De opgave is: voor gegeven x en y uit het schema

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & x & \frac{x^2}{2!} & \frac{x^3}{3!} & \cdots\cdots \\
y & xy & \frac{x^2y}{2!} & \frac{x^3y}{3!} & \cdots\cdots \\
\frac{y^2}{2!} & \frac{xy^2}{2!} & \frac{x^2y^2}{2!2!} & \frac{x^3y^2}{3!2!} & \cdots\cdots \\
\frac{y^3}{3!} & \frac{xy^3}{3!} & \frac{x^2y^3}{2!3!} & \frac{x^3y^3}{3!3!} & \cdots\cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

S_2^*

S_1^*

--- S_2 S_1 S_0

de sommen S_0 en $\sum_1^\infty \nu S_\nu$ en $\sum_1^\infty \nu S_\nu^*$ te bepalen. Voor de berekening zal van de volgende formules en eigenschappen van Bessel-functies gebruik worden gemaakt:

(1) $\quad I_n(z) = \sum_0^\infty r \; \dfrac{(\frac{1}{2}z)^{n+2r}}{r!(n+r)!}$ waaruit gemakkelijk volgt:

(2) $\quad I_{n+1}(z) < \dfrac{z}{2(n+1)} \; I_n(z)$.

Verder van de recursieformule

(3) $\quad I_{n+1}(z) = I_{n-1}(z) - \dfrac{2n}{z} I_n(z)$.

$I_0(z)$ en $I_1(z)$ zijn getabelleerd, $I_n(z)$ voor grotere z niet, of niet met voldoende nauwkeurigheid. $I_n(z)$ wordt, voorzover nodig, met behulp van(3) berekend. Nu is volgens (1):

(4) $\quad S_0 = I_0(2\sqrt{xy})$; $\quad S_n = (\sqrt{\frac{y}{x}})^n I_n(2\sqrt{xy})$

en $\quad S_n = (\sqrt{\frac{x}{y}})^n \; I_n(2\sqrt{xy})$.

De S_0 kan dus na berekening van $2\sqrt{xy}$ worden opgezocht. Van de twee nog te berekenen sommen $\sum_1^\infty \nu S_\nu$ en $\sum_1^\infty \nu S_\nu^*$ berekenen we de eerste als $y < x$ en de tweede als $y > x$ is. Wordt deze reeks na de m^e term afgebroken, dan volgt uit (2), dat

$$\sum_{m+1}^{\infty} S_\nu^{(*)} < S_m^{(*)} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{y^{7}}{m+1}\right)^\nu = S_m^{(*)} \frac{y^{7}}{m+1-y^{7}} .$$

7 resp. x (voor zonder en met *).

Hiermee kan men dus ~~in~~ na de berekening van iedere nieuwe term gemakkelijk zien of reeds een voldoende benadering is bereikt.

Daar verder de som $S_0 + \sum_1^\infty S_\nu + \sum_1^\infty S_\nu^* = e^{x+y}$ is kan men de nog overgebleven deelsom gemakkelijk vinden. Indien x en y niet ongeveer gelijk zijn, zal men meestal met de berekening van slechts enkele I_n's kunnen volstaan; het aantal is afhankelijk van de gewenste nauwkeurigheid.

Voorbeelden: voor $x = 0{,}734$, $y = 1{,}561$ is

$$e^{x+y} = 9{,}924$$
$$S_0 = 2{,}519$$
$$\sum_1^\infty S_\nu = 5{,}669$$
$$\sum_1^\infty S_\nu^* = 1{,}736$$

(bij de berekening moest I_n berekend worden t.e.m. $n = 6$ om een nauwkeurigheid van zwakke 4 cijfers te bereiken).

Voor $x = 0{,}654$, $y = 2{,}813$ is

$$e^{x+y} = 32{,}04$$
$$S_0 = 3{,}88$$
$$\sum_1^\infty S_\nu = 26{,}22$$
$$\sum_1^\infty S_\nu^* = 1{,}94$$

(bij de berekening moest I_n berekend worden t.e.m. $n = 6$ om een naukeurigheid van zwakke 4 cijfers te bereiken).[1]

De hier bereikte nauwkeurigheid komt overeen met die van de gegeven getallen x en y. Indien deze echter in meer dan drie decimalen gegeven zouden zijn, zou een grotere nauwkeurigheid met de hier gevolgde methode toch niet zonder meer te bereiken zijn, daar de recursieformule (3), tengevolge van afrondingsfouten, voor toenemende n steeds onbetrouwbaarder wordt.

[1] Zwakke vier cijfers betekent, dat het vierde cijfer één eenheid fout kan zijn.