STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

S 16

Hemelrijk J

Beantwoording van enkele vragen omtrent de grondslagen der waarschijnlijkheidsrekening.

(MANUSCRIPT)

1949

Amsterdam, 16 Juni 1949.

Geachte Heer,

Met genoegen zal ik trachten de door U ondervonden begripsmoeilijkheid op te helderen, te meer daar ~~dit~~ Uw vraag het centrale punt is van de toepassing der waarschijnlijkheids-rekening betreft. De door U genoemde kwestie is er een, die reeds vanaf het ~~begin~~ ontstaan van de waarschijnlijkheids-rekening velen heeft beziggehouden en waarvan een duidelijke beantwoording niet zo gemakkelijk in de litteratuur te vinden is; het boek van E. Borel, Valeur pratique et philosophie des probabilités ~~[illegible]~~, Gauthier-Villars, Paris 1939 zal U echter wellicht interesseren, daar dit o.a. de grondslagen behandelt.

Men kan de toepassing van de waarschijnlijkheidsrekening ~~[illegible]~~ op de volgende wijze beschouwen:

De door U genoemde ervarings-wet, dat het toeval naar een gemiddelde streeft, die gewoonlijk de wet der grote getallen wordt genoemd, kan uit een eenvoudigere wet worden afgeleid, nl. uit de volgende:

Indien men een ~~[illegible]~~ experiment, dat verschillende uitkomsten kan hebben, waaronder er eén is (die we b.v. met A aangeven), die een zeer geringe waarschijnlijkheid bezit, eén maal uitvoert, treedt A niet op.

Men dient ~~dit~~ hieruit niet ~~op te vatten~~ de conclusie te trekken dat A ~~[illegible]~~ onmogelijk kan optreden, immers dan zou de kans op het optreden van A gelijk nul moeten zijn; men kan echter wel ~~[illegible]~~ zeggen, dat het optreden van A, indien men het experiment eén maal uitvoert, „practisch onmogelijk" is. Men houdt dan ook met de mogelijkheid, dat A optreedt, in de practijk geen rekening. ~~[illegible]~~ Het volgende voorbeeld kan dit misschien duidelijk maken: stel U voor, dat U een ~~het~~ ton hebt met een millioen knikkertjes, waaronder zich eén zwart knikkertje bevindt. Indien U blindelings eén knikkertje uit deze ton trekt, zal het „practisch zeker" ~~[illegible]~~ niet het zwarte zijn. Het is, dat zult U vermoedelijk met mij eens zijn, volkomen verantwoord te voorspellen, dat niet het zwarte knikkertje getrokken zal worden. Dit wordt ~~ook~~ door experimenten bevestigd, o.a. door de door U uitgevoerde. De bovenstaande wet dient dan ook, evenals met de ~~door U genoemde~~ wet der grote getallen gewoonlijk gebeurt, als een ervarings-wet te worden opgevat. ~~Ik~~

Ik zal nu niet ingaan op de wijze, waarop uit deze eenvoudigere wet die der grote getallen afgeleid kan worden, daar dit voor Uw vraag weinig ter zake doet. Wel moet ik wijzen op een ander directer gevolg van deze wet, dat hieruit bestaat, dat bij één enkel experiment een uitkomst B, die een zeer grote (d.w.z. zeer dicht bij ~~de~~ 1 gelegen kans bezit) „practisch zeker" wel optreedt. Deze wet ~~is~~ ~~volmaakt~~ is aequivalent met de ~~het complement van~~ bovenstaande, zoals gemakkelijk is in te zien.

Indien men nu echter het experiment een groot aantal malen herhaalt, is de kans, dat onder al ~~die~~ de zo verkregen uitkomsten A eens zal optreden groter dan ~~de~~ de kans, dat dit bij één enkel experiment zal gebeuren. Men kan zelfs, als de kans op A bij één experiment bekend is, uitrekenen ~~..~~ hoe vaak men het experiment zou moeten herhalen, om ~~te~~ „practisch zeker" te zijn, dat A minstens één maal zou optreden. En zou men inderdaad het experiment zo vaak herhalen, dan zou dit deze voorspelling ook bevestigen, evenals alle experimenten de wet der grote getallen bevestigen. Dit is in het geheel niet in tegenstrijd met de kleine kans op het optreden van A bij één experiment. Stel men voert n experimenten uit, dan is het optreden van A bij ieder van deze experimenten op zichzelf een onwaarschijnlijk en men zal dan ook nooit kunnen voorspellen bij welk van deze n experimenten A zal optreden. Indien men dus b.v. voorspelt: „bij het eerste experiment zal A optreden", dan is deze voorspelling practisch zeker fout. Evenzeer indien men zegt: „bij het 5226ste experiment zal A optreden." Indien men echter zegt: „Onder de eerste n (met n voldoende groot) experimenten bevindt er zich een, waarbij A optreedt", dan doet men een uitspraak ~~niet~~ over een samengesteld experiment en niet meer over de experimenten afzonderlijk. Het samengestelde experiment is: n maal het oorspronkelijke experiment uit te voeren. Vat men nu dit samengestelde experiment als één enkel experiment ~~op~~ van een hogere trap op, dan heeft daarbij het minstens "één" maal optreden van A een zeer grote kans, dus het in het geheel niet optreden van A een zeer geringe en men zal dus, op grond van de genoemde ervaringswet met een gerust hart kunnen ~~zeggen~~ voorspellen, dat A minstens één maal ~~zou~~ zal optreden. Men kan echter in het geheel niets zeggen over de plaats in de serie experimenten, waar dit ~~zou~~ zal gebeuren.

Zoals U ziet zoeken wij de oplossing in de richting, die U zelf ook aanduidt. In verband daarmee nog wel iets over de kans ~~van een roulette~~ om 40 maal achter elkaar kruis te gooien met een zuivere munt. Deze is inderdaad $1/2^{40}$, d.w.z. het is practisch onmogelijk, en als iemand het U voor zou doen ~~hebt U het e~~ kunt U met het volste vertrouwen concluderen, dat de munt niet zuiver is, of de wijze van werpen niet in orde. Indien U echter het geduld zoudt hebben om ~~zo~~ te blijven kijken tot het experiment enige milliarden malen herhaald is, durf ik U wel te voorspellen, dat U dat evenement niet zoudt hebben meegemaakt. F ~~Het onderscheiden aangeven, dat een zeer kleine kans door een getal (zoals $1/2^{40}$)) van nul, is dus slechts toeval, als het experiment zeer vaak herhaald kan worden.~~ Dit is een situatie die in natuur- en scheikundige problemen vaak optreedt; maar inderdaad is het bij het werpen van een munt niet zeer toeval, omdat een dergelijke lange serie experimenten nauwelijks te verwachten is. Dat (helaas) in de boeken over waarschijnlijkheidsrekening toch vaak gesproken wordt vindt zijn oorzaak in het feit, dat het werpen met een munt of dobbelsteen e.d. als eenvoudig voorstelbaar model ~~worden geb~~ voor ingewikkeldere situaties worden gebruikt.

F Het is dus slechts dan toeval en zeer kleine kans (zoals $1/2^{40}$) van waarschijnlijkheid nul te onderscheiden, als het experiment vaak herhaald kan worden. (achterop z)

Tenslotte nog een korte opmerking over Uw reeksen toevals-cijfers. In Engeland zijn zeer grote dergelijke reeksen gepubliceerd door L.H.C. Tippett, Random Sampling numbers, Cambridge University Press 1927 en door M.G. Kendall and B. Babington Smith, Tables of random sampling numbers, Cambridge University Press 1939. Indien het U dus niet om de experimenten maar om de resultaten daarvan te doen is, zoudt U Uw series daaruit kunnen halen. In Uw wijze van uitvoeren van het trekkingsexperiment zit bovendien een inconsequentie: zoals U zelf zegt, heeft het toeval geen geheugen; door echter het getrokken kaartje ~~nummer~~ bovenin de schaal te leggen en dan weer onderuit te nemen, geeft U echter het toeval wel een geheugen, daar het op die wijze onmogelijk wordt hetzelfde ~~nummer~~ kaartje direct weer te trekken. Strict genomen zou U tussen iedere twee trekkingen de stukjes carton flink dooreen moeten mengen. Daar echter het aantal kaartjes vrij groot is, bezitten Uw trekkingsreeksen vermoedelijk toch wel min of meer het karakter van toevalsreeksen, zoals U die wenst.

Hopende U de gewenste ~~inlichtingen~~ inlichtingen te hebben verschaft

Hoogachtend