Antwoord rapport aangehecht. 20/12/49

LABORATORIUM VOOR
AERO- EN HYDRODYNAMICA
DER
TECHNISCHE HOOGESCHOOL

DELFT, 29 November 1949
Nieuwe Laan 76
Telefoon 1311

S 29

Professor dr. D. van Dantzig.
Valeriusstraat 58,
Amsterdam Z.

Waarde van Dantzig,

Hierbij zend ik je een paar notities over de eigenschappen van de statistische systemen die me bezighouden.

De hoofdzaak staat op blz. 1 en 2, en de belangrijkste eigenschap is form. (4) op blz. 2. Indien form. (5) te veel gevergd lijkt, zou ik die kunnen missen. Formules (5) en (5a) geven echter grote vereenvoudigingen in berekeningen.

Ik kan (met de methode van de ketting, die ~~van~~ tegen de binnenzijde van een gesloten oppervlak ligt) systemen construeren die aan alle eisen van blz. 1 en 2 voldoen. Doch bij deze groep van systemen kan λ_L nooit groter zijn dan 2, terwijl (in de notatie van blz. 3) :

$$f(\lambda) = f(2-\lambda).$$

Nu zou ik willen weten of men een algemene methode kan aangeven, om systemen te construeren die aan de eisen van blz. 1 en 2 voldoen.

Ten aanzien van de formules van blz. 3 - 5, kan ik als voor mij het meest brandende probleem noemen : Indien de functie $f(\lambda)$ gegeven is, hoe kan men dan een symmetrische functie $\Phi(\lambda_1, \lambda_2)$ vinden, die voldoet aan (10) en (11) en waarvoor de integraal

$$\int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty d\lambda_2 \; \Phi(\lambda_1, \lambda_2) . \lambda_1 \lambda_2 = 1 + \theta_1$$

een gegeven waarde bezit? Wat is de kleinste waarde van $1 + \theta_1$, die men kan bereiken?

Een eenvoudig doch wel belangrijk geval is dat waarin :

$$\begin{cases} f(\lambda) = \frac{1}{2} \text{ voor } 0 < \lambda < 2 \\ f(\lambda) = 0 \text{ voor } \lambda > 2. \end{cases}$$

Dan is :

$$\overline{\lambda} = 1 \; , \; \overline{\lambda^2} = \frac{4}{3} \quad \text{en} \quad \theta_0 \; \frac{1}{3}.$$

Neem ik :

LABORATORIUM VOOR
AERO- EN HYDRODYNAMICA
DER
TECHNISCHE HOOGESCHOOL

DELFT,
Nieuwe Laan 76
Telefoon 1311

$$p(\lambda_1, \lambda_2) = \delta(\lambda_1 - \lambda_2),$$

waar δ de functie van Dirac is, dan volgt :

$$\overline{\lambda_1 \lambda_2} = \overline{\lambda^2} = \frac{4}{3}.$$

$\theta_1 = \frac{1}{3}$ $\rho = \frac{\theta_1}{\theta_0} = +1$

Anderzijds met

$$p(\lambda_1, \lambda_2) = \delta(2 - \lambda_1 - \lambda_2)$$

volgt :

$$\overline{\lambda_1 \lambda_2} = \overline{\lambda(2-\lambda)} = \frac{2}{3}$$

$\theta_1 = -\frac{1}{3}$ $\rho = -1$

Zijn dit de uiterste waarden? Hoe construeert men systemen hiertussen?

Dan is er nog de vraag : onder welke omstandigheden is

$$\theta_k = \theta^k \quad (k \geq 1) ?$$

Is het ontworpen schema daarvoor reeds voldoende, of zijn nog meer eisen te stellen?

Verder : wat is nodig opdat form. (19) op blz. 6 geldig is?

Tenslotte het probleem genoemd op blz. 7 na formule (21).

Ik wil je zeker niet met deze dingen lastig vallen , je hebt het zelf druk genoeg. Wat ik zou willen weten is of je dergelijke problemen bent tegengekomen? Zijn ze ergens behandeld?

Ik geloof dat ze toch wel de moeite waard zijn. - Het feit dat λ, $f(\lambda)$, p & Φ nooit negatief kunnen worden, maakt dat je geen gebruik kunt maken van eigenschappen van orthogonale functiestelsels.

Met hartelijke groeten

J.M. Burgers.

Eigenschappen te verlangen van het beschouwde statistische systeem.

Beschouwd wordt een zich naar beide zijden tot in het oneindige voortzettend systeem van positieve grootheden :

$$\ldots, \lambda_{i-2}, \lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, \ldots$$

van zodanige aard, dat het mogelijk is te spreken van gemiddelden, zoals bv.

$\overline{\lambda_i}$

$\overline{F(\lambda_i)}$, waar F een functie is van λ_i ,

$\overline{\lambda_i \lambda_{i+k}}$ (met vaste waarde van k) ,

en derg. De hier bedoelde gemiddelden worden gedefinieerd als de limiet van de uitdrukking welke men verkrijgt door de beschouwde grootheid te sommeren naar i over een groot aantal N van op elkaar volgende waarden, en de som te delen door N, waarna men N onbepaald laat toenemen. De limiet moet niet alleen onafhankelijk zijn van N, doch ook invariant zijn ten opzichte van een willekeurige verschuiving (naar links of naar rechts) van het aanvangspunt der telling.

Ondersteld wordt dat de eenheid waarmede de λ_i gemeten worden, zo gekozen is dat :

$(\lambda_i \geqslant 0)$ $$\overline{\lambda_i} = 1 \qquad (1)$$

Thans wordt geschreven :

$$\overline{\lambda_i \lambda_{i+k}} = 1 + \theta_k \tag{2}$$

(naar reeds is vermeld, wordt bij de berekening van het gemiddelde gesommeerd naar de index <u>i</u>, bij een vaste waarde van <u>k</u>). In het bijzonder is :

$$\overline{\lambda_i^2} = 1 + \theta_0 \tag{2a}$$

waarbij $\theta_0 \geqslant 0$ (de θ_k voor $k \neq 0$ kunnen bij gelegenheid ook negatief zijn).

Uit het feit dat een gemiddelde onafhankelijk is van het beginpunt der telling volgt :

en dus :

$$\left.\begin{aligned} \overline{\lambda_i \lambda_{i+k}} &= \overline{\lambda_{i-k} \lambda_i} = \overline{\lambda_i \lambda_{i-k}} \\ \theta_k &= \theta_{-k} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

De hier verschenen betrekking zal verscherpt worden tot de eis, dat <u>alle statistische eigenschappen van het systeem invariant moeten zijn ten opzichte van een omkering van de volgorde</u> (d.i. van de richting waarin <u>i</u> wordt geteld).

Aan het stelsel worden bovendien de volgende eisen gesteld :

(I) $$\underline{\theta_0 + 2\theta_1 + 2\theta_2 + \ldots \text{ad inf.} = 0} \tag{4}$$

(II) $$\underline{\overline{\lambda_i \lambda_{i+h} \lambda_{i+k}} = 1 + \theta_h + \theta_k + \theta_{h-k}} \tag{5}$$

met als speciale gevallen :

$$\overline{\lambda_i^3} = 1 + 3\theta_0 \quad ; \quad \overline{\lambda_i^2 \lambda_{i+k}} = 1 + \theta_0 + 2\theta_k \tag{5a}$$

Frequentiefunctie voor λ_i .

Voor de waarden van de λ_i kan men een frequentiefunctie aangeven $f(\lambda)\,d\lambda$, van zodanige aard dat wanneer men N achtereenvolgende λ_i in beschouwing neemt, hiervan $N \cdot f(\lambda)\,d\lambda$ gelegen zullen zijn tussen voorgeschreven grenzen λ en $\lambda + d\lambda$. Het bestaan van een dergelijke functie is een gevolg van de stelling omtrent het bestaan van gemiddelden. Men definiëre daartoe een functie $\Psi(\lambda_i)$ met de eigenschap :

$$\Psi(\lambda_i) = 0 \quad \text{zo} \quad \lambda_i < \lambda \text{ of } \lambda_i > \lambda + d\lambda$$

$$\Psi(\lambda_i) = 1 \quad \text{zo} \quad \lambda < \lambda_i < \lambda + d\lambda .$$

Dan is :

$$f(\lambda)\,d\lambda = \overline{\Psi(\lambda_i)}$$

welk gemiddelde bestaat.

Men heeft nu :

$$f(\lambda) \geq 0 \; ; \qquad \int_0^\infty f(\lambda)\,d\lambda = 1 \tag{6}$$

op grond van de definitie van f(λ)

$$\int_0^\infty f(\lambda)\,\lambda\,d\lambda = 1 \tag{7}$$

op grond van (1)

$$\int_0^\infty f(\lambda)\,\lambda^2\,d\lambda = 1 + \theta_0 \tag{8}$$

op grond van (2a)

Wanneer men vervolgens alle λ_i beschouwt welke gelegen zijn tussen voorgeschreven grenzen λ en $\lambda + d\lambda$, kan men voor deze λ_i de verdeling nagaan van de waarden der op hen volgende λ_{i+1}. Ook hiervoor zal een frequentiefunctie bestaan .

$$p(\lambda_i, \lambda_{i+1})\, d\lambda_{i+1}$$

met de eigenschappen :

$$p \geqslant 0 \quad ; \quad \int_0^\infty p(\lambda_i, \lambda_{i+1})\, d\lambda_{i+1} = 1 \tag{9}$$

Dan is de <u>verdelingsfunctie voor de gelijktijdige waarden van λ_i en λ_{i+1}</u> gegeven door :

$$\Phi(\lambda_i, \lambda_{i+1})\, d\lambda_i\, d\lambda_{i+1} = f(\lambda_i)\, p(\lambda_i, \lambda_{i+1})\, d\lambda_i\, d\lambda_{i+1} \tag{10}$$

Ter bekorting zij λ_1, λ_2 geschreven in plaats van λ_i, λ_{i+1} :

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2 = f(\lambda_1)\, p(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \tag{10a}$$

Men heeft op grond van (9) :

$$f(\lambda_1) = \int_0^\infty \Phi(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_2 \tag{11}$$

Op grond van de eis van invariantie van het systeem ten opzichte van een omkering der volgorde is het nodig dat Φ de eigenschap bezit :

$$(\Phi \geqslant 0) \qquad \underline{\underline{\Phi(\lambda_1, \lambda_2) = \Phi(\lambda_2, \lambda_1)}} \tag{12}$$

zodat :

$$f(\lambda_1)\, p(\lambda_1, \lambda_2) = f(\lambda_2)\, p(\lambda_2, \lambda_1) \tag{12a}$$

Uit (11) en (12a) volgt :

$$f(\lambda_1) = \int_0^\infty d\lambda_2\, f(\lambda_2)\, p(\lambda_2, \lambda_1) \tag{13a}$$

en dus ook :

$$f(\lambda_2) = \int_0^\infty d\lambda_1\, f(\lambda_1)\, p(\lambda_1, \lambda_2) \tag{13b}$$

De frequentiefunctie f voldoet dus aan een integraalvergelijking met p als kern.

De volgende betrekkingen (welke voortvloeien uit de reeds eerder vermelde) mogen hier nog worden samengevat :

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty d\lambda_2 \, f(\lambda_1)\, p(\lambda_1, \lambda_2) \qquad\qquad &= 1 \\
\text{-- -- -- -- -- -- -- --} \quad \lambda_1 &= 1 \\
\text{-- -- -- -- -- -- -- --} \quad \lambda_2 &= 1 \\
\text{-- -- -- -- -- -- -- --} \quad \lambda_1^2 &= 1 + \theta_0 \\
\text{-- -- -- -- -- -- -- --} \quad \lambda_2^2 &= 1 + \theta_0 \\
\text{-- -- -- -- -- -- -- --} \quad \lambda_1 \lambda_2 &= 1 + \theta_1
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Uit (13b) volgt thans :

$$f(\lambda_3) = \int_0^\infty d\lambda_2 \, f(\lambda_2)\, p(\lambda_2, \lambda_3) =$$

$$= \int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty d\lambda_2 \, f(\lambda_1)\, p(\lambda_1, \lambda_2)\, p(\lambda_2, \lambda_3) \qquad (15)$$

en voorts :

$$f(\lambda_k) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty d\lambda_1 \, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{k-1} \, f(\lambda_1)\, p(\lambda_1, \lambda_2) \ldots p(\lambda_{k-1}, \lambda_k) \qquad (16)$$

Men zal derhalve kunnen onderstellen dat de verdelingsfunctie voor de gelijktijdige waarden van k op elkander volgende is gegeven door :

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k) = f(\lambda_1)\, p_{12}\, p_{23} \ldots p_{k-1,k} \qquad (17)$$

Op grond van (12a) kan men hiervoor ook schrijven :

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k) &= f(\lambda_1)\, p_{12}\, p_{23} \cdots p_{k-1,k} = \\ &= p_{21}\, f(\lambda_2)\, p_{23} \cdots p_{k-1,k} = \\ &= p_{21}\, p_{32}\, f(\lambda_3)\, p_{34} \cdots p_{k-1,k} = \\ &= p_{21}\, p_{32} \cdots p_{k-1,k-2}\, p_{k,k-1}\, f(\lambda_k) \end{aligned}\right\} \qquad (17\underline{a})$$

Men heeft tevens de volgende betrekking :

$$f(\lambda_p) = \int_0^\infty d\lambda_1 \ldots \int_0^\infty d\lambda_{p-1} \int_0^\infty d\lambda_{p+1} \ldots \int_0^\infty d\lambda_k\, \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k) \qquad (18)$$

waarbij ondersteld is dat p voorkomt in de reeks 1......k . Men kan ook verdelingsfuncties afleiden voor de gelijktijdige waarden van twee of meer niet onmiddelijk op elkander volgende λ's , mits de afstanden door deze reeks worden omvat.

Daar :

$$\lambda_p \lambda_q \lambda_r = 1 - \lambda_p - \lambda_q - \lambda_r + \lambda_p \lambda_q + \lambda_p \lambda_r + \lambda_q \lambda_r - (1-\lambda_p)(1-\lambda_q)(1-\lambda_r),$$

volgt uit de in (5) gestelde voorwaarde voor de λ's , dat de hier beschouwde frequentiefuncties aan de voorwaarde moeten voldoen :

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty d\lambda_1 \ldots d\lambda_k\, f(\lambda_1)\, p_{12}\, p_{23} \cdots p_{k-1,k} (1-\lambda_p)(1-\lambda_q)(1-\lambda_r) = 0 \qquad (19)$$

mits $\underline{p}$, $\underline{q}$, $\underline{r}$ behoren tot de reeks 1 ... k .

Frequentiefuncties voor de som van enige op elkander volgende λ's.

De frequentiefunctie voor de som van twee op elkander volgende λ's, $f(\Lambda)d\Lambda$, waarbij $\Lambda = \lambda_i + \lambda_{i+1}$, wordt verkregen door middel van de integraal :

$$f_2(\Lambda) = \int_0^{\Lambda} d\lambda_1 \, \Phi(\lambda_1, \Lambda - \lambda_1) = \int_0^{\Lambda} d\lambda_1 \, f(\lambda_1) \, p(\lambda_1, \Lambda - \lambda_1) \qquad (20)$$

Op analoge wijze heeft men voor de som :

$$\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$$

de frequentiefunctie $f_k(\Lambda)\,d\Lambda$, bepaald door :

$$f_k(\Lambda) = \int_0^{\Lambda} d\lambda_{k-1} \int_0^{\Lambda - \lambda_{k-1}} d\lambda_{k-2} \dots \int_0^{\dots} d\lambda_1 \, \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \Lambda - \lambda_{k-1} - \dots - \lambda_1) \qquad (21)$$

Voor het uitwerken van statistische problemen is het van belang te weten op welke wijze de tussen de λ's bestaande correlaties invloed hebben op de vorm van deze nieuwe frequentiefuncties. Verder zouden asymptotische eigenschappen van belang zijn voor grote waarden van de index k.

De volgende eigenschap kan onmiddelijk worden aangegeven :

$$\lim_{\Lambda \to 0} f_k(\Lambda) \backsim \Lambda^{k-1} \qquad (22)$$

of nog kleiner.

STATISTISCHE AFDELING

Waarde Burgers,

Ik ontving je brief met exposé en probleemstelling, die me nu, geloof ik, wel duidelijk is. Ik heb me voorlopig nog slechts verdiept in de vragen, die op je pag.3-4 betrekking hebben (2e helft van pag.1 en 1e helft van pag.2 van je brief). Het is het eenvoudigste met de laatste te beginnen.

I. Zijn de aangegeven waarden $\theta_1 = -\frac{1}{3}$ en $\theta_1 = +\frac{1}{3}$ de kleinste en de grootste die θ_1 kan bereiken? Neen; θ_1 kan willekeurig dicht bij 0 komen en willekeurig groot (mits $\leq \theta_0$) worden.

Voor het bewijs is het het eenvoudigste, van de fct [1] $\varphi(\lambda_1, \lambda_2)$ uit te gaan. Deze is de dichtheid van en symmetrische wh-verdeling [2] in het eerste quadrant van het (λ_1, λ_2)-vlak, die men zich ook door een massa-verdeling met totale massa 1 kan veraanschouwelijken. Zij moet dus voldoen aan de voorwaarden:

1e $\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \varphi(\lambda_2, \lambda_1)$

2e $\int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty d\lambda_2 \varphi(\lambda_1, \lambda_2) = 1$

Hiermede is $f(\lambda)$ bepaald:

$$f(\lambda) = \int_0^\infty \varphi(\lambda, \mu) d\mu = \int_0^\infty \varphi(\mu, \lambda) d\mu \qquad (\lambda \geq 0) \qquad (11)$$

alsmede $p(\lambda_1, \lambda_2)$:

$$p(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\varphi(\lambda_1, \lambda_2)}{f(\lambda_1)} \qquad (\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0) \qquad (10)$$

Hieruit volgen

$$\int_0^\infty f(\lambda) d\lambda = 1 \qquad (6)$$

$$\int_0^\infty p(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 = 1 \qquad (9, i=1$$

Schrijven we kortheidshalve, als u een willekeurige fct van λ_1 en λ_2 is

$$\mathcal{E} u = \int_0^\infty\int d\lambda_1 d\lambda_2 \; \varphi(\lambda_1, \lambda_2) u(\lambda_1, \lambda_2)$$

dan is verder geëist:

$$\mathcal{E} \lambda_1 = 1 \; (= \mathcal{E}\lambda_2) \qquad (7)$$

hetgeen, als $\mathcal{E}\lambda_1$ eindig is, slechts een normering betekent,

$$\mathcal{E} \lambda_1^2 = 1 + \theta_0 \quad (= \mathcal{E}\lambda_2^2) \qquad (8)$$

waardoor θ_0 gedefinieerd is en het quadraat van de spreiding voorstelt, en

$$\mathcal{E} \lambda_1 \lambda_2 = 1 + \theta_1 \qquad (14)$$

zodat $\rho = \theta_1 / \theta_0$ de correlatiecoefficient van λ_1 en λ_2 is. Deze is ≥ -1 en ≤ 1, dus

$$-\theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_0$$

De fct $f(\lambda)$ is de dichtheid van de zgn "marginale" verdeling, die men krijgt, als men de gehele massa uit het quadrant evenwijdig aan een der coordinaatassen op de andere samenveegt.

---

1) fct = functie

2) wh = waarschijnlijkheid

Nu kan ρ de waarden ± 1 dan en slechts dan aannemen, als de gehele massa op een rechte lijn ligt, die tengevolge van de symmetrie, de lijn $\lambda_1 = \lambda_2$ moet zijn of loodrecht daarop staan. In het eerste geval is $\rho = +1$, dus $\theta_1 = \theta_0$. Neemt men dus $f(\lambda_1)$ willekeurig, mits voldoende aan (7) en (8), als massaverdeling op de λ_1 -as, en verschuift men deze massa // de λ_2 -as tot de lijn $\lambda_1 = \lambda_2$, dan heeft men $\theta_1 = \theta$ verkregen (je geval $p(\lambda_1, \lambda_2) = \delta(\lambda_1 - \lambda_2)$). Daarbij kan θ_0 willekeur groot worden, zoals uit het voorbeeld

$$f(\lambda) = \frac{\nu^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\nu\lambda} \lambda^{\nu-1} \qquad (\nu > 0)$$

blijkt , waar aan (7) en (8) met $\theta_0 = \frac{1}{\nu}$ voldaan is. Als ν zeer klein (> 0) is, wordt dit zeer groot; $f(\lambda)$ gaat dan voor $\lambda \to 0$ naar . Men kan echter ook gemakkelijk voorbeelden geven, waarbij dit niet het geval is. B.v. $f(\lambda) = \frac{c}{a^4 + \lambda^4}$ of $\frac{c\lambda}{a^5 + \lambda^5}$ e.d. met passend gekozen constanten. C en a (die met behulp van Γ-functie kunnen worden uitgedrukt door $\frac{\lambda^4}{a^4 + \lambda^4}$ resp. $\frac{\lambda^5}{a^5 + \lambda^5}$ als nieuwe variabele te nemen).

Is $\rho = -1$, dan ligt de gehele massa op een lijn $\perp$ de lijn $\lambda_1 = \lambda_2$ dus (volgens (7)) op $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$. Dit is je geval $p(\lambda_1, \lambda_2) = \delta(2 - \lambda_1 -$ Dan is ook $f(\lambda) = 0$ voor $\lambda > 2$, en, volgens de symmetrie, $f(\lambda) = f(2 -$ Projecteert men dus een willekeurige t.o.v. $\lambda = 1$ symmetrische verdeling op de λ_1 -as op de lijn $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$, dan krijgt men een verdeling met $\theta_1 = -\theta_2$.. Hierbij is $1 + \theta_1 \geq 0$, dus $\theta_2 \leq 1$, en wel $\theta_2 = 1$, dus $1 + \theta_1 = 0$ dan en slechts dan, als de massa geheel in de punten (2,0) en (0,2) (elk een massa $= \frac{1}{2}$) geconcentreerd is. Men kan deze discontinue verdeling willekeurig nauwkeurig door continue approximeren, d.w.z. θ_1 kan willekeurig dicht bij 0 komen, maar de limiet kan niet met eindige $\varphi(\lambda_1, \lambda_2)$ en $f(\lambda)$ bereikt worden.

II. Het "meest brandende" probleem.: een $\varphi(\lambda_1, \lambda_2)$ bij gegeven $f(\lambda)$ te bepalen, zo, dat aan bovenstaande voorwaarden voldaan is. Dit kan b.v. met behulp van orthogonale polynomia. Indien φ voor $\lambda_p \to \infty$ voldoend snel (b.v. exponentieel) naar 0 gaat, zodat alle momenten bestaan, kan men volgens de gewone orthogonaliseringsmethode een rij polynomia $P_m(\lambda)$ vinden met

$$\int_0^\infty d\lambda\, f(\lambda) P_m(\lambda) P_n(\lambda) = \delta_{mn} = \{^1_0.$$

Nu moet $\varphi(\lambda_1, \lambda_2)$ identiek in λ_2 0 zijn voor iedere λ_1, waarvan $f(\lambda_1) = 0$ is, en symmetrisch. Stelt men nu

$$\frac{\varphi(\lambda_1, \lambda_2)}{f(\lambda_1) f(\lambda_2)} - 1 = \theta_1 \psi(\lambda_1, \lambda_2)$$

of

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \{1 + \theta_1 \psi(\lambda_1, \lambda_2)\},$$

dan is het nodig en voldoende:

1e $\psi(\lambda_1, \lambda_2) = \psi(\lambda_2, \lambda_1)$

2e $\int_0^\infty f(\lambda_2) \psi(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 = 0$ voor alle λ_1 waarvoor $f(\lambda_1) = 0$ is

3e $\iint_0^\infty f(\lambda_1) f(\lambda_2) \psi(\lambda_1, \lambda_2) \lambda_1 \lambda_2 \, d\lambda_1 d\lambda_2 = 1$

4e $1 + \theta_1 \psi(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0$ als $f(\lambda_1) f(\lambda_2) = 0$ is.

Stelt men formeel

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{0}^{\infty}{}_{m,n}\, a_{mn} P_m(\lambda_1) P_n(\lambda_2)$$

dan vereist 1e: $a_{mn} = a_{nm}$, 2e $a_{m0} = a_{0m} = 0$ (d.w.z. men kan $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ nemen), en 3e daar $P_1(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{\sqrt{\Theta_0}}$, dus $\lambda = 1 + \sqrt{\Theta_0}\, P_1(\lambda)$ is:

$$1 = \sum_{1}^{\infty}{}_{mn}\, a_{mn} \iint_0^{\infty} d\lambda_1\, d\lambda_2\, f(\lambda_1) f(\lambda_2)(1 + \sqrt{\Theta_0}\, P_1(\lambda_1))(1 + \sqrt{\Theta_0}\, P_1(\lambda_2)) P_m(\lambda_1) P_n$$

$$= \sum_{1}^{\infty}{}_{m,n}\, a_{mn}\, \Theta_0\, \delta_{m1} \delta_{n1} = \Theta_0\, a_{11}$$

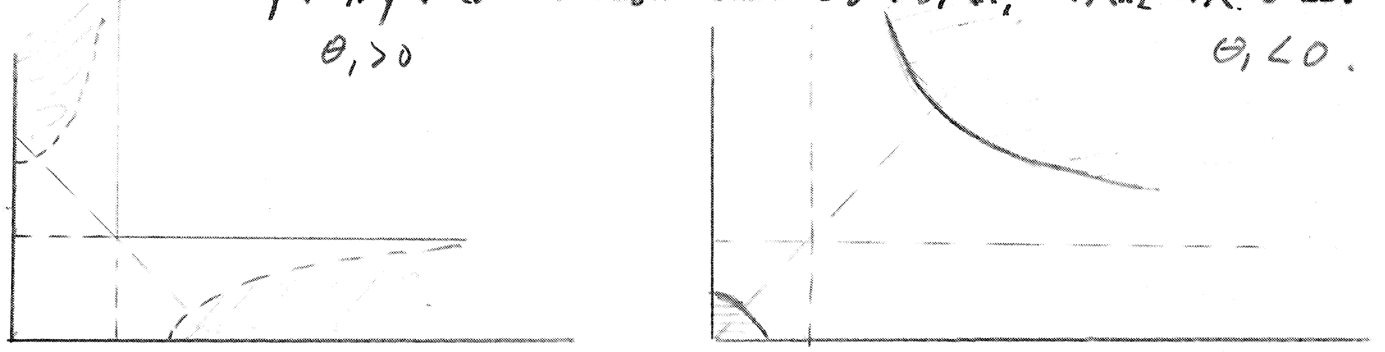
dus $a_{11} = \Theta_0^{-1}$

Het lastigste is de voorwaarde 4e. Wordt niet de algemeenste φ_1 maar slechts een speciale gezocht, dan kan men b.v. $a_{mn} = \delta_{m1} \delta_{n1} \Theta_0^{-1}$ nemen, d.w.z.

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \left\{ 1 + \frac{\Theta_1}{\Theta_0} P_1(\lambda_1) P_1(\lambda_2) \right\} =$$

$$= f(\lambda_1) f(\lambda_2) \left\{ 1 + \frac{\Theta_1}{\Theta_0^2} (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1) \right\}$$

Dan moet dus $f(\lambda_1) f(\lambda_2) = 0$ zijn zodra $\Theta_0^2 + \Theta_1 (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1) < 0$ is.



Is $\Theta_1 = 0$, dan voldoet $\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = f(\lambda_1) f(\lambda_2)$ voor iedere f. aan de gestelde eisen. Is $\Theta_1 > 0$, dan moet $f(\lambda_1) f(\lambda_2) = 0$ zijn in het gearceerde gebied, dus b.v. $f(\lambda) = 0$ voor $\lambda > 1 + \frac{\Theta_0^2}{\Theta_1} = 1 + \frac{\Theta_0}{\rho}$. Door Θ_0 voldoend groot of ρ voldoend klein te nemen, kan men dus verkrijgen, dat $f(\lambda)$ slechts buiten een willekeurig groot maar eindig beginsegment van de λ-as 0 behoeft te zijn. Ook kan men een $f(\lambda)$ nemen, die = 0 is voor $\lambda < C < 1$ en voor $\lambda > 1 + \frac{\Theta_0}{\rho(1-C)}$. Is tenslotte $\Theta_1 < 0$, dan moet $f(\lambda) = 0$ zijn voor $|\lambda - 1| \geqslant \Theta_0 / \sqrt{-\Theta_1} = \sqrt{\frac{\Theta_0}{-\rho}}$
Het rechterlid is $\geqslant \sqrt{\Theta_0}$

De beperking, dat $f(\lambda)$ slechts op eem begrensd gebied > 0 kan zijn, kan opgeheven worden door een term met a_{22} erbij te nemen, die immers willekeurig gekozen kan worden. Men heeft (vgl. b.v. mijn gestencild dictaat Whr pag.275) [1)]

$$P_2(\lambda) = \frac{1}{c}(\sigma^2 \tilde{\lambda}^2 - \tilde{\mu}_3 \tilde{\lambda} - \sigma^4), \text{ waarin } \tilde{\lambda} = \lambda - 1,\ \sigma^2 = \Theta_0,$$

$c = \sigma\sqrt{\sigma^2 \tilde{\mu}_4 - \tilde{\mu}_3^2 - \sigma^6}$, $\tilde{\mu}_3$, $\tilde{\mu}_4$ ~~en~~ 3e en 4e moment t.o.v. $\lambda = 1$.

Of ook: $P_2(\lambda) = \dfrac{\left(\frac{\lambda - 1}{\sqrt{\Theta_0}}\right)^2 - \gamma_1 \left(\frac{\lambda - 1}{\sqrt{\Theta_0}}\right) - 1}{c}$

$c = \Theta_0 \sqrt{\gamma_2 - \gamma_1^2 + 2}$ met $\gamma_2 = \frac{\tilde{\mu}_4}{\Theta_0^2} - 3$, $\gamma_1 = \frac{\tilde{\mu}_3}{\Theta_0^{3/2}}$.

kan willekeurig gekozen worden. Ik had geen tijd na te gaan of men

---

1) Laatste term onder wortelteken moet $-\sigma^6$ i.p.v. $-\sigma^2$ zijn.

$$1 + \theta_1\,\psi(\lambda_1,\lambda_2) = 1 + \rho\,\mu_1\mu_2 + \frac{a_{22}}{c'^2}(\mu_1^2 - \gamma_1\mu_1 - 1)(\mu_2^2 - \gamma_1\mu_2 - 1)$$

met $\mu_1 = \frac{\lambda_1 - 1}{\sqrt{\theta_0}}$, $\mu_2 = \frac{\lambda_2 - 1}{\sqrt{\theta_0}}$ bij passende ρ, γ_1, γ_2 voor $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ positief definiet kan maken.

Ik hoop, dat deze aanwijzingen, zo nodig aangevuld met de in mijn dictaat aangegeven voorbeelden van (overigens alle bekende) orthogonale polynomia, behorende bij verschillende verdelingen, je voldoende materiaal verschaffen om bij gegeven $f(\lambda)$ en ρ tot constructie van fcts φ te komen.

III. Ik kom nu tot je vragen, die op pag.1-2 betrekking hebben. Het beste zijn deze te beantwoorden als men de λ_i beperkt door $|\lambda_i - 1| \leq 1$.

De middelwaarde (ik schrijf $M\varphi_h$ in plaats van $\overline{\varphi_h}$) wordt gedefinieerd door

$$M\varphi_h = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{+N} \varphi_h$$

Zijn nu ω_ν $(1 \leq \nu \leq n)$ willekeurige verschillende reële getallen $\neq 0$ (die men tot $0 \leq \omega_\nu < \pi$ kan beperken [1]) en zijn willekeurige reële getallen (b.v. met $|\alpha_\nu| \leq \pi$) en p_ν willekeurige positieve getallen met $\sum_1^n p_\nu \leq 1$, dan voldoet

$$\lambda_m - 1 = \sum_1^n p_\nu \cos(m\omega_\nu - \alpha_\nu)$$

aan de gestelde eisen. Bij het bewijs wordt gebruik gemaakt van de betrekkingen $M\cos m\omega_\nu = M\sin\omega_\nu = 0$, $M\cos m\omega_\nu \cos m\omega_\mu =$ $= M\sin m\omega_\nu \sin m\omega_\mu = \frac{1}{2}\delta_{\nu\mu}$, $M\cos m\omega_\nu \sin m\omega_\mu = 0$. Daaruit volgt $M\cos(m\omega_\nu - \alpha_\nu)\cos(m\omega_\mu - \beta_\mu) = 0$ voor $\nu \neq \mu$ en $\cancel{M\cos(m\omega_\nu - \alpha_\nu)}$ $M\cos(m\omega_\nu - \alpha_\nu)\cos(m\omega_\nu - \beta_\nu) = \frac{1}{2}\cos(\alpha_\nu - \beta_\nu)$, hetgeen in het bijzonder voor $\beta_\nu = \alpha_\nu \mp k\omega_\nu$ zal worden toegepast. Men krijgt dan achtereenvolgens

$$M(\lambda_m - 1) = 0$$

$$M(\lambda_m - 1)^2 = M\lambda_m^2 - 1 = \tfrac{1}{2}\sum p_\nu^2 = \theta_0$$

$$M(\lambda_m - 1)(\lambda_{m\pm k} - 1) = M\lambda_m\lambda_{m+k} - 1 = \tfrac{1}{2}\sum p_\nu^2 \cos k\omega_\nu = \theta_k.$$

Dit kan gegeneraliseerd worden door in plaats van een eindige som een convergente oneindige reeks te nemen met $\sum_1^\infty p_\nu \leq 1$, $p_\nu > 0$, of ook een integraal:

$$\text{(I)} \qquad \lambda_m - 1 = \int_0^{+\pi} p(\omega)\,d\omega \cos(m\omega - \alpha(\omega)),$$

waarin $\alpha(\omega)$ willekeurig en $p(\omega) \geq 0$ en continu is met $\int_0 p(\omega)\,d\omega \leq 1$ terwijl $p(0) = 0$ is. Dan wordt

$$\theta_k = \frac{1}{2}\int_0^{+\pi} p(\omega)^2\,d\omega \cos k\omega$$

onafhankelijk van $\alpha(\omega)$.

Voorts is $\theta_0 + 2\theta_1 + \ldots 2\theta_K = \sum_{-K}^{+K} \theta_k$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\pi} p(\omega)^2\,d\omega \sum_{-K}^{+K} \cos k\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\pi} p(\omega)^2\,d\omega \,\frac{\sin(K + \frac{1}{2})\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega}$$

---

1) Nemen we $0 \leq \omega_\nu < 2\pi$, dan blijkt dit door verandering van α_ν.

Nu volgt uit de stelling van P. du Bois-Reymond [1] dat het laatste lid voor $k \to \infty$ wegens $\rho(0) = 0$ en de continuiteit tot 0 nadert. Derhalve is

$$(II) \quad \Theta_0 + 2\sum^{\infty} \Theta_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Theta_k = 0$$

Daar hiermede tevens lim = 0 en de convergentie van de reeks bewezen is, geldt ook

$$\lim_{\substack{H \to \infty \\ K \to \infty}} \sum_{-H}^{K} \Theta_k = 0$$

d.w.z. de som van n opeenvolgende λ_i is met een willekeurige daarvan voor $n \to \infty$ asymptotisch ongecorreleerd.

Helaas gelukt het niet, de relatie $\lim \sum_{-K}^{+K} \Theta_k = 0$ te bewijzen, als de $\lambda_m - 1$ door eindige sommen, of zelfs door oneindige reeksen van hetzelfde type voorgesteld zijn, in plaats van de integraal (I). Volgens v.d. Corput, wie ik daarna gevraagd heb, is het vermoedelijk niet mogelijk, zèlfs door speciale keuze van de $p_\lambda > 0$ met $\sum p_\lambda \leq 1$ en de ω_λ te bereiken, dat de gezochte betrekking geldt.

Ook de derde momenten zijn eenvoudig te berekenen. Men vindt, als men eenvoudigheidshalve $\rho(-\omega) = \rho(\omega)$, $\alpha(-\omega) = -\alpha(\omega)$, $\ell = n + i$, $m = n + j$ en $\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2$ stelt, iets als:

$$M(\lambda_n - 1)(\lambda_{n+i} - 1)(\lambda_{n+j} - 1) = M(\lambda_\ell - 1)(\lambda_m - 1)(\lambda_n - 1) =$$
$$= \frac{1}{4}\int_3^{\pi} d\omega_1 \int_0^{+\pi} d\omega_2\, \rho(\omega_1)\rho(\omega_2)\rho(\omega_3) \cos\left(\alpha(\omega_1) + \alpha(\omega_2) + \alpha(\omega_3) + \ell\omega_1 + m\omega_2 + n\omega_3\right)$$

Algemeen vindt men zo, als $n_1, \dots, n_h$ alle een <u>constant</u> verschil met n hebben en n naar ∞ gaat, en $\omega_1 + \dots + \omega_h = 0$ is,

$$M \prod^{h} (\lambda_{n_i} - 1) = \int_0^{\pi} d\omega_1 \dots \int_0^{\pi} d\omega_{h-1} \prod \rho(\omega_i) \cos\left(\sum_1^h (\alpha(\omega_i) + n_i \omega_i)\right)$$

of iets dergelijks.

IV. Het verband tussen de afzonderlijke getallenrijen λ_n van III en de stochastische theorie van I - II kan nu als volgt gelegd worden. Eenvoudigheidshalve houd ik daarbij de onderstelling $|\lambda_i - 1| \leq 1$ aan, en, teneinde de aan het begrip "stochastische fct" verbonden moeilijkheden te vermijden, beschouw ik alleen de in het begin van III aangegeven <u>eindige sommen</u>, waarbij dus <u>niet</u> de betrekking II geldt.

In plaats van een enkele getallenrij λ_n, beschouwt men een vz van dergelijke rijen, waarop een wh-verdeling gegeven is. Dit kan geschieden, doordat men voor de p_λ en de α_λ een wh-verdeling geeft. (Eenvoudigheidshalve blijven we veronderstellen, dat de ω_λ gegeven zijn). Grootheden, die een wh-verdeling bezitten ("stochastische" grootheden) geef ik aan door onderstreping. En wel zullen we onderstellen:

1e Alle $\underline{p}_\nu$ en alle $\underline{\alpha}_\nu$ zijn onafhankelijk

2e Alle $\underline{\alpha}_\nu$ zijn homogeen verdeeld op het interval $(-\pi, +\pi)$

---

1) Vgl. bijv. G. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, 1932, p.227 e.v.

3e Alle $\underline{\rho}_\nu$ zijn $\geqslant$ 0 en $\sum|\underline{\rho}_\nu| \leqslant 1$ 1)

Uit 2e volgt dat voor iedere ν en iedere constante c

$$\mathcal{E}\cos(\underline{\alpha}_\nu + c) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \cos(\alpha + c) = 0$$

is, dus in het bijzonder: $\mathcal{E}\cos(n\omega_\nu - \underline{\alpha}_\nu) = 0$, dus ook, daar

$$\mathcal{E}\underline{\rho}_\nu \cos(n\omega_\nu - \underline{\alpha}_\nu) \text{ wegens 1e } = \mathcal{E}\underline{\rho}_\nu \mathcal{E}\cos(n\omega_\nu - \underline{\alpha}_\nu) = 0 \text{ is:}$$

$$\mathcal{E}\lambda_n - 1 = \mathcal{E}(\underline{\lambda}_n - 1) = 0$$

waarbij λ_n gedefinieerd is door

$$- 1 = \quad \cos(\quad - \quad).$$

Dan is dus ook (spzo) wegens 3e $0 \leqslant \underline{\lambda}_n \leqslant 2$. Daar $\cos\underline{\alpha}_\nu$ wegens de homogeniteit van de verdeling van $\underline{\alpha}_\nu$ dezelfde verdelingsfct heeft als $\cos(\underline{\alpha}_\nu + C)$ voor een willekeurige constante C, is de verdelingsfct van $\underline{\lambda}_n$ onafhankelijk van n.

Voorts is, daar $\mathcal{E}\cos(n\omega_\nu - \underline{\alpha}_\nu)\cos(n\omega_\mu - \underline{\alpha}_\mu) = 0$ is voor $\lambda \neq \mu$ als we $\mathcal{E}\underline{\rho}_\nu^2 = A_\nu$ stellen:

$$\sigma^2_{\underline{\lambda}_n} = \mathcal{E}(\underline{\lambda}_m - 1)^2 = \mathcal{E}\left\{\sum_1^n \underline{\rho}_\nu \cos(n\omega_\nu - \underline{\alpha}_\nu)\right\}^2 =$$
$$= \mathcal{E}\sum_1^n \underline{\rho}_\nu \cos^2(n\omega_\nu - \underline{\alpha}_\nu) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathcal{E}\sum_1^n \underline{\rho}_\nu^2 = \tfrac{1}{2}\sum_1^n A$$

daar voor iedere ν en voor iedere C $\mathcal{E}\cos^2(\underline{\alpha}_\nu + C) = \frac{1}{2}$ en
$\mathcal{E}\underline{\rho}_\nu^2\cos^2(n\omega_\nu - \underline{\alpha}_\nu) = \mathcal{E}\underline{\rho}_\nu^2\,\mathcal{E}\cos^2(n\omega_\nu - \underline{\alpha}_\nu) = \frac{1}{2}\mathcal{E}\underline{\rho}_\nu^2$ is.

Derhalve is $\sigma^2_{\underline{\lambda}_n}$ onafhankelijk van n. Voorts is

$$\mathcal{E}\cos(\underline{\alpha}_\nu + a)\cos(\underline{\alpha}_\nu + b) = \mathcal{E}\cos^2(\underline{\alpha}_\nu + a)\cos(b - a) -$$
$$- \mathcal{E}\cos(\underline{\alpha}_\nu + a)\sin(\underline{\alpha}_\nu + a)\sin(b - a) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos(b - a), \text{ daar } 2(\underline{\alpha}_\nu + a) \text{ homogeen op } (-2\pi, +2\pi)$$

verdeeld is, zodat de tweede term de verwachting 0 heeft.

Derhalve is

$$\sigma_{\underline{\lambda}_n\underline{\lambda}_m} = \mathcal{E}(\underline{\lambda}_n - 1)(\underline{\lambda}_m - 1) = \mathcal{E}\left\{\sum_1^n \underline{\rho}_\nu \cos(n\omega_\nu - \underline{\alpha}_\nu)\right\}\left\{\sum_1^n \underline{\rho}_\mu \cos(m\omega_\mu - \underline{\alpha}_\mu)\right\}$$
$$= \mathcal{E}\sum_1^n \underline{\rho}_\nu^2 \cos(n\omega_\nu - \underline{\alpha}_\nu)\cos(m\omega_\nu - \underline{\alpha}_\nu) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathcal{E}\sum_1^n \underline{\rho}_\nu^2 \cos(n - m)\omega_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_1^n A_\nu \cos(n - m)\omega_\nu$$

In het bijzonder is

$$\sigma_{\underline{\lambda}_n, \lambda_{n+k}} = \tfrac{1}{2}\sum_1^n A_\nu \cos k\omega_\nu$$

onafhankelijk van n.

Ook de empirische covarianties θ_k worden nu stochastisch:

$$\underline{\theta}_k = \tfrac{1}{2}\sum \underline{\rho}_\nu^2 \cos k\omega_\nu$$

met

$$\mathcal{E}\underline{\theta}_k = \tfrac{1}{2}\sum A_\nu \cos k\omega_\nu$$

---

1) T.w. voor alle waarden die de ρ_λ "werkelijk" kunnen aannemen, dwz de ongelijkheden gelden met een wh = 1, waarvoor ik ook schrijf:s pr (= salva probabilitate 0)

Men kan b.v. concluderen, dat θ_1 dan en slechts dan met grote wh dich[t] bij -1 zal liggen, als één der ω_ν dicht bij π ligt, de bijbehorende met grote wh dicht bij 1, zodat alle andere p_ν slechts weinig van 0 kunnen verschillen. (Dit laat zich gemakkelijk quantitatief preciseren).

Voorts zien we, dat de limiet θ_κ aan het "tijdgemiddelde $\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{+N}(\lambda_n - 1)$ slechts dan spr 0 met de verwachtingscovariante $= \mathcal{E}\theta_\kappa$ overeenstemt, als de p_ν alle slechts één waarde spr 0 kunnen aannemen, d.w.z. als niet de amplituden p_ν, maar slechts de fasen α_ν stochastisch karkater hebben. Zodra echter minstens één der p_ν een positieve spreiding bezit, zal dit ook met θ_κ het geval zijn (tenzij juist de overeenkomstige $\cos k\omega_\nu$ nul wordt), d.w.z. er is dan een positieve wh, dat de limiet van het tijdsgemiddelde van zijn verwachting afwijkt.

Neem b.v. $m=1$, en laat de indices ν weg. Zij b.v. p homogeen op (0,1) verdeeld. Dan is $\lambda_n - 1 = p\cos(n\omega - \alpha)$; $\mathcal{E}\theta_\kappa = \sigma_{\lambda_n, \lambda_{n+\kappa}} = \frac{1}{2}(\mathcal{E}p^2)\cos \kappa\omega = \frac{1}{6}\cos\kappa\omega$; $\theta_\kappa = \frac{1}{2}p^2\cos\kappa\omega$. Tenzij dus $\omega = \frac{\pi}{2\kappa}$ is, is evenzo om zijn gemiddelde verdeeld als p^2, waarvande verdelingsdichtheid $f_{p^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ is.

Is daarentegen $p = \mathcal{E}p$ (constant), dus $\mathcal{E}p_\lambda^2 = (\mathcal{E}p_\lambda)^2$, dan zijn voor $n=1$ $\lambda_n - 1$ onderling afhankelijke stochastische oscillatoren, waarvan elke volgende t.o.v. de vorige een fase-verschil ω heeft. Heeft λ_0 een bepaalde waarde λ_0, dan kan α twee waarden α_0 of $-\alpha_0$ aannemen, waarbij $\lambda_0 - 1 = p\cos\alpha_0$ is. Dan is $\lambda_1 - 1 = p\cos(\omega - \alpha_0) = (\lambda_0 - 1)\cos\omega + \sqrt{p^2-(\lambda_0-1)^2}\,\sin\omega$ of $= p\cos(\omega + \alpha_0) = (\lambda_0 - 1)\cos\omega - \sqrt{p^2-(\lambda_0-1)^2}\,\sin\omega$ (als sin α_0 0 gekozen wordt). De verdeling in het (λ_0, λ_1)-vlak is niet continu, maar de massa is geheel op de ellips

$$\tilde{\lambda}_0^2 - 2\tilde{\lambda}_0\tilde{\lambda}_1\cos\omega + \tilde{\lambda}_1^2 = p^2\sin^2\omega$$

gelegen ($\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0 - 1$, $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 - 1$), en wel met betrekking tot de parameter α (niet tot de booglengte te) homogeen. Voor $\omega = \frac{\pi}{2}$ gaat in deze in een cirkel $\tilde{\lambda}_0^2 + \tilde{\lambda}_1^2 = p^2$ over.

Kan daarentegen p tussen twee een weinig van $\mathcal{E}p\ (>0)$ gelegen waarden variëren, dan omtstaat in het (λ_1, λ_2)-vlak een continue wh-verdeling, geheel gelegen binnen twee concentrische ellipsen. Er is dan ee[n] bepaalde overgangswh, die een dichtheid bezit, die gemakkelijk te berekenen is. En wel kan een gegeven λ_0 in een λ_1 overgaan, die in twee in het algemeen gescheiden intervallen ligt.

Prof. Dr. D. van Dantzig