-verdeling in R_n, verschillende hypothesen bepalen verschillende verdelingen van telkens een totale massa = 1.

We kunnen evenzo alle stelsels van m parameter waarden $\theta_1, \dots \theta_m$ als punten in een m-dimensionale ruimte R_m("parameter ruimte") aanduiden, en daar ook overigens een analoge terminologie gebruiken. Iedere hypothese behoort dan bij een bepaald punt van de parameter ruimte; alle toegelaten hypothesen tezamen vormen - naar we zullen veronderstellen - een gebied in deze ruimte. We duiden dit gebied met Ω aan, het stelsel parameterwaarden ($\theta_1, \dots, \theta_m$) met θ. De voorwaarde dat dit stelsel parameterwaarden een toegelaten hypothese bepaalt wordt dus uitgedrukt door $\theta \in \Omega$. Een punt van dit gebied behoort bij de "ware", een ander (of hetzelfde) bij de te toetsen parameterwaarde.

Een toets voor een hypothese θ_0 is een statistisch kenmerk K dat elk mogelijk waarnemingsresultaat al dan niet bezit, en dat aan enkele verder te noemen voorwaarden voldoet. De eis, dat het kenmerk statistisch moet zijn, houdt in, dat bij ieder waarnemingsresultaat x ondubbelzinnig vast te stellen is, of het het kenmerk al dan niet bezit, ongeacht welke hypothese θ de "ware" is. Het kenmerk mag dus niet van de ware hypothese θ, maar wèl van de te toetsen hypothese θ_0 afhangen, daar $\theta_{10}, \dots, \theta_{m0}$ gegeven getallen zijn. De toets wordt op de volgende wijze gebruikt. Bezit het waargenomen waardenstelsel x van x het kenmerk K, dan wordt de hypothese θ_0 verworpen. Bezit x het kenmerk K niet, dan wordt de hypothese θ_0 niet verworpen.

Er is dus een (onafhankelijk van θ) bepaald vz van waarnemingsresultaten, die het kenmerk K bezitten. We zullen deze vz ook met K aanduiden en $x \in K$ schrijven, als x het kenmerk K bezit. Deze vz heet de

----

') Voor voetnoot zie bovenaan volgende pagina.

') We volgen hier niet precies het gewone spraakgebruik, volgens hetwelk een gebied samenhangend moet zijn. Elk gebied in onze zin kan uit meerdere gescheiden gebieden in de gewone zin bestaan.

kritieke vz (ook kritiek gebied of kritieke zône) voor de beschouwde toets van de hypothese θ_0. Men kan ook de vz K eerst gegeven denken en dan zeggen: het kenmerk K van een waarnemingsresultaat x bestaat daarin, dat het tot de kritieke vz behoort. We zullen ons beperken tot het geval, waarin de kritieke zône een gebied in de steekproefruimte R_n is (dat eventueel uit meerdere gescheiden gebieden kan bestaan). Het bestaat dan uit alle punten x, waarvoor een bepaalde continue fct, die we met t aanduiden positief is, d.w.z. waar $t(x)>0$, of uitvoeriger $t(x_1,\dots,x_n)>0$ is. Het kenmerk K (de toets) is nu dus de ongelijkheid $t>0$. In de voorbeelden van § 2 en 3 was $t(x)=(t_1(x)-\theta_0)(t_2(x)-\theta_0)$. Daar toen immers $t_2(x)>t_1(x)$ ondersteld is voor alle x, is deze $t(x)$ dan en slechts dan >0, als θ_0 buiten het interval (t_1,t_2) ligt. Het is duidelijk, dat de kritieke zône, dus de toets onveranderd blijft als men de toets-fct $t(x)$ door een andere vervangt, die er slechts door een overal positieve factor van verschilt.

Op grond van het voorgaande is er voor iedere hypothese $\theta_0\in\Omega$ een bepaalde wh $P[\underline{x}\in K|\theta_0]$, dat een waarnemingsresultaat tot de kritieke zône zal behoren en dus tot verwerping van θ_0 zal leiden. We onderscheiden wederom twee soorten van fouten: 1° het verwerpen van θ_0 als deze hypothese de ware is (fout van de eerste soort) en 2° het niet-verwerpen van θ_0 als een daarvan verschillende hypothese de ware is (fout van de tweede soort).

2. We eisen nu van de toets, dat de wh van het maken van een fout van de eerste soort een gegeven waarde α_0 heeft (bij discontinue verdelingen $\leqq\alpha_0$ is):

(De toets, dus ook de fct t en het gebied K zal daartoe behalve van θ_0 ook van de keuze van α_0 moeten afhangen). De waarde α_0 wordt wederom de onbetrouwbaarheidsdrempel genoemd: $K=K(\theta_0)=K(\theta_0;\alpha_0)$

Is $\mathcal{G}$ het complement van K (d.w.z. de vz van alle punten die niet tot K behoren, i.c. dus waarom $t(x)\leqq 0$ is), dan kan de complementaire gelijkheid $P[\underline{x}\in\mathcal{G}|\theta_0]=P[t(\underline{x})\leqq 0/\theta_0]=1-\alpha_0$

gebruikt worden als θ_0 niet getoetst moet worden, maar gegeven is. De gelijkheid leert dan, dat men svpr α_0 voorspellen kan, dat $\underline{x}\in\mathcal{G}$ zal liggen (oplossing van het rechtstreekse probleem). We noemen daarom een voorspellingsgebied svpr α_0 voor $\underline{x}$ bij gegeven θ_0. Op deze wijze is steeds een oplossing van het directe aan een van het indirecte probleem gekoppeld: het complement van een voorspellingsgebied svpr α_0 voor $\underline{x}$ bij gegeven θ_0 is een kritieke zône voor $\underline{x}$ bij toetsing van θ_0 met onbetrouwbaarheidsdrempel α_0. Bovendien is de vz van alle θ waarvoor bij $x\in K=K(\theta)$ is (wanneer K als fct van θ gegeven is) een betrouwbaarheidsgebied $\Gamma=\Gamma(x)$

svpr α_0 voor θ bij gegeven x. Dan is dus $\underline{x} \in K(\theta)$ aeq $\theta \in \Gamma(\underline{x})$

De wh van een fout van de tweede soort als $\theta \neq \theta_0$ de ware parameterwaarde is, is $P[t(\underline{x}) \leqq 0 \mid \theta] = 1 - P[\underline{x} \in K \mid \theta] = 1 - \alpha(\theta)$

De toets wordt <u>zuiver</u> (Engels = unbiased) genoemd, als deze wh voor iedere $\theta \in \Omega$ $\leqq 1 - \alpha_0$ is. M.a.w. als de fct $\alpha(\theta)$, het <u>onderscheidingsvermogen</u> genaamd, voor $\theta = \theta_0$ haar <u>minimum</u> bereikt, dat dan $= \alpha_0$ is:

$$P[\underline{x} \in K(\theta_0) \mid \theta] \geqq P[\underline{x} \in K(\theta_0) \mid \theta_0] = \alpha_0$$

Wanneer we onder de mogelijke alternatieve hypothesen $\theta \neq \theta_0$ slechts één bepaalde, b.v. $\theta_1 = (\theta_{11}, \ldots, \theta_{m1})$ beschouwen, zeggen we dat we θ_0 "tegen θ_1" toetsen. Een zuivere toets $t > 0$ van θ_0 met betrouwbaarheidsdrempel α_0 wordt dan door Neyman en Pearson met betrekking tot θ_1, "most powerful unbiassed" genoemd, als, indien θ_1 waar is, de wh van een fout van de <u>tweede</u> soort bij geen enkele andere toets kleiner is. Dus als

$$P[t(\underline{x}) \leqq 0 \mid \theta_1] \leqq P[u(\underline{x}) \leqq 0 \mid \theta_1]$$

voor <u>iedere</u> statistische fct u, die eveneens een zuivere toets voor θ_0 met <u>dezelfde</u> onbetrouwbaarheidsdrempel α_0 is:

$$P[u(\underline{x}) > 0 \mid \theta_0] = \alpha_0$$
$$P[u(\underline{x}) > 0 \mid \theta] \geqq \alpha_0$$

We kunnen de uitdrukking 'most powerful' met 'machtigst' vertalen.

Is L het bij een willekeurige andere toets behorende kritieke gebied (overeenkomende met $u > 0$), en is $\beta(\theta)$ het daarbij behorende onderscheidingsvermogen, dan luidt de voorwaarde voor een machtigste zuivere toets van θ_0 tegen θ_1

1) $P[\underline{x} \in K(\theta_0) \mid \theta] \geqq P[\underline{x} \in K(\theta_0) \mid \theta_0] = \alpha_0$

voor iedere $\theta \in \Omega$

2) $\alpha(\theta_1) = P[\underline{x} \in K(\theta_0) \mid \theta_1] \geqq P[\underline{x} \in L(\theta_0) \mid \theta_1] = \beta(\theta_1)$

voor <u>ieder</u> gebied $L(\theta_0)$ waarvoor $P[\underline{x} \in L(\theta_0) \mid \theta] \geqq P[\underline{x} \in L(\theta_0) \mid \theta_0] = \alpha_0$ is voor iedere $\theta \in \Omega$. M.a.w. zij houdt in, dat het onderscheidingsvermogen van $t > 0$ voor $\theta = \theta_1$ onder alle toegestane zuivere toetsen maximaal is. Geldt de voorwaarde niet slechts voor één bepaalde hypothese θ_1, maar voor alle $\theta \neq \theta_0$, dan heet de toets "gelijkmatig machtigst" (Engels: uniformly most powerful). <u>Gelijkmatig</u> machtigste zuivere toetsen bestaan echter slechts in weinige gevallen:

3. We onderstellen nu verder, dat de massaverdeling in R_n voor <u>iedere</u> $\theta \in \Omega$ <u>continu</u> is en een continue verdelingsdichtheid bezit, die we met $p(x \mid \theta)$ aanduiden. M.a.w. dat voor ieder gebied $\mathcal{G}$ in R_n

$$P[\underline{x} \in \mathcal{G} \mid \theta] = \int_{\mathcal{G}} p(x \mid \theta)\, dx$$

is, waarin het rechter lid een afkorting is voor

$$\int_{\mathcal{G}} \cdots \int p(x_1, \ldots, x_n \mid \theta_1, \ldots, \theta_m)\, dx_1 \ldots dx_n$$

We herinneren er aan, dat voor $n = 1$ continuiteit en het bezit van een verdelingsdichtheid (die echter niet continu behoeft te zijn) practisch aequivalent zijn. Iedere verdeling op R_1 is namelijk de som van 1^o een discrete verdeling, waarbij de massa geheel in (aftelbaar vele) afzonderlijke punten geconcentreerd is, 2^o een continu differentiëerbare verdeling, die een verdelingsdichtheid bezit, en 3^o een "singuliere" verdeling (waar van die van Cantor (vgl p. 132; Whr 221) een voorbeeld was. Zulke singuliere verdelingen hebben echter (vooralsnog!!) geen practische statistische toepassing gevonden. In R_n met $n \geq 2$ zijn er echter meer mogelijkheden, ook al laten we singuliere verdelingen en hun meerdimensionale analoga volledig buiten beschouwing. T.w. de volgende: 1^o de massa is geheel in (aftelbaar vele) afzonderlijke punten in R_n geconcentreerd (discrete verdeling). De voorwaarde van continuïteit houdt in, dat de verdeling geen discreet deel bezit, m.a.w. dat de totale massa in ieder afzonderlijk punt nul is. Dan blijft echter nog de mogelijkheid 2^o de massa is geheel op één of meer rechte of kromme lijnen geconcentreerd, en over elk dier lijnen continu verdeeld. Evenzo: 3^o de massa is geheel op één of meer platte of gebogen vlakken geconcentreerd, en op elk daarvan continu verdeeld, enz. Algemeen: de massa is geheel op één of meer k-dimensionale variëteiten geconcentreerd, en op elk daarvan continu verdeeld. Deze gevallen, waarbij de verdeling eigenlijk minder dan n-dimensionaal is, zijn allerminst van statistisch belang ontbloot. Zij liggen integendeel aan de correlatierekening ten grondslag (correlatiecoefficient = 1) en kunnen in de regressie-analyse veel last veroorzaken.

Indien echter het waarnemingsresultaat bestaat uit n onafhankelijke waarnemingen van (b.v.) een zelfde stochastische grootheid, die continu verdeeld is met dichtheid $f(x|\theta)$ (en in vele andere gevallen) doen zich deze moeilijkheden niet voor. Dan bestaat inderdaad een n-dimensionale verdelingsdichtheid $p(x|\theta)$ t.w.

$$p(x|\theta) = f(x_1|\theta) f(x_2|\theta) \cdots\cdots f(x_n|\theta)$$

We zullen verder, tenzij het tegendeel gezegd wordt, alleen zulke continue verdelingen beschouwen, waarbij de lager dan n-dimensionale delen ontbreken (niet slechts op vlakke, maar ook op gebogen variëteiten) en de verdelingsdichtheid $p(x)$ bestaat.

Voor dit geval bewijzen wij (overeenkomstig een stelling van Neyman en Pearson), dat, als $p(x|\theta)$ bovendien continu is, voor de toetsing van een hypothese θ_0 tegen een andere θ_1, steeds een machtigste (niet noodzakelijk zuivere) toets bestaat, en dat deze gegeven is door de toetsfunctie

$$t(x) = \lambda\, p(x|\theta_1) - p(x|\theta_0)$$

waarin λ een (van θ_0, θ_1 en α_0 afhankelijke positieve constante is, die bepaald wordt uit de voorwaarde, dat $P[t>0|\theta_0] = \alpha_0$ moet zijn.

We bewijzen, dat deze toets inderdaad het machtigst is. De voorwaarde, waaruit λ bepaald wordt, luidt, als we ter afkorting p_0 en p_1 schrijven voor $p(x|\theta_0)$ en $p(x|\theta_1)$:

$$\int_{t>0} p_0\, dx = \alpha_0$$

Hierin is dx een afkorting voor $dx_1 \ldots\ldots dx_n$
We nemen nu ter vergelijking een tweede willekeurige toets $u>0$.
Hiervoor moet eveneens gelden:

$$\int_{u>0} p_0 \, dx = \alpha_0$$

Nu is echter, met een gemakkelijk te begrijpen afkortende symboliek,

$$\int_{t>0} = \int_{t>0,\, u>0} + \int_{t>0,\, u<0}$$

(daar de totale massa op $u=0$ naar onderstelling nul is), en evenzo

$$\int_{u>0} = \int_{t>0,\, u>0} + \int_{t<0,\, u>0}$$

We hebben dus

$$\int_{t>0,\, u>0} + \int_{t>0,\, u<0} = \int_{t>0} = \alpha_0 = \int_{u>0} = \int_{t>0,\, u>0} + \int_{t<0,\, u>0}$$

dus ook $\displaystyle\int_{t>0,\, u<0} = \int_{t<0,\, u>0}$ of, uitvoeriger geschreven

$$\int_{t>0,\, u<0} p_0 \, dx = \int_{t<0,\, u>0} p_0 \, dx$$

In het eerste lid is $t>0$, dus $p_0<\lambda p_1$. Het eerste lid is dus $\leqq \lambda \int_{t>0,\, u<0} p_1 dx$ (Waarom $\leqq$ en niet noodzakelijk $=$?). In het tweede lid is $t<0$, dus $p_0>\lambda p_1$. Het tweede lid is dus $\geqq \lambda \int_{t<0,\, u>0} p_1 \, dx$. Daar $\lambda>0$ is vinden we dus uit

$$\lambda \int_{t>0,\, u<0} p_1 \, dx \geqq \int_{t>0,\, u<0} p_0 \, dx = \int_{t<0,\, u>0} p_0 \, dx \geqq \lambda \int_{t<0,\, u>0} p_1 \, dx \quad :$$

$$\int_{t>0,\, u<0} p_1 \, dx \geqq \int_{t<0,\, u>0} p_1 \, dx$$

Tellen we bij beide leden $\displaystyle\int_{t>0,\, u>0} p_1 dx$ op, dan komt links weer

$\displaystyle\int_{t>0,\, u<0} + \int_{t>0,\, u>0} = \int_{t>0}$ en rechts $\displaystyle\int_{t<0,\, u>0} + \int_{t>0,\, u>0} = \int_{u>0}$

dus

$$\int_{t>0} p_1 \, dx \geqq \int_{u>0} p_1 \, dx$$

d.w.z.

$$P[\underline{t}>0 \mid \theta_1] \geqq P[\underline{u}>0 \mid \theta_1]$$

De wh dat θ_0 verworpen wordt als θ_1 waar is, is dus bij de toets $\underline{t}>0$ groter dan of gelijk aan die bij de willekeurig gekozen toets $\underline{u}>0$ dus maximaal. M.a.w. de kans op een fout van de tweede soort is bij de toets $\underline{t}>0$ zo klein mogelijk; anders gezegd: de toets $\underline{t}>0$ is inderdaad het machtigst.

Anderzijds kan men als volgt bewijzen, dat de kritieke zône van een machtigste toets noodzakelijkerwijs door de ongelijkheid

$$\lambda p(x \mid \theta_1) - p(x \mid \theta_0) > 0$$

bepaald moet zijn. Daartoe bewijzen we uit het ongerijmde (onder weglating van de gemakkelijk aanvulbare epsilontiek), dat op de begrenzing der kritieke zône K $p(x|\theta_0)/p(x|\theta_1)$ constant moet zijn, wil de toets het machtigst zijn. Neem dus aan, dat deze verhouding niet constant is. Dan zijn er twee punten op de begrenzing waar zij verschillende waarden bezit. Zij x' een punt, waar zij een kleinere waarde bezit dan in x''. Schrijven we ter afkorting $p_0' = p(x'|\theta_0)$, $p_1' = p(x'|\theta_1)$, $p_0'' = p(x''|\theta_0)$, $p_1'' = p(x''|\theta_1)$

dan is dus $p_0''/p_1'' > p_0'/p_1'$

Daar p volgens onderstelling een continue fct van x is, kan men een kleine omgeving van x' nemen, waarin $p(x|\theta_0)$ willekeurig weinig van de waarde p_0' afwijkt, die ze in het punt x' der begrenzing aanneemt. Is U' het deel dier omgeving dat buiten de kritieke zône ligt, dan is dus $\int_{U'} p(x|\theta_0)dx \approx p_0' J'$ waarin $J' = \int_{U'} dx$ is, en evenzo $\int_{U'} p(x|\theta_1)dx \approx p_1' J'$

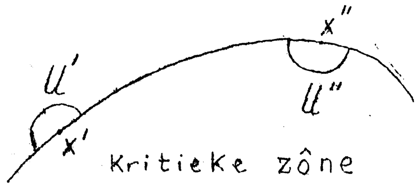


fig. 9

Evenzo neemt men een deel U'' van een kleine omgeving van x'', dat binnen de kritieke zône ligt. Dan is dus

$$\int_{U''} p(x|\theta_0)dx \approx p_0'' J'', \quad \int_{U''} p(x|\theta_1)dx \approx p_1'' J'', \quad J'' = \int_{U''} dx$$

Men vergelijkt nu de oorspronkelijke kritieke zône met die, verkregen door er U' aan toe te voegen en U'' aan te onttrekken. Voor deze nieuwe kritieke zône, die we met K' aanduiden is dus:

$$P[\underline{x} \in K' | \theta_0] = \int_{K'} p(x|\theta_0)dx = \int_K p(x|\theta_0)dx + \int_{U'} p(x|\theta_0)dx - \int_{U''} p(x|\theta_0)dx$$
$$\approx \alpha_0 + p_0' J' - p_0'' J''$$

Daar de nieuwe toets dezelfde betrouwbaarheidsdrempel moet hebben als de oude, moet dit $= \alpha_0$ zijn. Dus moet U'' zo groot gekozen worden dat $p_0' J' = p_0'' J''$ is. Nu is volgens onderstelling

$$p_0''/p_1'' > p_0'/p_1' \quad \text{of} \quad J'/J'' = p_0''/p_0' > p_1''/p_1' \text{ of } p_1'' J'' < p_1' J'$$

Maar evenals boven heeft men $P[\underline{x} \in K' | \theta_1] \approx \alpha(\theta_1) + p_1' J' - p_1'' J''$

Dit is dus $> \alpha(\theta_1)$, in tegenstelling tot de eis, dat $\alpha(\theta_1)$ onder alle toetsen de grootst mogelijke waarde moet hebben.

Dus moet p_0/p_1 op de grens van K constant zijn, b.v. $= \lambda$

Op analoge wijze bewijst men, dat p_0/p_1 binnen K kleiner, buiten K groter dan λ moet zijn. De kritieke zône is dus bepaald door

$$p(x|\theta_0)/p(x|\theta_1) < \lambda, \quad \text{d.i. door } \lambda p(x|\theta_1) - p(x|\theta_0) > 0$$

Hieruit blijkt ook, dat een gelijkmatig machtigste toets slechts bij uitzondering kan optreden. Immers bij gegeven θ_0 en θ_1 is

$p(x|\theta_0)/p(x|\theta_1)<\lambda$ een ondubbelzinnig bepaalde fct van x. Er is dus ook een ondubbelzinnig bepaald gebied op de begrenzing waarvan deze verhouding een zodanige waarde λ aanneemt, dat de integraal van $P(x/\theta_0)$ over het gebied juist $=\alpha_0$ is. Toetst men dus θ_0 tegen een andere waarde θ_2 dan θ_1, dan zal men in het algemeen een andere kritieke zône krijgen. Dat deze kritieke zône voor alle toegelaten θ dezelfde zal zijn, is dus een zéér speciaal geval.

Op analoge wijze bewijzen Neyman en Pearson dàt als $p(x|\theta)$ bij $\theta=\theta_0$ tweemaal continu differentiëerbaar naar θ is, het onderscheidingsvermogen van de toets bepaald door

$$t(x)=\lambda_1\dot{p}(x|\theta_0)+\lambda_2\ddot{p}(x|\theta_0)-p(x|\theta_0)$$

bij $\theta=\theta_0$ een relatief minimum heeft, t.w. voldoet aan $\dot{\alpha}(\theta_0)=0$, $\ddot{\alpha}(\theta_0)>0$ (Deze eis is uiteraard zwakker dan die van zuiverheid). Hierin is ondersteld, dat er slechts één onbekende parameter θ is; $\dot{p}$ en $\ddot{p}$ duiden de eerste en tweede afgeleide naar θ aan, en λ_1 en λ_2 worden bepaald uit de voorwaarden:

$$\int_{t>0}\cdots\int p(x|\theta_0)\,dx=\alpha_0 \quad d.w.z.\ \alpha(\theta_0)=\alpha_0 \quad en \int_{t>0}\cdots\int\left[\frac{\partial}{\partial\theta}p(x|\theta)\right]_{\theta=\theta_0}dx=0 \quad d.w.z.\ \dot{\alpha}(\theta_0)=0$$

4. Een toets waarbij zich bovengenoemd speciale geval niet voordoet, is het eerste voorbeeld van § 2. Daarbij is $\theta=\mu$, $\theta_0=0$,

$$p(x|\mu)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}e^{-\frac{1}{2}\Sigma(x_i-\mu)^2}, \text{ dus } p(x|0)/p(x|\mu_1)=$$
$$=e^{-\frac{1}{2}\Sigma x_i^2+\frac{1}{2}\Sigma(x_i-\mu_1)^2}=e^{-\mu_1\Sigma x_i+\frac{n}{2}\mu_1^2}$$

Dit is constant (bij verandering der x_i) op de platte hypervlakken waar Σx_i, dus ook m constant is. De machtigste toets is dus gegeven door $e^{-n\mu_1 m+\frac{1}{2}n\mu_1^2}<\lambda$ of $m>\frac{1}{2}\mu_1-\frac{1}{n\mu_1}\ln\lambda$ als $\mu_1>0$ en $m<\frac{1}{2}\mu_1-\frac{1}{n\mu_1}\ln\lambda$ als $\mu_1<0$ is. Daarbij is λ zo bepaald, dat

voor $\mu_1>0$ $\quad P[\underline{m}>\frac{1}{2}\mu_1-\frac{1}{n\mu_1}\ln\lambda/0]=\alpha_0$ $\quad$ dus $\frac{1}{2}\mu_1-\frac{1}{n\mu_1}\ln\lambda=\frac{1}{\sqrt{n}}\xi_{\alpha_0}$

of $\lambda=e^{-\sqrt{n}\mu_1\xi_{\alpha_0}+\frac{1}{2}n\mu_1^2}$ is. De toets wordt dus voor $\mu_1>0$ eenvoudig $\underline{m}-\frac{1}{\sqrt{n}}\xi_{\alpha_0}>0$ en evenzo voor $\mu_1<0$ $\underline{m}+\frac{1}{\sqrt{n}}\xi_{\alpha_0}<0$ D.w.z. als $\mu_1>0$ en $m>n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\alpha_0}$ is, verwerpt men $\mu=0$ tegenover $\mu=\mu_1$, en analoog voor $\mu_1<0$ en $m<-n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\alpha_0}$. Dit zijn de éénzijdige toetsen ($\beta=0$ en $\beta=\alpha$) van pag 244 (Whr 333). Zij zijn onafhankelijk van de absolute waarde, maar afhankelijk van het teken van μ_1. M.a.w. zij zijn slechts gelijkmatig machtigst voor zoverre uitsluitend tegen normale verdelingen getoetst wordt, welker gemiddelde aan één bepaalde zijde ligt van dat der te toetsen verdeling.

Indien men dus vooraf (onafhankelijk van de gedane waarneming!!)

weet, dat als alternatieve hypothesen uitsluitend normale verdelingen met gegeven spreiding en grotere μ (of kleinere μ) in aanmerking komen, is de eenzijdige toets van het steekproefgemiddelde de gelijkmatig machtigste. Zodra men echter als alternatieve hypothese zowel $\mu > \mu_0$ alsook $\mu < \mu_0$ in aanmerking moet nemen is er geen gelijkmatig machtigste toets. In het bijzonder is de symmetrische toets $|\underline{m}| > n^{-\frac{1}{2}}\xi_{\frac{1}{2}\alpha_0}$ in geen enkel geval de machtigste. Wèl is zij echter, naar we reeds op pag 251 (Whr 340) zagen, onder de beschouwde toetsen de enige zuivere.

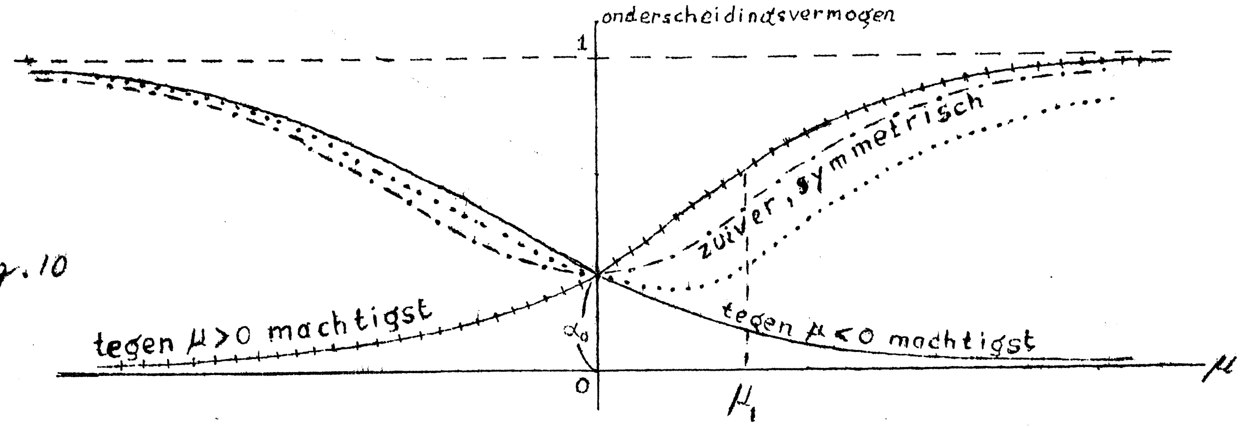


fig. 10

5. Vervolgens zullen we, aansluitende bij voorbeeld 2 van § 2 nagaan, of we bij een normale verdeling met gegeven $\mu (= 0)$ een zuivere toets voor een waarde σ_0 van de spreiding kunnen vinden. Voor een willekeurig te kiezen β met $0 \leq \beta \leq \alpha_0 < 1$ vonden we aldaar (pag. 245; Whr 334):

$$P[\chi^2_{1-\beta} \leq \frac{ns^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\alpha_0-\beta} | \sigma^2] = 1 - \alpha_0$$

Kiezen we dus als kritieke vz K de steekproeven met een s^2, waarvoor $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ buiten het interval $(\chi^2_{1-\beta}, \chi^2_{\alpha_0-\beta})$ ligt, dan is de onbetrouwbaarheidsdrempel α_0. Is σ de ware waarde, dan is dus

$$1 - \alpha(\sigma) = P[\chi^2_{1-\beta} \leq \frac{ns^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{\alpha_0-\beta} | \sigma] =$$

$$= P[\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_{1-\beta} \leq \frac{ns^2}{\sigma^2} \leq \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_{\alpha_0-\beta} | \sigma] =$$

$$= F(\tfrac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_{\alpha_0-\beta}) - F(\tfrac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_{1-\beta})$$

als $F(x)$ de verdelingsfct van de $\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$-verdeling is. Dan is dus

$$(1)\quad -\frac{\partial\alpha(\sigma)}{\partial\sigma} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^3}\left\{\chi^2_{\alpha_0-\beta} f(\tfrac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_{\alpha_0-\beta}) - \chi^2_{1-\beta} f(\tfrac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_{1-\beta})\right\}$$

als $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} e^{-x} x^{\frac{n-3}{2}}$ de bijbehorende verdelingsdichtheid is. Dus is $\frac{\partial\alpha(\sigma)}{\partial\sigma} \gtreqless 0$

al naar gelang

$$(2)\quad \chi^2_{\alpha_0-\beta} f(\tfrac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_{\alpha_0-\beta}) \gtreqless \chi^2_{1-\beta} f(\tfrac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_{1-\beta})$$

is.

Dus, daar $\chi^2_{\alpha_0-\beta} \geq \chi^2_{1-\beta}$ is,

naar gelang

(3) $e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_{\alpha_0-\beta}}\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{n-3}{2}}(\chi^2_{\alpha_0-\beta})^{\frac{n-1}{2}} \gtreqless e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_{1-\beta}}\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{n-3}{2}}(\chi^2_{1-\beta})^{\frac{n-1}{2}}$

of $(\chi^2_{\alpha_0-\beta}/\chi^2_{1-\beta})^{\frac{n-1}{2}} \gtreqless e^{\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(\chi^2_{\alpha_0-\beta}-\chi^2_{1-\beta})}$ of :

(4) $\dfrac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \gtreqless \dfrac{1}{n-1}\;\dfrac{\chi^2_{\alpha_0-\beta}-\chi^2_{1-\beta}}{\ln\chi^2_{\alpha_0-\beta}-\ln\chi^2_{1-\beta}}$

Opdat $\alpha(\sigma)$ een minimum hebbe bij $\sigma=\sigma_0$ is nodig en voldoende, dat het bovenste, middelste, resp. onderste teken gelde voor $\sigma>\sigma_0$, $\sigma=\sigma_0$ resp. $\sigma<\sigma_0$. Hiertoe is nodig en voldoende, dat voor $\sigma=\sigma_0$ het middelste teken gelde, dus

(5) $$\frac{\ln\chi^2_{\alpha_0-\beta}-\ln\chi^2_{1-\beta}}{\chi^2_{\alpha_0-\beta}-\chi^2_{1-\beta}}=\frac{1}{n-1}$$

Dit is, bij gegeven α_0 , een transcendente vgl voor β , die niet eenvoudig op te lossen is. Vervangt men echter in (5) het rechterlid door $\frac{1}{n-3}$ dan is van de zo verkregen vergelijking numeriek een oplossing voor β te vinden, door die β te zoeken, waarvoor geldt

(6) $$f\left(\tfrac{1}{2}\chi^2_{\alpha_0-\beta}\right)=f\left(\tfrac{1}{2}\chi^2_{1-\beta}\right)$$

Men bepaalt dan dus de staartintegralen van de χ^2-verdeling ¹), met som α_0 , behorende bij twee punten met gelijke waarden van de verdelingsdichtheid.

Met deze waarde van β als benaderde oplossing van (5), gaat het rechterlid van (4) over in $\frac{n-3}{n-1}$, zodat het minimum van $\alpha(\sigma)$ komt te liggeen bij $\sigma=\hat\sigma$ met $\hat\sigma^2=\frac{n-3}{n-1}\sigma_0^2$

of $$\hat\sigma=\sigma_0\sqrt{1-\frac{2}{n-1}}\approx\sigma_0\left(1-\frac{1}{n-1}\right)$$

Een andere benaderde oplossing krijgt men door $\beta=\frac{1}{2}\alpha_0$ te nemen, d.w.z. door β zo te kiezen, dat de twee staartintegralen gelijk zijn en samen α_0 . Deze benadering is echter minder goed dan de vorige.

6. We behandelen tenslotte het voorbeeld van een <u>normale verdeling met onbekende spreiding en gemiddelde</u>

De logarithme van de integrand is:

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2-\tfrac{1}{2}n\ln 2\pi\sigma^2=-\frac{n}{2\sigma^2}\left\{(m-\mu)^2+s^2\right\}-\frac{n}{2}\ln 2\pi\sigma^2$$

Hierin komen $x_1,\dots,x_n$ dus uitsluitend in de combinaties $m=\frac{1}{n}\sum x_i$ en $s^2=\frac{1}{n}\sum(x_i-m)^2$ voor. We gaan dus op n nieuwe variabelen $m, s, y_3, \dots\dots, y_n$ over, en wel met behulp van de volgende meetkundige beschouwing.

Evenals in R_2 en R_3 beschouwen we de uitdrukking $\sqrt{\sum(x_i-a_i)^2}$ als

---

¹) Of van de $\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$-verdeling; dit maakt slechts een verschil van de orde $\frac{1}{n-2}$

de afstand van twee punten X en a in R_n. Voor constante a_i : noemen we de vz van alle punten X, waarvoor deze afstand een constante waarde R heeft een $(n-1)$-dimensionale sfeer (bolоppervlak) in R_n. Deze wordt afgekort met S_{n-1}. Voorts noemen we de getallen c_i uit de parametervgln $X_i = a_i + \lambda c_i$ van een rechte lijn <u>richtingsgetallen</u> dezer rechte. Is $x_i = b_i + \lambda d_i$ een tweede rechte, dan noemen we de hoek φ, bepaald door

$$\cos\varphi = \frac{\sum c_i d_i}{\sqrt{\sum c_i^2}\sqrt{\sum d_i^2}}$$

de <u>hoek tussen de twee rechten</u>. (Men kan eenvoudig bewijzen, dat de door $\cos\varphi$ voorgestelde uitdrukking altijd tussen -1 en +1 ligt door de discriminant van de quadratische fct $\sum(c_i X + d_i)^2$ op te maken en op te merken dat deze $\leqq 0$ moet zijn, daar de fct voor iedere X $\geqq 0$ is) Is $\sum c_i d_i = 0$ dan zijn de rechten dus onderling loodrecht. De getallen $c_i/\sum c_j^2$ zijn dan de <u>richtingscosinussen</u>, d.w.z. de cosinussen van de hoeken tussen de eerstgenoemde rechte en de coördinaatassen (waarbij alle $b_i=0$ en alle d_i op één na $= 0$ zijn). De voorwaarde voor loodrechte stand van een rechte $X_i = a_i + \lambda c_i$ en een hypervlak $\sum p_i x_i = \mu$ (d.w.z. iedere rechte die in het hypervlak ligt staat loodrecht op de gegeven rechte) luidt dan evenals in R_3 : $c_1 : p_1 = c_2 : p_2 = \ldots\ldots = c_n : p_n$ of ook $\dfrac{c_i}{\sqrt{\sum c_j^2}} = \dfrac{p_i}{\sqrt{\sum p_j^2}}$. Is $\sum p_i^2 = 1$, dan is de vgl van het vlak in de "normaalvorm van Hesse" gebracht.

De uitdrukking $\sum(X_i-\mu)^2$ stelt dus het quadraat van de afstand voor van het punt X en het punt P waarvan <u>alle</u> coordinaten $=\mu$ zijn. Dit ligt op de "hoekdeellijn van het eerste 2^n-ant" (vgl. quadrant, octant, enz.), d.w.z. de rechte $x_1 = x_2 = \ldots\ldots x_n$ of ook $X_i = \lambda$

De afstand van P tot O is $\mu\sqrt{n}$ (waarom?). Nu is $\sum(x_i-\mu)^2 = n(m-\mu)^2 + ns^2$ Hierin is $ns^2 = \sum(x_i-m)^2$ de afstand van X tot het punt M waarvan alle coördianten $=m$ zijn, en dat dus eveneens op genoemde hoekdeellijn ligt die we door h voorstellen, en wel op een afstand $m\sqrt{n}$ van O. Daar ns^2 de kleinste waarde is die $(KX)^2$ kan aannemen als K de lijn $OP (=OM)$ doorloopt, is M het punt van h, dat de <u>kortste</u> afstand tot X heeft. Voorts is $n(m-\mu)^2 = \sum^i (m-\mu)^2 = (PM)^2$. Bovenstaande identiteit drukt dus uit dat $(XP)^2 = (XM)^2 + (MP)^2$ is. We verwachten dus, dat $XM \perp MP$ zal zijn. Van MP zijn de richtingsgetallen alle $= 1$, dus de richtingscosinussen alle $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Van Mx zijn de richtingsgetallen $x_i - m$, dus de richtingscosinussen $= \frac{x_i - m}{s\sqrt{n}}$. De voorwaarde voor loodrecht^heid^ $\sum c_i d_i = 0$ luidt hier dus $1(x_1-m) + 1.(x_2-m) + \text{------} + 1.(x_n-m) = 0$ en is inderdaad vervuld.

We gaan nu over tot "hypercylindercoördinaten" met de lijn h tot as. Dat zijn 1° de afstand van X tot een vlak door O $\perp h$, 2° de afstand van X tot h, 3° ... n° n-2 onderling onafhankelijke hoeken die we thans niet nader behoeven te specificeren. Eerstgenoemde afstand is gelijk aan de afstand OM, dus $m\sqrt{n}$. De tweedgenoemde afstand is XM

dus $s\sqrt{n}$. Een volumeëlement $dx = dx_1 \ldots\ldots dx_n$ om x, oorspronkelijk een klein parallelotoop, wordt nu vervormd tot een klein "hypercylindersegment", met aslengte $d(m\sqrt{n}) = \sqrt{n}.dm$ en straal $d(s\sqrt{n}) = \sqrt{n}.ds$
De "hyperinhoud" van het segment is dus $\sqrt{n}\,dm.\sqrt{n}\,ds.d\mathcal{O}$ waarin $d\mathcal{O}$ de oppervlakte is van een element van een S_{n-2} (waarom niet S_{n-1}?) met straal Mx (of $Mx+\sqrt{n}.ds$; de correctieterm doet niet ter zake).

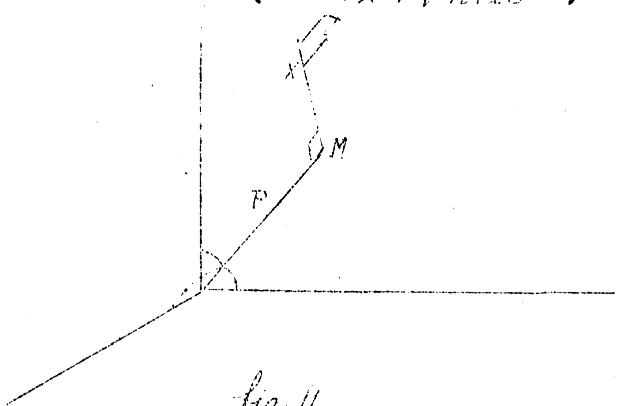


fig. 11

Duiden we dus met $d\Omega_{n-2}$ een element van een S_{n-2} met straal = 1 aan, dan is dus $d\mathcal{O} = (s\sqrt{n})^{n-2}d\Omega_{n-2}$ en we krijgen

$$dx_1 \ldots\ldots dx_n = \sqrt{n}\,dm\,\sqrt{n}\,ds.(s\sqrt{n})^{n-2}d\Omega_{n-2}$$
$$= n^{\frac{1}{2}n}dm\,s^{n-2}ds.d\Omega_{n-2}$$

De wh dat het punt x in een nader te bepalen kritiek gebied K zal vallen is dus $\left(\frac{n}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}n}\int\cdots\int_K e^{-\frac{n}{2}\frac{s^2}{\sigma^2}-\frac{n}{2}\frac{(m-\mu)^2}{\sigma^2}}$ $dm.s^{n-2}ds.d\Omega_{n-2}$

Het ligt voor de hand, K zo te kiezen, dat het geheel uit volledige $(n-2)$-dimensionale sferen bestaat. Dan kan dus over $d\Omega_{n-2}$ geintegreerd worden. Nu is de totale oppervlakte van een S_{k-1} met straal 1 (die we met Ω_{k-1} aanduiden):

$$\Omega_{k-1} = \frac{2\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^k}{\Gamma(\frac{k}{2})} \quad ')$$

(Voor $k=2$ is $\Omega_1 = \frac{2\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^2}{\Gamma(1)} = \frac{2(\sqrt{\pi})^2}{1} = 2\pi$ de omtrek van een cirkel met straal 1. Voor $k=3$ is

$$\Omega_2 = \frac{2\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^3}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^3}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = 4(\sqrt{\pi})^2 = 4\pi$$

de oppervlakte van een bol met straal 1.

Voor $k=4$ is $\Omega_3 = \frac{2\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^4}{\Gamma(2)} = \frac{2(\sqrt{\pi})^4}{1!} = 2\pi^2$ voorts

$$\Omega_4 = \frac{2\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^5}{\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{2\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^5}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{8}{3}\pi^2, \quad \Omega_5 = \frac{2\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^6}{\Gamma(3)} = \pi^3 \quad \text{enz.}$$

') Bewijs. We hebben : $\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$. Dus $(\sqrt{2\pi})^k = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int e^{-\frac{1}{2}\Sigma x_i^2}dx_1\ldots dx_k$
Als we dus tot (hyper-)bolcoördinaten (hier niet -cylindercoördinaten) in R_k overgaan met $\Sigma x_i^2 = r^2$, is $dx_1 \ldots dx_k = dr\, r^{k-1}d\Omega_{k-1}$ Het integratiegebied wordt $0 \leq r < \infty$ en de gehele Ω_{k-1} . Dus
$(\sqrt{2\pi})^k = \Omega_{k-1}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}r^2}r^{k-1}dr$. Stellen we dus $\frac{1}{2}r^2 = u$ $r = \sqrt{2u}$ dan wordt dit
$(\sqrt{2\pi})^k = \Omega_{k-1}\int_0^\infty e^{-u}(\sqrt{2u})^{k-1}\frac{du}{\sqrt{2u}} = (\sqrt{2})^{k-1}\Omega_{k-1}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{1}{2}(k-2)}du = (\sqrt{2})^{k-2}\Omega_{k-1}\Gamma(\frac{k}{2})$
Daar $\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{1}{2})$ is, geeft dit onmiddellijk de te bewijzen identiteit.

Hier is $K = n-1$, dus

$$\Omega_{n-2} = \frac{2\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^{n-1}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

zodat de gezochte wh wordt

$$\frac{2\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^{n-1}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\left(\frac{n}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}n}\iint_{K'} e^{-\frac{n}{2}\frac{(m-\mu)^2}{\sigma^2}}dm\,.\,e^{-\frac{n}{2}\frac{s^2}{\sigma^2}}s^{n-2}ds$$

Daarbij hebben we met K' het gedeelte van het (m,s) -vlak voorgesteld dat door $(n-2)$ -dimensionale wenteling K geeft. We merken telkens op dat hieruit blijkt, dat m en s onafhankelijk verdeeld zijn, en wel m: $N(\mu,\sigma/\sqrt{n})$, en $\frac{n}{2}\frac{s^2}{\sigma^2}$ volgens $\Gamma(\frac{n-1}{2})$, d.w.z. $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ als χ^2 met $n-1$ vrijheidsgraden. Door voor K' het gehele (m,s) -vlak te nemen, waarbij de integraal = 1 moet worden, hadden we ook (en zelfs eenvoudiger) de getallencoëfficient vòòr het integraalteken kunnen vinden.

We moeten nu K' zo kiezen, dat deze integraal een gegeven waarde α_0 krijgt. We nemen daartoe het buitengebied (complement) van een gebied G' in het (m,s) -vlak, waarover geïntegreerd we dus $1-\alpha_0$ moeten krijgen. Dit kan op verschillende manieren geschieden.

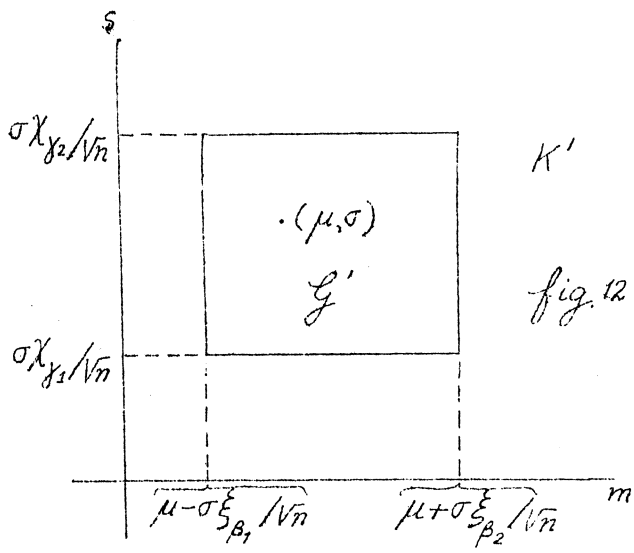


fig. 12

A. We integreren over een rechthoek in het (m,s) -vlak. We krijgen dan het product van de integralen over m en s afzonderlijk. Voeren we weer de symbolen ξ_β en χ^2_β van pag. 243 (Whr 332) en 245 (Whr 334) in, dan integreren we over

$$-\xi_{\beta_1} \leqq \frac{m-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leqq \xi_{\beta_2} \qquad \chi^2_{\gamma_1} \leqq \frac{ns^2}{\sigma^2} \leqq \chi^2_{\gamma_2}$$

Dit geeft:

$$1-\alpha_0 = (1-\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)$$

We kunnen dus nog $\beta \leqq \alpha_0$, $\beta_1 \leqq \beta$, $1 \geqq \gamma_1 \geqq \frac{1-\alpha_0}{1-\beta}$ willekeurig kiezen, waarna $\beta_2 = \beta - \beta_1$ en $\gamma_2 = \gamma_1 - \frac{1-\alpha_0}{1-\beta}$ wordt.

Bij gegeven μ en σ is dus G' een voorspellingsgebied svpr α_0 voor (m,s)

Bij gegeven $\mu = \mu_0$, $\sigma = \sigma_0$ is het complementaire gebied K' kritieke zône voor een toets van de hypothese (μ_0,σ_0). Deze wordt dus verworpen als de waarnemingen een punt (m,s) buiten G' geven.

Bij gegeven m, s krijgen we door oplossing van de ongelijkheden naar μ en σ een betrouwbaarheidsgebied voor μ,σ .

De χ^2-ongelijkheden geven:

$$\frac{s\sqrt{n}}{\chi_{\gamma_2}} \leqq \sigma \leqq \frac{s\sqrt{n}}{\chi_{\gamma_1}}$$

σ ligt dus tussen twee vaste grenzen. Eliminatie van σ tussen deze en de twee andere ongelijkheden geeft twee grenzen voor μ , die echter te ruim zijn. We merken daarom op dat de vgln $(m-\mu)\sqrt{n}/\sigma =$ const. rechten in het

(μ,σ)-vlak door $\mu = m, \sigma = 0$ voorstellen, zodat het eerste stelsel ongelijkheden een <u>hoek</u> in het (μ,σ)-vlak door dit punt bepaalt. Het betrouwbaarheidsgebied Γ voor (μ,σ) is dus het inwendige van het in fig 13 aangegeven trapezium.

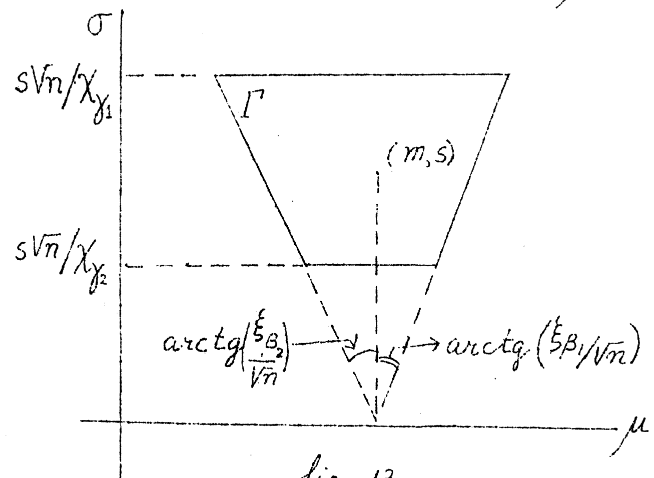


fig. 13

We merken nog op, dat voor toenemende n bij gegeven $\alpha_0, \ldots, \gamma_2$ het voorspellingsgebied in het (m,s)-vlak onbeperkt om het punt (μ,σ) inkrimpt en het betrouwbaarheidsgebied in het (μ,σ)-vlak onbeperkt om het punt (m,s) inkrimpt.

B. We substitueren $\frac{m-\mu}{s} = u$. (Meestal wordt $t = u\sqrt{n} = \frac{m-\mu}{s}\sqrt{n}$ de zgn. variabele van Student gebruikt). Voorts stellen we $v = \frac{n}{2}\frac{s^2}{\sigma^2}(1+u^2)$. Dan wordt, als K'' het beeld van K' in het (u,v)-vlak is:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \iint_{K''} e^{-v}\, v^{\frac{n}{2}-1}\, dv\, (1+u^2)^{-\frac{1}{2}n}\, du$$

Hierin is v volgens $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, dus $\sqrt{2v}$ volgens χ^2, maar nu met n (in plaats van $n-1$) vrijheidsgraden verdeeld, terwijl $\frac{1}{1+u^2}$ een $B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$-verdeling, of $t = u\sqrt{n}$ een Student-verdeling met $n-1$ vrijheidsgraden bezit. Duiden we met t_β en (als te voren) χ_β de abscissen behorende bij staart-integralen $=\beta$ van de bijbehorende verdelingen aan, dan kunnen we nu over een rechthoek in het (u,v)-vlak integreren, waarvan we wederom het buitengebied als K'' nemen. Met dezelfde betekenis van $\beta_1, \ldots, \gamma_2$ als te voren krijgen we dan

$$-t_{\beta_1} \leq u\sqrt{n} \leq t_{\beta_2} \qquad \tfrac{1}{2}\chi^2_{\gamma_1} \leq v \leq \tfrac{1}{2}\chi^2_{\gamma_2}$$

of, uitgedrukt in m en s :

$$-t_{\beta_1} \leq \frac{m-\mu}{s}\sqrt{n} \leq t_{\beta_2} \qquad \chi^2_{\gamma_1} \leq n\,\frac{s^2+(m-\mu)^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\gamma_2}$$

Als voorspellingsgebied $\mathcal{G}$ in het (m,s)-vlak bij gegeven μ en σ krijgen we nu uit de eerste ongelijkheden een hoek met hoekpunt $m=\mu, s=0$ doorsneden ten gevolge van het tweede stel ongelijkheden met het gedeelte tussen twee concentrische cirkels met dit punt als hoekpunt. Het bijbehorende kritieke gebied K' is het buiten deze cirkelringsector gelegen gebied.

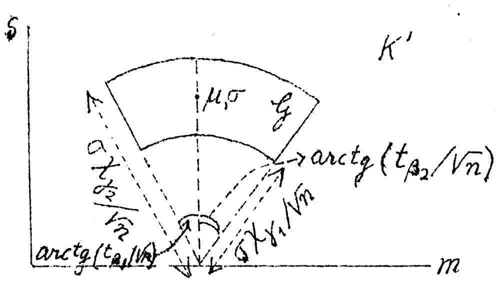


fig 14

De ongelijkheden in het (μ,σ)-vlak kunnen we in de volgende vorm schrijven:

$$-t_{\beta_2} \leqq \frac{\mu-m}{s}\sqrt{n} \leqq t_{\beta_1}$$

$$\frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{\gamma_1} - (m-\mu)^2 \leqq s^2 \leqq \frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{\gamma_2} - (m-\mu)^2$$

Het eerste stelsel geeft een strook // de σ-as. Het tweede stelsel geeft het gedeelte, begrensd door twee hyperbooltakken, met symmetrie-assen // de coördinaat-assen

C. We kunnen ook gebieden van geheel andere vorm krijgen. Onder A hebben we $\mathcal{G}$ zo gekozen (t.w. een rechthoek) dat de integraal over $\mathcal{G}$ een product van integralen wordt. In plaats daarvan kunnen we ook van de integraal over K' zelf een product maken. Daartoe kiezen we voor K' de punten die <u>zowel</u> buiten een interval $-\xi_{\beta_1} \leqq \frac{m-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leqq \xi_{\beta_2}$ <u>als ook</u> buiten een interval

$$\chi^2_{\gamma_1} \leqq \frac{ns^2}{\sigma^2}$$

vallen.

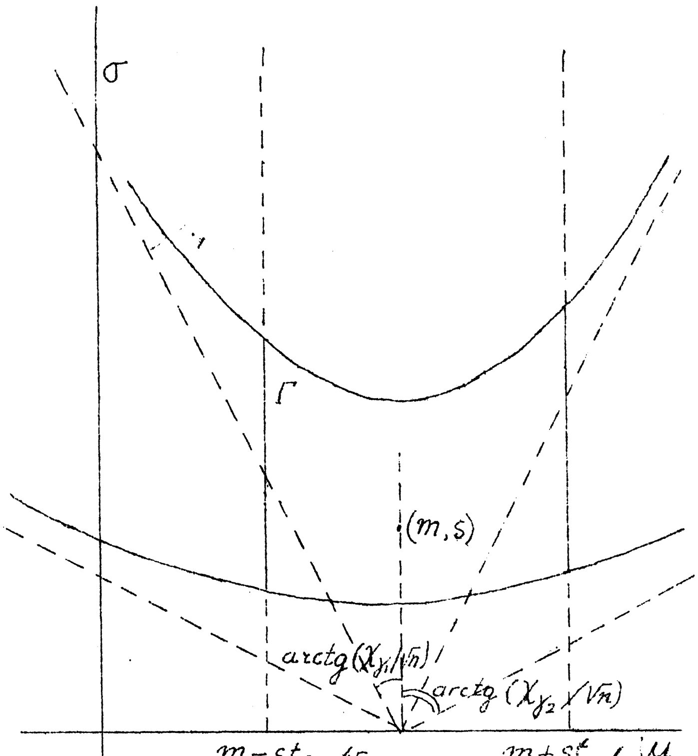


fig. 15

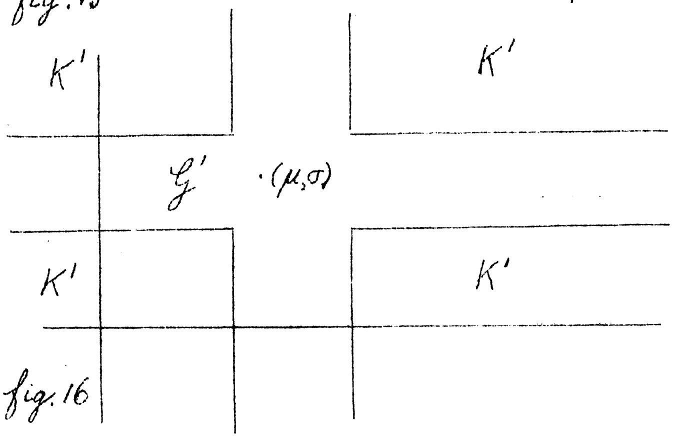


fig. 16

Daartoe moet $(\beta_1+\beta_2)(1-\gamma_1+\gamma_2)=\alpha_0$ zijn. Voor $\mathcal{G}'$ vinden we dan de vz van alle punten die aan <u>minstens</u> één van deze ongelijkheden voldoen (zie fig 16), terwijl K' uit de vier gescheiden quadranten bestaat.

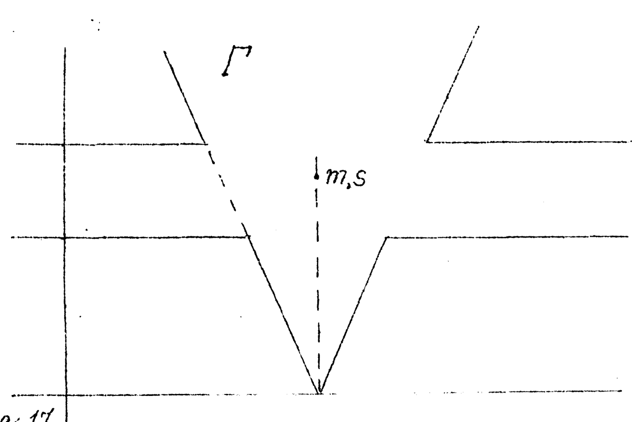


fig. 17

Het betrouwbaarheidsgebied krijgt een dienovereenkomstige gedaante (het gebied binnen de hoek tezamen met het gebied binnen de strook in fig 17).

D. Het is duidelijk, dat het mogelijk is, $\mathcal{G}'$ en K' op oneindig veel wijzen te kiezen. Het is daarbij zèlfs niet nodig, dat het punt (μ,σ) in $\mathcal{G}'$ en dienovereenkomstig (m,s) in Γ' ligt. Wil men b.v. dat de onder A aangegeven ongelijkheden het gebied K' inplaats van $\mathcal{G}'$ bepalen, dan moeten daartoe $\beta_1, \ldots, \gamma_2$ voldoen aan $(1-\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)=\alpha_0$

(inplaats van $1-\alpha_0$). Het gebied zal dus voor $\alpha_0 \ll 1$ veel kleiner dan $\mathcal{G}'$ in fig 12 zijn. (fig 18).

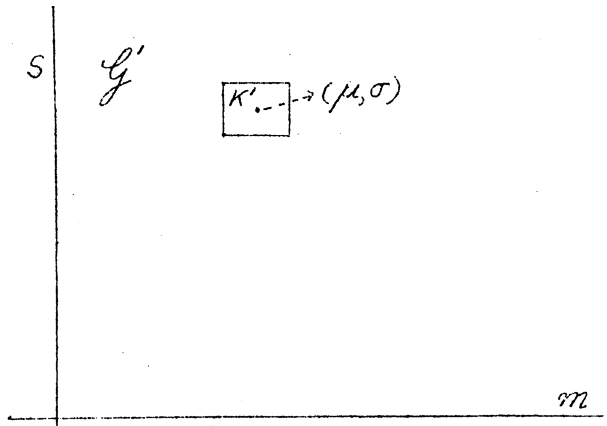


fig. 18

Voor $\mathcal{G}'$ als voorspellingsgebied houdt een dergelijke mogelijkheid b.v. in, dat een "scherp"schutter (die gemiddeld zuiver schiet), slechts een kleine wh heeft, precies in de roos te schieten, indien deze klein t.o.v. zijn spreiding is. Voor de hypothesentoetsing betekent dit b.v., dat men skeptisch staat tegenover een auteur, wiens resultaten àl te mooi met de verwachting overeenkomen ("too good to be true" zijn). (Men houde echter in het oog, dat men niet zowel deze skepsis als die ten aanzien van zeer slecht overeenstemmende resultaten moet koesteren, tenzij men dit svpr α_0' resp. svpr α_0'' met $\alpha_0' + \alpha_0'' = \alpha_0$ doet). Het is echter duidelijk, dat een dergelijke toets hoogst "onzuiver" zal zijn, d.w.z. dat de wh van een fout van de tweede soort zeer groot zal zijn. Doordat K een zo klein gebied is, zal men namelijk reeds bij een hypothese die slechts weinig van de te toetsen hypothese θ_0 afwijkt met grote wh een steekproefpunt binnen $\mathcal{G}'$ krijgen, dus θ_0 niet verwerpen. De kans op ten onrechte niet verwerpen is dan dus zeer groot.

Om een numeriek voorbeeld te krijgen kiezen we b.v. $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$ dus voor $\mathcal{G}'$ een smalle strook // de S-as. Voorts nemen we $\beta_1 = \beta_2$ dus $= \frac{1-\alpha_0}{2}$. Daar $\int_{\xi_{\beta_1}}^{\infty} = \beta_1$ is, is $\int_0^{\xi_{\beta_1}} = \frac{1}{2} - \beta_1 = \frac{1}{2}\alpha_0$. Dus voor $\alpha_0 \ll 1$ is ook ξ_{β_1} klein. We kunnen dan de Taylor-ontwikkeling toepassen:

$$\frac{1}{2}\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\xi_{\beta_1}} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\xi_{\beta_1}}\left(1-\tfrac{1}{2}x^2+\dots\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\xi_{\beta_1} - \tfrac{1}{6}\xi_{\beta_1}^3 + \dots\right)$$

dus, behoudens grootheden klein van hogere orde

$$\xi_{\beta_1} \approx \alpha_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Voor $\alpha = 0{,}05$ wordt dit $\xi_{\beta_1} \approx 0{,}063$

Daar de lengte $2\xi_{\beta_1}$ van het interval zeer klein is, heeft men dus voor iedere μ bij benadering

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\xi_{\beta_1}-\mu\sqrt{n}}^{+\xi_{\beta_1}-\mu\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\xi_{\beta_1}\,e^{-\frac{1}{2}\mu^2 n} \approx \alpha_0 e^{-\frac{1}{2}\mu^2 n}$$

De wh van een fout van de tweede soort $1-\alpha(\mu)$ voor $\mu \neq 0$ is dus vrijwel = 1. Inderdaad heeft het onderscheidingsvermogen $\alpha(\mu)$ bij $\mu = 0$ niet een minimum (vgl. fig 4) maar een maximum:

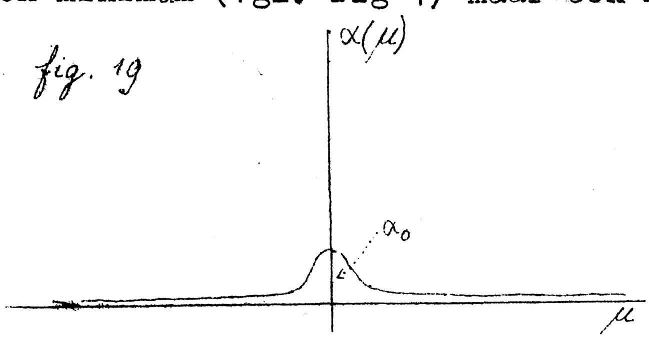


fig. 19

We merken nog op dat geen van de in dit punt behandelde toetsen voor een $\mu = \mu_0$, $\sigma = \sigma_0$ zuiver is. Zuiverheid t.a.v. μ (d.w.z. $\alpha(\mu,\sigma) \geq \alpha(\mu_0,\sigma)$) is gemakkelijk te bereiken, namelijk door het gebied symmetrisch t.o.v. de lijn $m = \mu_0$ te nemen, zodanig dat het het punt

(μ_0,σ_0) bevat. Immers $\int_{a-b}^{a+b} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \leqq \int_{-b}^{+b} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ voor iedere a en $b > 0$, daar de afgeleide van het linkerlid naar a = $e^{-\frac{1}{2}(a^2+b^2)}(e^{-ab} - e^{+ab}) \lesseqgtr 0$ is voor $a \gtreqless 0$. Zuiverheid t.o.v. σ is ook gemakkelijk te bereiken, indien men onafhankelijk van de waarneming weet, dat $\sigma \geqq \sigma_0$ is, door b.v. in A $\chi_{\gamma_1} = 0$ $(\gamma_1 = 1)$ te kiezen, zodat $1-\alpha_0 = (1-2\beta_1)(1-\gamma_2)$ wordt. Dan is namelijk met $\lambda = \frac{\sigma_0}{\sigma} \leq 1$, daar dan $\int_{-b\lambda}^{+b\lambda} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \leqq \int_{-b}^{+b} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ en $\int_0^{b\lambda} e^{-\frac{1}{2}u^2}u^{n-2}du \leq \int_0^{b} e^{-\frac{1}{2}u^2}u^{n-2}du$ is:

$$1-\alpha(\mu,\sigma) = \frac{n^{\frac{1}{2}n}}{2^{\frac{1}{2}n-1}\Gamma(\frac{n-1}{2})\sqrt{\pi}} \int_{\{(\mu_0-\mu)\sqrt{n}-\xi_{\beta_1}\sigma_0\}/\sigma}^{\{(\mu_0-\mu)\sqrt{n}+\xi_{\beta_1}\sigma_0\}/\sigma} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \int_0^{\chi_{\gamma_2}\sigma_0} \frac{e^{-\frac{n}{2}\frac{s^2}{\sigma^2}} s^{n-2}ds}{\sigma^{n-1}} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-\xi_{\beta_1}\lambda}^{+\xi_{\beta_1}\lambda} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \int_0^{\chi_{\gamma_2}\lambda} e^{-\frac{1}{2}u^2}u^{n-2}du \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-\xi_{\beta_1}}^{+\xi_{\beta_1}} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \int_0^{\chi_{\gamma_2}} e^{-\frac{1}{2}u^2}u^{n-2}du = 1-\alpha(\mu_0,\sigma_0)$$

d.w.z. $\alpha(\mu,\sigma)$ heeft voor $\sigma \geqq \sigma_0$ een absoluut minimum bij μ_0,σ_0 (waar echter niet $\partial\alpha/\partial\sigma$ nul is).

Zuiverheid t.a.v. σ is niet op eenvoudige wijze te bereiken. Asymptotische zuiverheid voor $n \to \infty$ echter wel, zelfs op oneindig veel manieren. Waarschijnlijk wel de eenvoudigste wijze bestaat daarin, dat men $s = e^{r}$, $\sigma = e^{-\varrho}$ stelt en de asymptotisch normale verdeling van m en s beschouwt. ($(m-\mu)e^{-\varrho}\sqrt{n}$ en $(r-\varrho)\sqrt{n}$ zijn namelijk asymptotisch onafhankelijk beide $N(0,1)$ verdeeld). Men neemt dan voor K het buitengebied van een rechthoek in het (m,r)-vlak, symmetrisch t.o.v. $m=\mu_0$, maar niet t.o.v. $r=\varrho_0$. Stelt men deze rechthoek voor door $|m-\mu_0| \leqq e^{\varrho_0}\xi_\beta/\sqrt{n}$, $-\xi_{\gamma_1}/\sqrt{n} \leqq r-\varrho_0 = \ln\frac{s}{\sigma_0} \leqq \xi_{\gamma_2}/\sqrt{n}$, dan vindt men voor β, γ_1 en γ_2 twee vgln:

$$(1-\alpha_0) = (1-2\beta)(1-\gamma_1-\gamma_2) \qquad \frac{2\xi_\beta e^{-\frac{1}{2}\xi_\beta^2}}{1-2\beta} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi_{\gamma_1}^2} - e^{-\frac{1}{2}\xi_{\gamma_2}^2}}{1-\gamma_1-\gamma_2}$$

Doordat de tweede vgl transcendent is, wordt de oplossing (die nog op oneindig vele wijzen geschieden kan) nog geenszins eenvoudig. Voor zeer kleine α_0 kunnen nog enige benaderende vereenvoudigingen aangebracht worden. Met $\beta = \gamma_2 = \frac{1}{4}\alpha_0$, $\xi_{\gamma_1}^2 = \xi_{\frac{1}{4}\alpha_0}^2 - 2\ln(1+2\xi_{\frac{1}{4}\alpha_0})$ wordt voor $\alpha(\mu_0,\sigma_0)$ een slechts weinig van α_0 afwijkende waarde gevonden.

ERRATA

Mathematische Statistiek, Hoofdstuk 5.

Whr. pag.:	regel:	staat:	moet zijn:
328	9 v.o.	goed zijn kan -	goed zijn, kan -
330	9 v.b.	variantie	herhaling
"	15 v.o.	betrouwbaarheids-interval	voorspellingsinterval
334	6 v.b.	grrootheden	grootheden
"	8 v.b.	4 keer het woordje "met"	(moet weggelaten worden)
"	9 v.b.	$\mu \geqq 0$	$\mu \gtreqless 0$ bezitten.
"	10 v.b.	5°	4°
"	12 v.b.	bij gegeven gemiddelde	(kan weg)
"	13 v.b.	Zonder beperking kunnen we $\mu = 0$ nemen. Dan	Onafhankelijk van μ.
"	18 v.b.	betrouwbaarheids-	voorspellings-
337	19 v.o.	zeker	zekere
"	17 v.o.	$P[\underline{t}_1 \leqq \theta_0 \leqq \underline{t}_1 \mid \theta_1]$	$P[\underline{t}_1 \leqq \theta_0 \leqq \underline{t}_2 \mid \theta]$
"	3 v.o.	et	met
339	2 v.o.	kritische	kritieke
340	2 v.o.	1 - 5	4 - 8
"	bij de figuren	fig. 1	fig. 4
"		" 2	" 5
"		" 3	" 6
"		" 4	" 7
"		" 5	" 8
341	14 v.o.	sterkte	scherpte
"	1 v.o.	zie	zien
342	6 v.o.	Egon Pearson	Egon S. Pearson
343	8 v.o.	W.S. Pearson	E.S. Pearson
345	11 v.o.	waarom	waarop
"	2 v.o.	bij	(moet weg)
351	10 v.b.	met geg. μ (=0)	(kan weg)
355	6 v.b.	telkens	tevens
356	13 v.b.	$t = u\sqrt{n} = \frac{m-\mu}{s}\sqrt{n}$	$t = u\sqrt{n-1} = \frac{m-\mu}{\sigma}\sqrt{n-1}$
"	15 v.b.	$t = u\sqrt{n}$	$t = u\sqrt{n-1}$
"	9 v.o.	$u\sqrt{n}$	$u\sqrt{n-1}$
"	7 v.o.	$\frac{m-\mu}{s}\sqrt{n}$	$\frac{m-\mu}{s}\sqrt{n-1}$
"	fig.14	arc.tg ($t_{\beta_1}/\sqrt{n}$)	arc.tg($t_{\beta_1}/\sqrt{n-1}$)
"		arc.tg($t_{\beta_2}/\sqrt{n}$)	arc.tg($t_{\beta_2}/\sqrt{n-1}$)
357	4 v.b.	$\frac{\mu-m}{s}\sqrt{n}$	$\frac{\mu-m}{s}\sqrt{n-1}$
	fig.15	$m - s\,t_{\beta_1}/\sqrt{n}$	$m - s\,t_{\beta_1}/\sqrt{n-1}$
		$m - s\,t_{\beta_2}/\sqrt{n}$	$m - s\,t_{\beta_2}/\sqrt{n-1}$

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
AMSTERDAM.

Statistische Afdeling

Capita Selecta

Hoofdstuk VI
Verschillende methoden
door :
Prof.Dr.D.van Dantzig

pag.360-415

Hoofdstuk 6. Verschillende methoden

1. Rang-invariante methoden.

1. Zij $X_1,\ldots,X_n$ een Bernoulliaanse steekproef van een continu verdeelde stochastisch variabele $\underline{X}$. M.a.w. op de collectie van alle steekproeven zijn $\underline{X}_1,\ldots,\underline{X}_n$ onderling onafhankelijke stochastische variabelen, elk met dezelfde continue verdelingsfct $P(x)$. Zij $X_1'=X_{i_1}$ het kleinste onder de n getallen X_i, $X_2'=X_{i_2}$ het op één na kleinste, enz. M.a.w. $X_1',\ldots,X_n'$ vormen een permutatie $X_{i_1},\ldots,X_{i_n}$ van $X_1,\ldots,X_n$ en wel zodanig dat

(1) $\quad X_1' < X_2' < \cdots\cdots < X_n' \qquad$ d.w.z. $X_{i_1} < X_{i_2} < \cdots\cdots < X_{i_n}$

is. Algemeen is X_{i_k} het kleinste onder diegene der getallen X_i, welker index $\neq i_1, \neq i_2,\ldots,\neq i_{k-1}$ is. De rangschikking is niet ondubbelzinnig mogelijk, als onder de X_i $(1\leqq i\leqq n)$ minstens twee gelijke getallen voorkomen. Gaan we b.v. na, of $X_1=X_2$ kan zijn. Zijn $\underline{X}_1$ en $\underline{X}_2$ onderling onafhankelijk verdeeld met verdelingsfcts $P_1(X)$ en $P_2(X)$ (we laten voor het ogenblik de onderstelling dat $P_1(X)=P_2(X)=P_3(X)$ is vallen), dan heeft $\underline{u}=\underline{X}_2-\underline{X}_1$ tot verdelingsfct (vgl. pag. 69, Whr 158)

$$\mathcal{G}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(u+x)\, d\, P_1(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \{1-P_1(x-u)\}\, d\, P_2(x)$$

Men kan nu bewijzen, dat $\mathcal{G}(u)$ continu is, zodra minstens één der beide fcts $P_1(X)$ en $P_2(X)$ continu is, en alléén in dit geval. Heeft $P_1(X)$ een discontinuïteit van de grootte $p_1>0$ bij $X=X_1$ en $P_2(X)$ een van de grootte $p_2>0$ bij $X=X_2$, dan is

$$\mathcal{P}[\underline{X}_2-\underline{X}_1 = x_2-x_1] \geqq \mathcal{P}[\underline{X}_1=x_1,\ \underline{X}_2=x_2] = p_1 p_2 > 0$$

Terugkerende tot het geval $P_1=P_2=P$ zien we dus, dat de relatie $x_1=x_2$ slechts met wh = 0 kan optreden, daar P continu ondersteld is, en dat anderzijds de continuïteit ook nodig is om deze conclusie te kunnen trekken. Op overeenkomstige wijze bewijst men, dat de wh dat onder de x_i minstens twee gelijke waarden voorkomen tengevolge van de continuïteit van $P(X)$ nul is, zodat de ondubbelzinnige rangschikking der X_i volgens de rij der X_i' svpr 0 mogelijk is.

2. De stochastische variabelen $\underline{X}_1'=\text{Min}(\underline{X}_1,\ldots,\underline{X}_n)$, $\underline{X}_2',\ldots,\underline{X}_n'$ zijn niet onderling onafhankelijk. Het n-dimensionale element van de gemeenschappelijke verdelingsfct der $\underline{X}_i'$ is $=\prod_1^n d\,P(x_i)$, maar niet gelijk aan $\prod_1^n d\,P(x_j')$. Het is = 0 voor ieder n-tal getallen x_j' dat niet aan (1) voldoet, en voor ieder n-tal dat wel aan (1) voldoet gelijk aan $\prod_1^n d\,P(x_j')$ vermenigvuldigd met het aantal der elementen $\prod_1^n d\,P(x_i)$ waaruit het ontstaan kan zijn. Dit aantal is klaarblijkelijk $= n!$,

het aantal der permutaties van n getallen, daar iedere permutatie der oorspronkelijke X_i dezelfde X_j' geeft.
Als we weer (vgl. pag. 42, Whr 131) de fct

$$\iota(x) = \begin{cases} 1 & x \geqq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

invoeren, dan is de voorwaarde (1) aequivalent met $\prod_2^n \iota(X_j' - X_{j-1}') = 1$.
Dus is het element der verdelingsfct

$$(2) \qquad n! \prod_2^n \iota(X_j' - X_{j-1}') \prod_1^n dP(X_j') = \begin{cases} n! \prod_1^n dP(X_j') & \text{als } X_1' < \dots < X_n' \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Integratie over $X_1', \dots, X_n'$, die men na invoering van ι-factoren van $-\infty$ tot $+\infty$ kan uitstrekken geeft inderdaad 1 (Hoe?).

3. Ieder der n getallen X_i is gelijk aan één der getallen $X_1', \dots, X_n'$. We duiden dit aan met X_{j_i}' en noemen j_i het rangnummer van X_i

$$X_i = X_{j_i}'$$

De getallen $j_1, \dots, j_n$ vormen dan een permutatie der getallen $1, \dots, n$, en wel de inverse van de in 1 ingevoerde permutatie $i_1, \dots, i_n$, daar daarbij $X_j' = X_{i_j}$ was.

Van de verdelingsfct $P(X)$ is tot dusverre nog slechts ondersteld dat zij continu is, en als altijd, monotoon niet-afnemend. We veronderstellen nu verder, dat er één (eindig of oneindig) interval is, waarop P (X) monotoon van 0 tot 1 toeneemt. Is dit interval $\mathcal{J} = (a, b)$, waarbij a eindig of $-\infty$, en $b > a$ eindig of $+\infty$ is, dan is dus $P(a) = 0$, $P(b) = 1$ en voor ieder paar X_1, X_2 met

$$a \leqq X_1 < X_2 \leqq b \qquad P(X_1) < P(X_2) \quad (\text{niet } \leqq)$$

Door deze onderstelling worden dus verdelingsfcts uitgesloten, waarbij de toename van $P(X)$ verdeeld is over twee of meer intervallen, die gescheiden worden door een of meer intervallen waarop $P(X)$ constant is, en ook verdelingsfcts welker toename geheel of gedeeltelijk plaats vindt op een vz, die géén interval bevat, de zgn. singuliere verdelingsfcts (vgl. pag. 22), waarvan die van Cantor (vgl. pag. 132, Whr 221) een voorbeeld was. Er bestaat dus in de hier toegelaten gevallen steeds een verdelingsdichtheid $f(X)$ al zal daarvan weinig gebruik behoeven te worden gemaakt.

Zij nu $\varphi(X)$ een op het interval (a, b) monotoon toenemende reële functie. Zij $\varphi(a) = a'$ (eindig of $-\infty$) en $\varphi(b) = b'$ (eindig of $+\infty$) en zij $\mathcal{G}(y)$ de verdelingsfct van $y = \varphi(X)$. Dan is deze op het interval $\mathcal{J}' = (a', b')$ monotoon toenemend, en wel is

$$\mathcal{G}(\varphi(X)) = P(X)$$

Als $X \in \mathcal{J}$ is. Daar $\varphi(X)$ monotoon toeneemt, kan men voor iedere $y \in \mathcal{J}'$

de vgl $y=\varphi(x)$ naar x oplossen: $x=\psi(y)$, waarbij $\psi(y)$ op $\mathcal{J}'$ monotoon toeneemt en

$$\mathcal{G}(y)=P(\psi(y)) \text{ is } \qquad (y\in\mathcal{J}')$$

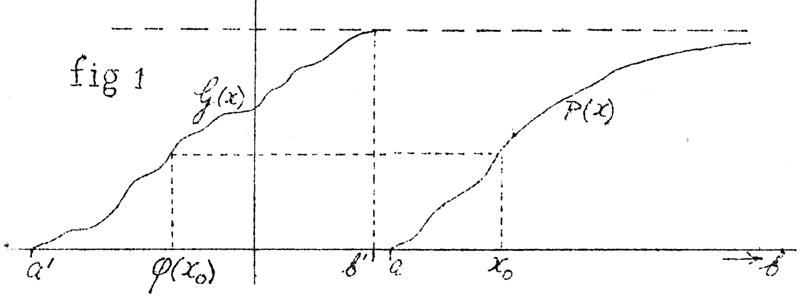
Door de fcts $\varphi(x)$ en $\psi(y)$ worden dus de intervallen $\mathcal{J}$ en $\mathcal{J}'$ - waarbuiten $\underline{X}$ resp. $\underline{Y}$ svpr 0 niet kan komen - één aan één op elkaar afgebeeld, en wel met behoud van de oriëntering (toenemende x komen overeen met toenemende y).

4. Bij vele statistische problemen is het van weinig belang, of men van een variabele $\underline{X}$ de verdeling beschouwt, dan wel van een variabele $\underline{Y}$ die daaruit door een "monotone afbeelding" ontstaat. Heeft men b.v. een collectie stalen kogeltjes van verschillende grootten, dan kan men deze grootte vastleggen door de diameters $\underline{X}$ te meten, maar b.v. ook door van elk de inhoud $\underline{Y}$ te meten. Deze is, in de onderstelling, dat afwijkingen van de bolvorm te verwaarlozen zijn, $y=\frac{\pi}{6}x^3$. Men zou b.v. ook de oppervlakte van een cirkelvormig gat kunnen meten, w r het kogeltje juist doorgaat, dus $z=\frac{\pi}{4}x^2$. We merken hierbij tevens op, dat, als $\underline{X}$ bij benadering normaal verdeeld is, dit met $\underline{Y}$ slechts het geval zal zijn, indien de verhouding van spreiding en gemiddelde zo klein is, dat het quadraat daarvan bij de toegestan graad van benadering te verwaarlozen is. Ook komt het bij verschillende statistische problemen (vooral in de psychologie) voor, dat een waargenomen kenmerkenkategorie wel volgens een bepaalde methode naar stijgende grootte gerangschikt kan worden, maar dat een quantitatieve precisering daarvan dan niet met grove willekeur mogelijk is. Tenslotte zijn er dan zeer talrijke gevallen, waarbij van een variabele $\underline{X}$ de verdelingsfct geheel onbekend is, al kan men wel (hopen we) met goed recht onderstellen dat deze continu en op een bepaald interval (b.v. $0<x<\infty$) monotoon toenemend is.

In al deze gevallen verdient het aanbeveling, statistische methoden te gebruiken, welker resultaten onafhankelijk er van zijn, of men met een bepaalde stochastische variabele werkt, dan wel met een willekeurige andere die daaruit door een monotone afbeelding ontstaat. Daar voor zulke methoden karakteristiek is, dat de rangschikking van een aantal waargenomen waarden (of kenmerken) behouden blijft, zullen wij ze <u>rang-invariante methoden</u> noemen.

5. Uit een op een interval (a,b) monotoon toenemende continue verdelingsfct $P(x)$ kan iedere andere (b.v. $\mathcal{G}(x)$, interval (a',b')) door een mon afbeelding verkregen worden.

Immers (vgl. fig. 1), bij een willekeurige $x \in \mathcal{I}$ kan men $P(x)$ bepalen en vervolgens y zo dat $\mathcal{G}(y) = P(x)$ is. Stelt men $y = \varphi(x)$, dan bewijst men gemakkelijk dat de afbeelding monotoon toenemend en continu is. Men kan dus altijd door



monotone afbeelding bereiken, dat de nieuwe variabele y b.v. normaal (0,1) verdeeld is. Is $P(x)$ de oorspronkelijk verdelingsfct, dan wordt

$$\varphi(x) = -\xi_{P(x)}$$

waarin evenals vroeger (vgl. pag. 243, Whr 332) ξ_{α} de abscis ener N(0,1)-verdeling is, behorende bij de "staartintegraal" α. Ook kan men op deze wijze bereiken, dat de nieuwe variabele homogeen op (0,1) verdeeld is. Men stelle daartoe

$$\varphi(x) = P(x)$$

Dan wordt namelijk $\mathcal{G}(\varphi(x)) = \mathcal{P}[\varphi(\underline{x}) \leq \varphi(x)] = \mathcal{P}[\underline{x} \leq x] = P(x)$, of ook $\mathcal{G}(y) = y$ voor $0 \leq y \leq 1$. Met gebruikmaken van n ook door M.J. van Uven[1] gebruikte term zullen we $\underline{y} = P(\underline{x})$ de kanonieke getransformeerde noemen.

Beide transformaties zijn evenwel slechts dan effectief uit te voeren, als de oorspronkelijke verdelingsfct $P(x)$ bekend is.

6. Zij evenals in 1 $x_1, \ldots, x_n$ een steekproef uit een verdeling van een variabele $\underline{x}$ met verdelingsfct $P(x)$.

We zullen een functie $h(x_1, \ldots, x_n, P_1, \ldots, P_n)$ ranginvariant noemen, indien voor alle reële $x_1, \ldots, x_n$, alle $P_1, \ldots, P_n$ die ≥ 0 en ≤ 1 zijn en waarvoor $\frac{P_i - P_j}{x_i - x_j} > 0$ is als $i \neq j$ is, en iedere monotoon stijgende fct $\varphi(x)$

$$h(\varphi(x_1), \ldots \varphi(x_n), P_1, \ldots, P_n) = h(x_1, \ldots, x_n, P_1, \ldots, P_n) \text{ is.}$$

Wij noemen een functie $g(x_1, \ldots, x_n)$ ranginvariant als een ranginvariante fct $h(x_1, \ldots, x_n, P_1, \ldots, P_n)$ bestaat waarvoor

$$g(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n, P(x_1), \ldots, P(x_n))$$

is voor alle $x_1, \ldots, x_n$.

Wij zullen een functie $h(x_1, \ldots, x_n, P_1, \ldots, P_n)$ rangcovariant noemen, indien er een monotone functie $\psi(h)$ gevonden kan worden, zodat voor iedere monotone fct $\varphi(x)$, identiek in de x_i en de P_i met $\frac{P_i - P_j}{x_i - x_j} > 0$

---

[1])M.J. van Uven, Likelihood as conditional probability, Proc. Kon. Ned. Akad. 44 (1941) p. 947, Indagationes Mathematicae 3 (1941) p. 433.

voor $i \neq j$ en $0 \leq P_i \leq 1$ geldt:

$$h(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n), P_1, \ldots, P_n) = \psi(h(x_1, \ldots, x_n, P_1, \ldots, P_n)).$$

Wij noemen een functie $g(x_1, \ldots, x_n)$ <u>rangcovariant</u> als een rangcovariante $h(x_1, \ldots, x_n, P_1, \ldots, P_n)$ bestaat waarvoor

$$g(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n, P(x_1), \ldots, P(x_n))$$

is voor alle $x_1, \ldots, x_n$.

Een ranginvariant is dus een speciaal soort rangcovariant t.w. met $\psi(h) = h$.

Er zijn drie belangrijke bijzondere klassen van rangcovarianten.

1). De functie h hangt alleen af van de P_i. Aangezien de transformatie φ de P_i onveranderd laat, gaat $h(P_1, \ldots, P_n)$ over in zichzelf en is h (dus ook g) <u>ranginvariant</u>.

2). De functie h hangt niet af van de P_i. Dan is h een <u>statistische</u> grootheid (d.w.z. een functie van de x_i, die onafhankelijk van de verdeling van $\underline{x}$ bepaald is.

3). De functie h is invariant ten opzichte van alle permutaties van de x_i en de P_i. Dan is h een <u>symmetrische</u> fct van de x_i.

<u>Voorbeelden</u>:

De eenvoudigste <u>ranginvarianten</u> zijn de rangnummers $j_1, \ldots, j_n$ (vgl. <u>2</u>). Zij zijn statistische grootheden (Klasse 2, zie boven). Bovendien zijn zij (op de collectie van alle steekproeven van de uitgebreidheid n) stochastisch. Zij bezitten gezamenlijk (dus ook elk afzonderlijk) een verdelingsfunctie, die, uiteraard discontinu is (de rangnummers zijn gehele getallen). Zij zijn echter niet symmetrisch.

Andere <u>ranginvarianten</u> zijn de $P(x_i)$, hetgeen direct blijkt uit de definitie van ranginvariantie. Zij zijn noch statistisch, noch symmetrisch. We zullen $P(x_i)$ de <u>i^de^ elementaire ranginvariant</u> noemen.

Voorbeelden van <u>symmetrische ranginvarianten</u> zijn de $P(x_j')$. Immers de rangschikking naar grootte van de waarnemingen, is onafhankelijk van de volgorde van deze waarnemingen. Daaruit volgt, dat x_j', dus ook $P(x_j')$ invariant is ten opzichte van permutaties der x_i, dus een symmetrische functie der x_i is. Wij noemen $P(x_j')$ daarom de <u>j^de^ elementaire symmetrische ranginvariant</u>.

De x_i zijn <u>rangcovarianten</u>; door de transformatie φ gaat x_i over in $\varphi(x_i)$, dus is $\psi = \varphi$. Zij zijn <u>statistisch</u> (Klasse 2 zie boven), doch niet symmetrisch. Wij noemen x_i de <u>i^de^ elementaire rangcovariant</u>.

De x_j' zijn eveneens <u>rangcovariant</u>, omdat als:

$$x_1' < x_2' < x_3' < \ldots\ldots < x_n'$$

wegens de monot. van φ geldt:

$$\varphi(x_1') < \varphi(x_2') < \varphi(x_3') < \ldots\ldots < \varphi(x_n')$$

De x_j' zijn statistische grootheden en zoals we boven gezien hebben ook symmetrische functies der x_i .

Wij noemen x_j' de <u>j^de^ elementaire symmetrische rangcovariant</u>. In het Engels worden de elementaire symmetrische rangcovarianten met "order-statistics" aangeduid. In het bijzonder zijn dus de kleinste en de grootste waargenomen waarde, de steekproef-mediaan (bij oneven n), de steekproef-quarti n (als n een 4-voud *min* 1 is), enz. symmetrische statistische rang-covarianten. Niet echter de zgn. "range", d.i. $x_n' - x_1'$. Immers na een monotone afbeelding φ is de nieuwe "range" $y_n' - y_1' = \varphi(x_n') - \varphi(x_1')$ wel in x_1' en x_n' tezamen, maar <u>niet</u> in hun verschil alleen uit te drukken. Hetzelfde geldt b.v. voor de zgn. " range" $\frac{1}{2}(x_1' + x_2')$. Een eenvoudige fct van twee of meer rang-covarianten behoeft dus zelf niet rang-covariant te zijn. Evenmin zijn b.v. de momenten (hoewel <u>symmetrische</u> fcts) rang-covarianten.

7. We zullen nu de verdelingsfcts van enkele rang-covarianten opstellen. Vooreerst de mediaan van een <u>on</u>even aantal $n = 2m-1$ waarnemingen. (De mediaan van een even aantal $n = 2m$ waarnemingen is niet ondubbelzinnig bepaald maar kan ieder getal tussen x_m' en x_{m+1}' zijn. Veelal kiest men $\frac{1}{2}(x_m' + x_{m+1}')$ hetgeen op lineaire interpolatie neerkomt. Deze keuze is vrij willekeurig, en geeft bovendien geen rang-covariant). We duiden de mediaan ook met c aan ("centrale waarde").

Zij dus $c = x_m'$, $n = 2m-1$. Het element van de verdelingsfct $G(c)$ van <u>c</u> wordt gevonden, hetzij door (2) uit punt <u>2</u> over alle x_j' met $j \neq m$ te integreren, hetzij rechtstreeks door op te merken, dat $m-1$ waarden $x_i < c$ zijn - de wh dat dit dit geval is, is $\binom{2m-1}{m-1}\{P(c)\}^{m-1}$ -, dat $m-1$ <u>andere</u> dezer waarden $> c$ zijn - wh = $\binom{m}{m-1}(1-P(c))^{m-1}$ - en dat de overblijvende waarde in het interval $(c, c+dc)$ ligt - wh $= dP(c)$ - . Daar deze whr onafhankelijk zijn is de wh dat $\underline{c}$ tussen c en $c+dc$ ligt:

$$(3) \qquad d\mathcal{G}(c) = \frac{(2m-1)!}{(m-1)!^2} P(c)^{m-1} (1-P(c))^{m-1} dP(c)$$

De wh-dichtheid, die ontstaat door de laatste factor door $f(c) = P'(c)$ te vervangen zal doorgaans geen eenvoudige fct zijn, daar reeds $P(c)$ dit niet is (b.v. bij een normale $P(c)$). Dientengevolge zijn dan ook momenten e.d. van $\underline{c}$ niet eenvoudig te bepalen (behalve in triviale gevallen, b.v. momenten van oneven orde bij een symmetrische verdeling, die alle nul zijn, en bij speciale fcts $P(x)$, waarbij de integralen elementair berekenbaar zijn).

Indien men echter, in plaats van de mediaan $\underline{c}$ zelf, de <u>mediaan-ordinaat</u> $P(\underline{c})$ - d.i. haar kanonisch getransformeerde - neemt, verandert dit onmiddellijk. Blijkens (3) is deze namelijk $\mathcal{B}(m, m)$ - verdeeld. Met de notaties van pag. 116(Whr 205) is $\nu = 2m = m+1$; $p = q = \frac{1}{2}$. Volgens pag. 119(Whr 208) is de verdeling van $P(\underline{c})$ dus asymptotisch normaal, en wel volgens pag. 118 (Whr 207) met een verwachting $p = \frac{1}{2}$ (zoals te verwachten was) en een spreidingsquadraat $\frac{pq}{\nu+1} = \frac{1}{4(2m+1)}$. Met behulp hiervan kan men - <u>als de fct $P(x)$ bekend is</u> - een voorspellingsinterval voor $\underline{c}$ opstellen. Bepaalt men namelijk uit de tabellen der $\mathcal{B}(m, m)$-verdeling de waarde die met een wh $\frac{1}{2}\alpha$ overschreden wordt, zodat $\mathcal{G}_\beta(m, m) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ is, en die we met $\beta_{\frac{1}{2}\alpha}$ zullen aanduiden, dan is dus

$$|P(\underline{c}) - \tfrac{1}{2}| \leq \beta_{\frac{1}{2}\alpha} - \tfrac{1}{2} \qquad \text{svpr } \alpha$$

Bepaalt men dan c_1 en c_2 zo, dat

$$P(c_2) = 1 - P(c_1) = \beta_{\frac{1}{2}\alpha}$$

is, dan is ook

$$c_1 \leq \underline{c} \leq c_2 \qquad \text{svpr } \alpha .$$

Substitueert men in (3) $P(c) = \frac{1}{2}(1-r)$, dan ontstaat de verdeling (pag. 123, Whr 212) van de correlatiecoëfficiënt met $\frac{\nu'-1}{2} = m$ (we schrijven hier ν' in plaats van l.c. ν omdat reeds $\nu = 2m$ gedefinieerd is). Volgens l.c. is $t = \sqrt{\nu'-1}\,\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} = \sqrt{n+1}\,\frac{1-2P(c)}{2\sqrt{P(c)(1-P(c))}}$ volgens Student met $\nu' = 2m+1 = n+2$ vrijheidsgraden verdeeld. Is $t_{\frac{1}{2}\alpha}$ de waarde die in deze verdeling met een wh $\frac{1}{2}\alpha$ overschreden wordt, dan is dus

$$\sqrt{n+1}\,\frac{|1-2P(\underline{c})|}{2\sqrt{P(\underline{c})(1-P(\underline{c}))}} \leq t_{\frac{1}{2}\alpha} \qquad \text{svpr } \alpha$$

of $$1-4P(\underline{c})+4P(\underline{c})^2 \leqq \frac{4}{n+1}\, P(\underline{c})(1-P(\underline{c}))\, t^2_{\frac{1}{2}\alpha} \qquad \text{svpr } \alpha$$

of $$4P(\underline{c})(1-P(\underline{c})) \geqq \left(\frac{1}{n+1}\, t^2_{\frac{1}{2}\alpha}+1\right)^{-1} \qquad \text{svpr } \alpha$$

of $$\left|\tfrac{1}{2}-P(\underline{c})\right| \leqq \sqrt{1-\left(\frac{1}{n+1}\, t^2_{\frac{1}{2}\alpha}+1\right)^{-1}} \qquad \text{svpr } \alpha$$

d.w.z. men heeft

$$\beta_{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{n+1}\, t^2_{\frac{1}{2}\alpha}+1\right)^{-1}}$$

Voor grote n is voorts tengevolge van de asymptotische normaliteit

$$\beta_{\frac{1}{2}\alpha}-\frac{1}{2} \approx \sqrt{\frac{1}{4(2m+1)}}\; \xi_{\frac{1}{2}\alpha} \simeq \frac{1}{2\sqrt{n}}\; \xi_{\frac{1}{2}\alpha}$$

waaruit het voorspellingsinterval approximatief direct met behulp van de tabellen der normale verdeling bepaald kan worden, altijd mits $P(x)$ een bekende fct is. Is $\underline{x}$ zelf reeds normaal verdeeld, waarbij we zonder beperking $\mu=0$, $\sigma=1$ kunnen nemen, dan is dus

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\, \xi_{\frac{1}{2}\alpha} \approx \beta_{\frac{1}{2}\alpha}-\frac{1}{2} = P(c_2)-\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{c_2} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \approx \frac{c_2}{\sqrt{2\pi}}$$

· c_2 klein $=\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, dus $e^{-\frac{1}{2}x^2} \simeq 1$ is. Derhalve geldt

$$|\underline{c}| \lessapprox \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\; \xi_{\frac{1}{2}\alpha} \qquad \text{svpr } \alpha$$

voor het gemiddelde $\underline{m}$ exact geldt, dat $\underline{m}\sqrt{n}$ $N(0,1)$- verdeeld is, dus

$$|\underline{m}| \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}\, \xi_{\frac{1}{2}\alpha} \qquad \text{svpr } \alpha$$

heeft $\underline{c}$ asymptotisch $\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ maal zo grote spreiding als $\underline{m}$, zoals reeds op pag. 230 (Whr 319) gevonden was.

8. Op geheel dezelfde wijze kan men een willekeurig quantile behandelen. Als n een Q-voud min één is,

$$n = mQ-1$$

wordt x'_k met

$$k = hm$$

het h-de Q-ile genoemd. $(1 \leqq h \leqq Q-1)$. Tussen (exclusief) twee opvolgende Q-ilen liggen dus $m-1$ waarnemingen evenals voor het eerste en na het laatste $(Q-1)$-de, Q-ile. Indien thans c het h-de Q-ile, $\mathcal{G}(c)$ zijn verdelingsfcts voorstelt, vinden we analoog (3):

$$(4) \qquad d\mathcal{G}(c) = \frac{(mQ-1)!}{(hm-1)!\,(Qm-hm-1)!}\; P(c)^{hm-1}\,(1-P(c))^{Qm-hm-1}\, dP(c)$$

Dit is een bêtaverdeling voor $P(\underline{c})$ met $\nu = mQ = n+1$ $\quad p=\frac{h}{Q}$ $\quad q=\frac{Q-h}{Q}$.

Derhalve is de verwachting van de quantile-ordinaat $\mathcal{E} P(\underline{c}) = \frac{h}{Q}$, en het spreidingsquadraat $\sigma^2_{P(\underline{c})} = \frac{pq}{\nu+1} = \frac{h(Q-h)}{Q^2(n+2)}$. Voor $n \to \infty$, d.w.z. $m \to \infty$ bij constante Q is de verdeling asymptotisch normaal. Duidt men thans met β_γ de abscis aan, die bij de B-verdeling (4) met een wh γ overschreden wordt, dan is dus

(5) $$\beta_{1-\frac{1}{2}\alpha} \leqq P(\underline{c}) \leqq \beta_{\frac{1}{2}\alpha} \qquad \text{svpr } \alpha$$

een voorspellingsinterval voor $P(\underline{c})$.
Voor grote n is bij benadering

$$|P(\underline{c}) - p| \lessapprox \xi_{\frac{1}{2}\alpha} \sqrt{\frac{pq}{\nu+1}} \qquad \text{svpr } \alpha$$

Is nu γ het h-de Q-ile van de gegeven verdeling zelf, dus

$$P(\gamma) = \frac{h}{Q},$$

dan geldt voor grote n, daar dan het voorspellingsinterval, dus $\underline{c} - \gamma$ klein is bij benadering:

$$P(c) \approx P(\gamma) + (c-\gamma) P'(\gamma) = p + (c-\gamma) f(\gamma)$$

dus

(6) $$|\underline{c} - \gamma| \lessapprox \frac{\xi_{\frac{1}{2}\alpha}}{f(\gamma)} \sqrt{\frac{h(Q-h)}{Q^2(n+2)}} \qquad \text{svpr } \alpha$$

De vooruitgang in vergelijking met de behandeling in hoofdstuk 4, pag. 231-234 (Whr 320-323) ligt overigens niet in deze benaderde resultaten voor grote n, maar juist in de mogelijkheid, uit (5) met behulp van de tabellen der bêta-verdeling reeds voor kleine n exacte voorspellingsintervallen voor $P(\underline{c})$ te krijgen. Uit deze voorspellingsintervallen kan men voor verdelingen die niet volledig bekend zijn volgens de methoden van hoofdstuk 5 pag. 256, 257 (Whr 345, 346) toetsings- en betrouwbaarheidsintervallen afleiden.

Literatuur: W.R. Thompson, On confidence ranges for the median and other expectation distributions for populations of unknown distribution form, Am. Math. Stat. 7 (1936) p. 122-128.

9. Op analoge wijze kan men de simultane verdelingsfcts van meerdere elementaire rang- varianten opstellen. Schrijven wij P_k voor $P(\underline{x}'_k)$ (en P_{-k} voor $P(\underline{x}'_{-k})$) dan is het integraalelement van de verdelingsfct van $\underline{x}'_k$ en $\underline{x}'_{n-\ell+1}$ met $k < n-\ell+1$

(7) $$\frac{n!}{(k-1)!(n-\ell-k)!(\ell-1)!} P_k^{n-1} dP_k (P_{n-\ell+1} - P_k)^{n-\ell-k} dP_{n-\ell+1} (1 - P_{n-\ell+1})^{\ell-1}$$

en dat van de $Q-1$ Q-ilen $c_1, \dots, c_{Q-1}$ gezamenlijk is

$$(8) \qquad \frac{(mQ-1)!}{(m-1)!} P_m^{m-1} dP_m \prod_{2}^{Q-1} \left\{ (P_{hm} - P_{(h-1)m})^{m-1} dP_{hm} \right\} \cdot (1 - P_{(Q-1)m})^{m-1}$$

waarin $P_{hm} = P_{\frac{h(n-1)}{Q}} = F(c_h)$ is ($c_h = x'_{h(n+1)/Q}$). Uit (7) volgt b.v. direct de covariantie van P_k en P_{n-l+1}. Vermenigvuldigt men namelijk (7) met P_k en integreert men over P_k van 0 tot een constante P_{n-l+1}, dan krijgt men:

$$\frac{k\,n!}{(n-l+1)!\,(l-1)!} P_{n-l+1}^{n-l+1} dP_{n-l+1} \left\{ 1 - P_{n-l+1} \right\}^{l-1}$$

Vermenigvuldigt men nog met P_{n-l+1} en integreert men over P_{n-l+1} dan krijgt men

$$\mathcal{E}\, \underline{P}_k\, \underline{P}_{n-l+1} = \frac{k(n-l+2)}{(n+1)(n+2)}$$

Daar voorts

$$(9) \qquad \begin{cases} \mathcal{E}\, \underline{P}_k = \dfrac{k}{n+1} & \text{en} \quad \mathcal{E}\, \underline{P}_{n-l+1} = \dfrac{n-l+1}{n+1} = 1 - \dfrac{l}{n+1} \\[2ex] \sigma^2_{\underline{P}_k} = \dfrac{k(n-k+1)}{(n+1)^2 (n+2)} & \sigma^2_{\underline{P}_{n-l+1}} = \dfrac{l(n-l+1)}{(n+1)^2 (n+2)} \end{cases}$$

is, wordt de covariantie

$$\mathcal{E}\, \underline{P}_k\, \underline{P}_{n-l+1} - \mathcal{E}\, \underline{P}_k\, \mathcal{E}\, \underline{P}_{n-l+1} = \frac{k(n-l+2)}{(n+1)(n+2)} - \frac{k(n-l+1)}{(n+1)^2} = \frac{kl}{(n+1)^2(n+2)}$$

dus de correlatiecoefficient ρ van $\underline{P}_k$ en $\underline{P}_{n-l+1}$:

$$(10) \qquad \rho = \left\{ \frac{k(n-l+2)}{(n+1)(n+2)} - \frac{k(n-l+1)}{(n+1)^2} \right\} \frac{(n+1)^2 \; (n+2)}{\sqrt{k(n-l+1)(n-k+1)\,l}} = \sqrt{\frac{kl}{(n-k+1)(n-l+1)}}$$

10. Met behulp van een rang-invarianten methode kan ook uit een gegeven steekproef een "betrouwbaarheidsgordel" worden afgeleid voor de onbekende verdelingsfct. We zullen deze thans met $\varphi(x)$ in plaats van met $F(x)$ aanduiden, om weer te geven dat deze onbekend is. Het verschil met hoofdstuk 5 is daarin gelegen, dat we toen met slechts één of een eindig aantal onbekende parameters te maken hadden, terwijl hier $\varphi(x)$ voor iedere waarde van x onbekend is. Dit komt overeen met een oneindig aantal onbekende parameters. Van de fct $\varphi(x)$ wordt ondersteld, dat ze monotoon stijgend en continu is.

Zij wederom $x_1', \ldots, x_n'$ de gerangschikte steekproef. We bepalen de hierbij behorende trapfct $H(x) = H(x; x_1, \ldots, x_n)$:

$$(11) \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq x_1' \\ j/n & \text{als } x_j' \leq x \leq x_{j+1}' \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ 1 & \text{als } x \geq x_n' \end{cases}$$

We hebben hier overal $\leq$ -tekens geplaatst, waardoor de fct in de discontinuiteitspunten tweewaardig wordt om daardoor verderop het begrip "supremum" te kunnen vermijden en door het bekendere begrip "maximum" te vervangen.

Deze fct kan bij iedere gegeven steekproef direct bepaald worden; zij is dus een statistische fct, analoog met een statistische grootheid.

Op de collectie van alle steekproeven zijn $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ stochastisch. Daardoor wordt ook de fct H stochastisch. We merken op, dat het argument x niet stochastisch is, maar een parameter is: voor iedere waarde van deze parameter x is

$$\underline{H}(x) = H(x; \underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots \underline{x}_n)$$

een stochastische grootheid. Daarom is ook de letter H, niet de letter x onderstreept.

Derhalve is ook de fct $\underline{H}(x) - \varphi(x)$ een stochastische (maar niet een statistische) fct, en is het getal

$$(12) \qquad \underline{\Delta} = \underset{x}{Max} \left| \underline{H}(x) - \varphi(x) \right|$$

waarin het maximum over alle reële x genomen is, een stochastische (niet-statistische grootheid). Zij heeft dus een bepaalde verdelingsfct. Hetzelfde is met $\underline{\Delta}\sqrt{n}$ het geval:

$$(13) \qquad \mathcal{G}_n(\lambda) = P\left[\underline{\Delta}\sqrt{n} \leq \lambda\right]$$

Deze verdelingsfct nu is rang-invariant en hangt dus niet meer van de oorspronkelijk verdelingsfct $\varphi(x)$ af. Immers bij een monotone afbeelding $x = \psi(y)$ gaat $\varphi(x)$ in $\varphi(\psi(y))$ over, maar ook $H(x; x_1, \ldots, x_n)$ in $H(\psi(y)); \psi(y_1) \ldots \psi(y_n))$; het verschil $\underline{H}(x) - \varphi(x)$ is dus reeds rang-invariant, en evenzo $\underline{\Delta}$ en $\mathcal{G}_n(\lambda)$. Dit is reeds in 1933 door A. Kolmogoroff bewezen.

Men kan dus $\mathcal{G}_n(\lambda)$ berekenen door dit voor een speciale verdelingsfct te doen, waarvoor men de homogene (0,1)-verdeling

$$\varphi(x) = x$$

kiest. Echter stuit de berekening op zo grote wiskundige moeilijkheden, dat zij alleen asymptotisch voor grote n (door A. Kolmogoroff), en exact voor enkele kleine waarden van (door A. Wald en J. Wolfowitz, 1939) gelukt is. We geven hier slechts zonder bewijs het resultaat van Kolmogoroff. Dit luidt:

$$(14) \qquad \mathcal{G}(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{G}_n(\lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$$

en wel gelijkmatig in λ. De reeks in het rechter lid is een speciaal geval van een der zgn. thêta-reeksen van G.K.C. Jacobi (1829) die in de theorie der elliptische fcts voorkomen. Zij heeft het voordeel voor niet te kleine waarden van λ buitengewoon snel te convergeren. Uitgeschreven heeft zij de vorm

$$\mathcal{G}(\lambda) = 1 - 2e^{-2\lambda^2} + 2e^{-8\lambda^2} - 2e^{-18\lambda^2} + \ldots\ldots$$

Men kan nu gemakkelijk een λ_α bepalen, waarvoor $\mathcal{G}(\lambda_\alpha) = 1-\alpha$ is, als α klein is. Dan kan men namelijk reeds de derde term verwaarlozen. Dit geeft $\alpha = 2e^{-2\lambda_\alpha^2}$ of $2\lambda_\alpha^2 = \ln\frac{2}{\alpha}$, waaruit λ direct met behulp van een tafel van natuurlijke logarithmen bepaald kan worden. Voor $\alpha = 0{,}05$ b.v. vindt men $\lambda_\alpha = 1{,}358$. Daar dan $e^{-2\lambda^2} \approx \frac{1}{40}$ is, is de derde term $\approx \left(\frac{1}{40}\right)^4$, d.i. $\left(\frac{1}{40}\right)^3 = \frac{1}{64000}$ maal zo klein.

Men vindt dus voor grote n bij een gegeven steekproef een asymptotische betrouwbaarheidsstrook, begrensd door de trapfcts

$$H(x; x_1, \ldots, x_n) + \lambda_\alpha/\sqrt{n}$$
$$\text{en} \quad H(x; x_1, \ldots, x_n) - \lambda_\alpha/\sqrt{n}$$

voor zoverre deze ≥ 0 en ≤ 1 zijn, verbonden door de verticale lijnstukken in de discontinuïteitspunten en aangevuld met stukken van de lijnen $\varphi = \lambda_\alpha/\sqrt{n}$ en $\varphi = 1 - \lambda_\alpha/\sqrt{n}$ (zie fig. 19)

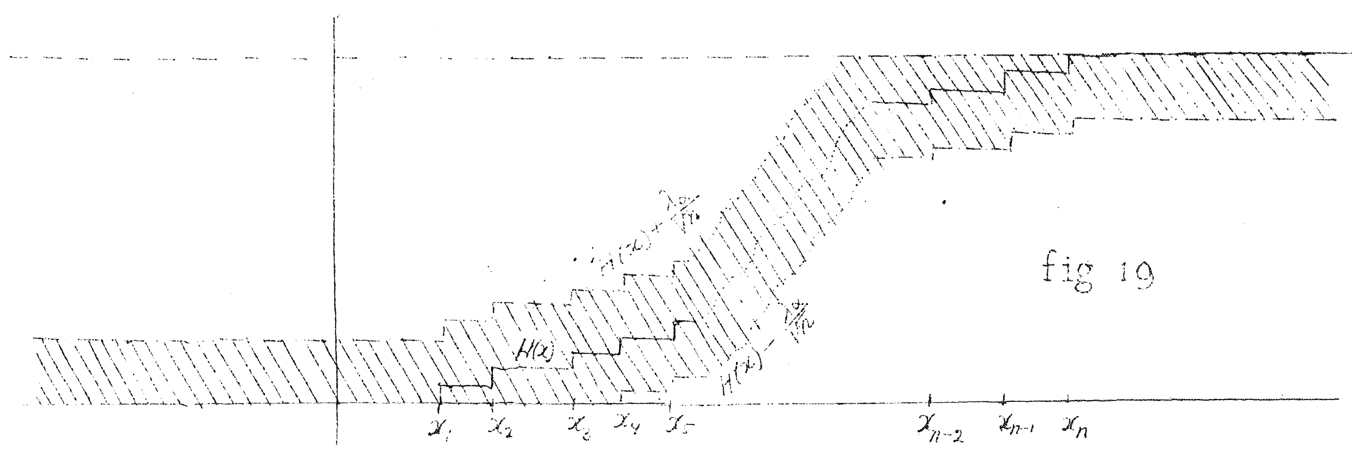


fig 19

Deze strook is stochastisch zowel als statistisch en overdekt $\varphi(x)$ svpr α, d.w.z. de wh dat $\varphi(x)$ waar dan ook erbuiten treedt is asymptotisch voor grote $n \approx \alpha$. Klaarblijkelijk kan men over het verloop van de kromme in de staarten niets van betekenis concluderen, zoals wel haast van zelf spreekt, als men uitsluitend de steekproef zelf wil gebruiken en geen enkel gegeven omtrent de speciale aard der fct $\varphi(x)$ heeft. In het bijzonder kan men omtrent de waarden der momenten, zelfs hun existentie, niets concluderen.

Desalniettemin is voor zeer grote n het resultaat van veel belang, dat de verdelingskromme svpr 0,05 geheel in een strook met halve hoogte $\frac{1,358}{\sqrt{n}}$ en zelfs svpr 0,0007 geheel in een strook met halve hoogte $\frac{2}{\sqrt{n}}$ ligt. Echter is niet eenvoudig na te gaan, hoe groot n genomen moet worden om $G(\lambda) - G_n(\lambda)$ voor een gegeven λ beneden een gegeven grens te krijgen. Bovendien is de grootte-orde van de hoogte $\frac{1}{\sqrt{n}}$, d.w.z. de gordel-dikte is groot in vergelijking met de tredehoogte $\frac{1}{n}$.

11. De in 2 ingevoerde grootheden $P_i = P(x_i')$ zijn, zoals we reeds opmerkten (pag.271, Whr 360), niet onafhankelijk verdeeld. Het element d_nF van de verdelingsfct is namelijk (zie pag.272; Whr 361)

$$(2) \qquad d_nF = \begin{cases} n!\prod dP_i & \text{als } 0 \leq P_1 \leq P_2 \quad \ldots \leq P_n \leq 1 \text{ is} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Stelt men echter $\frac{P_i}{P_{i+1}} = r_i \quad (1 \leq i \leq n-1)$, $P_n = r_n$,

dan wordt de ongelijkheid voor de P_i: $0 \leq r_i \leq 1$

en we krijgen $P_i = r_i r_{i+1} \ldots r_n$, dus

$$(15) \qquad d_nF = n!\prod r_i^{\,i-1} dr_i \quad \text{als } 0 \leq r_i \leq 1 \text{ is } (1 \leq i \leq n).$$

Stellen we nog $r_i^{\,i} = z_i$, dus, als we kortheidshalve $P_{n+1} = 1$ toelaten,

$$(16) \qquad z_i = \left(\frac{P_i}{P_{i+1}}\right)^i$$

$$(17) \qquad P_i = z_i^{\frac{1}{i}}\, z_{i+1}^{\frac{1}{i+1}} \ldots z_n^{\frac{1}{n}}$$

dan wordt

$$(18) \qquad d_nF = dz_1 \ldots dz_n \quad \text{als } 0 \leq z_i \leq 1 \quad \text{is } (1 \leq i \leq n)$$

(en anders = 0). M.a.w. $z_1, \ldots, z_n$ zijn onderling onafhankelijke homogeen (0,1)-verdeelde variabelen (evenals de $P(x_i)$ – niet de $P(x_i')$ – zelf), die bovendien symmetrische ranginvarianten zijn.

Men heeft dus

$$\mathcal{E}\underline{z}_i = \frac{1}{2} \;;\; \mathcal{E}\underline{r}_i = \mathcal{E}\underline{z}_i^{\frac{1}{i}} = \frac{i}{i+1}$$ in overeenstemming

met

$$\mathcal{E}\underline{P}_i = \mathcal{E}\underline{z}_i^{\frac{1}{i}} \cdots\cdots \underline{z}_n^{\frac{1}{n}} = (\mathcal{E}\underline{z}_i^{\frac{1}{i}}) \cdots\cdots \mathcal{E}\underline{z}_n^{\frac{1}{n}} =$$
$$= \frac{i}{i+1} \cdot \frac{i+1}{i+2} \cdots\cdots \frac{n}{n+1} = \frac{i}{n+1}$$

(vgl.(9)).

Men kan hieruit een toets afleiden voor een willekeurige (continue) verdelingsfct $P(x)$.

Litteratuur:

A. Kolmogoroff (1933), Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione, Giorn. Instituto Ital. degli Attuari 4, pag. 83-91.

A. Wald and J. Wolfowitz (1939), Confidence limits for continuous distribution functions. Ann. Math. Stat. 10, pag. 105-118.

N. Smirnov (1939), On the estimation of the discrepancy between empirical curves of distribution for two independent samples, Bull. Math. de l'Université de Moscou 2, fasc.2.

A. Kolmogoroff (1941), Confidence limits for an unknown distribution function, Am. Math. Stat. 12, pag. 461.

W. Feller (1948), On the Kolmogoroff-Smirnow limit theorems for empirical distributions, Ann. Math. Stat. 19, pag. 177-189.

J. Wolfowitz (1949), Non-parametric statistical inference, Proc. Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob., Berkeley and Los Angeles 1949, pag. 93-113.

§ 2. Uiterste waarden.

1. Een veel voorkomend statistisch probleem is: welke is de waarde, die door de grootste onder n onderling onafhankelijke waarnemingen van een stochastische variabele x met gegeven verdelingsfct P(x) svpr α niet overschreden zal worden? Het probleem treedt o.a. op bij voorspelling van hoogste waterstanden (dijkconstructie), hoogste leeftijden (lijfrenten), e.a. In het algemeen: als overschrijding van x van een waarde waarop men niet vooraf gerekend heeft grote nadelen zou veroorzaken.

Men kan dezelfde vraag stellen voor de op één na hoogste, op twee na hoogste, enz., in het algemeen op m na hoogste waarde. Het probleem van de laagste, op één na de laagste, enz. waarde is onmiddellijk tot het voorgaande te herleiden doordat men x door -x vervangt.

Het oplossen van dit vraagstuk voor alle α is aequivalent met het bepalen van de verdelingsfct van de grootste,...,op één na grootste steekproefwaarde en het bepalen van de inverse fct daarvan.

Het eerstgenoemde probleem is in benadering voor grote n voor een niet precies aangegeven klasse van verdelingen F(x) opgelost door R.A. Fisher en L.H.C. Tippett (1928), vervolgens voor het geval van een normale verdeling door exacte tabellering bij eindige n door L.H.C. Tippett (1925). Eveneens voor een zekere klasse van verdelingsfcts is het, tezamen met dat voor de m^{de} waarde (in deze § steeds van boven af gerekend), eveneens asymptotisch voor grote n, behandeld door E.J. Gumbel in een groot aantal artikelen, die ook talrijke toepassingen ervan geeft [1]. We zullen hier eerst een exacte, en vervolgens een, eveneens asymptotische, oplossing geven die op rang-invariante methoden berust. Blijken zal daarbij, dat de methoden van Fisher Tippett en Gumbel belangrijke bezwaren bezitten, waarmede het reeds sinds lang bekende feit samenhangt, dat Tippett's exact berekende waarden "slechts zèèr langzaam" naar F.-T.'s asymptotisch convergeren.

---

1) Vgl. E.J. Gumbel, Les valeurs extrèmes des distributions statistiques, Ann. de l'Institut Henri Poincaré 4(1935) p.115 en
E.J. Gumbel, La durée extrème de la vie humaine, Hermann & Cie, Paris (1937).

2. Zij $G_m(x)$ de verdelingsfct van de op m-1 na grootste waarde (van boven af) z_m van een steekproef van n onafhankelijke waarnemingen van een stochastische variabele $\underline{x}$ met een willekeurige verdelingsfct $P(x)$.

Daar we ons speciaal met de grote waarden van x bezighouden, is het gewenst in plaats van $P(x)$ de complementaire fct ("staartintegraal")

(1) $Q(x) = 1 - P(x)$

in te voeren. Dan is $G_m(z_m)$ de wh dat de op m-1 na grootste van de waarden $x_1, \ldots, x_n \leq z_m$ is, dus dat hoogstens m-1 dezer getallen $> x$ zijn. Dus geldt exact

(2) $$G_m(z_m) = \sum_0^{m-1} \binom{n}{k} Q(z_m)^k \{1 - Q(z_m)\}^{n-k} = \frac{1}{B(n-m+1, m)} \int_0^{1-Q(z_m)} u^{n-m} (1-u)^{m-1} du$$

d.w.z.

$$G_m(z_m) = F_{B(n-m+1, m)}(P(z_m))$$

$$1 - G_m(z_m) = F_{B(m, n-m+1)}(Q(z_m))$$

Speciaal is voor de hoogste waarde z_1 (waarbij we verder de index 1 kortheidshalve weglaten):

(3) $G(z) = G_1(z) = P(z)^n = \{1 - Q(z)\}^n$

Hiermede is direct een exacte oplossing te bepalen, door te eisen dat $G_m(z) = 1 - \alpha$ zal zijn voor de gezochte grens $z = \zeta_{m,\alpha}$ (die overigens ook nog van n af zal hangen). Voor m=1 is dit zeer eenvoudig: men behoeft slechts $\zeta_{1,\alpha}$ op te lossen uit de vgl.:

(4) $P(\zeta_{1,\alpha}) = (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}}$

hetgeen, als $P(x)$ een getabelleerde fct is, direct kan geschieden. Indien $P(x)$ discontenu is, kan dit alleen voor speciale waarden van α. De geringe complicaties, die bij discontinue verdelingen kunnen optreden laten we verder onbesproken.

Voor $m > 1$ is het probleem slechts weinig minder eenvoudig. Blijkens (2) is $P(z_m)$ $B(n-m+1, m)$ - verdeeld. Bepaalt men de waarde

$\beta_{m,\alpha}$, die in deze B-verdeling bij de staartintegraal α behoort, d.w.z. is $F(n-m+1, m)(\beta_{m,\alpha}) = 1-\alpha$, dan is:

$$\alpha = P[\underline{z}_m > \zeta_{m,\alpha}] = 1 - G_m(\zeta_{m,\alpha})$$

dus

$$(5) \quad P(\zeta_{m,\alpha}) = \beta_{m,\alpha}$$

waaruit ook $\zeta_{m,\alpha}$ weer op te lossen is. Men behoeft voor deze exacte oplossing dus uitsluitend de tabellen van de B-verdeling en die van $P(x)$ te gebruiken. Voor $m=1$ leidt (5) tot (4) terug, daar $\beta_{1,\alpha} = (1-\alpha)^{\frac{1}{m}}$ is.

Is $\underline{x}$ b.v. $N(0,1)$-verdeeld, dan is, daar we in dat geval ξ_γ voor iedere γ $(0 \leqq \gamma \leqq 1)$ door $1 - F_{N(0,1)}(\xi_\gamma) = \gamma$ gedefinieerd hebben (vgl. pag.243, Whr 332), de oplossing van (5) resp. (4) direct gegeven door

$$(6) \qquad \zeta_{m,\alpha} = \xi_{1-\beta_{m,\alpha}} \qquad \text{resp.} \qquad \zeta_{1,\alpha} = \xi_{1-(1-\alpha)^{\frac{1}{m}}}$$

3. Deze oplossing is exact en heeft geen ander bezwaar, dan dat zij wel numeriek, maar niet analytisch direct te overzien is. In het bijzonder is het gedrag van (4) en (5) bij grote n niet gemakkelijk te beoordelen. Om dit te bereiken kunnen we beter van (2) resp. (3) uitgaan en hierin direct een benadering voor $n \gg 1$ toepassen. Wij beperken ons niet uitsluitend tot kleine waarden van α, maar wel tot waarden die niet te dicht bij 1 komen: $1-\alpha \geqq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, dus $G_m \geqq \varepsilon$. Nu heeft de bêta-verdeling (2) voor $Q(z_m)$ een gemiddelde $\mathcal{E}Q(\underline{z}_m) = \frac{m}{n+1}$ en een spreiding $\sigma = \frac{1}{n+1}\sqrt{\frac{m(n-m+1)}{n+2}} = O(\frac{1}{n})$. Er bestaat dus een (van ε en m afhangende) constante a, zodat $Q(\underline{z}_m) \leqq \frac{a}{n}$ svpr ε is. We behoeven dus uitsluitend waarden van $Q(x)$ te beschouwen, die $O(\frac{1}{n})$ zijn. Onze resultaten gelden dan voor de gehele verdelingsfct $G_m(z_m)$ met uitzondering van een vlak bij $G_m = 0$ gelegen gedeelte. Op de z_m-as neemt dit overigens een met n onbeperkt toenemend stuk in beslag, maar de wh, dat $\underline{z}_m$ er in ligt is $\leqq \varepsilon$.

Kortheidshalve laten we het argument x van $Q(x)$ weg. Voor $n \to \infty$ gaat volgens pag 122(Whr pag.211) de bêta- in de gammaverdeling over. En wel heeft men

$$(7) \quad G_m = \sum_{0}^{m-1}{}_{k} \frac{(nQ)^k}{k!} e^{-nQ}\left(1 + O(\tfrac{1}{n})\right) \qquad \text{svpr } \varepsilon$$

daar $Q = O(\frac{1}{n})$ is.

In eerste benadering heeft men dus

$$
\left.
\begin{aligned}
G_m(z_m) &\approx \sum_0^{m-1} {}_K \frac{(nQ)^K}{K!} e^{-nQ} = \\
&= \frac{1}{(m-1)!} \int_{nQ}^{\infty} e^{-t} t^{m-1} dt = \\
&= 1 - F_{\Gamma(m)}(nQ(z_m))
\end{aligned}
\right\} \text{svpr } \varepsilon \qquad (8)
$$

Men zal dus uit de tabellen van de Γ -verdeling $\gamma = \gamma_{m,\alpha}$ zo bepalen, dat

$$(9) \quad \alpha = 1 - \sum_0^{m-1} \frac{\gamma^K}{K!} e^{-\gamma} = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{\gamma} e^{-t} t^{m-1} dt$$

is, en dan uit de tabellen van P(x) $z_{m,\alpha}$ bepalen met

$$(10) \qquad Q(z_{m,\alpha}) \approx \frac{\gamma_{m,\alpha}}{n}$$

Speciaal wordt voor m=1 $\gamma_{1,\alpha} = -\ln(1-\alpha)$, dus $Q(z_{1,\alpha}) \approx -\frac{\alpha}{n}$
dus voor kleine Q( )

Een nauwkeuriger schatting leert, dat we G_m niet slechts behoudens $\Theta(\frac{1}{n})$ maar ook $\Theta(\frac{1}{n^2})$ door bovenstaande Γ -verdeling kunnen benaderen, als we in plaats van $u = nQ$

$$(11) \quad u = \frac{n - \frac{1}{2}(m-1)}{1 - \frac{1}{2}Q} \, Q$$

$$\text{of} \quad Q = \frac{u}{n - \frac{1}{2}(m-1) + \frac{1}{2}u}$$

invoeren. We krijgen dan

$$(12) \quad G_m = \left(\sum_0^{m-1} {}_K \frac{u^K}{K!} e^{-u} \right) \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

Ook in hogere benadering is dit mogelijk, ten koste van gecompliceerder uitdrukkingen voor z, en ook overigens vrij aanzienlijk toenemend wiskundig rekenwerk. We merken op, dat de $\Gamma(m)$- variabele u haar modus bij u=m heeft.

De waarde, die svpr α door de grootste van n waarnemingen niet overschreden wordt, is dus in eerste benadering gelijk aan de waarde die svpr $\frac{\alpha}{n}$ door één waarneming niet overschreden wordt. Iets preciezer heeft men hierin $\frac{\alpha}{n}$ door $-\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)$, en exact $\frac{\alpha}{m}$ door $1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{n}} = -\frac{1}{n}\ln(1-\alpha) - \frac{1}{2n^2}\ln^2(1-\alpha) - \frac{1}{3!n^3}\ln^3(1-\alpha) \ldots\ldots$ te vervangen. Voor $\alpha = 0{,}05$ b.v. is $-\ln(1-\alpha) = 0{,}05130$ en $1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{n}} = \frac{0{,}05130}{n} - \frac{0{,}00132}{n^2} - \ldots$

zodat reeds voor kleine n met de eerste benadering $\frac{0{,}05130}{n}$ en zelfs met $\frac{\alpha}{n} = \frac{0{,}05}{n}$ volstaan kan worden. Voor kleinere α, d.i. strengere statistische eisen, geldt dit in nog hogere mate, zodat de benadering alleszins voldoende is.

Om ook voor $m>1$ een benadering te vinden gebruiken we (9). Voor kleine γ is dan $e^{-t} \approx 1$, dus $\alpha \approx \frac{\gamma^m}{m!}$ of

$$(13) \qquad \gamma_{m,1-\alpha} \approx (m!\,\alpha)^{\frac{1}{m}}$$

waarin $\gamma_{m,\beta}$ de abscis is, waarvoor de staartintegraal van de $\Gamma(m)$-verdeling de waarde β heeft.

Voor toenemende $m>1$ wordt deze benadering al gauw slechter, tenzij α zeer klein is. Men kan $\gamma_{m,1-\alpha}$ in een machtreeks naar machten van $\alpha^{\frac{1}{m}}$ ontwikkelen, die echter slechts langzaam convergeert. Het is in dit geval eenvoudiger, volgens punt 2 de tabellen van de bêta- (of, benaderd, de gamma-) verdeling te blijven gebruiken. Wel leert (10) ons tezamen met (9), dat in eerste (voor niet zeer kleine α vrij ruwe) benadering geldt:

$$Q(z_{m,\alpha}) \approx \frac{(m!)^{\frac{1}{m}}\,\alpha^{\frac{1}{m}}}{n}$$

4. De inhoud van punt 2 en 3 resumerend kunnen we dus vaststellen: Is $\underline{z}_m$ de op $(m-1)$na grootste waarde onder n onafhankelijke waarnemingen van een stochastische variabele met verdelingsfct $P(x) = 1-Q(x)$, dan is $P(\underline{z}_m)$ exact verdeeld volgens de $B(n-m+1, m)$-verdeling. Voor $n \gg m$ is in eerste benadering (behoudens $O(n^{-1})$) $nQ(\underline{z}_m)$ en in tweede benadering (behoudens $O(n^{-2})$) $(n-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2})\,Q(\underline{z}_m)/(1-\frac{1}{2}Q(\underline{z}_m))$ verdeeld, complementair met de $\Gamma(m)$-verdeling. De waarde $z_{m,\alpha}$ die door $\underline{z}_m$ svpr α niet overschreden wordt, kan exact resp. approximatief bepaald worden door uit de tabellen van de $B(n-m+1,m)$- resp. $\Gamma(m)$-verdeling de waarden $\beta_{m,\alpha}$ resp. $\gamma_{m,\alpha}$ te bepalen, die door een volgens deze verdelingen verdeelde variabele svpr α niet overschreden worden, en vervolgens met de tabellen der bekend ondersteld fct $P(x)$ $z_{m,\alpha}$ uit de vgl $P(z_{m,\alpha}) = \beta_{m,\alpha}$ resp. $= 1 - \frac{\gamma_{m,\alpha}}{n}$ (behoudens $O(n^{-1})$) of $= 1 - \frac{\gamma_{m,\alpha}}{n-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\gamma_{m,\alpha}}$ (behoudens $O(n^{-2})$) op te lossen.

5. Stellen we $u = ae^{-y}$ met nader te bepalen constante a, dan is de wh-dichtheid van y (verder steeds behoudens termen $O(\frac{1}{n^2})$, die we doorgaans niet expliciet vermelden): $-\frac{d}{dy} F_{\Gamma(m)}(u) = aue^{-u}\frac{u^{m-1}}{(m-1)!}$
dus de afgeleide daarvan $-\frac{d^2}{dy^2} F_{\Gamma(m)}(u) = \frac{a^2u}{(m-1)!} e^{-u} u^{m}(\frac{m}{u}-1)$
Dit is nul voor $u=m$. Kiezen we dus a=m, dan is 0 de modus van y.
Met

(14) $\qquad u = me^{-y}$

wordt nu het verdelingselement van y:

(15) $\qquad dG_m(z_m) = \frac{m^{m+1}}{(m-1)!} e^{-m(y+e^{-y})}dy$

Speciaal voor m = 1 wordt dit

(16) $\qquad dG_0(z_1) = e^{-y-e^{-y}}dy$

Dit is de in 1928 door R.A. Fisher en L.H.C. Tippett afgeleide "limiting distribution" van de hoogste waarde, terwijl (15) de asymptotische verdelingsdichtheid voor de m-de waarde door E.J. Gumbel is gevonden. Met dien verstande evenwel, dat zowel Fisher en Tippett als ook Gumbel minder algemene klassen van verdelingen beschouwen, waarin y door een lineaire fct van x kan worden benaderd. Dit geschiedt met een beroep op de regel van de l'Hôpital voor een niet nauwkeurig gedefinieerde klasse van verdelingen "van het exponentiële type", en ook overigens op een mathematisch weinig exacte wijze. Met weinig moeite kan dit echter exact geschieden.

6. Wanneer Q tot nul nadert, zal x hetzij tot ∞, hetzij tot een eindige limiet naderen; in beide gevallen gebruiken we voor deze limiet het symbool ω:

(17) $\lim\limits_{Q \searrow 0} x = \omega$

We onderstellen nu verder, dat $Q(x)$ voor alle voldoend kleine Q continu in x is, en tweemaal continu differentieerbaar, dat $f(x) = -Q'(x)$ voor alle voldoend kleine Q positief is, en dat

(18) $\lim\limits_{x \nearrow \omega} \frac{d}{dx}\frac{Q(x)}{f(x)} = 0$

is. Deze laatste eis is aequivalent met

(19) $\lim \frac{QQ''}{Q'^2} = 1$

of ook, als we

$$Q = e^{-S}$$

stellen, met

(21) $\lim \frac{S''}{S'^2} = 0$

Alle limites worden genomen voor $x \uparrow \omega$, d.i. voor $Q \downarrow 0$, d.i. voor $S \uparrow \infty$. Verdelingen, die tweemaal continu differentieerbaar zijn en aan de aequivalente voorwaarden (18), (19), (21) voldoen, zullen we "van het exponentiële type" noemen.

We hebben gevonden (8), dat $1 - G_m(z_m) = F_{\Gamma(m)}(u)$ is, waarbij $u = nQ(z_m)(1 + \mathcal{O}(n^{-1})) = (n - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2})\frac{Q}{1-\frac{1}{2}Q}(1 + \mathcal{O}(n^{-2}))$
$= n e^{-S - \frac{m-1}{2n} - \frac{1}{2}e^{-S} + \mathcal{O}(n^{-2})}$ is.

Ten gevolge van (14) kunnen we hiervoor ook schrijven:

(22) $y = S - \ln\frac{n}{m} + \frac{1}{2}\left(\frac{m-1}{n} + e^{-S}\right) + \mathcal{O}(n^{-2})$

$= S - \ln\frac{n}{m} + \mathcal{O}(n^{-1})$

7. Ons rest nog na te gaan binnen welke grenzen S door een lineaire fct van x benaderd kan worden. We zullen aantonen, onder de voorwaarde dat de verdeling van $\underline{x}$ volgens bovenstaande definitie van het exponentiële type is, dat dit voor een willekeurig groot deel van de verdelingsfct van $\underline{z}_m$ dat de beide eindpunten niet bevat mogelijk is door n voldoend groot te kiezen.

Kiezen we dus een $\alpha > 0$ en een $\delta > 0$ (en $< 1-\alpha$), dan kan dus $G_m(z_m)$ voor alle waarden van z_m, waarvoor

(23) $\delta \leqq G_m(z_m) \leqq 1-\alpha$

voor voldoend grote n willekeurig dicht benaderd kan worden door $1 - F_{\Gamma(m)}(me^{-y})$, waarbij y een lineaire fct van x is, mits P(x) van het exponentiële type is. Uit wat we reeds opgemerkt hebben volgt dat de voorwaarde (23) medebrengt, dat nQ, dus ook $S - \ln n$ tussen twee vaste grenzen blijft. (Uit (10) en (23) volgt namelijk $\gamma_{m,1-\delta} \lessapprox nQ \lessapprox \gamma_{m,\alpha}$). Dus S zal een interval van begrensde lengte A ($= \ln(\gamma_{m,\alpha}/\gamma_{m,1-\delta}$) doorlopen. Volgens de onderstellingen in 6 gemaakt is S' voor voldoend grote S positief, dus ook voor voldoend grote n bij beperking tot (23). In plaats van S = S(x) kan men dus ook de inverse fct x = x(S) beschouwen. Daarom geldt als S_1 en $S_2 > S_1$ in het interval $\mathcal{J} = (\ln n/y_{m,\alpha}\,;\, \ln n/y_{m,1-\delta})$ liggen, x_1 en x_2 de bijbehorende waarden van $x(S)$ zijn, en $x' = \frac{dx}{dS}$, $x'' = \frac{d^2x}{dS^2}$ is, de Taylor-ontwikkeling met integraalrestterm:

$$x_2 - x_1 = x(S_2) - x(S_1) = (S_2 - S_1)x'(S_1) + \int_{S_1}^{S_2} x''(S)\,(S_2 - S)\,dS$$

Daar nu $x_1' = 1/S'(x_1)$ $\quad x'' = -S''/S'^3$, $\quad dS = S'dx$

is, volgt na vermenigvuldiging met S_1'

$$S_2 - S_1 - (x_2 - x_1)\,S_1' = -S_1' \int_{S_1}^{S_2} x''(S)\,(S_2 - S)\,dS = S_1' \int_{x_1}^{x_2} \frac{S''(x)\{S(x_2) - S(x)\}\,dx}{S'(x)^2}$$

Daar $0 \leqq S(x_2) - S(x_1) \leqq A$ is en voor voldoend grote n ook $x \geqq x_1 \geqq \ln m - \ln y_{m,\alpha}$ zo groot, dat wegens (21) $|S''/S'^2| \leqq \varepsilon$ is voor een willekeurig gekozen $\varepsilon > 0$, is dus $|S_2 - S_1 - (x_2 - x_1)\,S_1'| \leqq \varepsilon A (x_2 - x_1) S_1'$

$$(x_2 - x_1)\,S_1' \leqq \frac{S_2 - S_1}{1 - \varepsilon A} \leqq \frac{A}{1 - \varepsilon A} = A_1$$

en

$$|S_2 - S_1 - (x_2 - x_1)\,S_1'| \leqq \varepsilon A_1^2$$

We duiden nu speciaal de waarden die bij de modus y=0 behoren aan door een circonflexe boven de letter: $\hat{S} = S(\hat{x})$, $\hat{S}' = S'(\hat{x})$, enz. Dan is, als we speciaal $x_1 = \hat{x}$ en $x_2 = x$ kiezen:

$$(24) \quad |S - \hat{S} - (x - \hat{x})\,\hat{S}'| \leqq \varepsilon A_1^2$$

voor iedere x behorende bij een S uit bovengenoemd interval $\mathcal{J}$. Voor voldoend grote n is ook de term $\mathcal{O}(n^{-1})$ uit (22) $= \mathcal{O}(\varepsilon)$, dus, daar $\hat{y}=0$ is,

$$(25) \quad |y - (x - \hat{x})\,\hat{S}'| \leqq \varepsilon A_1^2 + \mathcal{O}(n^{-1})$$

m.a.w. behoudens $\mathcal{O}(\varepsilon) - \mathcal{O}(n^{-1})$ is

$$(26) \quad y \approx (x - \hat{x})\,\hat{S}'$$

Daarbij is dus $\hat{S}'$ de waarde die $S'(x) = -Q'(x)/Q(x) = \frac{f(x)}{1 - P(x)}$ aanneemt in het punt $\hat{x}$, waar y=0, dus behoudens $\mathcal{O}(n^{-1})$ $S(\hat{x}) \approx \ln \frac{n}{m}$, dus behoudens $\mathcal{O}(n^{-1})$ $Q(\hat{x}) \approx \frac{m}{n}$ is. Als men het laatste $\approx$-teken door een =-teken vervangt, is $\hat{y}$ niet meer exact, maar slechts op $\mathcal{O}(n^{-1})$ na de modus, maar ook dan blijft (26) als boven geldig.

Het door Gumbel aangegeven resultaat bestaat uit de betrekkingen (15) en (26).

9. De resultaten van 5,6,7,8 samenvattende kunnen we nu zeggen:

Indien de verdelingsfct $P(x) = 1 - Q(x) = e^{-S(x)}$ continu differentieërbaar is, voor voldoend grote x een positieve afgeleide heeft, en als

$$\lim_{S(x)\to\infty} \frac{S''(x)}{S'(x)^2} = 0$$

is, dan is bij iedere m, iedere $\alpha > 0$, $\delta > 0$ (en $< 1-\alpha$) en $\varepsilon_1 > 0$ een n_0 te vinden, zodanig dat voor $n \geq n_0$ en voor iedere z_m die aan (23) voldoet (15) geldt met een y, die in het gehele door (23) bepaalde interval hoogstens ε_1, van $(x-\hat{x})S'(\hat{x})$ verschilt, waarbij $\hat{x}$ de waarde van x is die met y=0 overeenkomt, en waarvoor $F(\hat{x}) = \frac{n-m}{n} + \mathcal{O}(n^{-2})$ is.

10. We hebben in het bovenstaande gevonden dat de correctieterm in y behalve de reeds in (22) voorkomende term $\Theta(n^{-1})$ van de orde ε is, d.i. van de orde van S''/S'^2 in het toegelaten interval. Deze correctie in y heeft in u, dus ook in $G_m(z_m)$ eveneens een correctie $\Theta(\varepsilon)$ ten gevolge.

We zullen nu bij enkele eenvoudige verdelingen de grootte orde dezer correctie, uitgedrukt in n, nagaan.

Eenvoudigheidshalve beperken we ons tot het geval $m = 1$, en $\alpha << 1$. Dan is

(27) $$G_0 = e^{-e^{-y}} = 1 - \alpha \approx e^{-\alpha}$$

dus

(28) $$e^{-y} \approx \alpha \qquad y \approx \ln \alpha^{-1}$$

De verwaarloosde grootheid $\frac{1}{2}\alpha^2$ is in alle onderstaande gevallen klein in vergelijking met de totale correctie.

Bij de berekening volgens 4 geldt behoudens $\Theta(n^{-2})$

$$e^{-y} = u = n\,Q(1 - \tfrac{1}{2}Q) \approx n e^{-S - \frac{1}{2}e^{-S}}$$

dus

(29) $$y \approx S - \ln n$$

behoudens een fout $\delta_0 y \approx \frac{1}{2} e^{-S} \approx \frac{\alpha}{2n}$. Ook deze fout is in alle onderstaande gevallen bij niet te kleine n zeer klein in vergelijking met de fout die bij de benadering volgens 9 gemaakt wordt. Daarbij wordt y door een lineaire fct $(x - \hat{x})\hat{S}'$ vervangen, waarbij een fout optreedt, waarvoor in eerste benadering geldt

(30) $$\delta y = y - (x - \hat{x})\hat{S}' \approx \tfrac{1}{2}(x - \hat{x})^2 \hat{S}'' \approx \tfrac{1}{2}\hat{\varepsilon} y^2, \qquad \hat{\varepsilon} = \hat{S}''/\hat{S}'^2$$

Deze leidt tot een fout $-\delta\alpha$ in α

(31) $$-\delta\alpha \approx -\delta(1 - G_0) \approx \delta e^{-e^{-y}} \approx G_0 e^{-y}\delta y \approx \alpha e^{-\alpha}\delta y \approx$$
$$\approx \tfrac{1}{2}\hat{\varepsilon}\alpha e^{-\alpha} \ln^2 \tfrac{1}{\alpha} \approx \tfrac{1}{2}\hat{\varepsilon}\alpha \ln^2 \tfrac{1}{\alpha}$$

De relatieve fout in α is dus $\lambda = -\frac{\delta\alpha}{\alpha} \approx \delta y$.

Bij de onderstaande - en de meeste andere gewoonlijk voorkomende — verdelingen is $\hat{S}'' > 0$, dus $\delta y > 0$, d.w.z. y wordt door de lineaire fct te klein geschat, dus $\delta\alpha < 0$, d.w.z. α wordt te groot geschat. Dit betekent dat de benadering (26) volgens FTG (Fisher, Tippett en Gumbel) in de hier bedoelde gevallen, als men de waarde voor z_m wenst te bepalen die svpr α niet overschreden wordt, steeds aan de veilige kant is: de werkelijke wh dat de hoogste waarde $\underline{z}$ de waarde $\hat{x} + \ln\frac{1}{\alpha}/\hat{S}'$ zal overtreffen, is kleiner dan de wh ($\approx \alpha$), dat zij de nauwkeuriger waarde $\check{z}$, die uit oplossing (vgl. (29)) van

(32) $S(z) = \ln \frac{n}{\alpha}$ d.i. $Q(z) = \frac{\alpha}{n}$

volgt, zal overtreffen.

11. a. Exponentiële verdeling. Hier is $Q(x) = e^{-x}$, $S(x) = x$, $S'(x) = 1$, $S''(x) = 0$ (voor alle x). Dus $y = x - \hat{x} + \mathcal{O}(n^{-1})$; de ε-fout is hier $= 0$ en de FTG-benadering even goed als de onze.

b. Gamma-verdeling. Hier is $Q(x) = \sum_{0}^{r} e^{-x} \frac{x^h}{h!} = (1 + \frac{r}{x} + \frac{r^2}{x^2} + \ldots) e^{-x} \frac{x^r}{r!} \approx e^{-x} x^r / r!$ mits $x \gg r$ is.

Volgens onze methode wordt z_m dus met behulp van de tabel der $\Gamma(m)$ verdeling gevonden door de vgl $Q(z) = \alpha/n$ op te lossen.

Voorts is $S(x) \approx x - r \ln x - \ln r! + \mathcal{O}(r x^{-1}) = x(1 - \mathcal{O}(r \frac{\ln x}{x}))$

$S'(x) = 1 - \frac{r}{x} + \mathcal{O}(r x^{-2}) = 1 - \mathcal{O}(\frac{r}{x})$ $S''(x) = \frac{r}{x^2}(1 + \mathcal{O}(x^{-1}))$ en

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{S}''}{\hat{S}'^2} = \frac{r}{\hat{x}^2}(1 + \mathcal{O}(\hat{x}^{-1}))$$

Voorts is voor $x = \hat{x}$ $\hat{y} = 0$, $\hat{S} = \ln n$, dus $\hat{x} = \ln n \, (1 + \mathcal{O}(r \frac{\ln \ln n}{\ln n}))$
Voor grote n leidt dit, onder verwaarlozing van de term $\frac{\ln \ln n}{\ln n}$ tot

$$\hat{\varepsilon} \approx \frac{r}{\ln^2 n}$$

$$\lambda \approx \delta y \approx \frac{r}{2} \frac{\ln^2 \frac{1}{\alpha}}{\ln^2 n}$$

Om dus in α een relatieve fout $\leq \lambda$ te maken moet

$$n \geq \alpha^{-\sqrt{r/2\lambda}}$$

genomen worden. Voor $\alpha = 0{,}05$, $\lambda\alpha = 0{,}01$ (dus een ware wh $\geqq 0{,}04$) en $r = 1$ is dus $n \geq 20^{\sqrt{5/2}} \approx 114$. Voor grotere r en/of kleinere α neemt ook de vereiste waarde van n toe.

c. Normale verdeling. Hier is (vgl. pag. 108; Whr 197)

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(\frac{1}{x} - \mathcal{O}(\frac{1}{x^3})\right) \text{ dus:}$$

$$S(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + \ln x + \tfrac{1}{2} \ln 2\pi + \mathcal{O}(\tfrac{1}{x^2}) = \tfrac{1}{2}x^2 \left(1 + \mathcal{O}(\tfrac{\ln x}{x^2})\right) = \tfrac{1}{2}x^2 \left(1 + \mathcal{O}(\tfrac{1}{x})\right)$$

$$S'(x) = x + \mathcal{O}(\tfrac{1}{x}) \qquad S''(x) = 1 + \mathcal{O}(\tfrac{1}{x^2})$$

Volgens onze methode wordt $\check{z}$ bepaald door $Q(z) = \frac{\alpha}{n}$ met behulp van de tabellen der normale verdeling op te lossen.

Voorts is weer $\hat{S} = \ln x$, dus behoudens $\mathcal{O}(\hat{x}^{-1})$ $\frac{1}{2}\hat{x}^2 = \ln n$, en $\hat{\varepsilon} = \hat{S}''/\hat{S}'^2 \approx 1/\hat{x}^2$ of

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2 \ln n}$$

$$\lambda = \delta y = \frac{\ln^2 \frac{1}{\alpha}}{4 \ln n}$$

Evenals boven luidt dit bij een gegeven begrenzing van tot

$$n \geqq e^{(\ln \alpha^{-1})^2/4\lambda} = e^{(\ln \alpha)^2/4\lambda}$$

dus voor dezelfde waarden als boven tot $n \gtrsim 73790$. Hier is de toename die voor n nodig is om aan scherpere nauwkeurigheidseisen te voldoen (kleinere α, kleinere λ) nog veel groter. B.v. is voor $\alpha = 0{,}001$, $\lambda = \frac{1}{2}$

$$n \geqq 5.10^9$$

d. Verdeling van Gompertz. (Zie pag. 129, Whr 218). Hier is $S(x) = \beta(e^x - 1)$, $S'(x) = S''(x) = \beta e^x$, dus

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{\beta e^{\hat{x}}}$$

terwijl $\hat{S} = \ln n$, dus $\beta e^{\hat{x}} = \beta + \ln n \approx \ln n$ is. We vinden dus

$$\hat{\varepsilon} \approx \frac{1}{\ln n}$$

$$\lambda = \delta y \approx \frac{\ln^2 \frac{1}{\alpha}}{2 \ln n}$$

Bij dezelfde nauwkeurigheidseisen als onder c gesteld moet n dus het quadraat van de aldaar gevonden waarde zijn!

e. Indien $Q(x)$ niet exponentiëel naar 0 gaat, maar als een macht van $\frac{1}{x}$, zoals b.v. bij de verdeling van Student, dan is aan de voorwaarde $\lim S''/S'^2 = 0$ niet voldaan. De methode van FTG is dan dus in het geheel niet toepasbaar; de onze blijft echter wel toepasbaar.

f. Verdeling van Poisson. Daar deze discontinu is, kan hier een voorgeschreven onbetrouwbaarheidsdrempel α natuurlijk in het algemeen niet bereikt, maar slechts niet-overschreden worden. Als altijd bepalen we uit de tabellen met gegeven verwachting μ de waarde waarvoor $nQ \approx \alpha$ wordt, waarbij we hier dus de grootste waarde van de variabele met $nQ \leqq \alpha$ moeten nemen. Daar de verdeling discreet is, is de FTG-methode in het geheel niet toepasbaar.

Literatuur.

L.H.C. Tippett (1925), On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population, Biometrika 17, p. 364.

R.A. Fisher en L.H.C. Tippett (1928), Limiting forms of the frequency-distribution of the largest and smallest members of a sample, Proc. Cambridge Philos.Society 23, p. 912.

E.J. Gumbel, Les valeurs extrêmes des distribution statistiques, Ann. Inst. Henri Poincaré, 5, p. 115.

E.J. Gumbel, (1937), La durée extrême de la vie humaine, Actual.Sci. et Industr. No. 520.

E.J. Gumbel, (1944) Ranges and midranges, Ann.M.Stat. 15, o. 414-422.

E.J. Gumbel, 1947, The distribution of the range, Ann.M.Stat. 18, p. 384-412.

§ 3. Het probleem der twee gemiddelden en de toets van Wilcoxon.

1. In de statistische praktijk komen veel problemen voor van het volgende type. Men heeft aan m elementen ener collectie een grootheid $\underline{x}$ gemeten; de meetresultaten zijn $x_1, \ldots, x_m$. Men laat n andere elementen dezer collectie een bewerking ondergaan, waardoor eventueel $\underline{x}$ veranderd kan worden en niet de met $\underline{x}$ overeenkomende grootheid $\underline{y}$; de meetresultaten zijn nu $y_1, \ldots, y_n$. Ondersteld wordt, dat de $m+n$ waarn. alle onderling onafhankelijk zijn, en dat zowel $\underline{x}$ als $\underline{y}$ een bepaalde verdelingsfct bezit. Men wenst te weten, of de bewerking een invloed heeft op het gemiddelde der verdeling, d.w.z. of $\mathcal{E}\underline{y}$ van $\mathcal{E}\underline{x}$ verschilt. Men zal daartoe de hypothese moeten toetsen, dat dit niet het geval is, m.a.w. dat $\mathcal{E}\underline{x} = \mathcal{E}\underline{y} = \mu$ is.

2. Toets van Student. Dit probleem is opgelost [1]) voor het geval, dat men vooraf weet, dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ beide normaal verdeeld zijn en dezelfde spreiding bezitten, m.a.w. dat de bewerking, zo zij al het gemiddelde kan beïnvloeden, dit niet met de spreiding doet. Iets algemener kan men onderstellen, dat de spreiding met een bekende factor $K = \sigma_2/\sigma_1$ verandert. In beide gevallen kan men bovendien toetsen, of het verschil $\mu_2 - \mu_1$ der verwachtingen een gegeven waarde δ bezit, die niet nul behoeft te zijn.

We maken nu gebruik van een 4-tal, ook overigens belangrijke hulpstellingen, welker - eenvoudige - bewijzen we geheel of gedeeltelijk achterwege laten.

Lemma 1. Zijn $\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_n$ n $\sigma\sigma$ [2]) $N(0,1)$-verdeelde variabelen, dan is ook ieder n-tal daaruit door orthogonale transformatie verkregen variabelen $\underline{z}_1', \ldots, \underline{z}_n'$ $\sigma\sigma$ en elk daarvan $N(0,1)$ verdeeld.

We herinneren er daarbij aan, dat de orthogonale transformatie gegeven is door

$$z_i' = \sum_1^n a_{ij} z_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

waarbij

$$\sum_1^n{}_k a_{ik} a_{jk} = \sum_1^n{}_k a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{voor } i = j \\ 0 & \text{voor } i \neq j \end{cases}$$

is. Deze voorwaarden zijn eventueel na één der z_i' van teken om te keren nodig en voldoende, opdat identiek in de z_i

---

[1]) "Student", The probable error of a mean, Biometrika 6 (1908) p. 1.

[2]) Afkorting: $\sigma\sigma$ = onderling onafhankelijk(e).

is, en hebben ten gevolge dat $\det(a_{ij}) = +1$ is. Speciaal voor $n = 2$ kunnen de z_i' steeds in de gedaante

$$z_1' = z_1 \cos\varphi + z_2 \sin\varphi$$
$$z_2' = -z_1 \sin\varphi + z_2 \cos\varphi$$

geschreven worden.

Lemma 2. Zijn $\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_n$ $\sigma\sigma$ $N(0,1)$-verdeeld, en zijn $\underline{z}_1', \ldots, \underline{z}_m'$ $\sigma\sigma$ $N(0,1)$-verdeelde lineaire fcts der $\underline{z}_i$, dan is $m \leq n$ en er bestaan nog $n-m$ $N(0,1)$-verdeelde lineaire fcts $\underline{z}_{m+1}', \ldots, \underline{z}_n'$ der $\underline{z}_i$, zodat $\underline{z}_1', \ldots, \underline{z}_n'$ alle $\sigma\sigma$ zijn.

Daar $\frac{1}{\sqrt{n}}(\underline{z}_1 + \ldots + \underline{z}_n) = \underline{m}\sqrt{n}$ $N(0,1)$ verdeeld is, en $\sum_1^n \underline{z}_i^2 = n(\underline{m}^2 + \underline{s}^2)$ is, waarbij $\underline{s}^2 = \frac{1}{n}\sum(\underline{z}_i - \underline{m})^2$ is, kan $n\underline{s}^2$ als som van de kwadraten van $n-1$ lineair onafhankelijke $N(0,1)$-verdeelde variabelen geschreven worden.

Lemma 3. De som

$$\underline{g}_\nu^2 = \sum_1^\nu \underline{z}_i^2$$

der quadraten van ν $\sigma\sigma$ $N(0,1)$-verdeelde variabelen is verdeeld als $\chi^2(\nu)$, d.w.z. als χ^2 met ν vrijheidsgraden, d.w.z. $\frac{1}{2}\underline{g}_\nu^2$ is $\Gamma(\frac{\nu}{2})$-verdeeld.

$$dF(g_\nu^2) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} e^{-\frac{1}{2}g_\nu^2}\left(\tfrac{1}{2}g_\nu^2\right)^{\frac{\nu}{2}-1} d\,\frac{g_\nu^2}{2} = \frac{1}{\frac{\nu}{2}!} e^{-\frac{1}{2}g_\nu^2}\, d\left(\frac{g_\nu^2}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}$$

Speciaal is, met $\underline{s}^2$ gedefinieerd als na lemma 2, $n\underline{s}^2$ verdeeld als $\chi^2(n-1)$ en onafhankelijk van $\underline{m}$ (vgl. ook pag. 266, Whr 355).

Lemma 4. Zijn $\underline{g}_\mu^2$ en $\underline{g}_\nu^2$ $\sigma\sigma$ verdeeld als χ^2 met μ resp. ν vrijheidsgraden, dan zijn ook

$$\underline{g}_{\nu+\mu}^2 = \underline{g}_\mu^2 + \underline{g}_\nu^2$$

en

$$\underline{v} = \frac{\underline{g}^2}{\underline{g}_\mu^2 + \underline{g}_\nu^2}$$

$\sigma\sigma$ verdeeld, en wel als $\chi^2(\nu+\mu)$ resp. volgens de $B(\frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2})$-verdeling.

D.w.z. men heeft:

$$\frac{1}{\frac{\mu}{2}!} e^{-\frac{1}{2}g_\mu^2} d\left(\tfrac{1}{2}g_\mu^2\right)^{\frac{\mu}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{\nu}{2}!} e^{-\frac{1}{2}g_\nu^2} d\left(\tfrac{1}{2}g_\nu^2\right)^{\frac{\nu}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\nu+\mu}{2}!} e^{-\frac{1}{2}g_{\mu+\nu}^2} d\left(\tfrac{1}{2}g_{\mu+\nu}^2\right)^{\frac{\mu+\nu}{2}} \frac{1}{B(\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2})} v^{\frac{\mu}{2}-1}(1-v)^{\frac{\nu}{2}-1} dv$$

In de toepassingen, speciaal in de zgn. variantie-analyse, wordt in plaats van $\underline{v}$ vaak de variabele $\underline{z}$ van Fisher [1], gedefiniëerd door

---

[1]) R.A. Fisher, Statistical Methods for Research Workers, 1st ed. 1925, 10th ed. 1948.

$$e^{2z} = \frac{\nu}{\mu}\frac{g_\mu^2}{g_\nu^2}$$

gebruikt. Men heeft dus

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{\nu}{\mu}\cdot\frac{v}{1-v}$$

$$v = \frac{\frac{\mu}{\nu}e^{2z}}{1+\frac{\mu}{\nu}e^{2z}}$$

of als $\lambda = \frac{1}{2}\ln\frac{\mu}{\nu}$ is:

$$v = \frac{e^{2(\lambda+z)}}{1+e^{2(\lambda+z)}} = \frac{e^{\lambda+z}}{2\,ch(\lambda+z)}$$

en

$$dv = 2v\,dz\left(1-\frac{\frac{\mu}{\nu}e^{2z}}{1+\frac{\mu}{\nu}e^{2z}}\right) = 2v(1-v)\,dz$$

Het el. van de verdelingsfct van z is dus

$$\frac{2}{B\left(\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2}\right)}\frac{\left(\frac{\mu}{\nu}e^{2z}\right)^{\frac{\mu}{2}}dz}{\left(1+\frac{\mu}{\nu}e^{2z}\right)^{\frac{\mu+\nu}{2}}} =$$

$$= \frac{2\,\mu^{\frac{1}{2}\mu}\nu^{\frac{1}{2}\nu}}{B\left(\frac{1}{2}\mu,\frac{1}{2}\nu\right)}\cdot\frac{e^{\mu z}}{(\mu e^{2z}+\nu)^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)}}\,dz$$

De z -verdeling heeft het voordeel dat zij bij toenemende μ en ν sneller dan de bêta-verdeling tot de normale nadert, maar is analytisch minder prettig te hanteren. In andere toepassingen wordt $v = \frac{u^2}{1+u^2}$ gesteld. Dan is $u = \pm\frac{g_\mu}{g_\nu}$ en deze grootheid bezit de verdeling [1])

$$dF(u) = \frac{1}{B\left(\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2}\right)}\cdot\frac{u^{\mu-1}\,du}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)}}$$

waarvan het speciale geval $\mu = 1$ op pag. 123, whr 212 aangegeven is.

We maken nu als volgt van deze lemmata gebruik:

Zijn $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_m$ $N(\mu_1,\sigma_1)$ en $\underline{y}_1,\ldots,\underline{y}_n$ $N(\mu_2,\sigma_2)$ verdeeld en alle $\sigma\sigma$, dan zijn

$$\frac{\underline{x}_1-\mu_1}{\sigma_1},\ldots\ldots\ldots,\frac{\underline{x}_m-\mu_1}{\sigma_1}\quad\text{en}\quad\frac{\underline{y}_1-\mu_2}{\sigma_2},\ldots\ldots\ldots,\frac{\underline{y}_n-\mu_2}{\sigma_2}$$

$\sigma\sigma$ $N(0,1)$-verdeeld, en wel is

$$S = \sum_1^m{}_i\frac{(x_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \sum_1^n{}_j\frac{(y_i-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} = \frac{m(m_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + g_{m-1}^2 + \frac{n(m_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} + g_{n-1}^2$$

waarin $g_{m-1}^2 = m s_1^2/\sigma_1^2$, $g_{n-1}^2 = n s_2^2/\sigma_2^2$ is. Daarbij hebben we, als gewoonlijk,

$$m_1 = \frac{1}{m}\sum_1^m{}_i x_i \qquad m_2 = \frac{1}{n}\sum_1^n{}_j y_j$$

$$s_1^2 = \frac{1}{m}\sum_1^m{}_i(x_i-m_1)^2 \qquad s_2^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n{}_j(y_j-m_2)^2$$

---

[1]) De factor 2 verdwijnt omdat we u van $-\infty$ tot $+\infty$ laten lopen, en niet van 0 tot ∞.

gesteld. Op

$$z_1 = \frac{m_1 - \mu_1}{\sigma_1}\sqrt{m} \qquad \text{en} \qquad z_2 = \frac{m_2 - \mu_2}{\sigma_2}\sqrt{n}$$

passen we nu lemma 1 (voor het geval van 2 variabelen) toe. Daarbij bepalen we φ zo, dat z_2' evenredig met $m_1 - m_2 - \delta = (m_1 - \mu_1) - (m_2 - \mu_2) =$ $= z_1 \frac{\sigma_1}{\sqrt{m}} - z_2 \frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}$ wordt. We moeten dus (met $k = \sigma_2/\sigma_1$)

$$tg\,\varphi = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{n}{m}}$$

nemen en krijgen dan

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{n}{n+mk^2}} \qquad \cos\varphi = \sqrt{\frac{mk^2}{n+mk^2}}$$

$$z_2' = \frac{m_1 - \mu_1}{\sigma_1}\sqrt{m}\,.\,\sin\varphi - \frac{m_2 - \mu_2}{\sigma_2}\sqrt{n}\,.\,\cos\varphi = \frac{m_1 - m_2 - \delta}{\sigma_1}\sqrt{\frac{mn}{n+mk^2}}$$

Voeren we nog

$$g^2_{n+m-2} = g^2_{m-1} + g^2_{n-1} = m\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} + n\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}$$

in, dan wordt de som S' :

$$S = z_1'^2 + z_2'^2 + g^2_{n+m-2}$$

waarin z_1', z_2' en g_{n+m-2} $\sigma\sigma$ zijn en wel resp. $N(0,1)$, $N(0,1)$ en $\chi^2(n+m-2)$-verdeeld. Over z_1' integreren we eenvoudig van $-\infty$ tot $+\infty$, zodat we verder slechts met

$$S' = z_2' + g^2_{n+m-2}$$

te maken hebben. Hierop passen we lemma 4 toe met $\mu = 1$ en $\nu = n+m-2$. Over $g^2_{\nu+\mu} = z_2'^2 + g^2_{n+m-2}$ integreren we weer en we vinden dus, dat v $B(\frac{1}{2}, \frac{n+m}{2} - 1)$-verdeeld is, waarin thans

$$v = \frac{z_2'^2}{z_2'^2 + g^2_{m-1} + g^2_{n-1}}$$

is. Stellen we nog $v = \frac{u^2}{1+u^2}$, dan bezit u voor $-\infty < u < +\infty$ de op pag. 123, Whr 212 aangegeven verdeling van "Student" voor n+m-1 vrijheidsgraden

$$dF(u) = \frac{1}{B(\frac{1}{2}, \frac{n+m}{2} - 1)} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{n+m-1}{2}}}$$

Meestal wordt in plaats van u de grootheid $t = u\sqrt{n+m-2}$ ingevoerd, waarvan de spreiding = 1 is. We hebben nu

$$u^2 = \frac{z_2'^2}{g^2_{m-1} + g^2_{n-1}} = \frac{(m_2 - m_1 - \delta)^2}{m\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} + n\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}} \cdot \frac{m\,n}{n\sigma_1^2 + m\sigma_2^2} =$$

$$= \frac{mn}{mk + nk^{-1}} \frac{(m_2 - m_1 - \delta)^2}{mk s_1^2 + nk^{-1} s_2^2}$$

zodat u , evenals haar verdelingsfunctie, van σ_1 en σ_2 slechts via $k = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ afhangt. De verdelingsfunctie is bovendien onafhankelijk van δ . We merken verder op, dat de noemer van de tweede factor in het laatste lid eenvoudig de som van de $m+n$ quadraten

$$\sum_1^m (x_i - m_1)^2 + \sum_1^n (y_j - m_2)^2$$

is (waartussen twee afhankelijkheden bestaan).

Ter toetsing van de hypothese $\mu_2 - \mu_1 = \delta$ bij gegeven δ (b.v. $\delta = 0$) en gegeven $k = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ (b.v. $\sigma_1 = \sigma_2$, $k = 1$) berekent men nu volgens bovenstaande identiteit u^2 . Men verwerpt de hypothese als de bijbehorende waarde

$$t = |u| \sqrt{m+n-2}$$

volgens de tabellen der verdeling van Student een tweezijdige overschrijdingskans geeft, die beneden de toegelaten betrouwbaarheidsgrens ligt. Een eenzijdige overschrijdingskans kan men volgens pag. 261-262 (Whr 350-351) slechts gebruiken als hetzij de mogelijkheid dat $\mu_2 - \mu_1 < \delta$ hetzij de mogelijkheid, dat $\mu_2 - \mu_1 > \delta$ is, onafhankelijk van het beschouwde experiment uitgesloten geacht kan worden.

3. De toets van Student heeft twee nadelen.

a. Men moet vooraf weten, dat de x_i en de y_j normaal verdeeld zijn.

b. Men moet k kennen.

Weliswaar kan men de methode ook gebruiken om (b.v.) $\delta = 0$ en $k = 1$ gezamenlijk te toetsen: te kleine overschrijdingskans weerlegt dan de hypothese, dat de op de objecten uitgevoerde bewerking generlei invloed heeft gehad. Zij staat dan echter niet toe, uit te maken, of zij een invloed op de verwachting $\mathcal{E}\underline{x}$, dan wel op de spreiding, dan wel op beide heeft gehad.

Men heeft speciaal b. als een ernstig bezwaar gevoeld, en getracht, toetsen af te leiden die onafhankelijk van k zijn. Op de oplossingen van dit probleem, waaronder een veel gebruikte foutieve voorkomt (die dan ook herhaaldelijk aangevochten is), t.w. de zgn. toets van Behrens-Fisher, komen we nog terug.

4. Toets van Wilcoxon. Om daarentegen aan het eerste bezwaar tegemoet te komen - dat vaak niet minder ernstig is, daar men dikwijls niet weet of, en soms wel kan aannemen dat niet aan de normaliteitsvoorwaarde voldaan is - is door F. Wilcoxon[1]) een toets ingevoerd, die ook (met een geringe wijziging) door K.K. Mathem[2]) voorgesteld, en door

[1]) F. Wilcoxon, Individual comparisons by ranking methods, Biometrics Bull. 1, 1945, 80-83.

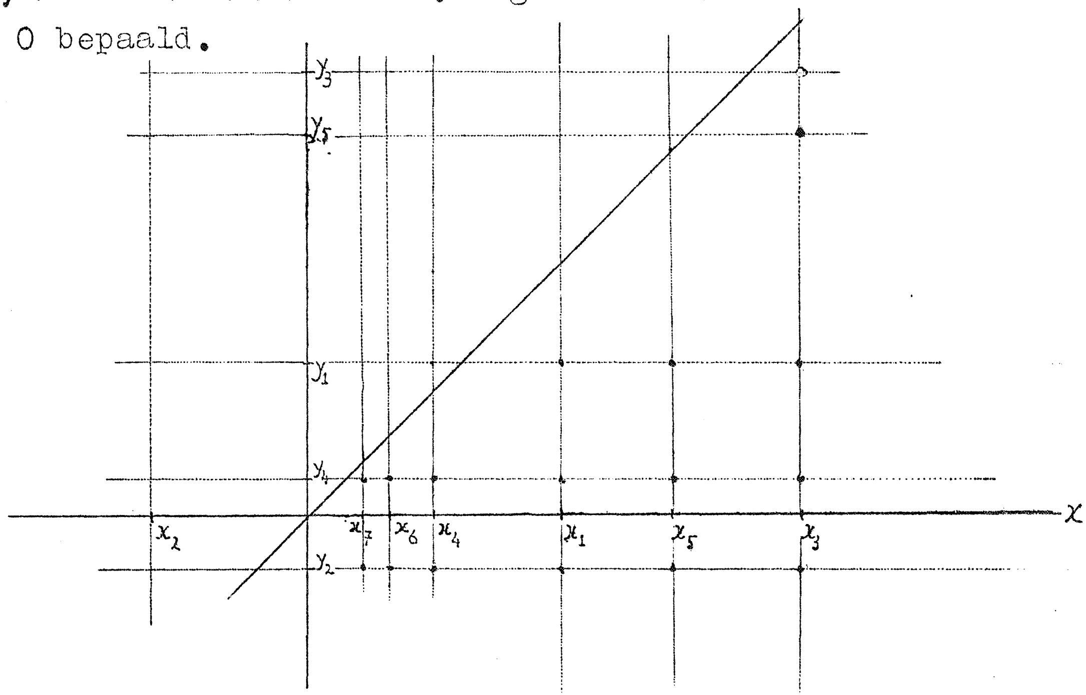
[2]) K.K. Mathen, Sankhya, 1946, p. 329.

H.B. Mann en D.R. Whitney[3]) uitvoerig onderzocht is.

Wij behoeven daarbij omtrent de verdelingsfcts niets anders dan continuïteit te onderstellen, en toetsen de met $\delta = 0$ $k = 1$ overeenkomende hypothese, dat de $\underline{x}_i$ en de $\underline{y}_j$ alle dezelfde verdelingsfct bezitten. De methode is rang-invariant.

De grondgedachte van de toets is de volgende. Als de verdelingsfct der $\underline{y}_j$ t.o.v. die der $\underline{x}_i$ naar links verschoven is, zullen waarschijnlijk betrekkelijk veel onder de gevonden waarden y_j in het linker gedeelte, d.w.z. links van veel waarden x_i liggen. Als dit laatste na precisering van de termen "waarschijnlijk" en "betrekkelijk veel", het geval is, kan de hypothese dat de $\underline{x}_i$ en de $\underline{y}_j$ dezelfde verdelingsfct hebben, verworpen worden.

Zij nu $\mathcal{U}$ het aantal keren dat een der $\underline{y}_j$ links van één der $\underline{x}_i$ ligt, het aantal inversies. Wegens de ondersteIde continuïteit is $\underline{\mathcal{U}}$ svpr 0 bepaald.



$m = 7$ $n = 5$ $U = 17$ $u = -1/2$

U is het aantal der punten (x_i, y_j) $(i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n)$, die onder de lijn $x = y$ liggen.

Men kan daartoe bij ieder der y_j bepalen, hoevele der x_i groter zijn; dan is $\mathcal{U}$ de som dezer aantallen.

Klaarblijkelijk is $\underline{\mathcal{U}}$ een rang-invariante statistische grootheid, die alle gehele waarden $\geqq 0$ en $\leqq mn$ kan aannemen. Haar verdelingsfct is voor $m \leqq n \leqq 8$ door Mann en Whitney en voor $m \leqq n \leqq 10$ door de rekenafdeling van het Mathematisch Centrum getabelleerd. Zij is diskreet - $\underline{\mathcal{U}}$ neemt alleen gehele waarden aan - en symmetrisch t.o.v. het gemiddelde $\mathcal{E}\underline{\mathcal{U}} = \frac{1}{2}mn$, m.a.w. $u = \mathcal{U} - \frac{1}{2}mn$

---

3) H.B. Mann and D.R. Whitney, On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other, Ann.Math.Stat. 18, 1947, 50-60.

is symmetrisch t.o.v. 0.

De toets wordt nu als volgt toegepast. Men bepaalt bij de waargenomen waarden $x_1, \dots, x_m$; $y_1, \dots, y_n$ de bijbehorende waarde van $\mathcal{U}$ en met behulp van de verdelingsfct van $\underline{\mathcal{U}}$ $P = P[|\underline{\mathcal{U}} - \frac{1}{2}mn| \geq |\mathcal{U} - \frac{mn}{2}|]$. Is deze waarde $\leqq$ de toegelaten betrouwbaarheidsdrempel α, dan wordt de hypothese dat de verdelingen van de $\underline{x}_i$ en de $\underline{y}_j$ overeenstemmen verworpen.

5. De verdelingsfct van $\underline{\mathcal{U}}$ kan als volgt bepaald worden. Zij $p_{mn}(\mathcal{U}) = P[\underline{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \mid m, n]$. Klaarblijkelijk is algemeen $p_{mn}(\mathcal{U}) = 0$ als $\mathcal{U} < 0$ of $\mathcal{U} > mn$ is en $p_{mn}(\mathcal{U}) = p_{nm}(\mathcal{U}) = p_{mn}(mn - \mathcal{U}) = p_{nm}(mn - \mathcal{U})$. Voorts is $p_{m0}(\mathcal{U}) = p_{0n}(\mathcal{U}) = 0$ voor iedere $\mathcal{U} \neq 0$ en $= 1$ voor $\mathcal{U} = 0$. Zij A een afkorting voor de eventualiteit "het grootste der $m+n$ getallen x_i en y_j is een der y_j". Dan stelt non A de eventualiteit voor dat dit grootste getal een der x_i is. Daar elk der $m+n$ getallen even grote wh heeft, de grootste te zijn, is $P[\text{non} A] = \frac{m}{m+n}$, $P[A] = \frac{n}{m+n}$
Onder de voorwaarde A is $\underline{U} = U$ dan en slechts dan als onder de overige $n-1$ y_j en de m x_i precies U inversies voorkomen, en onder de voorwaarde non A als onder de overige $m-1$ x_i en de n y_j precies $\mathcal{U} - n$ inversies voorkomen (daar de grootste waarde een x is, dus met de n y_j n inversies vormt). Derhalve is volgens pag. 15 of Whr pag. 10:

$$p_{mn}(\mathcal{U}) = \frac{n}{m+n} p_{m,n-1}(\mathcal{U}) + \frac{m}{m+n} p_{m-1,n}(\mathcal{U}-n)$$

Dit geeft successievelijk

$$p_{11}(\mathcal{U}) = \frac{1}{2} p_{10}(\mathcal{U}) + \frac{1}{2} p_{01}(\mathcal{U}-1) = \frac{1}{2} \quad \text{voor } \mathcal{U} = 0 \text{ en } \mathcal{U} = 1$$

$$p_{12}(\mathcal{U}) = p_{21}(\mathcal{U}) = \frac{1}{3} p_{20}(\mathcal{U}) + \frac{2}{3} p_{11}(\mathcal{U}-1) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{voor } \mathcal{U} = 0 \\ \frac{1}{3} & \text{,, } \mathcal{U} = 1 \\ \frac{1}{3} & \text{,, } \mathcal{U} = 2 \end{cases}$$

en algemeen

$$p_{m1}(\mathcal{U}) = \frac{1}{m+1} p_{m,0}(\mathcal{U}) + \frac{m}{m+1} p_{m-1,1}(\mathcal{U}-1) = \frac{1}{m+1}$$

$$\text{voor } \mathcal{U} = 0, 1, \dots\dots, m$$

Voorts is b.v.

$$p_{22}(\mathcal{U}) = \frac{2}{4} p_{21}(\mathcal{U}) + \frac{2}{4} p_{12}(\mathcal{U}-2) = \begin{cases} \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \\ \text{voor } \mathcal{U} = 0, 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$p_{23}(\mathcal{U}) = p_{32}(\mathcal{U}) = \frac{2}{5} p_{31}(\mathcal{U}) + \frac{3}{5} p_{22}(\mathcal{U}-2) = \begin{cases} \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{10} & \text{voor } \mathcal{U} = 0 \\ \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{10} & \text{,, } \mathcal{U} = 1 \\ \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{10} & \text{,, } \mathcal{U} = 2 \\ \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{10} & \text{,, } \mathcal{U} = 3 \\ 0 + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6} = \frac{2}{10} & \text{,, } \mathcal{U} = 4 \\ 0 + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{10} & \text{,, } \mathcal{U} = 5 \\ 0 + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{10} & \text{,, } \mathcal{U} = 6 \end{cases}$$

en algemeen $p_{m2}(u) = \frac{1}{\frac{1}{2}(m+1)(m+2)}([\frac{u}{2}]+1)$ als $0 \leq u \leq m$ is waarin $[x]$ het aantal gehelen van x voorstelt, en voorts $p_{m2}(u) = p_{m2}(2m-u)$.
Voor $p_{33}(u) = \frac{1}{2} p_{32}(u) + \frac{1}{2} p_{23}(u-3)$ vinden we evenzo

	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
voor $u =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Op deze wijze kunnen de $p_{mn}(u)$ successievelijk berekend worden. De voortbrengende fct

$$C_{mn} = C_{mn}(X) = \sum_0^{mn} {}_u\, p_{mn}(u) X^u$$

kan evenoens uit de recurrente betrekking

$$p_{mn}(u) = \frac{n}{m+n} p_{m,n-1}(u) + \frac{m}{m+n} p_{m-1,n}(u-n)$$

bepaald worden. Vermenigvuldigt men beide leden met X^u en sommeert over u, dan krijgt men

$$C_{mn} = \frac{n}{m+n} C_{m,n-1} + \frac{m}{m+n} X^n C_{m-1,n}$$

Stelt men $\binom{m+n}{m} C_{mn} = u_{mn}$, dan wordt dit

$$u_{mn} = u_{m,n-1} + X^n u_{m-1,n}$$

Uit $p_{mn}(u) = p_{nm}(u)$ volgt nu

$$u_{mn} = u_{nm} = u_{n,m-1} + X^m u_{n-1,m} =$$
$$= u_{m-1,n} + X^m u_{m,n-1}$$

dus $\quad u_{m-1,n}(1-X^n) = u_{m,n-1}(1-X^m)$

zodat

$$u_{mn} = u_{m,n-1}\left(1 + X^n \frac{1-X^m}{1-X^n}\right) = u_{m,n-1} \frac{1-X^{m+n}}{1-X^n}$$

Hieruit volgt onmiddellijk, daar $u_{mn} = 1$ is voor $mn = 0$ en $u_{mn} = 0$ is voor $m<0$ of $n<0$, dat

$$u_{mn} = \prod_1^n \frac{1-X^{m+j}}{1-X^j} = \frac{\prod_1^{m+n}(1-X^j)}{\prod_1^m(1-X^k)\prod_1^n(1-X^l)} = \prod_1^m \frac{1-X^{n+j}}{1-X^j}.$$

is, waaruit C_{mn} onmiddellijk volgt.

Men kan voor C_{mn} ook een wh-interpretatie geven als $0 \leq X < 1$ is. Onderstellen we, dat $m+n$ kleine objecten langs de x-as vanuit $x=\infty$ afgeschoten worden, met gelijke $\sigma\sigma$ whn ergens op de x-as te blijven liggen, en wel eerst m "- polen" (de x_i) en dan n "+ -polen" (de y_j). Zij er iedere keer dat een + -pool een - -pool passeert een constante wh $1-X$ dat er ergens een explosie optreedt, dus een kans X dat dit niet het geval is. Bij een gegeven waarde van u is dus X^u de wh dat geen der contacten tot een explosie leidt. Dan is $C_{mn}(X)$ de totale wh dat de gehele schietpartij zonder ongelukken afloopt, ongeacht waar de polen tot rust komen.

Stelt men $X = e^{\tau}$, dan is $C_{mn}(e^{\tau})$ de karaktersitieke fct, dus $\ln C_{mn}(e^{\tau}) = \sum_1^\infty {}_k \varkappa_k \frac{\tau^k}{k!}$ bepaalt de cumulanten $\varkappa_k$. Nu is

$$\ln C_{mn}(e^{\tau}) = \sum_1^m {}_j \left\{ \ln \frac{e^{(n+j)\tau}-1}{n+j} - \ln \frac{e^{j\tau}-1}{j} \right\} =$$

$$= \sum_1^m {}_j \left\{ \ln \frac{sh\,\frac{1}{2}(n+j)\tau}{\frac{1}{2}(n+j)\tau} - \ln \frac{sh\,\frac{1}{2}j\tau}{\frac{1}{2}j\tau} \right\} + \frac{1}{2} mn\tau$$

$$= \sum_1^m {}_j \Delta f\left(\frac{j\tau}{2}\right) + \frac{1}{2} mn\tau$$

wanneer we

$$\Delta\varphi(j) = \varphi(j+n) - \varphi(j)$$

$$f(x) = \ln \frac{sh\,x}{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \frac{1}{7!}x^6 + \ldots\ldots\right)$$

stellen. Nu kan ook $f(x)$ in een voor $\left|\frac{sh\,x}{x} - 1\right| < 1$, dus voor alle voldoend kleine x convergente machtreeks naar x^2 ontwikkeld worden:

$$f(x) = \sum_1^\infty l_k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

De getallen l_k kunnen in de op pag. 83 Whr ingevoerde a_{km} of ook in de getallen van Bernoulli uitgedrukt worden. Men heeft:

$$l_1 = 1 \qquad l_2 = -\frac{2}{3} \qquad l_3 = \frac{16}{9} \qquad l_4 = -\frac{48}{5}$$

Dus

$$\ln C_{mn}(e^{\tau}) - \frac{1}{2}mn\tau = \sum_1^\infty {}_k \frac{l_k}{(2k+1)!} \sum_1^m {}_j \Delta\left(\frac{1}{2}j\tau\right)^{2k} =$$

$$= \sum_1^\infty {}_k \frac{l_k \tau^{2k}}{(2k+1)!\,2^{2k}} K_{m,n,k}$$

met voor $k \geq 1$

$$K_{m,n,k} = \sum_1^m {}_j \left\{ (n+j)^{2k} - j^{2k} \right\} =$$

$$= \left(\sum_1^{n+m} {}_j - \sum_1^n {}_j - \sum_1^m {}_j \right) j^{2k} =$$

$$= \frac{1}{2k+1} \left\{ B_{2k+1}(n+m+1) - B_{2k+1}(m+1) - B_{2k+1}(n+1) + B_{2k+1}(1) \right\}$$

waarin $B_l(x)$ de veelterm van Bernoulli van de graad l is. Men heeft namelijk volgens Bernoulli voor gehele positieve h en l:

$$\sum_1^h {}_j j^l = \frac{1}{l+1} \left\{ B_{l+1}(h+1) - B_{l+1}(1) \right\}$$

We vinden dus voor de cumulanten $\varkappa_1 = \frac{1}{2}mn$, $\varkappa_{2k+1} = 0$ voor $k \geqq 1$ en

$$\varkappa_{2k} = \frac{l_k}{2^{2k}(2k+1)} K_{m,n,k}$$

De eerste factor hangt niet van m en n af; de tweede is een veelterm in m en n van de graad $\leqq 2k + 1$.

Men heeft b.v.

$$B_1(x+1) = x+1 \quad B_3(x+1) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \quad B_5(x+1) = x^5 + \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$$

dus

$$K_{m,n,1} = \frac{1}{3}\left\{(m+n)^3 - m^3 - n^3 + \frac{3}{2}(m+n)^2 - \frac{3}{2}m^2 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}(m+n) - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\{3mn(m+n) + 3mn\} =$$

$$= mn(m+n+1)$$

en

$$\sigma^2 = \varkappa_2 = \frac{l_1}{2^2 \cdot 3} K_{m,n,1} = \frac{1}{12} mn(m+n+1)$$

Met behulp van de ontwikkelingen

$$B_l(x+1) = \frac{1}{2} l x^{l-1} + \sum_0^{[\frac{1}{2}l]} (-1)^{j-1} \binom{l}{2j} B_j x^{l-2j}$$

waarin B_j de getallen van Bernoulli zijn ($B_0 = -1$, $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$ ---)

en

$$(m+n)^l - m^l - n^l = \sum_1^{l-1} \binom{l}{j} m^j n^{l-j}$$

krijgt men

$$K_{m,n,k} = \frac{1}{2k+1}\left\{B_{2k+1}(m+n+1) - B_{2k+1}(m+1) - B_{2k+1}(n+1) + B_{2k+1}(1)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(m+n)^{2k} - m^{2k} - n^{2k}\right\} + \frac{1}{2k+1}\sum_0^k (-1)^{j-1}\binom{2k+1}{2j} B_j \left\{(m+n)^{2k+1-2j} - m^{2k+1-2j} - n^{2k+1-2j}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^{2k-1} \binom{2k}{h} m^h n^{2k-h} + \sum_0^k \frac{(-1)^{j-1} B_j}{(2j)!} \sum_1^{2k-2j} \frac{(2k)!}{h!(2k+1-2j-h)!} m^h n^{2k+1-2j-h}$$

waarmede de ontwikkeling van $K_{m,n,k}$ in een veelterm van de graad $2k+1$ naar m en n voltooid is.[1])

Bij overgang van de cumulanten naar de invarianten moet $\varkappa_{2k}$ nog door σ^{2k} gedeeld worden, d.i. door een veelterm van de graad $3k$ in m en n. Daar de graad van $\varkappa_{2k}$ hoogstens $2k+1$ is, concluderen Mann en Whitney, dat de verdeling asymptotisch normaal is (als m en n beide naar ∞ gaan en wel zo dat $\frac{m}{n}$ en $\frac{n}{m}$ begrensd blijven, een voor-

---

[1]) Mann en Whitney vinden voor $\tilde{\mu}_{2k}$ een veelterm in m en n van de graad $3k$ en berekenen het hoogste graads deel. Bij overgang tot de cumulanten blijkt dus dit deel, alsmede die van de graden $3k-1$, $3k-1$, ..., $2k+2$ weg te vallen.

waarde, die M. nn en Whitney niet vermelden) daar de invarianten van iedere orde ≥ 3 tot 0 naderen. De facto is reeds voor $m \geq 10$, $n \geq 10$ de afwijking van de normaliteit te verwaarlozen. Het betoog is echter niet geheel bewijskrachtig, en behoeft een aanvulling, daar de ontwikkeling van $\ln C_{mn}(e^{\tau})$ niet gelijkmatig in m en n convergeert. Bij toenemende m en n heeft u_{mn} zich bij $X = 1$ (dus bij $\tau = 0$) ophopende singulariteiten.

6. Fouten van de tweede soort. Met betrekking tot de vz Ω van hypothesen, dat de x_i en de y_i alle $\sigma\sigma$ zijn en dat alle x_i dezelfde continue[1]) verdelingsfct $F(x)$ en de y_i alle dezelfde continue[1]) verdelingsfct $G(x)$ bezitten, wordt een fout van de tweede soort gemaakt als voor minstens één waarde van x (dus in een geheel interval) $F(x) \neq G(x)$ is, terwijl toch de hypothese $F(x) = G(x)$ niet wordt verworpen.

We noemen een toets van een hypothese θ_0 asymptotisch onderscheidend (Engels: consistent) met betrekking tot een vz Ω' van hypothesen, als voor iedere hypothese $\theta' \in \Omega'$ met $\theta' \neq \theta_0$ de wh van een fout van de tweede soort bij onbeperkt toenemende steekproefgrootten 0 tot limiet heeft, d.w.z. dat als $\theta = \theta' \in \Omega'$ is de wh dat de hypothese $\theta = \theta_0$ verworpen wordt tot 1 nadert (in casu voor $m \to \infty, n \to \infty$, $\frac{m}{n}$ en $\frac{n}{m}$ begrensd).

De toets van Wilcoxon voor de hypothese

$$\theta_0 : \qquad F(x) = G(x) \quad \text{voor alle } x$$

is niet met betrekking tot de gehele vz Ω van hypothesen asymptotisch onderscheidend. Mann en Whitney hebben echter bewezen, dat dit (bij rechtszijdige toetsing, d.w.z. verwerping als $P[\underline{u} \geq u] \leq \alpha$ is, tegenover tweezijdige toetsing, d.w. verwerping als $P[|\underline{u}| \geq u] \leq \alpha$ is) wel het geval is, als de verdelingsfcts voor alle x aan de betrekking $F(x) > G(x)$ voldoen, d.w.z. als de bij $\underline{y}$ behorende kromme geheel rechts van de bij $\underline{x}$ behorende ligt.

We kunnen echter met hun methode ook bewijzen, dat de toets reeds asymptotisch onderscheidend is, zodra

$$p = P[\underline{x} > \underline{y}] \neq \tfrac{1}{2}$$

is, en wel bij rechtszijdige toetsing zodra $p < \frac{1}{2}$ is, bij linkszijdige toetsing zodra $p > \frac{1}{2}$ is, en bij tweezijdige toetsing zodra $p \neq \frac{1}{2}$ is. Zij, om de gedachten te bepalen, $p < \frac{1}{2}$. De hypothese θ_0 wordt zowel bij rechtszijdige als bij tweezijdige toetsing verworpen, zodra $\underline{u} \geq \frac{1}{2}mn + c\sigma$ is, waarin $\sigma^2 = \frac{1}{12}mn(m+n+1)$ is en c een zodanige van m en n afkomstige constante, dat $P[\underline{u} \geq c\sigma | \theta_0]$ een zo groot mogelijke waarde $\leq \beta \leq \alpha$ heeft. (Bij tweezijdige toetsing zal men doorgaans $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ nemen en

1) Voldoende is reeds, dat $F(x)$ en $G(x)$ geen samenvallende discontinuïteiten hebben.

θ_0'' ook verwerpen als $\underline{u}$ aan een analoge begrenzing links voldoet). Tengevolge van de asymptotische normaliteit is[2]) $\lim_{m,n\to\infty} c = \xi_\beta$, waarin ξ_β de reeds vroeger ingevoerde betekenis heeft (abscis behorende bij de normale "staartintegraal"). We hebben slechts nodig, dat voor $m\to\infty$ $n\to\infty$ β naar beneden, dus c naar boven begrensd is.

Zij nu

$$x_{ij} = \iota(x_i - y_j) = \begin{cases} 1 \text{ als } x_i \geq y_j \text{ is} \\ 0 \text{ als } x_i < y_j \text{ is} \end{cases}$$

Dan is

$$\underline{u} = \sum_1^m{}_i \sum_1^n{}_j \iota(x_i - y_j)$$

Onder de hypothese

$$\theta \qquad P[\underline{x} > \underline{y}] = p < \tfrac{1}{2}$$

is nu

$$\mathcal{E}_\theta \underline{x}_{ij} = P[x_i \geq y_j] = p \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix}$$

Dus

$$\mathcal{E}_\theta \underline{u} = \sum_i \sum_j \mathcal{E}_\theta \underline{x}_{ij} = pmn$$

Daar $\iota(x)^2 = \iota(x)$ is, en x_{ij} en $x_{i'j'}$ o.o. zijn als zowel $i \neq i'$ als $j \neq j'$ is, heeft men

$$\mathcal{E}_\theta \underline{x}_{ij}^2 = \mathcal{E}_\theta \underline{x}_{ij} = p$$

$$\mathcal{E}_\theta \underline{x}_{ij} \underline{x}_{i'j'} = \mathcal{E}_\theta \underline{x}_{ij} \mathcal{E}_\theta \underline{x}_{i'j'} = p^2 \text{ als } i \neq i';\ j \neq j'$$

Nu is

$$p = P[\underline{x} > \underline{y}] = \int \mathcal{G}(x)\, dF(x) = \int (1 - F(x))\, d\mathcal{G}(x)$$

en voor $j \neq j'$

$$\mathcal{E}_\theta \underline{x}_{ij} \underline{x}_{ij'} = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x_i) \int_{-\infty}^{x_i} d\mathcal{G}(y_j) \int_{-\infty}^{x_i} d\mathcal{G}(y_{j'}) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dF(x)\, \mathcal{G}(x^2) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x)\, dF(x) = p$$

daar $0 \leq \mathcal{G}(x) \leq 1$ is. Bovendien is $\int \mathcal{G}(x)^2 dF(x) \geq \left\{ \mathcal{G}(x) dF(x) \right\}^2 = p^2$.
Het geval, dat hier het = -teken optreedt is triviaal en kan buiten beschouwing gelaten worden. Immers dit zou vereisen, dat overal waar $F(x)$ toeneemt $\mathcal{G}(x) =$ constant $= p$ ware. Dan zou dus $\underline{x}$ tussen 2 eindige waarden a en b moeten variëren, en $\underline{y}$ uitsluitend waarden $< a$ (met een

---

[2]) Steeds onder de verder niet vermelde voorwaarde, dat $\frac{m}{n}$ en $\frac{n}{m}$ begrensd blijven.

wh p) of waarden $> b$ (met een wh = $1-p$) kunnen aannemen.

Stelt men dus $\mathcal{E}_\theta\, x_{ij}\, x_{ij'} = q_1$ voor $j \neq j'$

en evenzo

$$\mathcal{E}_\theta\, x_{ij}\, x_{i'j} = q_2 \qquad \text{voor } i \neq i'$$

Men vindt dus

$$\mathcal{E}_\theta\, \underline{U}^2 = \sum_1^m{}^{i} \sum_1^m{}^{i'} \sum_1^n{}^{j} \sum_1^n{}^{j'} \mathcal{E}_\theta\, x_{ij}\, x_{i'j'} =$$

$$= mnp + mn(n-1)q_1 + mn(m-1)q_2 + m(m-1)n(n-1)p^2$$

en de variantie σ_θ^2 onder de hypothese θ is

$$\sigma_\theta^2 = \mathcal{E}_\theta \underline{U}^2 - (\mathcal{E}_\theta \underline{U})^2 = mn\{p + (n-1)q_1 + (m-1)q_2 + (m-1)(n-1)p^2 - mnp^2\}$$

$$= mn\{(n-1)(q_1 - p^2) + (m-1)(q_2 - p^2) + p(1-p)\}$$

Voor $\theta = \theta_0$ wordt $p = \frac{1}{2}$, $q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$, dus $\theta_1 = \theta_2 = \frac{2}{3}$ en

$$\sigma_{\theta_0}^2 = \sigma^2 = \frac{mn}{12}(m+n+1) \qquad \text{zoals bekend is.}$$

Dus is voor $m \to \infty$, $n \to \infty$

$$\frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_{\theta_0}^2} = \frac{(m-1)(q_2 - p^2) + (n-1)(q_1 - p^2) + p - p^2}{\frac{1}{12}(m+n+1)}$$

begrensd, b.v. $< 12\,p(1-p)$.

Verwerping van θ_0 geschiedt als $|\underline{U} - \frac{1}{2}mn| \geq c\sigma$ is. Dus is tengevolge van de ongelijkheid van Bienaymé de wh van niet-verwerpen

$$P\left[\,|\underline{U} - \tfrac{1}{2}mn| < c\sigma \,\middle|\, \theta\right] \leq P\left[\underline{U} > \tfrac{1}{2}mn - c\sigma \,\middle|\, \theta\right] =$$

$$= P\left[\,\underline{U} - \mathcal{E}_\theta \underline{U} > (\tfrac{1}{2} - p)mn - c\sigma \,\middle|\, \theta\right] \leq$$

$$\leq \frac{\sigma_\theta^2}{\{(\frac{1}{2}-p)mn - c\sigma\}^2} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma^2}\left\{(\tfrac{1}{2}-p)\sqrt{\frac{12mn}{m+n+1}} - c\right\}^{-2}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van het feit dat $(\frac{1}{2} - p)mn - c\sigma > 0$ is voor voldoend grote m en n , daar $\frac{1}{2} - p > 0$ is. (Anders geldt het laatste $\leq$ -teken niet).

Hierin is de eerste factor, naar we boven zagen, begrensd, terwijl de tweede factor naar 0 gaat doordat de uitdrukking tussen accoladen ten gevolge van de begrensdheid van c en het positief zijn van $\frac{1}{2} - p$ naar oneindig gaat. Derhalve heeft de wh van ten-onrechte niet-verwerpen 0 tot limiet, d.w.z. de toets is asymptotisch onderscheidend t.o.v. elke hypothese met $p < \frac{1}{2}$. Hetzelfde geldt m.m. voor $p > \frac{1}{2}$.

Is daarentegen $p = \frac{1}{2}$, dan is dit zeker niet het geval. De wh van niet-verwerpen is nu namelijk, b.v. bij tweezijdige toetsing:

$$P[|\underline{U} - \tfrac{1}{2}mn| < c\sigma|\theta] = P[|\underline{U} - \mathcal{E}_\theta \underline{U}| < k\sigma_\theta|\theta]$$

waarin $k = c\frac{\sigma}{\sigma_\theta}$ is.

De wh dat $|\underline{U} - \frac{1}{2}mn| < k\sigma_\theta$ is, zou nu dus voor $m \to \infty$, $n \to \infty$ tot 0 moeten naderen als de toets asymptotisch onderscheidend was. Dan was dus bij willekeurige positieve ε voor voldoend grote m en n

$$|\underline{U} - \tfrac{1}{2}mn| \geqq k\sigma_\theta \qquad \text{svpr } \varepsilon$$

dus

$$\sigma_\theta^2 = \mathcal{E}(\underline{U} - \tfrac{1}{2}mn)^2 \geqq (1-\varepsilon)k^2\sigma_\theta^2$$

of $k^2 \leqq (1-\varepsilon)^{-1}$. Daar dit voor alle ε geldt ware dus $k \leqq 1$, d.w.z. $c\,\sigma/\sigma_\theta \leqq 1$. Daar $\sigma_\theta/\sigma \leqq \sqrt{12p(1-p)} = \sqrt{3}$ is, ware dus $c \leqq \sqrt{3}$, dus $\xi_\alpha \leqq \sqrt{3}$, hetgeen voor voldoend kleine α (t.w. $\alpha < 0{,}041$) niet mogelijk is.

Resumerende kunnen wij dus zeggen, dat de toets van Wilcoxon voor de hypothese $F(x) = G(x)$ asymptotisch onderscheidend is met betrekking tot alle hypothesen, waarbij $P[\underline{x} > \underline{y}] \neq \frac{1}{2}$ (of bij éénzijdige toetsing $< \frac{1}{2}$ resp. $> \frac{1}{2}$) is.

7. Men zou verwachten, dat het onderscheidingsvermogen van de toets van Wilcoxon bij toepassing op normale verdelingen met gelijke spreidingen aanzienlijk geringer zou zijn dan van de toets van Student, daar eerstgenoemde van het gegeven der normaliteit geen gebruik maakt. Het zou daarom van belang zijn , dit onderscheidingsvermogen ("power-function") $\alpha(\delta) = P[\underline{U} \geqq U_\alpha \mid \mu_2 - \mu_1 = \delta]$ als fct van δ te bepalen. Uit een belangrijk onderzoek van H.R. van der Vaart ') is echter gebleken, dat dit op onoverkomelijke moeilijkheden stuit. Wel is Van der Vaart er in geslaagd, de tweede afgeleide $\alpha''(0)$ te bepalen, 1° voor kleine waarden van m en n t.w. $m+n \leqq 6$, 2° $m \to \infty$ en $n \to \infty$. Daarbij bleek, wat 2° betreft, dat $\dfrac{\lim \alpha''(0)_{Wilc.}}{\lim \alpha''(0)_{Stud.}} = \dfrac{3}{\pi}$ is, dus slechts weinig kleiner dan 1. Dit is weliswaar geen bewijs, maar toch wel een sterke aanwijzing, dat de toets van Wilcoxon slechts weinig in scherpte voor die van Student onderdoet, ondanks het feit, dat zij omtrent de verdelingsfcts niets anders dan continuïteit onderstelt. De ervaringen bij het M.C. en enige aldaar genomen experimenten wijzen in dezelfde richting.

') H.R. van der Vaart, Some remarks on the power function of Wilcoxon's test for the probelms of two samples, I and II, Proc.Kon.Ned.Ak. 53 (1950) p. 494-506, 507-520, Indagationes mathematicae 12 (1950) p. 146-158, 159-172.

§ 4. Dubbele dichotomieën.

1. Bij statistische onderzoekingen komt het herhaaldelijk voor, dat men een aantal (N) o.o. waargenomen objecten onderzoekt ten aanzien van twee kenmerken (K en L) en hun negaties ($\bar{K}$ = non K en $\bar{L}$ = non L). De resultaten worden gewoonlijk samengevat in de vorm van een z.g.n 2 x 2-tabel, d.i. een tabel van de volgende vorm

	K	$\bar{K}$	
L	a	c	m
$\bar{L}$	b	d	n
	r	s	N

Hierin zijn m, n, r, s en N de zgn. "randtotalen" of marginale sommen t.w.

$$m = a + c \qquad n = b + d$$
$$r = a + b \qquad s = c + d$$
$$N = a + b + c + d = m + n = r + s$$

Doel van het onderzoek is gewoonlijk, te toetsen of K en L (en dan ook $\bar{K}$ en L, K en $\bar{L}$, en $\bar{K}$ en $\bar{L}$) o.o. zijn. Sinds een discussie tussen G.A.Barnard en R.A.Fisher in "Nature" (1945) en een serie daarop volgende publicaties van G.A.Barnard, E.S.Pearson, e.a. in Biometrica (1947, 1948) is gebleken, dat men hier niet mer één enkel probleem te maken heeft, maar afhankelijk van verschillende voorwaarden waaronder het experiment genomen wordt, met (minstens) 3 verschillende problemen.

2. Type I. Inde eerste plaats kan het gebeuren, dat de experimentele condities behalve het totale aantal N ook nog alle verdere randtotalen m, n, r en s bepalen (d.w.z. dat men het experiment zodanig kan inrichten, dat bij herhaling ervan m, n, r en s steeds weer dezelfde waarden hebben, terwijl $\underline{a}$ (en daarmede $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$) nog kan variëren. In dat geval zijn m, n, r, s, en N gegeven en wel door drie hunner, b v. m, r en N, bepaald (t.w. $n = N - m$, $s = N - r$). Daarentegen zijn $\underline{a}$, $\underline{b}$ $\underline{c}$ en $\underline{d}$ stochastisch, en wel zijn zij alle door één hunner, b.v. $\underline{a}$, bepaald. (Er is "één vrijheidsgraad"; de verdeling is "één-dimensionaal").

$$\underline{b} = r - \underline{a} \qquad \underline{c} = m - \underline{a} \qquad \underline{d} = N - m - r + \underline{a}$$

Type II. Vaker komt het geval voor, waarbij behalve N één der randtotalen, b.v. m (en dan ook $n = N - m$) gegeven is. Dan zijn de overige grootheden (in het bijzonder dus ook $\underline{r}$ en $\underline{s}$)stochastisch en door twee hunner (b.v. $\underline{a}$ en $\underline{b}$) bepaald: $\underline{c} = m - \underline{a}$, $\underline{d} = n - \underline{b}$, $\underline{r} = \underline{a} + \underline{b}$, $\underline{s} = N - \underline{a} - \underline{b}$

(Er zijn twee vrijheidsgraden; de verdeling is twee-dimensionaal). Het hiermede symmetrische geval, waarbij r en s gegeven, en m en n stochastisch zijn, kan verder onbesproken blijven.

Type III. Minder vaak dan het tweede komt het geval voor, het enige echter dat oorspronkelijk beschouwd werd, dat geen der randtotalen (behalve N) gegeven is. Dan zijn alle grootheden behalve N stochastisch, en voor drie hunner bepaald (b.v. door $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$):

$$\underline{d} = N - \underline{a} - \underline{b} - \underline{c}$$

$$\underline{m} = \underline{a} + \underline{c} \qquad \underline{n} = N - \underline{a} - \underline{c}$$

$$\underline{r} = \underline{a} + \underline{b} \qquad \underline{s} = N - \underline{a} - \underline{b}$$

(Drie vrijheidsgraden; drie-dimensionale verdeling).

Men zou hieraan nog een type IV kunnen toevoegen, waarin ook $\underline{N}$ stochastisch is. Dan zijn alle grootheden door vier hunner bepaald (b.v. $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$). (Vier vrijheidsgraden, vier-dimensionale verdeling).

3. We geven eerst enkele voorbeelden.

a. Men onderzocht N proefpersonen ten aanzien van de kenmerkenparen "lichte (K) en "donkere" ($\bar{K}$) haarkleur en "lichte" (L) en "donkere" ($\bar{L}$) kleur van de ogen, waarbij we onderstellen, dat deze kenmerken (b.v. met behulp van kleurenschalen) ondubbelzinnig gedefinieerd zijn. (Type III.)

b. Men gaat bij m objecten uit een collectie Γ_1, en evenzo bij n objecten uit een collectie Γ_2 na, of zij een bepaald kenmerk K al dan niet bezitten. B.v. men past bij m lijders aan een bepaalde ziekte een bepaalde geneeswijze toe, en bij n andere lijders aan dezelfde ziekte een tweede geneeswijze; K is dan een kenmerk dat de genezende werking vaststelt. (Type II).

c. Men trekt uit een doos, die m witte en $n = N - m$ rode loten bevat r loten zonder teruglegging, waarbij telkens alle nog in de doos zijnde loten gelijke whn. hebben getrokken te worden; $\underline{a}$ is het aantal getrokken witte loten. Hier is L resp. $\bar{L}$ het kenmerk "wit" resp. "rood", en K resp. $\bar{K}$ het kenmerk "getrokken" resp. "niet-getrokken". (Type I).

d. Men handelt als bij voorbeeld a, maar bepaalt vooraf door loting, hoe groot men het aantal proefpersonen zal nemen. B.v. met behulp van een verdeling van Poisson met willekeurig gekozen gemiddelde η:

$$P[\underline{N} = N] = e^{-\eta} \cdot \frac{\eta^N}{N!}$$

(Type IV).

e. Men rangschikt m meisjes (L) en n jongens ($\bar{L}$) naar een variabele (b.v. leeftijd, grootte of intelligentie-quotiënt) en kiest uit de N

aldus verkregen waarden de r grootsten (K). Dan is $\underline{a}$ resp. $\underline{b}$ het aantal meisjes resp. jongens onder de r kinderen met de grootste waarden en $\underline{c}$ resp. $\underline{d}$ het aantal meisjes resp. jongens onder de $s = N - r$ kinderen met de kleinste s-waarden. (Type I.)

Soms leiden verwante problemen tot verschillende typen.

f. Men meet aan elk van N objecten een variabele $\underline{x}$ en een variabele $\underline{y}$. Men noemt een waarde van $\underline{x}$ "groot" resp. "klein": 1e. (in absolute zin) als $\underline{x} \geqq x_0$ resp. $\underline{x} < x_0$, waarin x_0 een gegeven getal is, of 2e. (in relatieve zin) als bij rangschikking der $x_1, \ldots\ldots, x_N$ volgens opklimmende grootten $\underline{x}$ tot de r grootsten resp. de $s = N - r$ kleinsten behoort (in de onderstelling, dat gelijke waarden niet voorkomen), en handelt evenzo met $\underline{y}$. Zij K resp. $\bar{K}$ het kenmerk dat $\underline{x}$ "groot" resp. "klein" is, en L resp. $\bar{L}$ het kenmerk, dat $\underline{y}$ "groot" resp. "klein" is dan heeft men type I als voor $\underline{x}$ zowel als voor $\underline{y}$ definitie 2e. gekozen wordt, III als voor beide variabelen definitie 1e. gekozen wordt, en type II als voor één der variabelen definitie 1e. en voor de andere definitie 2e. gekozen wordt.

Uiteraard kan definitie 1e. alleen gebruikt worden als x_0 resp. y_0 gegeven is, hetgeen de toepasbaarheid dezer definitie beperkt tot gevallen, waarin iets over de verdeling van $\underline{x}$ resp. $\underline{y}$ bekend is. Men zal dan voor x_0 resp. y_0 b.v. de verwachting of de mediaan van $\underline{x}$ resp. $\underline{y}$ kiezen.

4. We beschouwen vooreerst type III.

De klasse van hypothesen die we toelaten bestaat daarin, dat alle N waarnemingen o.o. zijn en uit eenzelfde collectie afkomstig. De whn α, β, γ en δ waarmede de kenmerk-combinaties KL, $K\bar{L}$, $\bar{K}L$ en $\bar{K}\bar{L}$ voorkomen zijn dan constant, en $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$. De wh van een bepaald waarnemingsresultaat (bepaald door $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$) is

$$P(a, b, c \mid N, \alpha, \beta, \gamma) = P[\underline{a} = a, \underline{b} = b, \underline{c} = c \mid N, \alpha, \beta, \gamma] =$$

$$= \frac{N!}{a!\,b!\,c!\,d!}\,\alpha^a \beta^b \gamma^c \delta^d$$

Vermenigvuldigen wij beide leden met $A^a B^b C^c D^d$, en sommeren we over a, b, c en $d = N - (a + b + c)$, dan krijgen we het zgn. "collectieve kenmerk" (vgl. hoofdstuk 2)

$$C(A, B, C, D \mid N, \alpha, \beta, \gamma) = (\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D)^N$$

van de multinomiale (i.e. quadrinomiale) collectie. De gezochte wh is de coëfficiënt van $A^a B^b C^c D^d$ in de ontwikkeling hiervan.

De whn van K, $\bar{K}$, L en $\bar{L}$ duiden we aan met ρ, σ, μ en ν zodat

$$\rho = \alpha + \beta \quad , \quad \sigma = \gamma + \delta \qquad \rho + \sigma = 1$$

$$\mu = \alpha + \gamma \quad , \quad \nu = \beta + \delta \qquad \mu + \nu = 1.$$

Voor een passende waarde van λ geldt dan steeds

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = \mu\varrho + \lambda & \gamma = \mu\sigma - \lambda \\ \beta = \nu\varrho - \lambda & \delta = \nu\sigma + \lambda \end{array}\right\} \text{ en } \lambda = \alpha\delta - \beta\gamma$$

Is $\lambda > 0$, resp. $\lambda < 0$, dan heten de kenmerken K en L positief resp. negatief geässocieerd (of gecorreleerd); voor $\lambda = 0$ zijn ze onafhankelijk.

De speciale hypothese H_0 die men gewoonlijk wil toetsen is dat $\lambda = 0$ of ook dat $\alpha\delta = \beta\gamma$ is. Onder deze hypothese H_0 is

$$\boxed{P(a,b,c/N,\mu,\varrho) = \frac{N!}{a!b!c!d!}\mu^m\nu^n\varrho^r\sigma^s}$$

De wh dat m een bepaalde waarde m heeft is dan de som van $P(a,b,m-a/N,\mu,\varrho)$ over alle a en b d.i.:

$$P(m/N,\mu,\varrho) = \binom{N}{m}\mu^m\nu^n$$

(dit geldt zelfs voor willekeurige α, β, γ dus ongeacht H_0).
De voorwaardelijke wh van a en b onder voorwaarde $m = m$ is

$$P(a,b,/N,\mu,\varrho) = \frac{P(a,b,m-a/N,\mu,\varrho)}{P(m/N,\mu,\varrho)}$$

Hieruit blijkt μ weg te vallen en we krijgen:

$$\boxed{\begin{aligned} P(a,b|N,m,\varrho) &= \frac{m!\,(N-m)!}{a!b!(m-a)!(N-m-b)!}\varrho^{a+b}\sigma^{N-a-b} = \\ &= \frac{m!\,n!}{a!b!c!d!}\varrho^r\sigma^s \end{aligned}}$$

Hiervoor kunnen we ook schrijven:

$$P(a,b/N,m,\varrho) = \frac{\binom{m}{a}\binom{n}{b}}{\binom{N}{r}}\binom{N}{r}\varrho^r\sigma^s$$

De eerste factor is volgens pag. 90, Whr. 179, f (wanneer we daarin

$$\begin{array}{lccccccccc} & \nu, & \nu_2, & \nu_1, & n, & \nu-n, & m, & \nu_2-m, & n-m, & \nu_1-(n-m) \\ \text{resp. door} & N, & r, & s, & m, & n, & a, & b, & c, & d \end{array}$$

vervangen) de wh dat bij r trekkingen zonder teuglegging uit N objecten, waaronder m met een bepaald kenmerk L voorkomen, a der getrokken objecten dit kenmerk L zullen hebben (vgl. punt 3c.)

Sommatie over a van deze uitdrukking geeft dus 1. De tweede factor, die niet van a afhangt, is de wh dat bij N o.o. trekkingen r maal een kenmerk K zal worden aangetroffen, indien er bij elke trekking een wh ϱ is dat dit zal optreden.

Sommatie van $P(a, r-a/N, m, \varrho)$ geeft dus precies deze tweede factor. Anderzijds echter geeft zij de wh van $\underline{r}=r$. Dus

$$P(r/N, m, \varrho) = \binom{N}{r}\varrho^r\sigma^s$$

De eerste factor is derhalve de voorwaardelijke wh onder de voorwaarde $\underline{r} = r$.

$$P(a/N, m, r) = \frac{P(a, r-a/N, m, \varrho)}{P(r/N, m, \varrho)} = \frac{\binom{m}{a}\binom{N-m}{r-a}}{\binom{N}{r}}$$

of

$$\boxed{P(a/N, m, r) = \frac{m!\,n!\,r!\,s!}{N!\,a!\,b!\,c!\,d!}}$$

Resumerende vinden we dus:

Onder de hypothese dat K en L o.o. kenmerken zijn, is:

I. de voorwaardelijke wh van $\underline{a}$ bij gegeven marginale waarden

$$P(a/N, m, r) = \frac{m!\,n!\,r!\,s!}{N!\,a!\,b!\,c!\,d!}$$

II. de voorwaardelijke wh van $\underline{a}$ en $\underline{b}$ bij gegeven randtotalen m en n :

$$P(a, b/N, m, \varrho) = \frac{m!\,n!}{a!\,b!\,c!\,d!}\varrho^r\sigma^s$$

III. de (onvoorwaardelijke) wh van $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$:

$$P(a, b, c/N, \varrho, \mu) = \frac{N!}{a!\,b!\,c!\,d!}\mu^m\nu^n\varrho^r\sigma^s$$

5. Bij type II laten we als klasse van hypothesen toe:

L en $\bar{L}$ zijn kenmerken die twee collecties Γ_1 en Γ_2 karakteriseren, waarin K en $\bar{K}$ met whn ϱ_1 en $\sigma_1 = 1-\varrho_1$ resp. ϱ_2 en $\sigma_2 = 1-\varrho_2$ voorkomen; uit deze beide collecties doen we m resp. $N-m$ o.o. trekkingen. De wh van een trekkingsresultaat, dat door $\underline{a}$ en $\underline{b}$ gekarakteriseerd kan worden, is dan:

$$P(a, b/N, m, \varrho_1, \varrho_2) = \binom{m}{a}\varrho_1^a\sigma_1^c\binom{n}{b}\varrho_2^b\sigma_2^d$$

De speciale hypothese die we willen toetsen luidt:

$$(\mathscr{H}_0) \qquad \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$$

Onder deze hypothese is dus

$$P(a, b/N, m, \varrho) = \binom{m}{a}\binom{n}{b}\varrho^{a+b}\sigma^{c+d}$$

Dit is echter precies de boven onder II gevonden voorwaardelijke wh, zodat we de voor deze voorwaardelijke wh af te leiden resultaten op probleem type II kunnen toepassen. De hierbij behorende onvoorwaardelijke wh III wordt verkregen, indien we zeer grote aantallen exemplaren van de collecties Γ_1 en Γ_2, die zich verhouden als μ tot $\nu = 1-\mu$ dooreenmengen, en uit de gemengde collectie N exemplaren trekken, en achteraf bij elk exemplaar waarnemen of het het kenmerk L of $\bar{L}$ bezit, d.w.z. tot Γ_1 of tot Γ_2 behoorde. De getallen m en n zijn dan niet meer vooraf gegeven, maar door het experiment bepaald, dus stochastisch.

Bij type I is geen een-voudige klasse van alternatieve hypothesen aan te geven, die in de meeste gevallen in aanmerking komen. In de in punt 3 gegeven voorbeelden c, d en e zouden drie verschillende klassen van alternative hypothesen in aanmerking komen, die geen van alle eenvoudig exact te formuleren zijn.

Wel zal echter blijken, dat de in punt 4 bepaalde voorwaardelijke whn I, die numeriek met die van type I overeenstemmen, bij de toetsing van de bij type II of III behorende hypothesen van belang zijn. Daarom moeten we toch de toetsing van de aan type I ten grondslag liggende hypothese (vgl. 3, c) behandelen.

6. We beschouwen eerst type I. Onder de hypothese $\mathcal{H}_0$ is, naar wij zagen

$$P(a) = P[\underline{a} = a \mid N, m, n, \mathcal{H}_0] = \frac{m!\,n!\,r!\,s!}{N!\,a!\,b!\,c!\,d!}$$

Volgens pag. 90 (Whr. pag. 179) is $\underline{a}$ dus verdeeld volgens de hypergeometrische verdeling. Volgens pag. 92 (Whr. 181) is dus

$$\mathcal{E}\underline{a} = \frac{mr}{N} \qquad \sigma_{\underline{a}}^2 = \frac{m\,n\,r\,s}{N^2(N-1)}$$

Stelt men

$$\underline{l} = \underline{a} - \mathcal{E}\underline{a} = a - \frac{mr}{N}$$

dan wordt

$$\underline{a} = \frac{mr}{N} + \underline{l} \qquad \underline{b} = \frac{nr}{N} - \underline{l}$$

$$\underline{c} = \frac{ms}{N} - \underline{l} \qquad \underline{d} = \frac{ns}{N} + \underline{l}$$

zodat $\frac{\underline{l}}{N}$ overeenkomt met de in 3 genoemde associatie-coëfficiënt. Men heeft voor $\underline{l}$ ook de symmetrische uitdrukking

$$\underline{l} = \frac{\underline{a}\,\underline{d} - \underline{b}\,\underline{c}}{N}$$

terwijl

$$\mathcal{E}\underline{l} = 0 \qquad \sigma_{\underline{l}}^2 = \frac{m\,n\,r\,s}{N^2(N-1)}$$

is.

Voor $\frac{mnrs}{N^3} \to \infty$ zijn $\underline{a}$ en $\underline{b}$ asymptotisch normaal verdeeld, dus is voor grote m, n, r en s:

$$P(a) \approx \frac{1}{\sigma_a\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(a-\frac{mr}{N}\right)^2}{\sigma_a^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_a\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{N-1}{2}\frac{(ad-bc)^2}{mnrs}}$$

De wh $P[a_1 \leqq \underline{a} \leqq a_2]$ is dan bij benadering gelijk aan de integraal van de bijbehorende normale verdelingsdichtheid, uitgestrekt over het interval $a_1 \leqq a \leqq a_2$. Veelal vervangt men, om een betere approximatie te verkrijgen, dit interval door $a_1 - \frac{1}{2} \leqq \underline{u} \leqq a_2 + \frac{1}{2}$. Dit is de zgn. "continuïteitscorrectie", berustende op de sommatieformule van Euler (1732) - Mac Laurin (1742), en somtijds "correctie van Yates"(1934) genoemd. Haar toepassing is alleen zinvol, als de verdeling symmetrisch is, dus in casu als $m = n$ of $r = s$ is (vgl. de uitdrukking voor $\tilde{\mu}_3$, op pag. 93, Whr. 182). De correctie is n.l. $O(\frac{1}{N})$ en bij een symmetrische verdeling treedt nog een fout $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ op. Ook dan blijft overigens nog een fout $O(\frac{1}{N})$ over, die vooral in de "staarten" der verdeling belangrijk wordt.

7. Bij de toetsing van de hypothese H_0 bij type I zullen we nu alternatieve hypothesen toelaten, waarbij $\mathcal{E}\underline{l} \neq 0$ is. Stellen we

$$\mathcal{E}\underline{l} = N\lambda$$

dan noemen we ook nu de kenmerken K en L positief resp. negatief geässocieërd als $\lambda > 0$ resp. $\lambda < 0$ is. We gebruiken een kritiek gebied $\underline{l} \geqq l_2$ resp. $\underline{l} \leqq l_1$, als we onafhankelijk van het beschouwde experiment weten, dat negatieve resp. positieve associatie uitgesloten is, en anders een kritiek gebied: $\underline{l} \geqq l_3$, of $\underline{l} \leqq l_4$. Daarbij zijn $l_1, \dots\dots, l_4$ zo bepaald, dat $P[\underline{l} \geqq l_2] \leqq \alpha$ $P[\underline{l} \leqq l_1] \leqq \alpha$ en $P[\underline{l} \geqq l_3] + P[\underline{l} \leqq l_4] \leqq \alpha$ is. (Daar de verdeling discreet is kan in het algemeen niet bereikt worden, dat de linkerleden $= \alpha$ zijn). Voor niet al te grote waarden van m, n, r, s is de exacte berekening eenvoudig, als men de whn b.v. met de gemeenschappelijke factor $\binom{N}{r}$ vermenigvuldigt, waarbij

$$\binom{N}{r} P(a) = \binom{m}{a}\binom{n}{r-a}$$

wordt. B.v. is voor $m = 5$, $n = 7$, $r = 4$ $(N = 12)$

$$\binom{12}{4} P(0) = \binom{5}{0}\binom{7}{4} = 35$$
$$\binom{12}{4} P(1) = \binom{5}{1}\binom{7}{3} = 175$$
$$\binom{12}{4} P(2) = \binom{5}{2}\binom{7}{2} = 210$$
$$\binom{12}{4} P(3) = \binom{5}{3}\binom{7}{1} = 70$$
$$\binom{12}{4} P(4) = \binom{5}{4}\binom{7}{0} = 5$$
$$\binom{12}{4} = \text{som} = 495$$

Bij rechtszijdige of tweezijdige toetsing met $\alpha = 0{,}05$ bestaat de kritieke vz alleen uit $\underline{a} = 4$, waarbij de ware onbetrouwbaarheid $\frac{5}{495} \approx 0{,}01$ wordt; bij linkszijdige toetsing is de kritieke vz leeg, d.w.z. de aantallen zijn te klein om de hypothese $\lambda = 0$ te kunnen verwerpen als $\lambda > 0$ uitgesloten is. Laat men b.v. waarden tot $\alpha = 0{,}1$ toe, dan komt er in beide gevallen $\underline{a} = 0$ bij, waardoor de onbetrouwbaarheid bij de tweezijdige toets $\frac{5+35}{495} \approx 0{,}08$ en bij de linkszijdige $\frac{35}{495} \approx 0{,}07$ wordt. (Bij de rechtszijdige blijft zij onveranderd).

Voor $m = n = 10$, $r = 7$, $(N = 20)$ is b.v.

$$\binom{20}{7} P(0) = \binom{20}{7} P(7) = \binom{10}{0}\binom{10}{7} = 120$$
$$\binom{20}{7} P(1) = \binom{20}{7} P(6) = \binom{10}{1}\binom{10}{6} = 2100$$
$$\binom{20}{7} P(2) = \binom{20}{7} P(5) = \binom{10}{2}\binom{10}{5} = 11340$$
$$\binom{20}{7} P(3) = \binom{20}{7} P(4) = \binom{10}{3}\binom{10}{4} = 25200$$
$$\text{som} = 38760$$
$$\binom{20}{7} = \text{dubbele som} = 77520$$

Voor $\alpha = 0{,}05$ mag dus de waarde $0{,}05 \times 77520 = 3876$ niet overschreden worden. Bij eenzijdige toetsing b.v. $\lambda = 0$ tegen $\lambda > 0$ bestaat de kritieke vz uit $\underline{a} = 7$ en $\underline{a} = 6$ met $P(7) + P(6) = \frac{120 + 2100}{77520} \approx 0{,}029 \approx 0{,}03$

Bij tweezijdige toetsing kan slechts $\underline{a} = 0$ en $\underline{a} = 7$ genomen worden met $P(0) + P(7) = \frac{2 \times 120}{77520} = 0{,}003$ (of $\underline{a} = 0$, $\underline{a} = 1$ $\underline{a} = 6$ en $\underline{a} = 7$ met $P(0) + P(1) + P(6) + P(7) \approx 0{,}06$ hetgeen $> 0{,}05$ is.) Weliswaar is $P(0) + P(1) + P(7) = P(0) + P(6) + P(7) \approx 0{,}032 < 0{,}05$, maar keuze van één dezer beide kritieke vzn en verwerping der hypothese $\lambda = 0$ svpr $0{,}032$ kan niet tegen $\lambda \neq 0$ geschieden, daar men dan van de alternatieve mogelijkheden hetzij $\lambda > 0$ (door weglating van $P(6)$) hetzij $\lambda < 0$ (door weglating van $P(1)$) onvoldoende in aanmerking genomen heeft.

8. We gaan nu over tot type II. Schrijven we kortheidshalve p resp. q voor ϱ_1 resp. σ_1 en p' resp. q' voor ϱ_2 resp. σ_2 dan is volgens 5 bij willekeurige toegelaten hypothesen

$$P(a,b) = \binom{m}{a}\binom{n}{b} p^a p'^b q^c q'^d$$

De te toetsen hypothese luidt:

$\mathcal{H}_0$ $\qquad p' = p$

Daarbij blijft echter p nog ongespecificeerd, zodat de whn nog van de onbekende parameter p afhangen. Nu is volgens 4 onder de hypothese $\mathcal{H}_0$

$P(a,b)$ het product van de wh $P(r) = \binom{N}{r} p^r q^s$ dat $a+b=r$ is en de wh $P(a|r) = \binom{m}{a}\binom{n}{b}/\binom{N}{r}$ dat $a = a$ is onder voorwaarde dat $a+b=r$ is. Hierin hangt alleen de eerstgenoemde wh van de onbekende parameter af. We kunnen dus een toetsingsmethode baseren op de voorwaardelijke wh, die dezelfde is als bij type I. Geven we de wh-verdeling aan door een massa-verdeling in het (a,b)-vlak, dan komt (zie fig.1 waar $m=5$, $n=7$ is) in elk roosterpunt (punt met gehele coördinaten) met $0 \leq a \leq \min.(m,r)$, $0 \leq b \leq \min.(n,s)$ een massa $P(a,b)$. De wh $P[r=r]$ is de som der massa's op de diagonaal $r=r$ gelegen, en de voorwaardelijke wh $P(a/r)$ is de verhouding van de massa in $(a, r-a)$ tot de som dezer op de diagonaal $r=r$ gelegen massa's. Kiest men nu op elk dezer diagonalen bij een zelfde onbetrouwbaarheidsdrempel α een kritieke vz K_r van roosterpunten, dan is voor iedere r $P[(a,b) \in K_r \mid a+b=r] \leq \alpha$, dus geldt voor de vereniging K dezer kritieke vzn

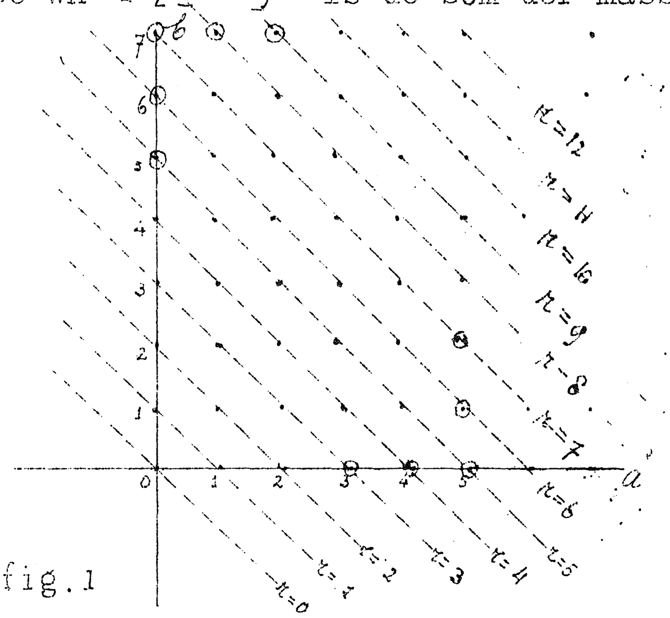


fig.1

$$P[(a,b) \in K] = \sum_r P[(a,b) \in K_r \mid a+b=r] \,.\, P[a+b=r] \leq$$
$$\leq \alpha \sum_r P[a+b=r] = \alpha$$

daar onder de voorwaarde $a+b=r$ de eigenschappen $(a,b) \in K$ en $(a,b) \in K_r$ aequivalent zijn. Derhalve is K een kritieke vz bij dezelfde onbetrouwbaarheidsdrempel α. De onbekende whn $P[a+b=r]$ zijn door de sommatie over r geëlimineerd. Voor het tweezijdige geval bestaat K (voor $\alpha = 0{,}05$) uit de in figuur 1 omlijnde punten.

Men kan dus bij type II precies dezelfde toets toepassen als bij type I. Het verschil tussen de typen uit zich (behalve in het feit dat de berekende whn daar absolute, hier voorwaardelijke zijn) slechts in het onderscheidingsvermogen.

9. Bij type III kan men op overeenkomstige wijze te werk gaan. Hier beschouwen we de roosterpunten in een ruimte, waarbij a, b en c langs de coördinaatassen uitgezet zijn. Deze zijn geheel, ≥ 0 en

gebonden aan de voorwaarde $a+b+c \leq N$, daar $d = N-(a+b+c) \geq 0$ moet zijn. De roosterpunten liggen dus in een gelijkzijdig rechthoekig tetraëder. (Vgl. figuur 2 voor $N=4$). De punten waarvoor $a+b=k$ en $a+c=m$ is, liggen op een rechte in de richting van een lichaamsdiagonaal van het kubische rooster (vgl. fig. voor $k=2$, $m=3$; hier zijn dit alleen de punten $a=b=1$, $c=2$, dus $d=0$ en $a=2$, $b=0$, $c=1$, dus $d=1$).

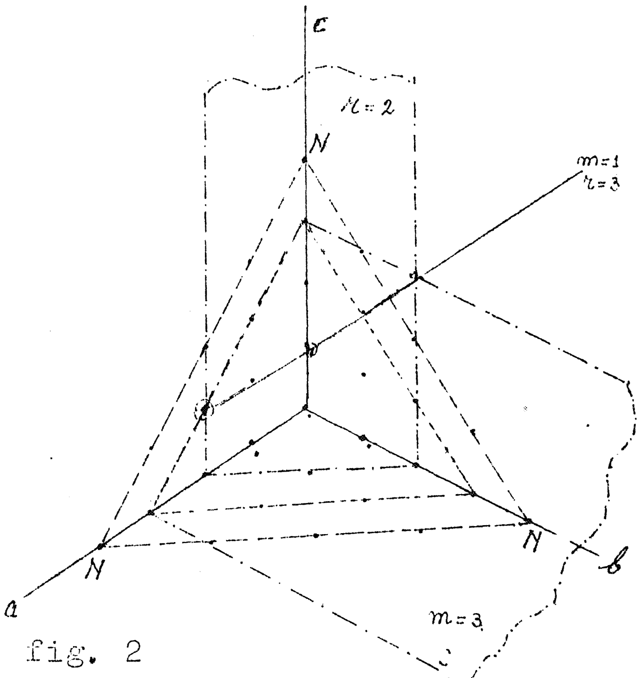


fig. 2

Op elk dezer lijnen bezit $\underline{a}$ weer de hypergeometrische verdeling van type I als voorwaardelijke verdeling. Men kiest dus weer op elk dezer lijnen een kritieke vz $K_{m,k}$ en verenigt deze vzn tot een kritieke vz K. Dan is met $P[(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) \in K_{m,k} / m,k] \leq \alpha$ ook

$$P[(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) \in K] = \sum_{m,k} P[(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) \in K_{m,k} / m,k] \, P[\underline{a}+\underline{c}=m,\ \underline{a}+\underline{b}=k] \leq \alpha$$

Ook hier zijn door de overgang tot de voorwaardelijke whn de onbekende whn geëlimineerd, zodat men ook thans dezelfde toets als bij type I kan toepassen.

10. De term "dubbele dichotomie" wordt door Barnard alleen op type III toepasselijk geacht. Voor type II gebruikt hij de term "2 x 2 comparison trial" en voor type I de term "2 x 2 independence trial", hoewel deze laatste benaming eerder voor type III geschikt schijnt.

11. Tenslotte zullen we nog enige opmerkingen maken over het onderscheidingsvermogen. En wel zullen we deze vastknopen aan het stochastisch belangrijkste type II. Beschouwen we b.v. het geval, dat twee geneeswijzen of -middelen G_1 en G_2 al dan niet een bepaalde uitwerking ("(positieve) reactie") ten gevolge kunnen hebben. De whn dat deze optreedt noemen we p_1 resp. p_2. Deze whn zijn het gevolg van het feit dat sommige patiënten (met fq x) wel op G_1 maar niet op G_2, andere (met fq y) wel op G_2 maar niet op G_1 reageren, als deze wordt toegepast. Bovendien echter kunnen er patiënten zijn (met fq z) die op beide en andere (met fq u) die op geen van beide reageren, of zouden reageren, als de geneeswijzen werden toegepast. (Soms namelijk is het onmogelijk, beide geneeswijzen toe te passen.) In ieder geval geeft het experiment dat zich in de dubbele dichotomie laat uitdrukken alleen uitsluitsel over patiënten, waarop slechts één der beide genees-

wijzen is toegepast. We hebben dan

$$p_1 = x + z \qquad q_1 = 1 - p_1 = y + u$$
$$p_2 = y + z \qquad q_2 = 1 - p_2 = x + u$$

Het is dus niet mogelijk x, y en z (en $u = 1 - x - y - z$) in p_1 en p_2 uit te drukken; één der drie grootheden blijft onbepaald. Indien men echter weet, dat b.v. reactie op G_2 maar niet op G_1 niet kan voorkomen, dan is $y = 0$, dus $z = p_2$ en $x = p_1 - p_2$ en $u = q_1$.

Onder deze algemene hypothese H is bij gegeven m en n

$$P(a, b) = \binom{m}{a}\binom{n}{b} p_1^a q_1^c p_2^b q_2^d$$

Dus

$$P(r) = \sum^a \binom{m}{a}\binom{n}{r-a} p_1^a q_1^{m-a} p_2^{r-a} q_2^{n-r+a}$$
$$= \binom{n}{r} q_1^m p_2^r q_2^{n-r} F\left(-m, -r; n-r+1; \frac{p_1 q_2}{p_2 q_1}\right)$$

waarin $F(a, b; c; x)$ de hypergeometrische fct voorstelt. De voorwaardelijke wh is nu dus

$$P(a|r) = P(a|r, H) = \frac{P(a, r-a)}{P(r)} =$$
$$= \frac{\binom{m}{a}\binom{r}{a}}{\binom{n-r+a}{a}} \cdot \frac{\left(\frac{p_1 q_2}{p_2 q_1}\right)^a}{F\left(-m, -r; n-r+1; \frac{p_1 q_2}{p_2 q_1}\right)}$$

Onder hypothese H_0 is $p_1 = p_2 (= p)$, dus $q_1 = q_2 (= q)$ en $\frac{p_1 q_2}{p_2 q_1} = 1$ 1).

Berekening van het onderscheidingsvermogen, d.w.z. van

$$\alpha(p_1, p_2) = P[(\underline{a}, \underline{b}) \in K / H] = \sum^r P[\underline{a} \in K_r / H]$$

kan slechts numeriek geschieden, bij gegeven N, m, r, p_1 en p_2. Voor grote waarden der randtotalen, preciese voor $\frac{m\,n\,r\,s}{N^3} \gg 1$

---

1) Volgens punt 4 is dan $P(r \mid H_0) = \binom{N}{r} p^r q^s$. De hypergeometrische fct met argument 1 is dus

$$F(-m, -r; n-r+1; 1) = \sum^a \frac{m^{!a}\, r^{!a}}{a!(n-r+a)^{!a}} = \frac{\binom{N}{r}}{\binom{n}{r}}$$

zoals ook rechtstreeks uit de identiteit

$$\sum^a \binom{m}{a}\binom{n}{r-a} = \binom{m+n}{r}$$

kan worden afgeleid. (Deze identiteit volgt direct uit $(1+X)^m(1+X)^n = (1+X)^{m+n}$).

kunnen we met behulp van de asymptotische normaliteit iets meer over $\alpha(p_1, p_2)$ te weten komen. Deze geldt ook hier, daar $P(a,b)$ het product van twee binomiale verdelingen is, die beide asymptotisch normaal zijn:

$$\binom{m}{a} p_1^a q_1^{m-a} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi m p_1 q_1}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(a-mp_1)^2}{mp_1q_1}} da$$

$$\binom{n}{b} p_2^b q_2^{n-b} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n p_2 q_2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(b-np_2)^2}{np_2q_2}} db \qquad (da = db = 1)$$

mits, behoudens $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ $\frac{a}{m} \approx p_1$, $\frac{b}{n} \approx p_2$ is.

Dus

$$P(a,b) \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{mnp_1q_1p_2q_2}} e^{-\frac{1}{2}Q}$$

met

$$Q = \frac{(a-mp_1)^2}{mp_1q_1} + \frac{(b-np_2)^2}{np_2q_2}$$

Voor $b = r - a$ wordt dit met $\tilde{a} = a - mp_1$, $\tilde{b} = b - np_2$, $\tilde{r} = r - mp_1 - np_2$

$$Q = \frac{(a-mp_1)^2}{mp_1q_1} + \frac{(r-a-np_2)^2}{np_2q_2} = \frac{\tilde{a}^2}{mp_1q_1} + \frac{(\tilde{r}-\tilde{a})^2}{np_2q_2} =$$

$$= \left(\frac{1}{mp_1q_1} + \frac{1}{np_2q_2}\right)\left(\tilde{a} - \frac{mp_1q_1}{mp_1q_1 + np_2q_2}\tilde{r}\right)^2 + \frac{\tilde{r}^2}{mp_1q_1 + np_2q_2}$$

Bij integratie van $P(a, r-a)$ over a bij constante r verdwijnt de eerste term van Q in de exponent, terwijl een factor

$$\left(\frac{1}{mp_1q_1} + \frac{1}{np_2q_2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{2\pi m n p_1 q_1 p_2 q_2}{mp_1q_1 + n \cdot p_2q_2}}$$

ontstaat. Dus

$$P(r) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi(mp_1q_1 + np_2q_2)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\tilde{r}^2}{mp_1q_1 + np_2q_2}} dr$$

De eerste term in Q behoort dus zelf bij de voorwaardelijke verdeling:

$$P(a|r) \approx \sqrt{\frac{mp_1q_1 + np_2q_2}{2\pi mp_1q_1 np_2q_2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{mp_1q_1} + \frac{1}{np_2q_2}\right)\left(\tilde{a} - \frac{mp_1q_1}{mp_1q_1 + np_2q_2}\tilde{r}\right)^2} da$$

D.w.z. onder voorwaarde $\underline{r} = r$ is $\underline{a}$ bij benadering normaal verdeeld met variantie $\frac{mp_1q_1 np_2q_2}{mp_1q_1 + np_2q_2}$ en verwachting

$$mp_1 + \frac{mp_1q_1}{mp_1q_1 + np_2q_2}(r - mp_1 - np_2) =$$

$$= \frac{mnp_1p_2}{mp_1q_1 + np_2q_2}(q_2 - q_1) + \frac{mp_1q_1}{mp_1q_1 + np_2q_2} r$$

Onder de hypothese $\mathcal{H}_0$ gaat de eerste term in 0 en de tweede in $\frac{mr}{N}$ over, zodat de verwachting gelijk aan $\frac{mr}{N}$ wordt. Tevens is in het gebied, waar de benadering geldt, voor $p = p_1 = p_2$, behoudens $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$: $p \approx \frac{r}{N}$ $q \approx \frac{s}{N}$, zodat de variantie, behoudens $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ gelijk is aan $\frac{mnrs}{N^2(N-1)}$.

12. We beschouwen het geval dat eenzijdige toetsing kan worden toegepast, doordat b.v. gegeven is, dat $p_1 \geqq p_2$ is. De hypothese $p_1 = p_2$ wordt dan ten gunste van $p_1 > p_2$ verworpen, indien $P[\underline{a} \geqq a \mid r, \mathcal{H}_0] \leqq \alpha$ is. Dit geschiedt dus als

$$a - \frac{mr}{N} \geqq \xi_\alpha \sqrt{\frac{mnrs}{N^3}}$$

is, waarin als vroeger, ξ_α door $\varphi(\xi_\alpha) = 1-\alpha$ met

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi_\alpha} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

gedefinieerd is. We moeten dus trachten, de wh $\alpha(\mathcal{H})$ van de ongelijkheid $a - \frac{mr}{n} \geqq \xi_\alpha \sqrt{\frac{mnrs}{N^3}}$ onder de algemene hypothese $\mathcal{H}$ te berekenen. De beide termen links zijn $O(N)$; hun verschil, evenals het rechter lid is $O(\sqrt{N})$. Daar ook $r - \mathcal{E}\underline{r} = \mathcal{E}\underline{s} - s$ $O(\sqrt{N})$ zijn, kan dus in het <u>rechter</u> lid behoudens een fout van kleine orde (t.w. $O(1)$, d.i. relatief $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$) r door $\mathcal{E}\underline{r} = mp_1 + np_2$ en s door $\mathcal{E}\underline{s} = mq_1 + nq_2$ vervangen worden.

Nu is deze ongelijkheid onder de hypothese $\mathcal{H}$ aequivalent met:

$$\tilde{a} - \frac{mp_1q_1}{mp_1q_1 + np_2q_2}\tilde{r} \geqq \xi_\alpha \sqrt{\frac{mn\,\mathcal{E}\underline{r}\,\mathcal{E}\underline{s}}{N^3}} - \frac{mnp_1p_2}{mp_1q_1+np_2q_2}(q_2-q_1) - \left(\frac{mp_1q_1}{mp_1q_1+np_2q_2} - \frac{m}{N}\right)r$$

$$= \xi_\alpha \sqrt{\frac{mn\,\mathcal{E}\underline{r}\,\mathcal{E}\underline{s}}{N^3}} - \frac{mn(p_1-p_2)}{mp_1q_1+np_2q_2}\left\{p_1p_2 + \frac{r}{N}(1-p_1-p_2)\right\}$$

$$= \xi_\alpha \sqrt{\frac{mn\,\mathcal{E}\underline{r}\,\mathcal{E}\underline{s}}{N^3}} - \frac{mn(p_1-p_2)}{N(mp_1q_1+np_2q_2)}\left\{\tilde{r}(1-p_1-p_2) + mp_1q_1 + np_2q_2\right\}$$

Is dus $\xi = \frac{\eta\tilde{r}}{\sigma_r}$ de verhouding van het laatste lid tot de spreiding van $\underline{a}$ d.i. $\sqrt{\frac{mp_1q_1\,np_2q_2}{mp_1q_1+np_2q_2}}$ dan geeft integratie van $P(a \mid r)$ over de kritieke zône bij constante r $1 - \varphi(\xi - \frac{\eta\tilde{r}}{\sigma_r})$.

Hierin is dus

$$\xi = \left\{\xi_\alpha \frac{\sqrt{(mp_1+np_2)(mq_1+nq_2)}}{N} - (p_1-p_2)\sqrt{\frac{mn}{N}}\right\}\sqrt{\frac{mp_1q_1+np_2q_2}{Np_1q_1p_2q_2}}$$

$$\eta = \frac{(p_1-p_2)(q_1-p_2)}{N}\sqrt{\frac{mn}{p_1q_1p_2q_2}}$$

waar $\sigma_r^2 = mp_1q_1 + np_2q_2$ is. Daar $\frac{\tilde{r}}{\sigma_r}$ $N(0,1)$ verdeeld is, is dus de gezochte wh

$$\alpha(\mathcal{H}) = \int \left\{ 1 - \varphi\left(\xi - \eta \frac{\tilde{r}}{\sigma_r}\right)\right\} d\varphi\left(\frac{\tilde{r}}{\sigma_r}\right) =$$

$$= 1 - \int \varphi(\xi - \eta t)\, d\varphi(t)$$

Nu geldt echter de identiteit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi - \eta t)\, d\varphi(t) = \varphi\left(\frac{\xi}{\sqrt{1+\eta^2}}\right),$$

zoals b.v. blijkt door in de dubbele integraal links de variabelen u en t door $u' = \frac{u + \eta t}{\sqrt{1+\eta^2}}$ en $t' = \frac{t - \eta u}{\sqrt{1+\eta^2}}$ te vervangen en over t' te integreren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi - \eta t} e^{-\frac{1}{2}u^2} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{\xi - \eta t \geq u} dt\, du\, e^{-\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}u^2} = \frac{1}{2\pi} \iint_{u'\sqrt{1+\eta^2} \leq \xi} dt'\, du'\, e^{-\frac{1}{2}t'^2 - \frac{1}{2}u'^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi(1+\eta^2)^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}u'^2} du' = \varphi\left(\frac{\xi}{\sqrt{1+\eta^2}}\right)$$

of ook door op te merken, dat het linker lid de verdelingsfct is van de som van twee o.o. variabelen, waarvan de eerste $N(0,\eta)$ en de tweede $N(0,1)$ verdeeld is, zodat de som $N(0, \sqrt{1+\eta^2})$ verdeeld is.

We hebben dus gevonden, dat (altijd asymptotisch voor $\frac{mnrs}{N^3} \gg 1$)

$$\alpha(\mathcal{H}) \approx 1 - \varphi\left(\frac{\xi}{\sqrt{1+\eta^2}}\right)$$

is, waarin ξ en η de boven aangegeven waarden hebben. Ter contrôle: voor $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ wordt $\xi = \xi_\alpha$ en $\eta = 0$, dus $\alpha(\mathcal{H}_0) = 1 - \varphi(\xi_\alpha) = \alpha$, zoals vereist is.

Om deze uitdrukking voor $\alpha(\mathcal{H})$ te overzien geven we p_2 een constante waarde, terwijl we p_1 van p_2 tot 1 laten toenemen. Daarbij is

$$1+\eta_2^2 = \frac{N^2 p_1 q_1 p_2 q_2 + mn(p_1 q_1 - p_2 q_2)^2}{N^2 p_1 p_2 q_1 q_2} = \frac{(m p_1 q_1 + n p_2 q_2)(m p_2 q_2 + n p_1 q_1)}{N^2 p_1 q_1 p_2 q_2}$$

dus $$\frac{\xi}{\sqrt{1+\eta^2}} = \xi_\alpha \sqrt{\frac{(m p_1 + n p_2)(m q_1 + n q_2)}{N(m p_2 q_2 + n p_1 q_1)}} - (p_1 - p_2)\sqrt{\frac{mn}{m p_2 q_2 + n p_1 q_1}}$$

Bij constante p_1 en p_2 , $\frac{m}{N}$ en $\frac{n}{N}$ is de eerste term voor $N \to \infty$ $O(1)$, de tweede $O(\sqrt{N})$. Derhalve is het linker lid $O(\sqrt{N})$ mits $p_1 \neq p_2$ is en wel gaat het (voor $N \to \infty$ monotoon) naar $-\infty$ zodra $p_2 < p_1$ is, waarbij φ naar 0 , dus $\alpha(\mathcal{H})$ naar 1 gaat. Derhalve is de toets asymptotisch onderscheidend. Voor voldoend grote N is de eerste term t.o.v. de tweede te verwaarlozen, d.w.z. $\alpha(\mathcal{H})$ is dan voor $p_1 > p_2$ bij benadering onafhankelijk van de gekozen onbetrouwbaarheidsdrempel .

Voorts kan bewezen worden, dat $\alpha(\mathcal{H})$ bij constante p_2 en $\frac{m}{n}$ en voldoend grote N een monotoon stijgende fct van p_1 is, d.w.z. dat de toets van de hypothese $p_1 = p_2$ tegen de hypothesen $p_1 > p_2$ zuiver is. Tenslotte willen ~~we~~ nagaan, hoe groot bij gegeven p_2 en $\frac{m}{n}$ N gekozen moet worden om bij een waarde van $p_1 > p_2$ de wh van een fout van de tweede soort $\leq \beta$ te maken terwijl de wh van een fout van de eerste soort $= \alpha$ blijft (steeds bij benadering voor $N \gg 1$). Daartoe moet voor de beschouwde waarde van p_1 $\alpha(\mathcal{H}) \geq 1-\beta$, dus $\varphi\left(\frac{\xi}{\sqrt{1+\eta^2}}\right) \leq \beta$, dus $\frac{\xi}{\sqrt{1+\eta^2}} \leq -\xi_\beta$ zijn, of

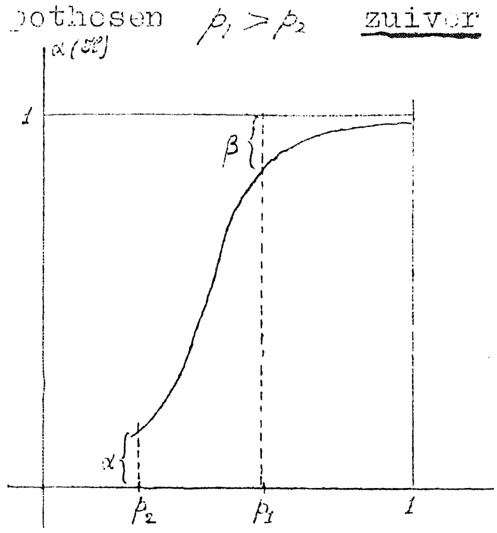


fig 3

$$(p_1 - p_2)\sqrt{\frac{mn}{m p_2 q_2 + n p_1 q_1}} \geq \xi_\alpha \sqrt{\frac{(m p_1 + n p_2)(m q_1 + n q_2)}{N(m p_2 q_2 + n p_1 q_1)}} + \xi_\beta$$

of

$$\sqrt{N} \geq \frac{1}{p_1 - p_2}\left\{ \xi_\alpha \sqrt{\frac{(m p_1 + n p_2)(m q_1 + n q_2)}{mn}} + \xi_\beta \sqrt{\frac{N(m p_2 q_2 + n p_1 q_1)}{mn}} \right\}$$

Deze uitdrukking wordt eenvoudiger als men $m = n$ en $\beta = \alpha$ kiest:

$$\sqrt{N} \geq \frac{\xi_\alpha}{p_1 - p_2}\left\{ \sqrt{(p_1 + p_2)(q_1 + q_2)} + \sqrt{2(p_1 q_1 + p_2 q_2)} \right.$$

Heeft men dus bij een voorlopig experiment de waarden van p_1 en p_2 voorlopig geschat en is P het gemiddelde en δ het verschil van de geschatte waarden en $Q = 1 - P$ dan kan men door $\sqrt{N} \geqq \frac{\xi_\alpha}{\delta}\left\{\sqrt{4PQ} + \sqrt{PQ - \delta^2}\right\}$ en $\sqrt{N} \gg 1$ te kiezen en $m = n$ te nemen bereiken dat
als $p_1 = p_2$ is de wh dat H_0 verworpen wordt $= \alpha$
en als $p_1 - p_2 \geqq \delta$ is de wh dat H_0 niet verworpen wordt $\leqq \alpha$
13.
13. Naast de reeds in 6 genoemde coëfficiënt

$$\ell = \frac{ad - bc}{N}$$

worden nog verschillende andere coëfficiënten gebruikt. K.Pearson (1904) voerde de coëfficiënt

$$R = \ell \frac{N}{\sqrt{mnrs}} = \frac{ad - bc}{\sqrt{mnrs}}$$

in, die hij de "mean square contingency" noemde. Daarvoor geldt

$$\mathcal{E}R = 0 \quad , \quad \sigma_R^2 = \frac{1}{N-1}$$

Voorts is $|R| \leqq 1$. Daarbij is echter het volgende op te merken:
1e. De waarden $R = -1$ en $R = +1$ kunnen in het algemeen niet worden aangenomen; daarom is nodig dat $mr = ns$ resp. $ms = nr$ is, hetgeen vereist dat $m = s$ $n = r$ resp. $m = r$ $n = s$ is. Opdat R de waarden $+1$ en -1 beide kan aannemen is dus nodig, dat $m = n = r = s = \frac{1}{2}N$ is. Men heeft daarom andere coëfficiënten ingevoerd, b.v.

$$\frac{ad - bc}{ad + bc}$$

(G.U.Yule, 1900, 1912) en verschillende andere, die onder minder strenge (of althans andere) voorwaarden de waarden $+1$ en -1 kunnen aannemen. Deze hebben echter merendeels het nadeel, dat hun verdelingsfct onbekend is, en dat b.v. zelfs hun verwachting en spreiding niet te berekenen zijn.
2e. Is $m = r$, $n = s$, dan is $R = +1$ als $b = c = 0$ is, dus $a = m = r$, $d = n = s$ is , en slechts dan. Evenzo is $R = -1$ voor $m = s$ $n = r$, als $a = d = 0$ ($b = n = r$, $c = m = s$) is, en slechts dan.
De coëfficient R is ingevoerd in een tijd, toen men nog meende, aan de waarde van zulk een coëfficiënt, zonder de ver-

deling te kennen, de "mate" van associatie of correlatie te kunnen aflezen, en daarom sterk aan getallen tussen -1 en $+1$ hechtte. Thans is er geen reden meer om aan $\underline{R}$ boven $\underline{\ell}$ of zelfs boven $\underline{a}$ (of een der 3 andere variabelen) de voorkeur te geven.

Naast de mean square contingency voerde K.Pearson (1904) ook nog de "Coefficient of mean square contingency" in, die gedefinieerd is als

$$\underline{c} = \sqrt{\frac{\underline{R}}{1+\underline{R}}}$$

Ook deze coëfficiënt kan in het algemeen de waarde 1 niet aannemen. Verder ontmoet men in de litteratuur soms een door A.A.Tchuprow (1939) voor een $s \times s$ -tabel voorgestelde coëfficient, die voor het hier behandelde geval ($s = s = r$) gelijk is aan $\sqrt{\underline{R}}$.

Men ontmoet deze coëfficiënten vaak in een andere vorm, die uit de hier vermelde verkregen wordt, door de substitutie

$$\underline{\chi}^2 = \frac{N(\underline{a}\,\underline{d} - \underline{\ell}\,\underline{c})}{m\,n\,r\,s}$$

Dit is, zoals gemakkelijk na te rekenen is, de waarde, die $\underline{\chi}^2$ onder de hypothese H_0 aanneemt.

Vgl. ook M.G.Kendall I, p.306 en hoofdstuk 13.

Litteratuur:

G.A.Barnard, A new test for 2 x 2 tables, Nature 156 (1945) p.177

- - - - , Significance tests for 2 x 2 tables, Biometrika 34 (1947) p.123-128.

R.A.Fisher, Nature 156 (1945) p.388

D.J.Finney, The Fisher-Yates test of significance in 2 x 2 contingency tables, Biometrika 35 (1948) p.145-156

M.G.Kendall, The advanced theory of Statistics, I, London 1947.

P.B.Patnaik, The power function of the test for the difference between two proportions in a 2 x 2 table, Biometrika 35 (1948) p.157-175.

E.S.Pearson, The choice of statistical tests illustrated on the interpretation of data classed in a 2 x 2 table, Biometrika 34 (1947) p.139-167.

E.S.Pearson and M.Merrington, 2 x 2 Tables; the power function of the test on a randomized experiment, Biometrika 35 (1948) p.331-345.

K. Pearson, Mathematical contribution to the theory of evolution XIII. On the theory of contingency and its relation to association and normal correlation, Draper's Co. Research Memoirs (1904), Biometric Series I; ook in: K.Pearson's early Statistical papers, Cambridge Un. Press 1948, zie pag. 446 en 448.

A.A.Tchuprow, The mathematical theory of correlation, 1939.

Gt.U.Yule, On the association of attributes in statistics Phil. Trans. A 194 (1900) p.257.

— — — , On the methods of measuring the association between two attributes, Journ. Roy. Stat. Ass. Soc. 75 (1912), p. 579.

Inhoudsopgave der cursus

Waarschijnlijkheidsrekening.

1946 - 1947.

Inhoudsopgave der kadercursus
Mathematische Statistiek, Mathematisch Centrum,
Amsterdam 1947-1950.
Tevens cursus Waarschijnlijkheidsrekening 1947-1950.

Hoofdstuk 1

Grondbegrippen en Grondproblemen

Hoofdstuk 2

Hoofdstuk 3

Hoofdstuk 5.
Monster- en Toetsingstheorie II