//

Archief

WA

VERENIGING VOOR STATISTIEK

GEVESTIGD TE 'S-GRAVENHAGE - SECRETARIAAT: POSTBUS 27 - RIJSWIJK (Z.H.) - GIRO 202091

S30

Antwoord aangehecht

De Weledele Heer J. HEMELRIJK
Weesperzijde 34 bv
A m s t e r d a m - O.

UW KENMERK: | UW DATUM: | ONS KENMERK: 911.En/MV | RIJSWIJK (Z.H.) 20 December 1949

Zeer geachte Heer Hemelrijk,

Zaterdag j.l. spraken wij nog even over het testen van dubbele dichotomiëen. De bezwaren welke U toen had tegen de test die ik aan Prof.van Dantzig voorstelde, waren me op dat moment niet geheel duidelijk en ik heb de logische achtergrond van Uw bezwaren sindsdien niet voor mezelf kunnen reconstrueren. Aangezien ik hier graag mee "in het reine" zou willen komen geef ik U hierbij in het kort nog even de gedachtengang weer aan de hand van een concreet voorbeeld.
Stel dat we het volgende geval hebben:

	c	n - c	n
a	5	26	31
b	6	10	16
	11	36	47

We veronderstellen nu dat a. een steekproef is uit een universum met een constante kans p_a en b een steekproef uit een universum met een constante kans p_b. Ons steekproefresultaat geeft $c_a/n_a < c_b/n_b$, dit suggereert: $p_a < p_b$. We stellen nu de nulhypothese $p_a \geqslant p_b$ en wensen te onderzoeken of het gegeven resultaat onder deze omstandigheden een redelijke kans heeft om op te treden. Wij veronderstellen een binomiaal verdeeld universum en bepalen nu een waarde p_a' zodanig dat de kans op 5 of minder uit 31 = $\sqrt{\alpha}$. We bepalen eveneens de waarde p_b' z.d.d. de kans op 6 of meer uit 16 = $\sqrt{\alpha}$.
Kiezen we $\alpha = 0.05$ dan vinden we $p_a' = 0.24$ en $p_b' = 0.26$.
De redenering is nu de volgende:

1. Indien bij constante kansen en binomiaal verdeeld universum $p_a = p_a'$ en $p_b = p_b'$ dan is de kans op 5 of minder uit 31 gecombineerd met 6 of meer uit 16 gelijk aan 0.05.
2. Deze kans wordt kleiner voor $p_a'' > p_a'$ en/of $p_b'' < p_b'$. Γ
3. Behoudens een waarschijnlijkheid < 0.05 is dus in het gegeven geval $p_a < p_b$. (niet natuurlijk $p_a < 0,24$ en/of $p_b > 0,26$)

Ik zou het zeer op prijs stellen indien U nog even gelegenheid zoudt kunnen vinden om aan te geven tegen welk punt in deze redenering U bezwaren hebt.
Bij voorbaat hartelijk dank voor Uw hulp.

Met vriendelijke groeten,

Γ Deze kans ~~wordt~~ is eveneens kleiner voor andere waarden van p_a'' en p_b'' indien geldt $p_a'' \geq p_b''$

S30

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Tweede Boerhaavestraat 49.

Amsterdam, 24 December 1949.

De Weled. Heer J.H. Enters,
Postbus 27,
<u>R i j s w i j k</u> . (Z.H.)

Geachte Heer Enters,

Zaterdag had ik erg weinig tijd, zodat ik mij in de haast blijkbaar niet duidelijk genoeg heb uitgedrukt. Ik zal nu trachten, dit, n.a.v. Uw brief, wel te doen. Mijn bezwaren richten zich op twee punten van Uw redenering, die ik apart zal behandelen.

Ten eerste lijkt het nu niet juist de nul-hypothese ($p_a \geqq p_b$) te stellen naar aanleiding van het gevonden resultaat $c_a/n_a < c_b/n_b$. Immers, indien U $c_a/n_a > c_b/n_b$ gevonden had, zoudt U (dit maak ik tenminste uit Uw formulering op) de hypothese $p_a \leqq p_b$ ter toetsing hebben gesteld. Dit heeft ten gevolge, dat de kans op ten onrechte verwerping van de hypothese $p_a = p_b$ gelijk is aan ongeveer 2 maal de berekende onbetrouwbaarheidsdrempel. ') Om dit nader te preciseren en niet met de verdere redenering van het door U gestelde geval in de knoop te raken, neem ik een eenvoudig voorbeeld, waar een analoog probleem zich voordoet. Stel U werpt N maal met een munt en verkrijgt ν maal kruis ($N-\nu$ maal munt). Voor het toetsen van de zuiverheid van de munt kunt U de tweezijdige kritieke zône ($\nu \leqq \nu_0$ of $\nu \geqq \nu_1$) gebruiken, d.w.z. indien $\nu \leqq \nu_0$ of $\nu \geqq \nu_1$ is, verwerpt U de hypothese $p = \frac{1}{2}$ (p = kans op kruis), waarbij ν_0 en ν_1, zo zijn gekozen, dat, als $p = \frac{1}{2}$ is:

$$P[\nu \leqq \nu_0] = P[\nu \geqq \nu_1] = \tfrac{1}{2}\alpha \qquad \text{is}.$$

Indien U nu echter naar aanleiding van de uitkomst, in geval $\nu < \frac{1}{2}N$ is de hypothese $p \geqq \frac{1}{2}$ gaat toetsen, betekent dit, dat U als kritieke zône neemt: $\nu \leqq \nu_0'$ met

$$P[\nu \leqq \nu_0'] = \alpha \qquad \text{als } p = \tfrac{1}{2} \text{ is,}$$

waarbij $\nu_0' > \nu_0$ is. Zoudt U echter $\nu > \frac{1}{2}N$ gevonden hebben, dan zoudt U, op analoge wijze, als kritieke zône gevonden hebben $\nu \geqq \nu_1'$ met

$$P[\nu \geqq \nu_1'] = \alpha \qquad \text{als } p = \tfrac{1}{2} \text{ is,}$$

waarbij $\nu_1' < \nu_1$. Is nu echter inderdaad $p = \frac{1}{2}$, dan is dus de kans op ten onrechte verwerpen van deze hypothese gelijk aan 2α in plaats van α. Aan deze kwestie hebben van der Vaart en ik een vrij uitvoerige aandacht besteed in een artikeltje, dat wij naar Statistica hebben gestuurd, maar waarvan de plaatsing nog onzeker is. Het manuscript is momenteel in bezit van de heer Hamaker. U zoudt het, indien bovenstaande uiteenzetting nog nadere toelichting behoeft, misschien even aan hem te leen kunnen vragen.

Td

Tw

') "Ongeveer" is hier ingevoegd, daar men bij discrete verdelingen de onbetrouwbaarheidsdrempel niet vrij kiezen kan; dit laat ik verder echter buiten beschouwing.

Overigens is het wel juist een éénzijdige kritieke zône te kiezen, indien men, op andere gronden dan de uitkomst van het experiment, weet, dat $p > \frac{1}{2}$ (of $p < \frac{1}{2}$), in Uw geval $p_a > p_b$, zeker niet mogelijk is. Daarom zal ik bij de bespreking van het tweede bezwaar deze onderstelling maken, waardoor dan voor de verdere redenering het eerste bezwaar vervalt.

Het tweede bezwaar is gericht tegen de aan punt 2 van Uw redenering toegevoegde voetnoot, die, in een formule omgezet, luidt:

$$\underset{p_a, p_b}{\mathrm{Max}}\ P[c_a \leq 5 \text{ en } c_b \geq 6 \mid p_a \geq p_b] \leq \alpha$$

waarin het achter de streep geplaatste $p_a \geq p_b$ betekent, dat de kans moet worden berekend onder deze voorwaarde. Deze formule heeft U niet bewezen en het schijnt mij toe, dat zij onjuist moet zijn, hetgeen ik echter slechts indirect kan duidelijk maken, door aan te tonen, dat bij toepassing van Uw methode de onbetrouwbaarheidsdrempel $> \alpha$ is. Dit kan nl. als volgt worden ingezien: De grootheden $\underline{c}_a$ en $\underline{c}_b$ zijn statistische grootheden, waarvoor geldt:

$$P[\underline{c}_a \leq 5 \mid p_a] = \varepsilon(p_a)$$

als p_a de "ware" kans op c bij experiment a voorstelt en $\varepsilon(p_a)$ een functie van p_a is,

$$P[\underline{c}_b \geq 6 \mid p_b] = \varepsilon(p_b)$$

als p_b de "ware" kans op c bij experiment b is en $\varepsilon(p_b)$ een functie van p_b is.
Verder geldt dan:

$$\varepsilon(p_a') = \sqrt{\alpha} \qquad\qquad \varepsilon(p_b') = \sqrt{\alpha}$$

waarin p_a' en p_b' de door U aangegeven getallen zijn. Indien U de hele proef herhaalt, dus alle mogelijke uitkomsten beschouwt, worden, bij constante α, de getallen p_a' en p_b' statistische grootheden, waarvoor (overeenkomstig Uw punten 1 en 2) geldt:

$$P[\underline{p}_a' < p_a] = P[\underline{p}_b' > p_b] = \sqrt{\alpha}$$

als weer p_a en p_b de "ware" kansen zijn. Stel nu, dat de te toetsen hypothese juist is en wel, dat in het bijzonder $p_a = p_b = p$ is, dan is

$$\eta = P[\underline{p}_a' < \underline{p}_b' \mid p]$$

de kans op ten onrechte verwerping van de hypothese. Nu is echter

$$\eta = P[\underline{p}_a' < p < \underline{p}_b' \mid p] + P[p < \underline{p}_a' < \underline{p}_b' \mid p] + P[\underline{p}_a' < \underline{p}_b' < p \mid p]$$

en hierin is volgens het bovenstaande

$$P[\underline{p}_a' < p < \underline{p}_b'] = (\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$$

De twee andere termen echter zijn > 0, zodat de onbetrouwbaarheidsdrempel $> \alpha$ is. Die twee termen zijn moeilijk te schatten; wel kan men gemakkelijk inzien, dat ze beide $< \sqrt{\alpha}(1 - \sqrt{\alpha})$ zijn, maar deze schatting is te grof om van veel nut te zijn.

~~Ik hoop U hiermee mijn bezwaren duidelijker uiteengezet te hebben~~. Het schijnt mij toe, dat berekening van

$$\eta = \max_p P[\underline{c}_a \leq 5 \text{ en } \underline{c}_b \geq 6 \mid p_a = p_b = p]$$

mijn tweede bezwaar zou opheffen. Deze η zou dan, indien bekend is, dat $p_a > p_b$ onmogelijk is, de onbetrouwbaarheidsdrempel zijn. Indien U echter over de p_a en p_b in het geheel geen a priori inlichtingen bezit, zou ook het eerste bezwaar nog opgeheven moeten worden Grofweg zou dit dan kunnen gebeuren door de onbetrouwbaarheidsdrempel op 2η te stellen.

Ik hoop U hiermede duidelijker dan j.l. Zaterdag te hebben ingelicht en ben tot nadere gedachtenwisseling ten alle tijde bereid.

Met vriendelijke groeten,

J. Hemelrijk.
Stat.Afdeling